

Fizy-ka

dla szkół wyższych

Tom 1

Fizyka dla szkół wyższych
Tom I

GŁÓWNI AUTORZY

Samuel J. Ling, Truman State University
Jeff Sanny, Loyola Marymount University
William Moebs



openstax POLSKA™

Katalyst Education
ul. Grzybowska 5a
00-132 Warszawa
www.openstax.pl

Adaptacja podręcznika została sfinansowana z grantu The Brian D. Patterson USA-International Foundation.

ISBN-13 wersji PDF **978-83-948838-1-2**
Rok pierwszej publikacji **2018**

Spis treści

PRZEDMOWA

Podręcznik *Fizyka dla szkół wyższych* powstał po to, by udostępnić studentom za darmo materiały dydaktyczne spełniające najwyższe standardy akademickie. Podręcznik stworzony został przez OpenStax, fundację non-profit działającą przy Rice University w Stanach Zjednoczonych.

Przedmowa do wydania polskiego

Wierzymy, że przyszłość edukacji to swobodny i wygodny dostęp do najlepszych treści, równy dla wszystkich. Fundacja OpenStax realizuje tę misję, tworząc wysokiej jakości podręczniki i udostępniając je studentom i wykładowcom. W ramach projektu opublikowano ponad 20 darmowych podręczników z różnych dziedzin nauki.

Fizyka dla szkół wyższych to polska adaptacja trzytomowej publikacji *University Physics*, wydanej jesienią 2016 roku. To najbardziej nowatorski i aktualny podręcznik fizyki na polskim rynku. Publikacja przygotowana została przez OpenStax Polska we współpracy z siedmioma czołowymi uczelniami w kraju i jest odpowiedzią na rosnące zapotrzebowanie na treści mające wysokie walory dydaktyczne, a zarazem atrakcyjne dla współczesnych studentów. Otwarta licencja Creative Commons Uznanie autorstwa 4.0 Międzynarodowe (CC BY 4.0) (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl) gwarantuje całkowicie bezpłatny dostęp i niemal nieograniczone możliwości korzystania z publikacji.

Jedną z największych, w naszym przekonaniu, zalet podręcznika jest jego wersja cyfrowa. Plik w formacie PDF można pobrać ze strony OpenStax.org (http://openstax.org) . Aby jednak wykorzystać pełny potencjał, jaki daje otwarta licencja i nowe technologie informatyczne, udostępniamy tę publikację przede wszystkim na platformie OpenStax CNX (http://cnx.org) , którą specjalnie w tym celu przystosowaliśmy do obsługi języków innych niż angielski i przetłumaczyliśmy na język polski. Platforma, oprócz zapewnienia wygodnego dostępu do podręcznika, umożliwia również łatwą adaptację jego treści do indywidualnych potrzeb. Jeśli więc pomyślicie Państwo o wykorzystaniu fragmentów publikacji do przygotowania własnych materiałów, nie ma żadnych przeszkód prawnych ani technicznych, aby to uczynić.

Podziękowania

W pracę nad podręcznikiem zaangażowanych było 52 pracowników naukowych z siedmiu instytucji akademickich. Kilka osób z tego grona okazało nam szczególną pomoc, za co bardzo dziękujemy:

prof. dr hab. inż. Zbigniew Kąkol, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

prof. PWr dr hab. inż. Włodzimierz Salejda, Politechnika Wrocławska

prof. UZ dr hab. Maria Przybylska, Uniwersytet Zielonogórski

dr inż. Radosław Strzałka, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

dr Brygida Mielewska, Politechnika Gdańska

prof. UZ dr hab. Jarosław Piskorski, Uniwersytet Zielonogórski

Adaptacja podręcznika została sfinansowana z grantu The Brian D. Patterson USA-International Foundation. Serdecznie dziękujemy.

O projekcie OpenStax

OpenStax to fundacja charytatywna z siedzibą w Rice University w USA. Misją fundacji jest ułatwianie studentom dostępu do edukacji. Pierwszy otwarty podręcznik fundacja wydała w 2012 roku. Od tamtej pory jej oferta podręczników rozrosła się do ponad 20 pozycji. Korzystają z nich setki tysięcy studentów na całym świecie. Opracowane w ramach projektu oprogramowanie pomagające zwiększyć efektywność uczenia się poprzez adaptacyjną personalizację ścieżek edukacyjnych jest obecnie w fazie pilotażu w szkołach podstawowych i średnich. OpenStax realizuje swoją misję dzięki hojności innych organizacji charytatywnych. Darowizny te oraz usługi i zasoby otrzymywane na preferencyjnych warunkach od innych partnerów pozwalają nam pokonywać najczęściej występujące bariery utrudniające osiągnięcie sukcesu zarówno studentom jak i wykładowcom.

O zasobach OpenStax

Dostępne do modyfikacji

Fizyka dla szkół wyższych jest udostępniana na licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 4.0 Międzynarodowe (CC BY 4.0) (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl) , która zezwala każdemu na dowolne rozpowszechnianie, modyfikowanie i rozszerzanie treści pod warunkiem uznania autorstwa OpenStax i osób podpisanych pod oryginałem.

Jako że niniejszy podręcznik jest udostępniany na otwartej licencji, możecie Państwo wyjąć z tej publikacji tylko te rozdziały lub fragmenty, których potrzebujecie do zajęć. Stwórzcie własne treści modyfikując istniejące i układając je w dowolnej kolejności. Następnie prześlijcie studentom bezpośredni odnośnik do swojej publikacji na platformie OpenStax CNX (http://cnx.org) .

Platforma OpenStax CNX istnieje od 1999 roku i ma zapewnione stabilne finansowanie. Opublikowano na niej dziesiątki tysięcy zasobów edukacyjnych w wielu językach.

Istnieje także możliwość wydrukowania dostosowanej wersji podręcznika OpenStax za pośrednictwem usługi aerSelect. Dzięki niej można zaoferować studentom publikację w postaci niedrogiej, oprawionej książki lub e-booka. Odnośnik do usługi aerSelect znajduje się na stronie podręcznika na OpenStax.org (http://openstax.org) .

Zgłaszanie błędów

Wszystkie podręczniki OpenStax przechodzą rygorystyczny proces recenzji. Mimo to niektóre błędy mogły zostać przeoczone, co zdarza się w każdej profesjonalnej publikacji. Nasze książki są cyfrowe, dlatego możemy uaktualniać je, ilekroć zachodzi taka konieczność. Jeśli chcesz zaproponować poprawkę, zgłoś ją korzystając z odnośnika na stronie podręcznika na OpenStax.org (http://openstax.org) . Wszystkie zgłoszone poprawki są oceniane przez ekspertów. OpenStax kieruje się polityką otwartości również w tej dziedzinie, dlatego na stronie podręcznika można znaleźć pełną listę zgłoszonych poprawek.

Format

Niniejsza publikacja jest dostępna za darmo na stronie internetowej i w formacie PDF. Podręcznik zostanie również wydrukowany w małym nakładzie i będzie można go znaleźć w bibliotekach uczelni partnerskich.

O podręczniku

Fizyka dla szkół wyższych, podobnie jak podręcznik *University Physics*, na którym się opiera, przeznaczona jest dla zajęć z fizyki ogólnej z elementami analizy matematycznej, trwających 2-3 semestry. Treść dopasowano pod względem zakresu i kolejności do praktyki dydaktycznej większości uczelni prowadzących takie zajęcia. Wiedza fizyczna jest fundamentem we wszystkich zawodach związanych z naukami ścisłymi, przyrodniczymi, medycznymi i technicznymi. Niniejsza publikacja pomoże studentom poznać kluczowe pojęcia fizyczne i zrozumieć, jak te pojęcia odnoszą się do ich własnego życia oraz otaczającej ich rzeczywistości.

Z uwagi na rozległy zakres materiału, aby ułatwić korzystanie z podręcznika, podzielono go na trzy tomy.

Zakres materiału

Zakres wiedzy prezentowanej w podręczniku *Fizyka dla szkół wyższych* został dopasowany do typowych zajęć akademickich z fizyki ogólnej prowadzonych przez 2-3 semestry. Staraliśmy się zaprezentować fizykę jako dziedzinę ciekawą i zrozumiałą, zachowując zarazem niezbędny rygor matematyczny. Mając to na względzie, treść niniejszego podręcznika została ułożona w logicznej kolejności, od kwestii podstawowych do bardziej zaawansowanych, odwołuje się do wiedzy, jaką studenci uzyskali z dotychczasowych części, i podkreśla powiązania między zagadnieniami, a także między teorią a praktyką. Celem każdego podrozdziału jest nie tylko nauczenie pojęć, ale także zbudowanie umiejętności posługiwania się nimi – umiejętności, która przyda się studentom w przyszłej pracy zawodowej lub dalszej nauce. Układ i metodologia podręcznika powstały we współpracy z doświadczonymi wykładowcami fizyki.

TOM I

Część 1: Mechanika

- Rozdział 1: Jednostki i miary
- Rozdział 2: Wektory
- Rozdział 3: Ruch prostoliniowy
- Rozdział 4: Ruch w dwóch i trzech wymiarach
- Rozdział 5: Zasady dynamiki Newtona
- Rozdział 6: Zastosowania zasad dynamiki Newtona

Rozdział 7: Praca i energia kinetyczna

Rozdział 8: Energia potencjalna i zasada zachowania energii

Rozdział 9: Pęd i zderzenia

Rozdział 10: Obroty wokół stałej osi

Rozdział 11: Moment pędu

Rozdział 12: Równowaga statyczna i sprężystość

Rozdział 13: Grawitacja

Rozdział 14: Mechanika płynów

Część 2: Fale i akustyka

Rozdział 15: Drgania

Rozdział 16: Fale

Rozdział 17: Dźwięk

TOM II

Część 1: Termodynamika

Rozdział 1: Temperatura i ciepło

Rozdział 2: Kinetyczna teoria gazów

Rozdział 3: Pierwsza zasada termodynamiki

Rozdział 4: Druga zasada termodynamiki

Część 2: Elektryczność i magnetyzm

Rozdział 5: Ładunki elektryczne i pola

Rozdział 6: Prawo Gaussa

Rozdział 7: Potencjał elektryczny

Rozdział 8: Pojemność elektryczna

Rozdział 9: Prąd i rezystancja

Rozdział 10: Obwody prądu stałego

Rozdział 11: Siła i pole magnetyczne

Rozdział 12: Źródła pola magnetycznego

Rozdział 13: Indukcja elektromagnetyczna

Rozdział 14: Indukcyjność

Rozdział 15: Obwody prądu zmiennego

Rozdział 16: Fale elektromagnetyczne

TOM III

Część 1: Optyka

Rozdział 1: Natura światła

Rozdział 2: Optyka geometryczna i tworzenie obrazu

Rozdział 3: Interferencja

Rozdział 4: Dyfrakcja

Część 2: Fizyka współczesna

Rozdział 5: Teoria względności

Rozdział 6: Fotony i fale materii

Rozdział 7: Mechanika kwantowa

Rozdział 8: Struktura atomu

Rozdział 9: Fizyka materii skondensowanej

Rozdział 10: Fizyka jądrowa

Rozdział 11: Fizyka cząstek elementarnych i kosmologia

Konstrukcja metodyczna

W całym podręczniku *Fizyka dla szkół wyższych* zagadnienia prezentowane są zarówno w sposób klasyczny, z uwzględnieniem historycznych metod i technik, jak i w aspekcie współczesnych zastosowań. Większość rozdziałów zaczyna się od obserwacji lub doświadczeń, które umieszczają materiał w kontekście praktycznym. Sposób prezentacji materiału i logikę wywodu oparto na wieloletnim doświadczeniu zebranym przez wykładowców fizyki. Zastosowane w podręczniku podejście, równoważące klarowność wyjaśnień z naukowym rygorem, sprawdziło się w trakcie ich pracy ze studentami. W tekście zamieszczono odnośniki do wcześniejszych treści, aby studenci mogli łatwo przypominać sobie poruszane zagadnienia, a potem wracać do bieżącego wywodu, co ułatwia zrozumienie powiązań między tematami. Najważniejsze postacie i eksperymenty historyczne omawiane są w głównym tekście, a nie w ramkach lub na marginesie, aby nie utrudniać czytelnikowi budowania intuicyjnego rozumienia prezentowanych kwestii. Najważniejsze pojęcia, definicje i wzory wyeksponowano w tekście i przytoczono je ponownie w podsumowaniu na końcu każdego rozdziału. Przykłady i zdjęcia starano się dobrać w taki sposób, aby w miarę możliwości dotyczyły współczesnych zastosowań fizyki lub nowoczesnych technologii znanych studentom z codziennego życia, od smartfonów przez internet po nawigację satelitarną.

Sprawdzanie wiedzy

Rozwiązania przykładowych zadań zamieszczonych w każdym rozdziale zazwyczaj podzielone są na trzy części: *Strategia rozwiązania*, *Rozwiązanie* i *Znaczenie*, które pokazują, jak podejść do zadania, jak przekształcić równania i wreszcie jak sprawdzić i zinterpretować wynik. Dodatkowo pod przykładami często znaleźć można sekcję **Sprawdź, czy rozumiesz**, która zawiera pytania i odpowiedzi pomagające studentom utrwalić sobie kluczowe wnioski z przykładu. Sekcja **Strategie rozwiązywania zadań** zamieszczona w każdym rozdziale rozbija sposoby podchodzenia do różnych problemów na łatwe do zapamiętania kroki. Na końcu każdego rozdziału znajduje się również zbiór różnorodnych zadań umożliwiający sprawdzenie zdobytej wiedzy.

Pytania nie wymagają żadnych obliczeń. Sprawdzają, czy student rozumie najważniejsze pojęcia.

Zadania przypisane do każdego podrozdziału sprawdzają umiejętność podejścia do problemu i zastosowania teorii do praktycznych sytuacji.

Zadania dodatkowe wymagają zastosowania wiedzy z całego rozdziału, zmuszając studentów do wybrania właściwych równań i pojęć. Niektóre z tych zadań, opisane jako **Nieracjonalne wyniki**, żądają od studenta oceny wiarygodności uzyskanych wyników i wyjaśnienia, dlaczego są nieracjonalne i które z założeń mogły nie być prawidłowe.

Zadania trudniejsze rozszerzają problematykę o intrygujące lecz trudne sytuacje.

Odpowiedzi do wszystkich zadań umieszczono na końcu podręcznika w sekcji **Rozwiązania zadań**.

Materiały dodatkowe

Zasoby dla studentów i wykładowców

Na stronie OpenStax.org (http://openstax.org) można znaleźć materiały dodatkowe w języku angielskim, przeznaczone zarówno dla studentów jak i wykładowców — między innymi przewodniki użytkownika, slajdy w formacie PowerPoint, a także arkusze odpowiedzi i rozwiązań dla prowadzących zajęcia i studentów. Aby uzyskać dostęp do materiałów dla wykładowców, należy posiadać zweryfikowane konto instruktorskie, o które można poprosić przy logowaniu na OpenStax.org (http://openstax.org) . Zasoby te są ściśle dopasowane do podręcznika.

Oferta partnerów OpenStax

Partnerzy projektu OpenStax pomagają dostarczać wysokiej jakości zasoby edukacyjne, w cenie dostępnej dla wszystkich studentów i wykładowców. Ich narzędzia zostały zintegrowane z podręcznikami dostępnymi w języku angielskim. Aby uzyskać dostęp do zasobów i usług oferowanych przez naszych partnerów, odwiedź stronę danego podręcznika na OpenStax.org (http://openstax.org) .

Autorzy *Fizyki dla szkół wyższych*

Openstax Polska

Podręcznik *Fizyka dla szkół wyższych* powstał w ramach projektu OpenStax Polska fundacji Katalyst Education. Więcej informacji: OpenStax.pl (http://openstax.pl) .

Misją fundacji Katalyst Education, opartą na filozofii Otwartych Zasobów Edukacyjnych, jest wyrównywanie szans wszystkich uczniów w Polsce, poprzez tworzenie cyfrowych narzędzi edukacyjnych i dostarczanie usług wspierających optymalne ich wykorzystanie.

Katalyst Education

Grzybowska 5a

00-132 Warszawa

Polska

www: katalysteducation.org (http://katalysteducation.org)

Katalyst Education jest częścią grupy White Star Foundations w Polsce. Więcej informacji: whitestarfoundations.org (http://whitestarfoundations.org) .

Tłumacze i autorzy adaptacji

prof. UW dr hab. Adam Bednorz, Uniwersytet Warszawski

lic. Anna Błachowicz, Politechnika Śląska

dr hab. Tomasz Błachowicz, Politechnika Śląska

dr inż. Beata Bochentyn, Politechnika Gdańska

mgr Juliusz P. Braun, Uniwersytet Warszawski

dr Bartosz Brzostowski, Uniwersytet Zielonogórski

dr inż. Roman Bukowski, Politechnika Śląska

prof UAM dr hab. Gotard Burdziński, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

inż. Robert Chudek, Politechnika Warszawska

dr hab. Roman Gołębiewski, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

prof. UAM dr hab. Krzysztof Grygiel, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

dr inż. Piotr Grygiel, Politechnika Gdańska

prof. dr hab. Marian Grynberg, Uniwersytet Warszawski

mgr Katarzyna Gwóźdź, Politechnika Wrocławska

dr hab. inż. Grzegorz Harań, Politechnika Wrocławska

dr hab. inż. Andrzej Janutka, Politechnika Wrocławska

dr Wojciech Kamiński, Uniwersytet Wrocławski

dr hab. Dobrosława Kasprowicz, Politechnika Poznańska

prof. dr hab. inż. Zbigniew Kąkol, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

prof. dr hab. Adam Lipowski, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

prof. dr hab. inż. Paweł Machnikowski, Politechnika Wrocławska

prof. dr hab. Jacek Majewski, Uniwersytet Warszawski

prof. UWr dr hab. Leszek Markowski, Uniwersytet Wrocławski

dr inż. Aleksandra Mielewczyk-Gryń, Politechnika Gdańska

dr Brygida Mielewska, Politechnika Gdańska

dr inż. Tadeusz Miruszewski, Politechnika Gdańska

prof. UZ dr hab. Jarosław Piskorski, Uniwersytet Zielonogórski

dr Krzysztof Pomorski, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

prof. dr hab. Ewa Popko, Politechnika Wrocławska

prof. dr hab. inż. Andrzej Radosz, Politechnika Wrocławska

dr hab. Tomasz Runka, Politechnika Poznańska

prof. PWr dr hab. inż. Włodzimierz Salejda, Politechnika Wrocławska

dr hab. inż. Paweł Scharoch, Politechnika Wrocławska

dr inż. Kazimierz Sierański, Politechnika Wrocławska

dr inż. Piotr Sitarek, Politechnika Wrocławska

dr hab. inż. Gabriela Statkiewicz-Barabach, Politechnika Wrocławska

dr inż. Radosław Strzałka, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

dr inż. Jan Szatkowski, Politechnika Wrocławska

dr Izabela Szyperska, Politechnika Poznańska

dr Agnieszka Tomaszewska, Akademia im. Jana Długosza w Częstochowie

dr inż. Bartłomiej Toroń, Politechnika Śląska

dr inż. Dominika Trefon-Radziejewska, Politechnika Śląska

dr inż. Sebastian Wachowski, Politechnika Gdańska

dr Jakub Wagner, Uniwersytet Warszawski

mgr Mateusz Wlazło, Uniwersytet Warszawski

prof. dr hab. Antoni Wójcik, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

mgr inż. Klaudia Żerańska, Politechnika Warszawska

Recenzenci

prof. dr hab. Kazimierz Fabisiak

dr Piotr Goldstein

prof. dr hab. inż. Zbigniew Kąkol

mgr inż. Michał Maciejewski

prof. dr hab. Paweł Machnikowski

dr Brygida Mielewska

prof. dr hab. Jan Mostowski

prof. AGH dr hab. Antoni Paja

prof. dr hab. Ewa Popko

Zespół redakcyjny

Redakcja merytoryczna

dr Agnieszka Tomaszewska

Waldemar Pławski

Korekta językowa

Daria Danilczyk

Monika Hryniewicka

Maria Kowalczyk

Małgorzata Kryska-Mosur

Marcin Kuźma

Aleksandra Marczuk

Aleksandra Sekuła

Korekta techniczna i merytoryczna

Adam Anglart

Mariusz Bardyn

Patryk Bojarski

Weronika Brzezińska

Alicja Kozłowska

Katarzyna Ludwiczak

Aleksandra Rafalak

Mateusz Saniewski

Cezary Turski

Natalia Wilkus

Autorzy *University Physics*

Autorzy prowadzący

Samuel J. Ling, Truman State University

Prof. Samuel Ling od 25 lat wykłada fizykę ogólną i specjalistyczną na Truman State University, będąc jednocześnie dyrektorem Wydziału Fizyki. Prof. Ling ma dwa stopnie doktorskie uzyskane na Boston University, jeden z chemii, a drugi z fizyki. Zanim rozpoczął pracę na Truman State University, był szefem zespołu badawczego w Indian Institute of Science w Bangalore. Prof. Ling jest również autorem podręcznika *A First Course in Vibrations and Waves*, wydanego przez Oxford University Press. Prof. Ling ma ogromny dorobek w dziedzinie badań nad kształceniem fizyków. Opublikował pracę na temat metod współpracy w nauczaniu fizyki. Za swój wkład w innowacyjne metody nauczania otrzymał nagrody Truman Fellow i Jepson Fellow. Jego publikacje dotyczyły dziedzin takich jak kosmologia, fizyka ciała stałego i optyka nieliniowa.

Jeff Sanny, Loyola Marymount University

Dr Jeff Sanny uzyskał licencjat w dziedzinie fizyki w Harvey Mudd College w 1974 roku, a następnie stopień doktora w dziedzinie fizyki ciała stałego na University of California w Los Angeles w 1980 roku. Jesienią 1980 roku rozpoczął pracę na Loyola Marymount University, gdzie pełnił funkcję dyrektora wydziału oraz prodziekana. Nauczanie podstaw fizyki to jedno z jego ulubionych zajęć na uniwersytecie. Jest także wielkim propagatorem uczestnictwa studentów w badaniach naukowych i od wielu lat prowadzi studenckie koło naukowe zajmujące się fizyką przestrzeni kosmicznej.

Bill Moebs, PhD

Dr William Moebs uzyskał licencjat i doktorat w dziedzinie fizyki (w latach 1959 i 1965) na University of Michigan. Następnie na tej samej uczelni przez rok zajmował się pracą naukową, kontynuując swoje badania w dziedzinie fizyki cząstek elementarnych. W 1966 roku przeszedł na uniwersytet Indiana Purdue Fort Wayne (IPFW), gdzie w latach 1971-1979 piastował stanowisko dyrektora Wydziału Fizyki. W 1979 roku podjął pracę na Loyola Marymount University (LMU), kierując tamtejszym Wydziałem Fizyki w latach 1979-1986. Od 2000 roku jest na emeryturze. Publikował prace z zakresu fizyki cząstek elementarnych, kinetyki reakcji chemicznych, podziałów komórkowych, fizyki atomowej oraz nauczania fizyki.

Pozostali autorzy

David Anderson, Albion College

Daniel Bowman, Ferrum College

Dedra Demaree, Georgetown University

Gerald Friedman, Santa Fe Community College

Lev Gasparov, University of North Florida

Edw. S. Ginsberg, University of Massachusetts

Alice Kolakowska, University of Memphis

Lee LaRue, Paris Junior College

Mark Lattery, University of Wisconsin

Richard Ludlow, Daniel Webster College

Patrick Motl, Indiana University–Kokomo

Tao Pang, University of Nevada–Las Vegas

Kenneth Podolak, Plattsburgh State University

Takashi Sato, Kwantlen Polytechnic University

David Smith, University of the Virgin Islands

Joseph Trout, Richard Stockton College

Kevin Wheelock, Bellevue College

Recenzenci

Salameh Ahmad, Rochester Institute of Technology–Dubai
John Aiken, University of Colorado–Boulder
Anand Batra, Howard University
Raymond Benge, Terrant County College
Gavin Buxton, Robert Morris University
Erik Christensen, South Florida State College
Clifton Clark, Fort Hays State University
Nelson Coates, California Maritime Academy
Herve Collin, Kapi'olani Community College
Carl Covatto, Arizona State University
Alexander Cozzani, Imperial Valley College
Danielle Dalafave, The College of New Jersey
Nicholas Darnton, Georgia Institute of Technology
Robert Edmonds, Tarrant County College
William Falls, Erie Community College
Stanley Forrester, Broward College
Umesh Garg, University of Notre Dame
Maurizio Giannotti, Barry University
Bryan Gibbs, Dallas County Community College
Mark Giroux, East Tennessee State University
Matthew Griffiths, University of New Haven
Alfonso Hinojosa, University of Texas–Arlington
Steuard Jensen, Alma College
David Kagan, University of Massachusetts
Jill Leggett, Florida State College–Jacksonville
Sergei Katsev, University of Minnesota–Duluth
Alfredo Louro, University of Calgary
James Maclaren, Tulane University
Ponn Maheswaranathan, Winthrop University
Seth Major, Hamilton College
Oleg Maksimov, Excelsior College
Aristides Marcano, Delaware State University
Marles McCurdy, Tarrant County College
James McDonald, University of Hartford
Ralph McGrew, SUNY–Broome Community College
Paul Miller, West Virginia University
Tamar More, University of Portland
Farzaneh Najmabadi, University of Phoenix
Richard Olenick, The University of Dallas
Christopher Porter, Ohio State University
Liza Pujji, Manakau Institute of Technology
Baishali Ray, Young Harris University
Andrew Robinson, Carleton University

Aruvana Roy, Young Harris University
Abhijit Sarkar, The Catholic University of America
Gajendra Tulsian, Daytona State College
Adria Updike, Roger Williams University
Clark Vangilder, Central Arizona University
Steven Wolf, Texas State University
Alexander Wurm, Western New England University
Lei Zhang, Winston Salem State University
Ulrich Zurcher, Cleveland State University

1 | JEDNOSTKI I MIARY



Rysunek 1.1 Powyższe zdjęcie może przedstawiać wiele rzeczy. Równie dobrze może to być wir powstały w zbiorniku z wodą, jak i praca wykonana na zajęcia plastyczne przy użyciu farby i błyszczących koralików. Trudno stwierdzić, na co patrzymy, jeśli nie wiemy, jaki rozmiar ma dany przedmiot. Rozmiar ten powinien być podany w znanych nam jednostkach, takich jak metry czy centymetry. W rzeczywistości powyższe zdjęcie przedstawia Galaktykę Wir M51 (oraz galaktykę z nią sąsiadującą), której średnica wynosi około 60 tysięcy lat świetlnych (około $6 \cdot 10^{17}$ km). (Źródło: S. Beckwith (STScI) Hubble Heritage Team, (STScI/AURA), ESA, NASA)

Treść rozdziału

Wstęp

Galaktyki są ogromne, a atomy bardzo małe, a jednak jedne i drugie podlegają tym samym prawom fizyki – jest to cecha wspólna wszystkich obiektów znajdujących się we Wszechświecie. Liczba praw fizyki jest zaskakująco mała, co jest dowodem na to, że pod pozorną złożonością przyrody kryje się prostota. Dzięki lekturze tego tekstu uzyskamy informacje na temat praw fizyki. Może się wydawać, że galaktyki i atomy nie mają związku z naszą codziennością, ale kiedy już zagłębimy się w temat, odkryjemy, że wpływ fizyki na nasze życie jest znacznie większy niż przypuszczaliśmy, i to bez względu na to, czym się zajmujemy.

1.1 | Zakres stosowalności praw fizyki

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- określać zakres stosowalności praw fizyki;
- obliczać rzędy wielkości;
- porównywać różne wartości długości, masy i czasu;
- opisywać zjawiska, których dotyczą modele, teorie i zasady fizyczne.

Fizyka skupia się na wyjaśnianiu wszystkich zjawisk zachodzących w przyrodzie. Dzięki niej możemy zrozumieć zjawiska zachodzące we wszystkich skalach, począwszy od cząstek elementarnych, a skończywszy na Wszechświecie w ogóle. Mimo że fizyka jest nauką bardzo rozległą, wszystkie jej dziedziny są ze sobą powiązane. Właśnie dlatego nauka podstaw fizyki przygotuje cię do pracy we wszystkich dziedzinach fizyki, a także w powiązanych z nimi dziedzinach nauki. W tym podrozdziale skupimy się na zakresie stosowalności praw fizyki – czyli dla jakich wartości długości, masy i czasu prawa te mogą być stosowane. Poznamy też zasady, według których nauka, a w szczególności fizyka, dokonuje analizy otaczającego nas świata.

Zakres stosowalności praw fizyki

Jeszcze raz spójrz na zdjęcie znajdujące się na początku rozdziału (Rysunek 1.1). **Galaktyka Wir (M51)** (ang. **Whirlpool Galaxy**) składa się z miliardów gwiazd oraz olbrzymich chmur gazu i pyłu. Po prawej stronie widzimy sąsiadującą z nią galaktykę. Galaktyki te leżą miliard bilionów kilometrów $(2{,}3 \cdot 10^{21} \text{ km})$ od **Drogi Mlecznej** (ang. **Milky Way**), czyli galaktyki, w której znajduje się Ziemia. Gwiazdy i planety wchodzące w skład Galaktyki Wir to jedna z ostatnich rzeczy, którą ludzie na co dzień zaprzątają sobie głowę, ale na ich przykładzie można przedstawić siły działające we Wszechświecie. Siły, które sprawiają, że Galaktyka Wir zachowuje się w taki a nie inny sposób, to te same siły, których działanie musimy uwzględnić, ilekroć planujemy start kolejnej rakiety kosmicznej lub projektujemy dom. Ta sama grawitacja sprawia, że gwiazdy Galaktyki Wir obracają się, a na Ziemi woda przelewa się przez wzniesione przez człowieka zapory. Kiedy spojrzysz w niebo, uświadom sobie, że na gwiazdy oddziałują te same siły, co na Ziemi. Nauka fizyki pomoże Ci lepiej zrozumieć, że wszystkie znajdujące się we Wszechświecie obiekty są od siebie zależne.

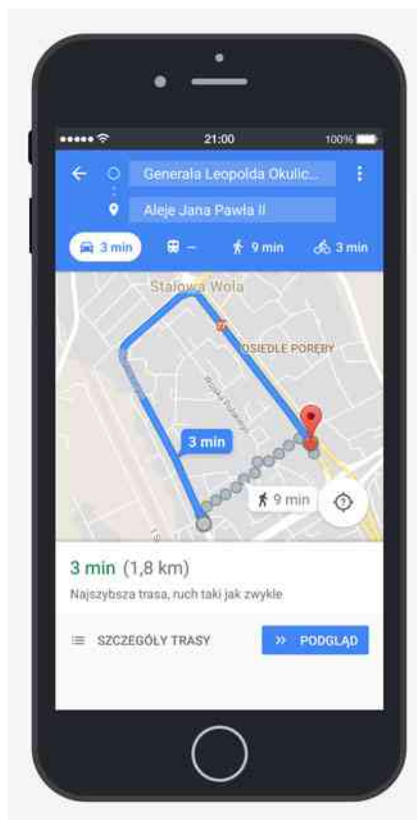
Pomyśl o wszystkich urządzeniach elektronicznych, których używasz na co dzień. Komputery, smartfony, systemy nawigacji satelitarnej (GPS), odtwarzacze MP3, radio satelitarne – to rzeczy, które prawdopodobnie przychodzą Ci do głowy. A teraz pomyśl o najbardziej niezwykłych nowoczesnych technologiach, o jakich słyszałeś: pociągi unoszące się nad torami, „peleryny niewidki” zakrzywiające znajdujące się wokół światło, mikroskopijne roboty będące w stanie zlokalizować znajdujące się w ludzkim ciele komórki rakowe. Wszystkie przełomowe wynalazki – te powszechnie używane i te, w których istnienie wciąż trudno nam uwierzyć, wykorzystują zasady fizyki. Zasady te odgrywają znaczącą rolę nie tylko w technologii, ale codziennie podczas pracy wykorzystywane są przez inżynierów, lekarzy czy fizjoterapeutów. Pilot musi być świadomy, w jaki sposób siła wiatru wpływa na tor lotu samolotu, fizjoterapeuta musi rozumieć, w jaki sposób działają siły, kiedy mięśnie ruszają się i kurczą. Zasady fizyki nie tylko pozwalają na tworzenie nowych, niezwykłych technologii, ale znajdują zastosowanie w wielu dziedzinach życia.

Dzięki fundamentalnemu porządkowi natury nauki ścisłe, a w szczególności fizyka, są bardzo interesujące, a ich studiowanie może być ciekawą przygodą. Przykładowo: co łączy paczkę chipsów i akumulator samochodowy? Jedno i drugie posiada energię, która może ulec konwersji. Kalorie, baterie, ciepło, światło, sprężyny w zegarkach – we wszystkich tych zagadnieniach istotna jest zasada zachowania energii (która mówi, że energia może zmieniać swoją formę, ale nie może zniknąć). Zrozumienie tej zasady ułatwia przyswojenie informacji o różnych formach energii i związkach między nimi. Pozornie niepowiązane ze sobą tematy często mają wspólną cechę – prawa fizyki o szerokim zakresie stosowalności. Nie musimy za wszelką cenę zapamiętywać wzorów – wystarczy, że wiemy jaka jest przyczyna zjawiska.

Prawa przyrody stanowią podstawę dla teorii i zasad, na których opierają się nauki ścisłe. Naukowcy nieustannie starają się poszerzać dostępną nam wiedzę, ulepszać definicje opisujących przyrodę praw. Słowo **fizyka** (ang. **physics**) pochodzi od greckiego *phúsis*, oznaczającego naturę. Fizyka zgłębia mechanizmy leżące u podstaw każdego zjawiska – zajmuje się badaniem przemian energii i materii w przestrzeni i czasie. To zainteresowanie opisem podstawowych zjawisk zachodzących w przyrodzie definiuje *obszar stosowalności praw fizyki*.

Fizyka prowadzi analizę zjawisk na bardzo podstawowym poziomie. Liczba praw istotnych do przeprowadzenia tej analizy jest niewielka, a ich znajomość wykorzystywana jest w innych dziedzinach i pozawala na nieustanne ulepszanie istniejących już technologii. Rysunek 1.2 przedstawia smartfona. Fizyka opisuje, w jaki sposób elektryczność oddziałuje ze znajdującymi się w tym urządzeniu obwodami elektrycznymi. Ta wiedza pozwala dobrać odpowiednie tworzywa oraz zaprojektować obwody. Zmniejszenie rozmiaru smartfona lub zwiększenie szybkości przetwarzania

danych jest niemożliwe bez wiedzy z zakresu fizyki. Teraz pomyśl o odbiorniku GPS. Fizyka opisuje zależności między szybkością ciała, przebytą przez nie drogą oraz czasem potrzebnym na przebycie tej drogi. W celu oszacowania czasu podróży samochodem, GPS korzysta ze wzorów fizycznych. Poprawne działanie tego systemu wymaga również uwzględnienia poprawek relatywistycznych zaproponowanych przez Alberta Einsteina.



Rysunek 1.2 iPhone firmy Apple to popularny rodzaj smartfona z funkcją GPS. Fizyka opisuje w jaki sposób prąd elektryczny przepływa przez znajdujące się w tym urządzeniu obwody. Inżynierowie projektujący iPhone'a wykorzystują wiedzę z zakresu fizyki, aby dodać do urządzenia funkcje, które spodobają się użytkownikom. Jedną z takich funkcji jest system nawigacji satelitarnej (GPS). System GPS jedynie określa położenie nadajnika względem systemu satelit. Aplikacja mobilna pozwala na wyznaczenie trasy podróży pomiędzy dwoma punktami w oparciu o położenie początkowe i końcowe (z systemu GPS) oraz zapisaną w aplikacji mapę terenu.

Wiedza z zakresu fizyki wykorzystywana jest nie tylko do projektowania technologii. Przydaje się również w codziennym życiu oraz w zawodach nie związanych z nauką. Pozwala zrozumieć, jak działa kuchenka mikrofalowa, dlaczego nie można umieszczać w niej metalowych przedmiotów i jaki wpływ może mieć ona na rozruszniki serca. Dzięki fizyce możemy poznać zagrożenia związane z promieniowaniem oraz dowiedzieć się, jak najprościej i najbardziej efektywnie ocenić te zagrożenia. Czy kiedykolwiek zastanawialiśmy się, dlaczego chłodnice samochodowe maluje się na czarno i dlaczego biały kolor dachu chroni wnętrze domu przed nagrzewaniem się? Fizyka zna odpowiedź na oba te pytania. Dużo prościej zrozumieć zasadę działania układu zapłonowego w samochodzie czy też sposób przepływu impulsów elektrycznych przez system nerwowy człowieka, jeśli spogląda się na nie z punktu widzenia fizyki.

Fizyka stanowi kluczowy element wielu dziedzin, a na inne ma bezpośredni wpływ. Noblista, Ernest Rutherford jest autorem słów „Cała nauka dzieli się na fizykę i zbieranie znaczków." (*„All the science is either physics or stamps collecting."*). Chemia zajmuje się oddziaływaniami między atomami i cząsteczkami, a więc jest blisko powiązana z fizyką atomową i molekularną. Większość działań w zakresie inżynierii polega na projektowaniu nowych technologii, procesów lub struktur wykorzystujących wiedzę opartą na prawach fizyki. Jeśli chodzi o architekturę, znajomość fizyki potrzebna jest nie tylko dla zapewnienia równowagi projektowanych struktur, ale również odpowiedniej akustyki, oświetlenia i klimatyzacji. Zagadnienia geologiczne, takie jak datowanie skał, analiza sejsmiczna oraz przewodność cieplna również opierają się na fizyce. Dziedziny takie jak biofizyka czy geofizyka są połączeniem fizyki z innymi dziedzinami.

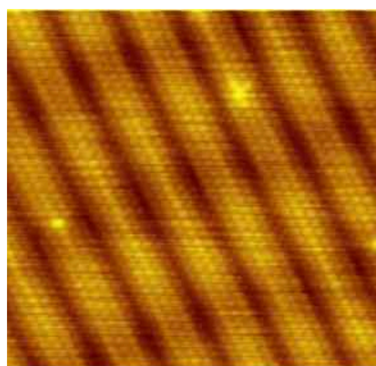
Fizyka znajduje wiele zastosowań w dziedzinach związanych z biologią. Na poziomie mikroskopowym pozwala na opisanie cech komórek oraz ich otoczenia. Na poziomie makroskopowym opisuje temperaturę, pracę i moc związane z ludzkim ciałem i jego organami. Fizyka odgrywa znaczącą rolę w diagnostyce, na przykład podczas robienia zdjęć rentgenowskich, rezonansu magnetycznego lub ultrasonografii dopplerowskiej. Fizyka jest bezpośrednio wykorzy-

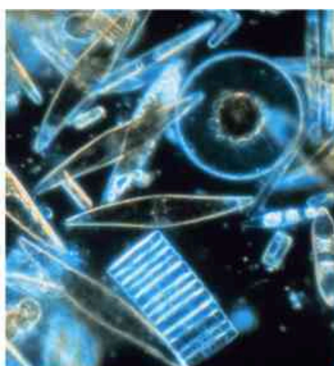
stywana w terapii medycznej. Przykładem może być radioterapia, w której wykorzystuje się promieniowanie jonizujące. Fizyka wyjaśnia również zjawiska odbierane przez zmysły człowieka – tłumaczy, dlaczego oczy rozpoznają kolory, czy jak instrumenty muzyczne wytwarzają dźwięk.

Nie trzeba zapamiętywać listy wszystkich zastosowań fizyki. Istotne jest to, aby poznać podstawowe prawa fizyki i umieć zauważyć ich wpływ na dane zjawisko. Nauka fizyki może pozytywnie wpłynąć na umiejętność rozwiązywania problemów. Prawa fizyki wyjaśniają najbardziej podstawowe zjawiska zachodzące w przyrodzie, co sprawia, że ich znajomość ułatwia przyswojenie wiedzy z innych dziedzin.

Skala w fizyce

Na podstawie tego, co napisano w poprzednim podrozdziale, można wywnioskować, że znajomość fizyki jest niezbędna, aby odnieść sukces w jakiejkolwiek dziedzinie z zakresu nauk przyrodniczych lub inżynierii. Wszystko, co znajduje się w widzialnym Wszechświecie, niezależnie od skali długości, masy i czasu, podlega prawom fizyki. Aby w pełni zrozumieć, co oznacza to zdanie, musimy skupić się na liczbach. Zanim przejdziemy do opisu różnych skal w fizyce, zatrzymajmy się na chwilę nad pojęciem rzędu wielkości. Z pojęcia tego będziemy korzystać podczas opisu długości, masy i czasu w dalszej części książki (Rysunek 1.3).


(a)


(b)


(c)

Rysunek 1.3 (a) Dzięki skaningowemu mikroskopowi tunelowemu można zobaczyć pojedyncze atomy (o średnicy około 10^{-10} m) tworzące płytkę złota. (b) Niewielki fitoplankton płynie wśród kryształków lodu przez wody oblewające Antarktydę. Jego długość waha się od kilku mikrometrów (1 µm to 10^{-6} m) do 2 milimetrów (1 mm to 10^{-3} m). (c) Dwie kolidujące ze sobą galaktyki NGC 4676A (po prawej) i NGC 4676B (po lewej) ze względu na charakterystyczne „ogony” nazywane są „Myszami”. Znajdują się w konstelacji zwanej Warkoczem Bereniki, 300 milionów lat świetlnych od Ziemi. Kiedyś obie te galaktyki połączą się w jedną. (Źródło (a) Erwinrossen; Źródło (b) Prof. Gordon T. Taylor, Stony Brook University; NOAA Corps Collections; Źródło (c) NASA, H. Ford (JHU), G. Illingworth (UCSC/LO), M. Clampin (STScI), G. Hartig (STScI), ACS Science Team oraz ESA)

Rząd wielkości

Rząd wielkości (ang. **order of magnitude**) liczby to najbliższa jej wartości potęga liczby 10. Dlatego mówimy, że rząd wielkości opisuje skalę (lub rozmiar) wartości. W systemie dziesiętnym każda potęga liczby 10 reprezentuje inny rząd wielkości. 10^1, 10^2, 10^3 stanowią różne rzędy wielkości, tak samo jak $10^0 = 1$, 10^{-1}, 10^{-2} i 10^{-3}. Aby znaleźć rząd wielkości liczby, należy obliczyć logarytm dziesiętny z tej liczby, a wynik zaokrąglić do liczby całkowitej. Jeśli podniesiemy 10 do potęgi, którą otrzymaliśmy, uzyskamy rząd wielkości liczby. Przykładowo, rzędem wielkości liczby 800 jest 10^3, ponieważ $\log_{10} 800 \approx 2{,}903$, co zaokrąglamy do 3. Rzędem wielkości liczby 450 również jest 10^3, ponieważ $\log_{10} 450 \approx 2{,}653$, co również zaokrąglamy do 3. Dlatego mówimy, że 800 i 450 mają ten sam rząd wielkości: 10^3. Rzędem wielkości liczby 250 jest 10^2, ponieważ $\log_{10} 250 \approx 2{,}397$, co należy zaokrąglić do 2.

Istnieje też drugi, szybszy sposób obliczania rzędu wielkości. Liczbę, której rzędu wielkości szukamy, należy zapisać w postaci wykładniczej, a następnie sprawdzić, czy **mantysa**[1] jest większa czy mniejsza od $\sqrt{10} = 10^{0{,}5} \approx 3$. Jeśli spojrzymy na skalę logarytmiczną, zauważymy, że $\sqrt{10} = 10^{0{,}5}$ znajduje się w połowie między $1 = 10^0$ i $10 = 10^1$. Jeśli mantysa jest mniejsza od $\sqrt{10}$, zaokrąglamy ją do 1, a rzędem wielkości jest po prostu potęga liczby 10. Jeśli mantysa jest większa od $\sqrt{10}$, zaokrąglamy ją do 10, a rzędem wielkości jest potęga liczby 10 powiększona o 1. Liczbę 800 zapisujemy w notacji wykładniczej jako $8 \cdot 10^2$. Mantysa jest równa 8, a więc jest większa od

1. mantysa (ang. **mantissa**) – w zapisie liczb zmiennoprzecinkowych odpowiada za precyzję odwzorowania w zbiór liczb rzeczywistych.

$\sqrt{10} \approx 3$, dlatego rząd wielkości liczby 800 jest równy $10^{2+1} = 10^3$ Liczbę 450 zapisujemy w notacji wykładniczej jako $4{,}5 \cdot 10^2$. 4,5 również jest większe od 3, więc rzędem wielkości 450 również jest 10^3. Jeśli zapiszemy 250 w notacji wykładniczej, otrzymamy $2{,}5 \cdot 10^2$. 2,5 jest mniejsze od 3, więc rząd wielkości liczby 250 jest równy10^2.

Rząd wielkości liczby obliczamy, aby móc określić skalę lub rozmiar obiektu. Sposób polegający na zaokrąglaniu liczb do najbliższej potęgi liczby 10 pozwala obliczyć rząd wielkości w głowie, nawet jeśli mamy do czynienia z bardzo dużymi lub bardzo małymi liczbami. Rząd średnicy atomu wodoru jest równy 10^{-10} m, a rząd średnicy Słońca 10^9 m, co oznacza, że aby przez środek Słońca przeciągnąć linę zbudowaną z atomów wodoru, potrzebowalibyśmy ich $10^9 \ / \ 10^{-10} = 10^{19}$. O wiele prościej wykonać te obliczenia w głowie, niż kiedy korzysta się z dokładnych wartości. Atom wodoru ma w rzeczywistości średnicę równą $1{,}06 \cdot 10^{-10}$ m, a Słońce $1{,}396 \cdot 10^9$ m. Korzystając z tych liczb, możemy obliczyć, że wspomniana wcześniej lina musiałaby składać się z $1{,}31 \cdot 10^{19}$ atomów wodoru. Na podstawie tego przykładu możemy stwierdzić, że szacowanie przy użyciu rzędów wielkości nie tylko przyspiesza obliczenia, ale daje wynik bardzo zbliżony do rzeczywistego.

Przykładowe rzędy wielkości długości, masy i czasu

Tabela 1.1 obrazuje, jak bardzo zróżnicowany jest Wszechświat i jak daleko sięga obszar zainteresowań fizyki. Analiza tej tabeli pomoże nam wyrobić sobie pojęcie na temat zagadnień, którymi może zajmować się fizyka, oraz przykładowych wartości długości, masy i czasu. Proste pytania, takie jak poniżej, pozwolą uzmysłowić sobie, jak bardzo różnią się wielkości opisujące różne obiekty.

- Ile atomów wodoru potrzeba, aby utworzyć linę o długości średnicy Słońca?
  (Odpowiedź: $10^9 \text{ m} \ / \ 10^{-10} \text{ m} = 10^{19}$ atomów wodoru)
- Ile protonów znajduje się w jednej bakterii?
  (Odpowiedź: $10^{-15} \text{ kg} \ / \ 10^{-27} \text{ kg} = 10^{12}$ protonów)
- Ile operacji zmiennoprzecinkowych może wykonać superkomputer w ciągu doby?
  (Odpowiedź: $10^5 \text{ s} \ / \ 10^{-17} \text{ s} = 10^{22}$ operacji)

Spróbuj ułożyć podobne pytania i odpowiedzieć na nie przy pomocy informacji zawartych w Tabeli 1.1. Tego typu zadanie sprawi, że nudna tabela z liczbami stanie się o wiele ciekawsza.

Długość w metrach (m)	Masa w kilogramach (kg)	Czas w sekundach (s)
10^{-15} m = średnica protonu	10^{-30} kg = masa elektronu	10^{-22} s = czas życia bardzo niestabilnego jądra atomu
10^{-14} m = średnica dużego jądra atomowego	10^{-27} kg = masa protonu	10^{-17} s = czas wykonania przez superkomputer pojedynczej operacji zmiennoprzecinkowej
10^{-10} m = średnica atomu wodoru	10^{-15} kg = masa bakterii	10^{-15} s = czas pojedynczego drgania fali światła w zakresie widzialnym
10^{-7} m = średnica przeciętnego wirusa	10^{-5} kg = masa komara	10^{-13} s = czas pojedynczego drgania atomu w ciele stałym
10^{-2} m = szerokość paznokcia małego palca	10^{-2} kg = masa kolibra	10^{-3} s = czas przesyłu impulsu nerwowego
10^{0} m = wzrost czterolatka	10^{0} kg = masa litra wody	10^{0} s = czas jednego uderzenia serca
10^{2} m = długość boiska do piłki nożnej	10^{2} kg = masa człowieka	10^{5} s = jeden dzień
10^{7} m = średnica kuli ziemskiej	10^{19} kg = masa atmosfery	10^{7} s = jeden rok
10^{13} m = średnica Układu Słonecznego	10^{22} kg = masa Księżyca	10^{9} s = czas życia człowieka
10^{16} m = rok świetlny (droga jaką przebywa światło w ciągu roku)	10^{25} kg = masa Ziemi	10^{11} s = udokumentowana historia ludzkości
10^{21} m = średnica Drogi Mlecznej	10^{30} kg = masa Słońca	10^{17} s = wiek Ziemi
10^{26} m = odległość do granicy widzialnego Wszechświata	10^{53} kg = maksymalna masa znanego Wszechświata	10^{18} s = wiek Wszechświata

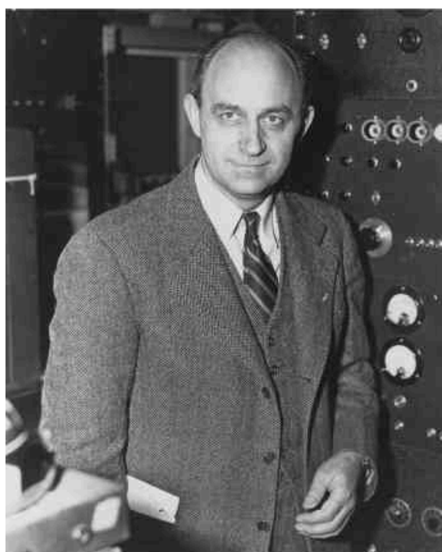
Tabela 1.1 Powyższa tabela przedstawia przykładowe rzędy wielkości długości, masy i czasu.



Jeśli chcesz się dowiedzieć, jak zróżnicowane rozmiary mają obiekty znajdujące się w naszym Wszechświecie, odwiedź tę stronę (https://openstaxcollege.org/l/21scaleuniv) . Poruszaj suwakiem w prawo i w lewo, aby zobaczyć większe lub mniejsze obiekty – jeśli chcesz dowiedzieć się więcej o którymś z nich, po prostu kliknij na niego.

Tworzenie modeli

Skąd wiemy, jakie prawa rządzą zjawiskami naturalnymi? Aby określić, czym są tak zwane prawa natury, korzystamy z opisów sformułowanych przez człowieka, charakteryzujących zasady, którym podlegają wszystkie procesy zachodzące w przyrodzie. Prawa te są nieodłączną częścią Wszechświata – nie zostały stworzone przez człowieka i człowiek może jedynie odkryć je i zrozumieć, ale nie może ich zmienić. Ich odkrycie było skutkiem dążenia człowieka do poznania prawdy o naturze rzeczy. Na drodze każdego odkrycia (Rysunek 1.4) spotykają się tajemnica, wyobraźnia, walka, triumf i zawód – i w tym wypadku też nie było inaczej. Podstawą odkrywania praw przyrody jest obserwacja – badacz musi opisywać Wszechświat jakim on jest, a nie jakim może się on wydawać.

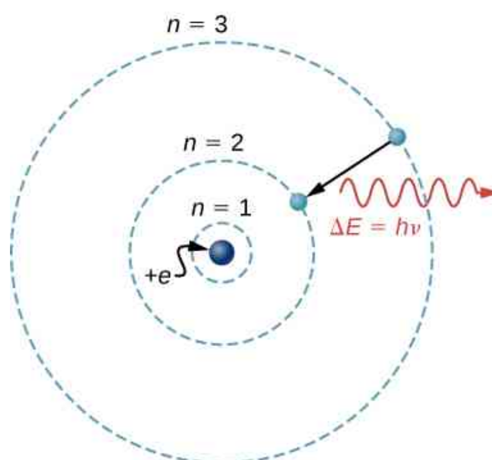




(a) Enrico Fermi (b) Maria Skłodowska-Curie

Rysunek 1.4 (a) **Enrico Fermi (1901–1954)** pochodził z Włoch. Po odebraniu Nagrody Nobla w Sztokholmie w 1938 roku za pracę nad sztuczną promieniotwórczością wytwarzaną przez neutrony zabrał swoją rodzinę do Ameryki, aby nie wracać do kraju rządzonego przez faszystów. Został obywatelem Stanów Zjednoczonych i wziął udział w Projekcie Manhattan, którego celem było zbudowanie bomby atomowej. (b) **Maria Skłodowska-Curie (1867–1934)** poświęciła swój majątek, aby rozpocząć badania naukowe. Z powodu napromieniowania ucierpiało jej zdrowie. Skłodowska-Curie jest jedyną osobą, która otrzymała Nagrody Nobla za osiągnięcia w dwóch różnych dziedzinach (fizyce i chemii). Jedna z jej córek również otrzymała Nagrodę Nobla. (Źródło a) Departament Energii Stanów Zjednoczonych)

Model (ang. **model**) stanowi reprezentację czegoś, co często nie może być pokazane bezpośrednio. Chociaż każdy model tworzony jest na podstawie eksperymentów, może on opisywać jedynie pewne aspekty układu fizycznego. Przykładem może być model atomu Bohra, w którym elektron krąży wokół jądra w taki sam sposób, w jaki planety krążą wokół Słońca (Rysunek 1.5). Nie możemy zobaczyć orbity elektronowej, ale wyobrażenie jej sobie pomaga zrozumieć zjawiska, takie jak emisja światła przez gorące gazy (widmo emisyjne atomu). Inne badania pokazały, że atom nie wygląda tak, jak w modelu Bohra. Mimo że model ten jest błędny, wciąż może być przydatny. Fizycy mogą korzystać z modeli w różnych celach. Modele mogą być pomocne podczas weryfikacji hipotezy lub podczas przeprowadzania obliczeń. Mogą być też wykorzystane w symulacji komputerowej. Zweryfikowany model pozwala na wnioskowanie na temat zjawiska fizycznego poza warunkami, w których dokonano pomiarów. Modele stanowią bardzo istotny element prac w ośrodkach naukowych takich jak CERN, czy też NASA.



Rysunek 1.5 Czym jest model? Model atomu Bohra przedstawia elektron krążący wokół jądra po jednej z kilku możliwych orbit kołowych. Jak wszystkie modele, tak i ten nie prezentuje wszystkich aspektów układu fizycznego.

Słowo **teoria** w kontekście nauk ścisłych oznacza co innego niż w języku potocznym. Dla naukowca teoria nie jest

równoważna z pomysłem lub domysłem lub nawet z hipotezą. Stwierdzenie „to tylko teoria” nie ma sensu, ponieważ nauka opiera się właśnie na teoriach. Dla naukowca **teoria** (ang. **theory**) stanowi wytłumaczenie wzorców, według których zachodzą zjawiska w przyrodzie. Teoria musi być wielokrotnie przetestowana przez różnych badaczy i udowodniona naukowo. Niektóre teorie korzystają z modeli obrazujących pewne zjawiska, inne nie wymagają ich stosowania. W przypadku teorii grawitacji Newtona model jest zbędny, ponieważ jesteśmy w stanie gołym okiem obserwować obiekty, które ulegają prawu ciążenia. Kinetyczna teoria gazów wykorzystuje model, w którym gaz składa się z atomów lub cząsteczek. Atomy i cząsteczki są zbyt małe, abyśmy mogli je zaobserwować gołym okiem, dlatego musimy je sobie wyobrazić, aby zrozumieć, co o zachowaniu gazu mówią nam wskazania przyrządów pomiarowych. Model prezentuje jedynie wybrane aspekty układu fizycznego, natomiast teoria powinna opisywać wszystkie aspekty układu znajdującego się w zasięgu jej zakresu stosowalności. Wyciągnięte na podstawie teorii, możliwe do przetestowania wnioski muszą zostać zweryfikowane. Jeśli wyniki eksperymentu pokazują, że teoria jest błędna, zostaje ona odrzucona lub odpowiednio zmodyfikowana (na przykład poprzez zawężenie jej zakresu stosowalności).

Definicja **zasady** (ang. **law**) jest zwięzła i zawiera ogólny opis wzorca charakteryzującego zjawisko, poparty dowodami naukowymi i wynikami eksperymentów. Zasada często jest przedstawiana w formie równania matematycznego. Zasady i teorie są to twierdzenia naukowe wynikające z przetestowanej hipotezy, poparte dowodami naukowymi. Określenie zasady jest zazwyczaj zarezerwowane dla bardzo ogólnego twierdzenia opisującego zachodzące w przyrodzie zjawisko, na przykład zasada zachowania energii lub druga zasada dynamiki Newtona, które może być zdefiniowane przez proste równanie $F = ma$, przedstawiające zależność między siłą (F), masą (m) oraz przyspieszeniem (a). Teoria jest twierdzeniem mniej zwięzłym niż zasada i oparta jest na obserwacji zjawiska. Na przykład teoria ewolucji lub teoria względności nie są wystarczająco zwięzłe, by można było nazwać je zasadami. Krótko mówiąc, teoria jest bardziej złożona i mniej konkretna niż zasada. Zasada dotyczy pojedynczego działania i wybranego zakresu pojęć, podczas gdy teoria opisuje całą grupę powiązanych zjawisk. Twierdzenia o węższym zakresie stosowalności nazywane są zazwyczaj prawami (jak na przykład prawo Pascala, które dotyczy jedynie cieczy), ale różnice między zasadami i prawami nie zawsze są oczywiste.

Opracowane przez nas modele, teorie i prawa czasem zakładają istnienie obiektów lub zjawisk, które nie zostały jeszcze zaobserwowane. Niezwykłe jest to, że jesteśmy w stanie wywnioskować, że takie obiekty i zjawiska istnieją – jest to możliwe dzięki fundamentalnemu porządkowi Wszechświata. Przykładem może być to, że istnienie Bozonu Higgsa zostało przewidziane 50 lat temu, a do jego weryfikacji eksperymentalnej konieczne było zbudowanie Wielkiego Zderzacza Hadronów (*Large Hadron Collider*, LHC) i wysiłek zastępów inżynierów i naukowców. Ostatecznie zaowocowało to Nagrodą Nobla. Podobnie historia potoczyła się w przypadku niedawnej Nagrody Nobla dla naukowców z eksperymentów LIGO/VIRGO, które zweryfikowały hipotezę Alberta Einsteina na temat fal grawitacyjnych. Jeśli jednak z eksperymentów jasno wynika, że postawione założenia są błędne, teoria lub zasada zostaje uznana za złą niezależnie od tego, jak mądrze brzmi. Jednocześnie nie potrafimy w fizyce zweryfikować założeń i modeli ze stuprocentową pewnością, ponieważ niemożliwe jest wykonanie wszystkich możliwych eksperymentów dla wszystkich możliwych przypadków. Fizycy zakładają, że wszystkie zasady i teorie są prawdziwe, dopóki nie zostanie udowodnione, że są błędne. Jeżeli wiarygodny, dobrze przeprowadzony eksperyment przeczy powszechnie uznawanej zasadzie lub teorii, teoria lub zasada musi zostać zmodyfikowana lub zupełnie odrzucona.

Zgłębianie nauk ścisłych, a w szczególności fizyki, jest przygodą taką samą, jak badanie nieznanego oceanu. Wraz z każdym nowym odkryciem, modelem, teorią, zasadą lepiej rozumiemy fizyczny Wszechświat.

1.2 | Układy jednostek miar

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- definiować podstawowe jednostki układu SI;
- tworzyć jednostki pochodne na podstawie jednostek podstawowych;
- korzystać z przedrostków jednostek miar układu SI.

Jak już wiemy, zakres zainteresowań fizyki obejmuje wiele przeróżnych obiektów i zjawisk. Od niezwykle krótkiego życia jądra atomu po wiek Ziemi, od maleńkich cząstek subatomowych po ogromne odległości dzielące granice znanego Wszechświata, od energii skaczącej pchły po siłę przyciągania między Ziemią i Słońcem – liczba potęg 10 jest wystarczająca, by wystawić na próbę wyobraźnię nawet najbardziej doświadczonego naukowca. Przedstawianie wielkości fizycznych przy pomocy liczb oraz praw fizyki przy pomocy wzorów pozwala na głębsze zrozumienie badanego zjawiska niż jedynie przy pomocy opisów. Aby pojąć, jak wielkie są różnice między występującymi w przyrodzie wielkościami, musimy przedstawić te wielkości w pewnych jednostkach. Nawet dzięki prozaicznym metrom, kilogramom czy sekundom możemy odkryć prostotę natury – wszystkie wielkości fizyczne można wyrazić przy pomocy siedmiu podstawowych wielkości fizycznych.

Wielkość fizyczna (ang. **physical quantity**) definiowana jest przez sposób pomiaru lub przez sposób obliczania jej na podstawie innych pomiarów. Droga i czas mogą być zdefiniowane przez określenie metod ich pomiaru, takich jak użycie miarki lub stopera. Natomiast prędkość średnia może zostać zdefiniowana jako iloraz przebytej drogi i czasu.

Miary wielkości fizycznych przedstawiane są przy pomocy znormalizowanych wartości zwanych **jednostkami** (ang. **unit**). Dystans biegu, który jest wielkością fizyczną, może zostać wyrażony za pomocą metrów (dla biegu krótkodystansowego) lub kilometrów (dla biegu długodystansowego). Bez znormalizowanych jednostek wyrażanie i porównywanie wielkości fizycznych byłoby niezwykle trudne (Rysunek 1.6).



Rysunek 1.6 Przedstawianie odległości w nieznanych jednostkach jest bezcelowe.

Istnieją dwa główne systemy jednostek miar. Pierwszym z nich jest **układ SI** (fr. *Système International d'Unités*) (ang. **SI units**), który zastąpił używany wcześniej **system CGS** (ang. *centimeter-gram-second*). Drugim systemem jest **brytyjski system miar** (ang. **English units**) (wykorzystujący tzw. *jednostki imperialne*). Brytyjski system miar nazywany jest **systemem FPS** (ang. *foot-pound-second*). Jednostki występujące w brytyjskim systemie miar były używane w koloniach brytyjskich i wciąż często korzysta się z nich w Stanach Zjednoczonych.

Obecnie w większości krajów na świecie używa się jednostek układu SI. Jest to system metryczny, z którego korzystają naukowcy.

Układ SI: jednostki podstawowe i pochodne

Dla pewnych wielkości jednostki każdego systemu metrycznego muszą zostać zdefiniowane na podstawie pomiarów. Wielkości te nazywamy **wielkościami podstawowymi** (ang. **base quantities**), a opisujące je jednostki **jednostkami podstawowymi** (ang. **base unit**). Pozostałe wielkości mogą zostać wyrażone przy pomocy wielkości podstawowych. Nazywamy je zatem **wielkościami pochodnymi** (ang. **derived quantity**), a jednostki je opisujące **jednostkami pochodnymi** (ang. **derived units**). Wybór wielkości podstawowych nie jest narzucony z góry, ale muszą być one niezależne od siebie nawzajem i musi być możliwe wyprowadzenie za ich pomocą wszystkich wielkości pochodnych. Jako wielkości podstawowe wybiera się wielkości fizyczne, których pomiary odznaczają się wysoką precyzją i powtarzalnością. Jest to bardzo istotne, ponieważ jednostki pochodne wyprowadzane są z jednostek podstawowych, a więc ich dokładność nigdy nie będzie wyższa niż dokładność jednostek podstawowych.

Na podstawie powyższych rozważań Międzynarodowa Organizacja Normalizacyjna wyróżniła siedem wielkości podstawowych, które tworzą Międzynarodowy Układ Wielkości (ISQ) i opisują podstawowe jednostki układu SI. Wielkości wraz z jednostkami przedstawia Tabela 1.2.

Wielkość podstawowa układu ISQ	Jednostka podstawowa układu SI
długość	metr (m)
masa	kilogram (kg)
czas	sekunda (s)
prąd elektryczny	amper (A)
temperatura termodynamiczna	kelwin (K)
liczność materii	mol (mol)

Tabela 1.2 Wielkości podstawowe układu ISQ i odpowiadające im jednostki układu SI

Wielkość podstawowa układu ISQ	Jednostka podstawowa układu SI
światłość	kandela (cd)

Tabela 1.2 Wielkości podstawowe układu ISQ i odpowiadające im jednostki układu SI

Prawdopodobnie znasz część wielkości pochodnych, które można wyprowadzić przy pomocy wielkości zaprezentowanych w Tabeli 1.2. Na przykład pole powierzchni oblicza się na podstawie dwóch długości – oznacza to, że pole powierzchni jest wielkością pochodną wyrażoną za pomocą metrów kwadratowych – jednostki pochodnej stworzonej na podstawie metra, będącego jednostką podstawową układu SI ($\mathrm{m \cdot m = m^2}$). Objętość jest wielkością pochodną, którą można wyrazić w metrach sześciennych ($\mathrm{m^3}$). Szybkość to stosunek drogi do czasu, a jej jednostka, metr na sekundę (m/s), utworzona jest na podstawie jednostek podstawowych. Gęstość jest to stosunek masy do objętości, a wyraża się ją w kilogramach na metr sześcienny ($\mathrm{kg/m^3}$). Kąty również można nazwać wielkościami pochodnymi, ponieważ można je wyrazić jako stosunek długości łuku do promienia okręgu. Jeśli długość łuku jest równa długości promienia okręgu, możemy zdefiniować jednostkę pochodną – radian. W zależności od potrzeb, możemy wyprowadzić inne wielkości pochodne, takie jak na przykład masowe natężenie przepływu (kg/s), objętościowe natężenie przepływu ($\mathrm{m^3/s}$), ładunek elektryczny ($\mathrm{A \cdot s}$), gęstość strumienia masy $\mathrm{kg/\left(m^2 \cdot s\right)}$ i inne. Podczas lektury tej książki napotkamy jeszcze wiele innych przykładów. Ważne, aby zapamiętać, że każda wielkość fizyczna może być wyprowadzona na podstawie siedmiu wielkości podstawowych, przedstawionych w Tabeli 1.2, a wszystkie jednostki opisujące wielkości fizyczne mogą być wyprowadzone na podstawie siedmiu podstawowych jednostek układu SI.

W tej książce pojawiać się będą głównie jednostki układu SI. Będziemy również używać jednostek nie znajdujących się w układzie SI, ale powszechnie używanych, jak na przykład stopni Celsjusza do wyrażenia temperatury ($\mathrm{^\circ C}$), litrów do wyrażenia objętości (l) lub elektronowoltów do wyrażenia energii cząstek elementarnych (eV). Jeśli pojawią się jednostki spoza układu SI, przedstawiona zostanie ich konwersja na jednostki znajdujące się w tym układzie (np. $1\,\mathrm{l}$ to $10^{-3}\ \mathrm{m^3}$).



Zapoznaj się z obszerną listą jednostek układu SI (https://openstaxcollege.org/l/21SIUnits) na stronie Narodowego Instytutu Standaryzacji i Technologii (NIST).

Jednostki czasu, długości i masy: sekunda, metr, kilogram

Początkowe rozdziały tej książki zajmują się mechaniką, płynami oraz falami. Wszystkie istotne dla opisu tych zagadnień wielkości fizyczne mogą być wyrażone przy pomocy podstawowych jednostek długości, masy i czasu. Dlatego teraz skupimy się tylko na tych trzech podstawowych jednostkach.

Sekunda

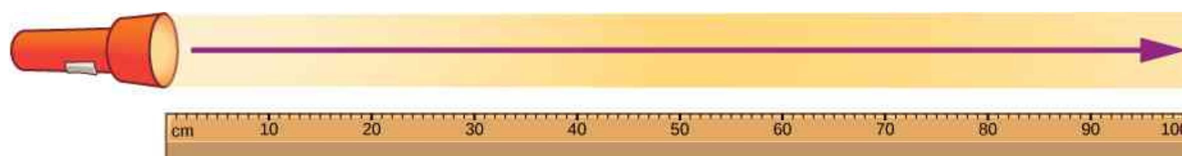
Sekunda (s) (ang. **second**) jest jednostką układu SI, której historia sięga daleko wstecz. Przez wiele lat sekundę definiowano jako 1/86400 średniej doby słonecznej. Następnie uznano, że definicja powinna być zależna od niezmieniającego się zjawiska fizycznego (doba słoneczna staje się dłuższa wraz ze spadkiem szybkości obrotu Ziemi). Okazuje się, iż atomy cezu można wprawić w regularne drgania, które następnie można obserwować i zliczać. W 1967 roku na nowo zdefiniowano sekundę, określając ją jako czas trwania 9 192 631 770 drgań atomu cezu (Rysunek 1.7). Mogłoby się wydawać, że tak wysoka dokładność określania czasu prawdopodobnie nigdy się nam nie przyda, ale system GPS korzysta z dokładności zegara atomowego, dzięki czemu możemy odbierać instrukcje dotyczące trasy na powierzchni Ziemi, z dala od satelitów nadających sygnał.



Rysunek 1.7 Dzięki zliczaniu drgań atomu cezu zegar atomowy odmierza czas z dokładnością wyższą niż jedna mikrosekunda na rok. Na pomiarach takich właśnie zegarów oparta jest podstawowa jednostka czasu – sekunda. Tzw. fontanna atomowa widoczna na zdjęciu ma długość prawie 9 m. (Źródło: Steve Jurvetson)

Metr

Jednostką długości w układzie SI jest **metr** (m) (ang. **meter**). Definicja metra również ulegała zmianom, które miały na celu zwiększenie dokładności. W roku 1791 stworzono pierwszą definicję metra – określono go jako $1 / 10\,000\,000$ odległości między równikiem a biegunem północnym. W 1889 metr został zdefiniowany jako odległość między dwiema liniami wyrytymi na pewnej płycie wykonanej ze stopu platyny i irydu. Płyta ta znajduje się obecnie w miejscowości Sèvres pod Paryżem. W 1960 roku możliwe stało się stworzenie jeszcze bardziej precyzyjnej definicji metra, poprzez wyrażenie go przez długość fali świetlnej – tym razem metr określono jako $1\,650\,763{,}73$ długości fali światła pomarańczowego emitowanego przez atomy kryptonu. W 1983 roku została stworzona definicja metra częściowo obowiązująca do dzisiaj. Metr jest to więc dystans, jaki światło w próżni przebywa w ciągu $1 / 299\,792\,458$ sekundy (Rysunek 1.8). Utworzenie tak precyzyjnej definicji stało się możliwe dzięki odkryciu, że prędkość światła jest równa dokładnie $299\,792\,458\ \text{m} / \text{s}$. Jeśli pewnego dnia prędkość światła zostanie zmierzona z wyższą dokładnością, wtedy definicja metra ponownie ulegnie zmianie.



Rysunek 1.8 Metr definiuje się jako drogę, którą światło w próżni przebywa w ciągu $1/299\,792\,458$ sekundy. Droga jest to iloczyn szybkości i czasu.

Kilogram

Jednostką masy w układzie SI jest **kilogram** (kg) (ang. **kilogram**). Definiowany jest jako masa platynowo-irydowego walca znajdującego się w Międzynarodowym Biurze Miar i Wag w Sèvres pod Paryżem. Dokładne repliki wzorca znajdują się w różnych miejscach na świecie, na przykład w Narodowym Instytucie Standaryzacji i Technologii (NIST) w miejscowości Gaithersburg w Maryland w Stanach Zjednoczonych. Naukowcy z NIST badają obecnie dwie uzupełniające się metody, dzięki którym możliwe byłoby utworzenie nowej definicji kilograma (zobacz Rysunek 1.9). Jak wiadomo, wszystkie inne jednostki masy można zdefiniować poprzez porównanie ze wzorcem. Pozostałe jednostki mogą być wyznaczane w oparciu o niezależne eksperymenty.


Obecnie trwają prace mające na celu ponowne zdefiniowanie jednostki masy w układzie SI. Na stronie Laboratorium Pomiarów Fizycznych NIST (https://openstaxcollege.org/l/21redefkilo) można sprawdzić, jak definiowano masę w przeszłości oraz zobaczyć propozycje nowych definicji.





(a) (b)

Rysunek 1.9 Obecnie trwają prace mające na celu opracowanie uzupełniających metod definiowania masy. (a) Stworzona w Narodowym Instytucie Standaryzacji i Technologii waga Watta definiuje masę przy pomocy prądu i napięcia. (b) Celem Międzynarodowego Projektu Avogadro jest ponowne zdefiniowanie kilograma przy pomocy wzorca będącego kulą krzemową. (Źródło: Narodowy Instytut Standaryzacji i Technologii)

Przedrostki jednostek miar układu SI

Jednostki układu SI tworzą **system metryczny** (ang. **metric system**). Korzystanie z tego system usprawnia obliczenia, ponieważ jednostki klasyfikowane są według rzędów wielkości. Tabela 1.3 zawiera listę przedrostków oraz symboli, odpowiadających konkretnym potęgom liczby 10. Przykładowo centymetr jest równy jednej setnej metra ($1\ \mathrm{cm} = 10^{-2}\ \mathrm{m}$), a kilometr to tysiąc metrów ($1\ \mathrm{km} = 10^{3}\ \mathrm{m}$). Megagram to milion gramów ($1\ \mathrm{Mg} = 10^{6}\ \mathrm{g}$), nanosekunda równa jest jednej miliardowej sekundy ($1\ \mathrm{ns} = 10^{-9}\ \mathrm{s}$), a terametr to bilion metrów ($1\ \mathrm{Tm} = 10^{12}\ \mathrm{m}$).

greckie litery	symbol	znaczenie	łacińskie określenia	symbol	znaczenie
jotta-	Y	10^{24}	jokto-	y	10^{-24}
zetta-	Z	10^{21}	zepto-	z	10^{-21}
eksa-	E	10^{18}	atto-	a	10^{-18}
peta-	P	10^{15}	femto-	f	10^{-15}
tera-	T	10^{12}	piko-	p	10^{-12}
giga-	G	10^{9}	nano-	n	10^{-9}
mega-	M	10^{6}	mikro-	μ	10^{-6}
kilo-	k	10^{3}	mili-	m	10^{-3}
hekto-	h	10^{2}	centy-	c	10^{-2}
deka-	da	10^{1}	decy-	d	10^{-1}

Tabela 1.3 Przedrostki odpowiadające potęgom liczby 10 oraz ich symbole

Należy podkreślić, że przedrostków nie można ze sobą łączyć, to znaczy, że jeśli pomiar przedstawiono w petametrach ($1\ \mathrm{Pm} = 10^{15}\ \mathrm{m}$), to nie możemy tej jednostki zastąpić megagigametrami (mimo że $10^{6} \cdot 10^{9} = 10^{15}$). W rzeczy-

wistości może to sprawiać problem tylko w przypadku jednostek masy. Podstawową jednostką masy w układzie SI jest kilogram (kg), aby jednak nie łączyć przedrostków, dodaje się je do słowa „gram” (g). W związku z tym tysiąc kilogramów (10^3 kg) jest równe jednemu megagramowi (1 Mg):

$$10^3 \text{ kg} = 10^3 \cdot 10^3 \text{ g} = 10^6 \text{ g} = 1 \text{ Mg}.$$

10^3 kg nazywa się również **toną** (t). Jest to jedna z jednostek, które nie znajdują się w układzie SI, ale mogą być używane razem z jednostkami należącymi do tego układu.

Dużą zaletą systemów metrycznych jest to, że konwersja jednostek wymaga jedynie zmiany potęgi liczby 10 (mówimy o tym w następnym podrozdziale). 1 m to 100 cm, 1 km to 1000 m i tak dalej. W systemach niemetrycznych, do których należy na przykład brytyjski system miar, zależności między jednostkami są bardziej skomplikowane: 1 mila to 5280 stóp, a 1 stopa to 12 cali.

Kolejną zaletą systemów metrycznych jest to, że za pomocą tej samej jednostki można przedstawić liczby należące do bardzo szerokiego zakresu – wystarczy jedynie przeskalować tę jednostkę, dodając odpowiedni przedrostek. Wybór przedrostka zależy od zagadnienia, z którym związany jest pomiar. Na przykład w budownictwie długość podaje się w metrach, długość trasy samolotu w kilometrach, a wymiary przyrządów optycznych w nanometrach. W przypadku systemu metrycznego nie ma potrzeby wymyślania nowych jednostek dla różnych zastosowań – możemy po prostu przeskalować znaną nam jednostkę.

Przykład 1.1

Korzystanie z przedrostków metrycznych

Zapisz $1{,}93 \cdot 10^{13}$ kg za pomocą innej jednostki w taki sposób, aby otrzymana mantysa była większa niż 1, ale mniejsza niż 1000.

Strategia rozwiązania

Ponieważ nie możemy łączyć przedrostków, masę podaną w kilogramach musimy na początku przedstawić przy pomocy gramów. W tym celu podaną wartość mnożymy razy 10^3 (zobacz: Tabela 1.3). Następnie sprawdzamy (w Tabeli 1.3), przez jakie dwa przedrostki opisywane są rzędy wielkości najbliższe temu, który otrzymaliśmy w wyniku obliczeń. Musimy wybrać taki przedrostek, aby przedstawiona przy jego pomocy wartość zawierała się między 1 a 1000.

Rozwiązanie

Zamiana kilogramów na gramy przebiega w następujący sposób:

$$1{,}93 \cdot 10^{13} \text{ kg} = 1{,}93 \cdot 10^{13} \cdot 10^3 \text{ g} = 1{,}93 \cdot 10^{16} \text{ g}.$$

Na podstawie Tabeli 1.3 możemy stwierdzić, że 10^{16} znajduje się między przedrostkami „peta-” (10^{15}) i „eksa-” (10^{18}). Jeżeli użyjemy przedrostka „peta-”, otrzymamy $1{,}93 \cdot 10^{16} \text{ g} = 1{,}93 \cdot 10^1 \text{ Pg} = 19{,}3 \text{ Pg}$, ponieważ $16 = 1 + 15$. Jeżeli użyjemy przedrostka „eksa-” otrzymamy $1{,}93 \cdot 10^{16} \text{ g} = 1{,}93 \cdot 10^{-2} \text{ Eg}$, ponieważ $16 = -2 + 18$. Musimy skorzystać z takiej jednostki, aby wartość była większa od 1 i mniejsza od 1000, a więc wybieramy przedrostek „peta-” i otrzymujemy 19,3 Pg.

Znaczenie

Łatwo popełnić banalne błędy obliczeniowe podczas zamiany przedrostków, dlatego zawsze warto sprawdzić, czy uzyskana przez nas wartość na pewno równa jest wartości początkowej. Poprawność wyniku można sprawdzić, zapisując obie wartości w postaci wykładniczej i policzyć potęgi liczby 10, pamiętając o tych zawartych w przedrostkach. Jeśli nie pomyliliśmy się podczas przekształcania, to liczba potęg liczby 10 przy obu wartościach powinna być taka sama. Sprawdźmy przykład, który właśnie rozwiązaliśmy. Na początku zadania podana była wartość $1{,}93 \cdot 10^{13}$ kg, co daje wykładnik liczby 10 równy $13 + 3 = 16$. Wynik, jaki uzyskaliśmy po przekształceniach, to $1{,}93 \cdot 10^1$ Pg, co daje wykładnik liczby 10 równy $1 + 15 = 16$. Oznacza to, że przekształcenia zostały przeprowadzone poprawnie.

Jeśli taką liczbę otrzymalibyśmy w wyniku obliczeń, powinniśmy się zastanowić, czy tak ogromny wynik ma sens w kontekście zagadnienia, którego dotyczą obliczenia. W takim wypadku warto zajrzeć do Tabeli 1.1.



1.1 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Zapisz $4{,}79 \cdot 10^5$ kg przy pomocy takiej jednostki, aby otrzymana mantysa posiadała wartość większą od 1 i mniejszą od 1000.

1.3 | Konwersja jednostek

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- wyrażać tę samą wielkość w różnych jednostkach dzięki użyciu przeliczników.

Często spotykamy się z koniecznością przekształcania jednostek. Załóżmy, że chcesz użyć przepisu z amerykańskiej książki kucharskiej. Jeśli objętość podano w uncjach, musisz je przekształcić na mililitry. Jeśli natomiast czytasz opis szlaku górskiego znajdującego się w Anglii i chcesz wiedzieć, jak wysoko położony jest szczyt, przeliczysz stopy na metry.

Zaraz przekonamy się, jak proste jest przekształcanie jednostek. Załóżmy, że chcemy przedstawić 80 m w kilometrach. Na początku powinniśmy wypisać jednostki, w których podany jest pomiar oraz jednostki, na które chcemy dokonać konwersji – w rozważanym przez nas przypadku pomiar podany jest w metrach, a chcemy przedstawić go przy pomocy kilometrów. Następnie musimy określić przelicznik metrów na kilometry. **Przelicznik** (ang. **conversion factor**) jest to stosunek, który określa, ile razy dana jednostka mieści się w innej. Na przykład 12 cali to jedna stopa, 1609 m to mila, 100 cm to 1 m, 60 s to 1 min i tak dalej. Aby zobaczyć listę przeliczników zajrzyj do Dodatku B. Wiemy, że 1000 m to 1 km, więc możemy dokonać konwersji jednostek. Wypisujemy podaną wartość wraz z jednostką, a następnie mnożymy ją przez przelicznik tak, aby jednostki się skróciły:

$$80\ \cancel{\text{m}} \cdot \frac{1\ \text{km}}{1000\ \cancel{\text{m}}} = 0{,}080\ \text{km}.$$

Zauważ, że metry ulegają skróceniu, w związku z czym otrzymujemy wynik w kilometrach. Tej metody możesz użyć do konwersji jednostek opisujących wszystkie wielkości fizyczne. Konwersji 80 m na kilometry można dokonać tylko poprzez użycie odpowiedniego przedrostka, więc taki sam wynik możemy uzyskać za pomocą sposobu opisanego w poprzednim podrozdziale:

$$80\ \text{m} = 8{,}0 \cdot 10^{1}\ \text{m} = 8{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{km} = 0{,}080\ \text{km},$$

ponieważ „kilo-” oznacza 10^3 (patrz Tabela 1.3), a $1 - 3 = -2$. Jeśli jednak mamy do czynienia z systemem niemetrycznym lub z jednostkami pochodnymi, jak w kolejnym przykładzie, musimy skorzystać z metody przeliczników.

Przykład 1.2

Konwersja jednostek niemetrycznych na metryczne

Uczelnia jest oddalona od domu o 10 mil i dotarcie do niej samochodem zajmuje 20 minut. Oblicz średnią prędkość w metrach na sekundę (m/s). (*Uwaga:* prędkość średnia to iloraz drogi i czasu potrzebnego na jej przebycie).

Strategia rozwiązania

Na początku obliczamy średnią szybkość w jednostkach, w których podana jest wartość, a następnie dokonujemy konwersji, mnożąc wynik przez odpowiedni przelicznik. Użycie przelicznika powinno spowodować skrócenie jednostek. Ponieważ chcemy przeliczyć mile na metry, musimy wiedzieć, że 1 mila jest równa 1609 metrom. Musimy również wykorzystać fakt, że 1 minuta to 60 sekund.

Rozwiązanie

1. Oblicz prędkość średnią. Prędkość średnia to iloraz drogi i czasu potrzebnego na jej przebycie. (Po prostu zapamiętaj tę definicję. Tłumaczeniem prędkości średniej oraz innych zagadnień związanych z ruchem zajmiemy się w kolejnych rozdziałach). Do następującego wzoru:

$$\text{prędkość średnia} = \frac{\text{droga}}{\text{czas}}.$$

podstaw podane w treści zadania wartości drogi i czasu:

$$\text{średnia szybkość} = \frac{10\ \text{mi}}{20\ \text{min}} = 0{,}50\ \frac{\text{mi}}{\text{min}}.$$

2. Zamień mile na minutę na metry na sekundę, mnożąc wynik przez pierwszy przelicznik, którego użycie spowoduje skrócenie mil, oraz przez drugi przelicznik, którego użycie spowoduje skrócenie minut:

$$0{,}50\ \frac{\cancel{\text{mi}}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{1609\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{mi}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{min}}}{60\ \text{s}} = \frac{0{,}50 \cdot 1609}{60}\ \text{m/s} = 13\ \text{m/s}.$$

Znaczenie

Możesz sprawdzić swój wynik w następujący sposób:

1. Upewnij się, że jednostki ulegają skróceniu. Jeżeli się pomylisz i zamienisz licznik z mianownikiem, jednostki się nie skrócą. Mile znajdujące się w liczniku pierwszego ułamka skracają się z milami znajdującymi się w mianowniku drugiego ułamka, natomiast minuty znajdujące się w mianowniku pierwszego ułamka skracają się z minutami znajdującymi się w liczniku drugiego.
2. Upewnij się również, że wynik przedstawiony jest w odpowiednich jednostkach – w naszym przypadku mają to być metry na sekundę. Ponieważ mile uległy skróceniu, jedyne jednostki, jakie pozostały, to metry w liczniku oraz sekundy w mianowniku – jednostki są poprawne.



1.2 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Światło przebywa drogę około 9 Pm na rok. Wiedząc, że rok ma około $3 \cdot 10^7$ s, oblicz prędkość światła w metrach na sekundę.

Przykład 1.3

Zamiana jednostek metrycznych

W warunkach normalnych żelazo ma gęstość $7{,}86\ \text{g}/\text{cm}^3$. Przedstaw tę liczbę w kg/m^3.

Strategia rozwiązania

Musimy zamienić gramy na kilogramy oraz centymetry sześcienne na metry sześcienne. Przeliczniki, które będą nam potrzebne, to $1\ \text{kg} = 10^3\ \text{g}$ i $1\ \text{cm} = 10^{-2}\ \text{m}$. Ponieważ jednak w zadaniu występują centymetry sześcienne ($\text{cm}^3 = \text{cm} \cdot \text{cm} \cdot \text{cm}$), drugiego przelicznika będziemy musieli użyć trzy razy (to znaczy podnieść go do trzeciej potęgi). Wciąż zależy nam na tym, aby niechciane jednostki się skróciły.

Rozwiązanie

$$7{,}86\ \frac{\cancel{\text{g}}}{\cancel{\text{cm}}^3} \cdot \frac{\text{kg}}{10^3\ \cancel{\text{g}}} \cdot \left(\frac{\cancel{\text{cm}}}{10^{-2}\ \text{m}}\right)^3 = \frac{7{,}86}{10^3 \cdot 10^{-6}}\ \text{kg/m}^3 = 7{,}86 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3$$

Znaczenie

Pamiętaj, aby zawsze sprawdzić swoje rozwiązanie.

1. Upewnij się, że poprawnie skracasz jednostki. Widzimy, że gramy (g) w liczniku pierwszego ułamka skracają się z gramami znajdującymi się w mianowniku pierwszego przelicznika oraz że centymetry sześcienne (m^3) znajdujące się w mianowniku pierwszego ułamka skracają się z centymetrami podniesionymi do potęgi trzeciej w liczniku drugiego przelicznika.
2. Upewnij się, że wynik podany jest w wymaganych jednostkach. W tym przypadku wynik mieliśmy podać w kilogramach na metr sześcienny. Po skróceniu jednostek otrzymujemy [kg] w liczniku oraz „m” podniesione do potęgi trzeciej w mianowniku (czyli metr sześcienny lub [m^3] – oznacza to, że wynik jest poprawny).



1.3 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Dzięki informacjom zawartym w Tabeli 1.1 wiesz, że rząd wielkości średnicy Ziemi jest równy 10^7 m, a więc rząd wielkości jej powierzchni wynosi 10^{14} m^2. Przedstaw tę wartość w kilometrach kwadratowych (km^2). (Spróbuj zamienić jednostki na dwa sposoby: najpierw zamieniając 10^7 m na kilometry i podnosząc wynik do kwadratu, a następnie bezpośrednio zamieniając 10^{14} m^2 na kilometry kwadratowe. W obu przypadkach powinieneś uzyskać taką samą odpowiedź).

Zamiana jednostek może wydawać się niezbyt ciekawa, ale pominięcie jej podczas obliczeń może nas wiele kosztować. Taka sytuacja miała miejsce, kiedy NASA wysłała w przestrzeń kosmiczną sondę **Mars Climate Orbiter**. Sondę wystrzelono 11 grudnia 1998 roku, a 23 września 1999 roku, podczas próby skierowania sondy na orbitę Marsa, utracono z nią kontakt. W wyniku późniejszego dochodzenia odkryto, że oprogramowanie SM_FORCES (lub *small forces*) odbierające instrukcje dotyczące trajektorii lotu jako jednostki używało funt-siły, podczas gdy oprogramowanie służące do wyznaczania korekty tej trajektorii wyrażone było w niutonach. Tor lotu uległ znacznej zmianie, w związku z czym sonda prawdopodobnie odleciała w przestrzeń lub spaliła się w atmosferze Marsa. Ten błąd kosztował setki milionów dolarów, nie wspominając o straconym czasie, jaki poświęcono na zaplanowanie misji.



1.4 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Wiedząc, że 1 lb (funt-siła) jest równy 4,45 N (niutonom), oceń, czy SM_FORCES generowało zbyt duże, czy zbyt małe wartości siły.

1.4 | Analiza wymiarowa

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- znajdować wymiary równania operującego na wielkościach fizycznych;
- określać, czy równanie jest wymiarowo spójne.

Wymiar (ang. **dimension**) wielkości fizycznej opisuje jej zależność od wielkości podstawowych. Wyraża się go za pomocą iloczynu lub potęgi tych wielkości. Tabela 1.4 zawiera listę podstawowych wielkości fizycznych oraz symboli odpowiadających ich wymiarom. Mówi się na przykład, że pomiar długości ma wymiar L lub L^1, pomiar masy M lub M^1, a pomiar czasu T lub T^1. Tak samo jak jednostki, na wymiarach można wykonywać działania algebraiczne. Dlatego pole powierzchni, będące iloczynem dwóch długości, ma wymiar L^2, czyli długość do kwadratu. Objętość jest iloczynem trzech długości, a więc ma wymiar L^3, czyli długość do potęgi trzeciej. Gęstość ma wymiar M/L^3 lub ML^{-3}, lub masa przez kwadrat długości. Ogólnie rzecz biorąc, wymiar każdej wielkości fizycznej można zapisać w postaci $L^a M^b T^c I^d \Theta^e N^f J^g$ dla potęg a, b, c, d, e, f, oraz g. Przyjmując, że $a = 1$, a w miejscu pozostałych potęg podstawiając zero, możemy przedstawić wymiary długości: $L^1 = L^1 M^0 T^0 I^0 \Theta^0 N^0 J^0$. Każda wielkość, którą przedstawia się, za wszystkie potęgi podstawiając zero (to znaczy w następujący sposób: $L^0 M^0 T^0 I^0 \Theta^0 N^0 J^0$), nazywana jest wielkością **bezwymiarową** (ang. **dimensionless**) (lub liczbą o wymiarze 1, ponieważ każda liczba podniesiona do potęgi zerowej równa jest 1). Wielkości bezwymiarowe często nazywane są liczbami niemianowanymi.

Wielkość podstawowa	Symbol
Długość	L
Masa	M
Czas	T
Prąd elektryczny	I
Temperatura termodynamiczna	Θ
Liczność materii	N
Światłość	J

Tabela 1.4 Podstawowe wielkości fizyczne i ich wymiary

Symbol oznaczający wymiar wielkości fizycznej często umieszczany jest w nawiasach kwadratowych. Przykładowo,

jeśli r jest promieniem podstawy walca, a h jest jego wysokością, to zapis $[r] = \mathrm{L}$ i $[h] = \mathrm{L}$ oznacza, że wymiarem promienia i wysokości jest długość. Analogicznie, jeśli przez P oznaczymy pole powierzchni walca, a przez V jego objętość, to $[P] = \mathrm{L}^2$ oraz $[V] = \mathrm{L}^3$. Jeśli m oznacza masę walca, a ρ jego gęstość, to $[m] = \mathrm{M}$ oraz $[\rho] = \mathrm{ML}^{-3}$.

Określanie wymiarów jest bardzo istotne, ponieważ każde równanie matematyczne operujące na wielkościach fizycznych musi być **wymiarowo spójne** (ang. **dimensionally consistent**), co oznacza, że musi spełniać następujące zasady:

- Wszystkie składniki jednego wyrażenia muszą mieć ten sam wymiar – dodawanie lub odejmowanie wielkości o różnych wymiarach nie ma sensu. Szczególnie istotne jest to, aby wyrażenia występujące po dwóch stronach znaku równości miały te same wymiary.
- Argumenty wszystkich standardowych funkcji matematycznych, takich jak na przykład funkcji trygonometrycznych (np. sinusa lub cosinusa), muszą być wielkościami bezwymiarowymi. Zarówno argumenty, jak i wyniki tych funkcji są liczbami niemianowanymi.

Jeśli któraś z powyższych zasad nie zostanie spełniona, wyrażenie nie będzie wymiarowo spójne i w związku z tym nie będzie stanowiło poprawnego opisu prawa fizyki. Tę wiedzę można wykorzystać, szukając błędów w równaniach lub zapamiętując różne zasady fizyczne. Może ona nawet pomóc wybrać formę, jaką mają przyjąć nowe prawa fizyki. Co prawda w tym tekście nie będziemy zajmować się tym ostatnim zastosowaniem, ale na pewno spotkamy się z nim jeszcze w czasie dalszej nauki.

Przykład 1.4

Zapamiętywanie wzorów dzięki analizie wymiarowej

Załóżmy, że dokonujemy obliczeń i potrzebujemy wzoru na pole koła. Jeśli od dłuższego czasu nie mieliśmy do czynienia z geometrią, do głowy mogą nam przyjść dwa wzory związane z zagadnieniem koła: πr^2 oraz $2\pi r$. Jeden ze wzorów pozwala obliczyć obwód koła o promieniu r, a drugi jego pole powierzchni. Ale jak je od siebie odróżnić?

Strategia rozwiązania

Jednym ze sposobów może być znalezienie wzoru, ale w takim przypadku musimy poświęcić czas na zaczerpnięcie informacji z wiarygodnego źródła. Poza tym nie powinniśmy wierzyć we wszystko, co czytamy, nawet jeśli wydaje nam się, że źródło jest wiarygodne. Możliwość zweryfikowania informacji za pomocą prostego rozumowania jest bardzo przydatna, poza tym nie zawsze mamy możliwość skorzystania z zewnętrznych źródeł (na przykład podczas egzaminu). Dlatego też najlepszą strategią jest znalezienie wymiarów obu wzorów, wykorzystując fakt, że na wymiarach można przeprowadzać działania algebraiczne. Wzór na pole koła musi mieć takie same wymiary jak pole powierzchni.

Rozwiązanie

Wiemy, że wymiarem pola powierzchni jest L^2. Wymiarem wyrażenia πr^2 jest

$$\left[\pi r^2\right] = [\pi] \cdot [r]^2 = 1 \cdot \mathrm{L}^2 = \mathrm{L}^2,$$

ponieważ stała π jest liczbą niemianowaną, a promień r określa długość. Możemy więc stwierdzić, że πr^2 ma wymiar pola powierzchni. Wymiarem wyrażenia $2\pi r$ jest

$$[2\pi r] = [2] \cdot [\pi] \cdot [r] = 1 \cdot 1 \cdot \mathrm{L} = \mathrm{L},$$

ponieważ liczba 2 oraz stała π są bezwymiarowe, a promień r określa długość. Widzimy więc, że wyrażenie $2\pi r$ ma wymiar długości, co oznacza, że nie może być wzorem na pole powierzchni.

Wyrażenie $2\pi r$ nie ma wymiaru pola powierzchni. Widzimy, że πr^2 ma wymiar pola powierzchni, więc jeśli musimy wybrać między dwoma podanymi wyrażeniami, powinniśmy wybrać πr^2.

Znaczenie

Powyższy przykład może się wydawać banalny, ale służy on zaprezentowaniu pewnej idei. Jeśli tylko znamy wymiary wielkości fizycznych pojawiających się w wyrażeniu, możemy stwierdzić, czy wyrażenie to jest wymiarowo spójne. Poza tym jeśli nie jesteśmy pewni, co opisuje zapamiętany przez nas wzór, możemy dopasować go do odpowiedniej wielkości. Nie pomoże nam to zapamiętać bezwymiarowych współczynników (na przykład jeśli pomyliłbyś się i złączył dwa wyrażenia w jedno: $2\pi r^2$, to analiza wymiarowa na nic się nie przyda), ale pozwoli zapamiętać podstawową formę wyrażenia.



1.5 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Załóżmy, że potrzebujemy wzoru na objętość kuli. Dwa wyrażenia mogące kojarzyć się z kulą to $4\pi r^2$ oraz $4\pi r^3/3$. Jedno z nich pozwala obliczyć objętość kuli o promieniu r, a drugie pole jej powierzchni. Jak znaleźć to będące wzorem na objętość?

Przykład 1.5

Sprawdzanie spójności wymiarów w wyrażeniach

Wielkości fizyczne s, v, a i t mają wymiary $[s] = \mathrm{L}$, $[v] = \mathrm{LT}^{-1}$, $[a] = \mathrm{LT}^{-2}$ oraz $[t] = \mathrm{T}$. Sprawdź spójność wymiarową poniższych wyrażeń:

a. $s = vt + 0{,}5at^2$;

b. $s = vt^2 + 0{,}5at$;

c. $v = \sin\left(at^2/s\right)$.

Strategia rozwiązania

W celu stwierdzenia, czy wyrażenie jest spójne, musimy sprawdzić, czy wszystkie składniki mają takie same wymiary i czy argumenty standardowych funkcji matematycznych są bezwymiarowe.

Rozwiązanie

a. W tym wyrażeniu nie ma funkcji trygonometrycznych, logarytmicznych ani wykładniczych, więc należy sprawdzić jedynie wymiary poszczególnych składników. Po lewej stronie znaku równości występuje jeden składnik, a po prawej dwa:

$$[s] = \mathrm{L},$$
$$[vt] = [v]\cdot[t] = \mathrm{LT}^{-1}\cdot\mathrm{T} = \mathrm{LT}^0 = \mathrm{L},$$
$$\left[0{,}5\,at^2\right] = [a]\cdot[t]^2 = \mathrm{LT}^{-2}\cdot\mathrm{T}^2 = \mathrm{LT}^0 = \mathrm{L}.$$

Wszystkie trzy składniki mają te same wymiary, co oznacza, że wyrażenie jest wymiarowo spójne.

b. W tym wyrażeniu również nie ma funkcji trygonometrycznych, logarytmicznych ani eksponenty, więc ponownie sprawdzamy wymiary poszczególnych składników:

$$[s] = \mathrm{L},$$
$$\left[vt^2\right] = [v]\cdot[t]^2 = \mathrm{LT}^{-1}\cdot\mathrm{T}^2 = \mathrm{LT},$$
$$[at] = [a]\cdot[t] = \mathrm{LT}^{-2}\cdot\mathrm{T} = \mathrm{LT}^{-1}.$$

Każdy z trzech składników ma inne wymiary, więc wyrażenie nie jest spójne.

c. W tym wyrażeniu występuje funkcja trygonometryczna, więc na początku sprawdźmy, czy jej argument jest liczbą niemianowaną:

$$\left[\frac{at^2}{s}\right] = \frac{[a]\cdot[t]^2}{[s]} = \frac{\mathrm{LT}^{-2}\cdot\mathrm{T}^2}{\mathrm{L}} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L}} = 1.$$

Argument funkcji sinus jest liczbą niemianowaną, a więc na razie wszystko się zgadza. Teraz musimy sprawdzić, czy składnik występujący po lewej stronie znaku równości ma ten sam wymiar co składnik występujący po prawej:

$$[v] = \mathrm{LT}^{-1},$$
$$\left[\sin\left(\frac{at^2}{s}\right)\right] = 1.$$

Składniki mają różne wymiary, co oznacza, że wyrażenie nie jest spójne.

Znaczenie

Jeżeli mamy zaufanie do ludzi, tego typu weryfikacja może się wydawać niepotrzebna. Ale możemy być pewni, że w każdym podręczniku z dziedziny fizyki (również w tym, który właśnie czytasz) można znaleźć wzory z błędami. Sprawdzanie poprawności wyrażeń przy pomocy analizy wymiarowej uchroni nas przed użyciem błędnego wzoru. Jest to też świetny sposób na znalezienie ewentualnego błędu w naszych obliczeniach.



1.6 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Czy równanie $v = at$ z poprzedniego zadania jest wymiarowo spójne?

Kolejną rzeczą, o jakiej należy wspomnieć, jest wykonywanie na wymiarach działań z zakresu analizy matematycznej. Wiemy, że wymiary, tak jak jednostki, podlegają prawom algebry, ale co stanie się jeśli obliczymy pochodną cząstkową wielkości fizycznej lub scałkujemy jedną wielkość względem innej zmiennej wielkości? Pochodna funkcji jest to tangens nachylenia stycznej do wykresu funkcji, więc jeśli chodzi o wielkości fizyczne v oraz t, wymiarem pochodnej v względem t jest stosunek wymiarów v i t:

$$\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right] = \frac{[v]}{[t]}.$$

Całka jest sumą pewnej ilości składników, a więc wymiarem całki z v względem t jest po prostu wymiar v pomnożony razy wymiar t:

$$\left[\int v\mathrm{d}t\right] = [v] \cdot [t].$$

Te same zasady odnoszą się do jednostek wielkości fizycznych, powstałych w wyniku całkowania lub różniczkowania innych wielkości.

1.5 | Szacowanie, pytania Fermiego

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- szacować wartości wielkości fizycznych.

Naukowcy i inżynierowie często muszą dokonać *oszacowania* wartości pewnej wielkości fizycznej. W tym kontekście często mówi się też o *pytaniach Fermiego*. (Fizyk Enrico Fermi, o którym wspominaliśmy wcześniej, znany był z umiejętności określania wartości różnych danych z zaskakującą precyzją). Czy ten sprzęt zmieści się w bagażniku naszego samochodu, czy też trzeba będzie wynająć ciężarówkę? Ile czasu zajmie pobieranie tego pliku? Jakie będzie natężenie prądu w tym obwodzie? Ile gospodarstw domowych będzie korzystać z energii produkowanej w nowo budowanej elektrowni? Zauważ, że szacowanie nie jest równoznaczne ze zgadywaniem. **Szacowanie** (ang. **estimation**) oznacza określenie przybliżonej wartości na podstawie dotychczasowego doświadczenia oraz logicznego rozumowania. Proces szacowania wartości pomaga kształtować fizyczną intuicję, ponieważ wymaga określenia, które prawa fizyki mają wpływ na daną sytuację. Wymaga także trafnego określenia wartości pewnych wielkości. Szacowanie pozwala również na stwierdzenie, czy wykonane przez nas obliczenia lub zaproponowane zasady mają sens – jeśli nasz wynik znacznie różni się od oszacowanego, oznacza to, że popełniliśmy błąd. Określanie przybliżonych wartości stanowi wyzwanie w dążeniu do poznawania prawdy o otaczającym świecie.

Szacunkowe obliczenia często oparte są na wzorach, do których podstawiane są wielkości o wartościach znanych tylko z pewną dokładnością. Nabierając wprawy w rozwiązywaniu problemów fizycznych (co przydaje się w wielu dziedzinach), wprawy nabiera się w szacowaniu. Umiejętność szacowania rozwija się dzięki postrzeganiu świata w kategoriach liczb, a także dzięki podejmowaniu ryzyka. Pomocna jest również wiedza z zakresu wymiarów (zobacz Tabelę 1.4), jednostek (zobacz Tabelę 1.2 i Tabelę 1.3) oraz skali jednostek podstawowych (zobacz Tabelę 1.1).

Jeśli chcesz nauczyć się szacować, musisz wiedzieć, jak określać jedne wielkości na podstawie innych. Poniższe rady będą pomocne w nauce sztuki szacowania:

- *Oszacuj większe długości na podstawie mniejszych.* Podczas szacowania długości pamiętaj, że jako linijki możesz

użyć czegokolwiek. Spróbuj podzielić w myślach dużą rzecz na mniejsze, oszacuj długość jednej z mniejszych rzeczy, a następnie pomnóż ją tyle razy, aby otrzymać długość większej rzeczy. Na przykład, aby oszacować wysokość budynku, najpierw policz, ile ma on pięter. Następnie oszacuj wysokość jednego piętra, wyobrażając sobie, ile osób musiałoby stanąć jedna na drugiej, aby wypełnić przestrzeń od podłogi do sufitu. Na końcu oszacuj wzrost człowieka. Mnożąc przez siebie otrzymane liczby, uzyskasz wysokość budynku. Warto zapamiętać kilka skali długości związanych z problemami, których rozwiązywaniem się zajmujemy. Może się przydać znajomość skali długości zawartych w Tabeli 1.1. Działanie w drugą stronę może się przydać, jeśli chcemy oszacować długość małego obiektu. Wystarczy wyobrazić sobie kilka takich obiektów połączonych w jeden, większy. Na przykład, aby ocenić grubość kartki papieru, oszacuj grubość stosu takich kartek, a następnie podziel przez liczbę kartek znajdujących się w stosie. Strategia rozbijania większych obiektów na mniejsze lub łączenia mniejszych w jeden większy może przydać się podczas szacowania innych wielkości fizycznych, takich jak masa lub czas.

- *Oszacuj pole powierzchni lub objętość na podstawie długości.* Jeśli chcesz oszacować pole powierzchni lub objętość przedmiotu o skomplikowanej strukturze, spróbuj w myślach przyrównać ten przedmiot do prostszego obiektu, takiego jak kula lub prostopadłościan. Następnie oszacuj poszczególne wymiary liniowe uproszczonego obiektu (promień kuli lub długość, wysokość i szerokość prostopadłościanu) i za ich pomocą, korzystając z podstawowych wzorów matematycznych, oblicz pole powierzchni lub objętość. Jeśli masz oszacowaną wartość pola powierzchni lub objętości, możesz wykonać odwrotne rozumowanie, to znaczy obliczyć wymiary liniowe przedmiotu.
- *Oszacuj masę na podstawie objętości lub gęstości.* Jeśli chcesz oszacować masę przedmiotu, warto zacząć od oszacowania jego objętości oraz gęstości, a następnie na ich podstawie obliczyć masę (gęstość ma wymiar masy przez długość do potęgi trzeciej, a więc masa jest iloczynem gęstości i objętości). W tym celu warto znać wartości podstawowych gęstości: gęstość powietrza to około $1\ \mathrm{kg/m^3}$, gęstość wody to $10^3\ \mathrm{kg/m^3}$, a największa gęstość spotykanych w codziennym życiu przedmiotów to około $10^4\ \mathrm{kg/m^3}$ (np. srebro, ołów, stal). Jeśli jesteś w stanie odpowiedzieć na pytanie, czy dany przedmiot unosi się, czy opada w wodzie lub w powietrzu, zyskasz ogólne pojęcie na temat jego gęstości. Jeśli znasz oszacowane wartości masy i gęstości przedmiotu, możesz określić jego objętość.
- *Jeśli wszystko inne zawodzi, ogranicz wartość.* W przypadku wielkości fizycznych, z którymi nie masz na co dzień styczności, czasem najlepsze, co możesz zrobić, to stwierdzić: no cóż, to musi być większe niż to, ale mniejsze niż tamto. Załóżmy, że musisz oszacować masę łosia. Być może znasz się na łosiach i wiesz, jaka może być ich średnia masa. W takim razie świetnie. Jednak większość ludzi może jedynie stwierdzić coś w rodzaju: Masa łosia na pewno jest większa niż człowieka (rzędu $10^2\ \mathrm{kg}$) i mniejsza niż samochodu (rzędu $10^3\ \mathrm{kg}$). Jeśli do dalszych obliczeń potrzebujesz konkretnej liczby, możesz obliczyć średnią geometryczną z górnej i dolnej granicy, to znaczy pomnożyć je przez siebie, a następnie spierwiastkować. Dla przykładu z łosiem obliczenia średniej geometrycznej wyglądają następująco:

$$\left(10^2 \cdot 10^3\right)^{0{,}5} = 10^{2{,}5} = 10^{0{,}5} \cdot 10^2 \approx 3 \cdot 10^2\,\mathrm{kg}.$$

  Średnią geometryczną stosujemy, ponieważ jest to często lepsze przybliżenie rozkładu cech, w którym istotne są stosunki pomiędzy wartościami a nie różnice pomiędzy nimi. Im mniejsza różnica między granicami, tym lepiej. Poza tym, jeśli chodzi o szacowanie, nie musisz się ściśle trzymać zasad. Jeśli uważasz, że wartość, której szukasz, jest bliższa górnej granicy, możesz powiększyć wynik o jeden lub dwa rzędy wielkości.
- *Wystarczy jedna cyfra znacząca.* Podczas wykonywania obliczeń w celu otrzymania szacowanej wartości nie ma potrzeby określania więcej niż jednej cyfry znaczącej. W większości przypadków wystarczy po prostu rząd wielkości. Celem jest znalezienie przybliżonej wartości, więc postaraj się, aby obliczenia były tak proste, jak to tylko możliwe.
- *Czy to w ogóle ma sens?* Na końcu musisz się zastanowić, czy twój wynik jest realistyczny. Porównaj go z innymi wartościami o tych samych wymiarach, które znasz lub możesz łatwo znaleźć. Jeśli twoja odpowiedź wydaje ci się dziwna (to znaczy jeśli na przykład oszacowana przez ciebie masa Atlantyku jest większa od masy Ziemi albo jakiś odcinek czasu jest dłuższy od czasu istnienia Wszechświata), na początek sprawdź poprawność jednostek. Następnie przekonaj się, czy nie popełniłeś błędów w obliczeniach. Na końcu jeszcze raz przeprowadź rozumowanie, które doprowadziło cię do otrzymanego wyniku. Jeśli wszystko wydaje się w porządku, to być może właśnie udowodniłeś, że jakaś nowa, dobrze brzmiąca teoria jest nieprawdziwa.

Przykład 1.6

Masa oceanów Ziemi

Oszacuj całkowitą masę wszystkich znajdujących się na Ziemi oceanów.

Strategia rozwiązania

Wiemy, że gęstość wody jest równa około $10^3\ \mathrm{kg/m^3}$, więc na początku skorzystamy z rady, która mówi: „Oszacuj masę na podstawie objętości lub gęstości”. W tym celu musimy oszacować objętość oceanów. Inna rada mówi: „Oszacuj pole powierzchni lub objętość na podstawie długości” – w tym wypadku oszacować objętość oceanów, mnożąc ich pole powierzchni przez średnią głębokość: $V = AD$. Średnicę Ziemi znamy z Tabeli 1.1, a ponieważ wiemy, że większość powierzchni Ziemi pokrywa woda, możemy założyć, że powierzchnia oceanów jest mniej więcej równa powierzchni całej planety. Jeszcze raz stosując radę o „szacowaniu pola powierzchni lub objętości na podstawie długości”, zakładamy, że Ziemia jest idealną kulą i korzystamy ze wzoru na pole powierzchni kuli o średnicy d: $A = \pi d^2$, dzięki czemu otrzymujemy przybliżoną wartość pola powierzchni oceanów. Teraz musimy jeszcze tylko oszacować średnią głębokość oceanu. W tym celu stosujemy radę: „Ograniczanie wartości”. Wiemy, że najgłębiej położony punkt oceanu znajduje się około 10 km pod powierzchnią, wiemy też, że głębokość oceanu często jest większa niż 1 km, a więc możemy obliczyć średnią głębokość: $\left(10^3 \cdot 10^4\right)^{0,5} \approx 3 \cdot 10^3\ \mathrm{m}$. Teraz trzeba tylko skorzystać z otrzymanych wyników, pamiętając, że „Wystarczy jedna cyfra znacząca”.

Rozwiązanie

Szacujemy, że powierzchnia Ziemi (a więc również powierzchnia oceanów) jest równa mniej więcej:

$$A = \pi d^2 = \pi(107\ \mathrm{m})^2 \approx 3 \cdot 10^{14}\ \mathrm{m}^2.$$

Następnie, korzystając z oszacowanej poprzez ograniczenie średniej głębokości oceanu $D = 3 \cdot 10^3\ \mathrm{m}$, szacujemy objętość oceanów:

$$V = AD = 3 \cdot 10^{14}\ \mathrm{m}^2 \cdot 3 \cdot 10^3\ \mathrm{m} = 9 \cdot 10^{17}\ \mathrm{m}^3.$$

Na końcu szacujemy masę oceanów:

$$M = \rho V = 10^3\ \mathrm{kg/m^3} \cdot 9 \cdot 10^{17}\ \mathrm{m}^3 = 9 \cdot 10^{20}\ \mathrm{kg}.$$

Możemy oszacować, że masa oceanów pokrywających Ziemię ma rząd wielkości $10^{21}\ \mathrm{kg}$.

Znaczenie

Aby zweryfikować poprawność oszacowanej przez nas wartości, przede wszystkim musimy odpowiedzieć na pytanie: „Czy to w ogóle ma sens?”. Z Tabeli 1.1 wiemy, że masa atmosfery ziemskiej ma rząd wielkości $10^{19}\ \mathrm{kg}$, a masa Ziemi ma rząd wielkości $10^{25}\ \mathrm{kg}$. Oszacowany przez nas rząd wielkości masy ziemskich oceanów równy $10^{21}\ \mathrm{kg}$ zawiera się między powyższymi wartościami. A więc tak, wydaje się, że to ma sens. Spróbowaliśmy znaleźć informacje na temat masy oceanów za pomocą wyszukiwarki internetowej – według pierwszych wyników masa ta jest równa $1{,}4 \cdot 10^{21}\ \mathrm{kg}$. Liczba ta ma ten sam rząd wielkości co oszacowana przez nas wartość. Teraz, zamiast ślepo wierzyć komuś, kto pierwszy umieścił tę wartość w Internecie (reszta prawdopodobnie skopiowała ją od niego), mamy podstawy twierdzić, że miał rację.



1.7 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Według Tabeli 1.1 masa atmosfery ziemskiej jest równa $10^{19}\ \mathrm{kg}$. Wiedząc, że gęstość atmosfery jest równa $1\ \mathrm{kg/m^3}$, oszacuj jej wysokość. Myślisz, że oszacowana przez ciebie wartość jest zbyt wysoka, czy zbyt niska? Dlaczego?

Ilu stroicieli pianin jest w Warszawie? Ile liści jest na tym drzewie? Te pytania mogą być dla nas bardzo istotne, jeśli uczymy się o fotosyntezie lub planujemy napisać aplikację mobilną dla stroicieli pianin. W przeciwnym przypadku pewnie w ogóle nie interesują nas odpowiedzi. Jednak właśnie tego typu pytania zadają pracodawcy, aby ocenić umiejętności szacowania potencjalnych pracowników. Jeśli nie przemawia do ciebie możliwość wyrobienia intuicji fizycznej i zyskanie umiejętności szacowania, to może przekona możliwość zdobycia dobrze płatnej pracy?



Aby przećwiczyć szacowanie długości, pól powierzchni oraz objętości zobacz tę symulację PhET (https://openstaxcollege.org/l/21lengthgame) , zatytułowaną *Estimation*.

1.6 | Cyfry znaczące

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- prawidłowo określać liczbę cyfr znaczących wyniku obliczeń;
- opisywać zależności między dokładnością, precyzją, niepewnością pomiarową i błędem pomiaru;
- na podstawie wartości oraz jej niepewności pomiarowej obliczać niepewność względną;
- na podstawie niepewności pomiarowych poszczególnych wartości używanych w obliczeniach określać niepewność wyniku.

Rysunek 1.10 przedstawia dwa przedmioty służące do pomiaru masy. W laboratoriach fizycznych waga szalkowa została prawie zupełnie wyparta przez wagę elektroniczną, której wskazania są dokładniejsze i bardziej precyzyjne. Ale co właściwie oznaczają słowa *dokładne* i *precyzyjne*? Czy to nie to samo? W tym podrozdziale zajmiemy się procesem dokonywania oraz zapisywania pomiarów.



(a)



(b)

Rysunek 1.10 (a) Waga szalkowa służy do porównywania mas różnych obiektów. Na jednej szalce kładzie się obiekt o nieznanej masie, a na drugiej obiekt, którego masę znamy. Jeśli wskaźniki obu stron wagi zrównają się w położeniu równowagi, oznacza to, że porównywane masy są równe. Obiektami, których masy znamy, są zazwyczaj odważniki o standardowych masach takich jak 1 g, 10 g i 100 g. (b) Wiele wag mechanicznych, takich jak waga szalkowa, zostało zastąpionych przez wagi elektroniczne, które zazwyczaj są dokładniejsze. Za pomocą wagi mechanicznej można określić masę z dokładnością do jednej dziesiątej grama, podczas gdy wiele wag elektronicznych dokonuje pomiaru z dokładnością do jednej tysięcznej grama. (Źródło (a) Serge Melki; źródło (b) Karel Jakubec)

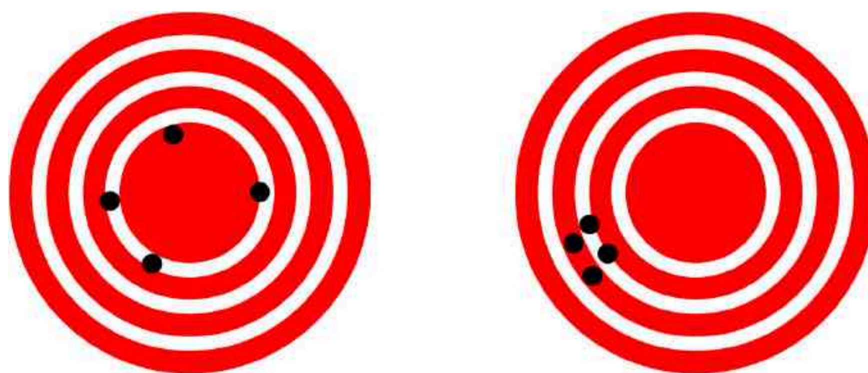
Dokładność i precyzja pomiaru

Nauka opiera się na obserwacji i na przeprowadzonych doświadczeniach – a więc na pomiarach. **Dokładność** (ang. **accuracy**) mówi, jak bardzo pomiar zbliżony jest do zaakceptowanej wartości referencyjnej. Załóżmy, że chcemy zmierzyć wysokość kartki papieru A4. Na opakowaniu napisano, że ma ona 29,7 cm wysokości. Mierzymy wysokość kartki trzykrotnie i otrzymujemy kolejno 29,8 cm, 29,6 cm i 30,0 cm. Te pomiary są dość dokładne, ponieważ są bardzo zbliżone do wartości referencyjnej równej 29,7 cm. Jeżeli natomiast uzyskalibyśmy pomiar równy 32 cm, nie byłby on dokładny i oznaczałby popełnienie tzw. błędu grubego podczas pomiaru. Zauważ, że aby mówić o dokładności, musimy wiedzieć, jaka jest wartość referencyjna.

Precyzja (ang. **precision**) pomiaru określa, jak bardzo różnią się od siebie niezależne pomiary wykonywane w tych samych warunkach. Wróćmy do przykładu z kartką papieru. Jednym ze sposobów określenia precyzji jest obliczenie różnicy między największą a najmniejszą wartością pomiaru. W tym przypadku najmniejszą otrzymaną wartością było 29,6 cm, a największą, poprawną 30,0 cm, więc różnica między nimi równa jest 0,4 cm. Pomiary te są względnie

precyzyjne, ponieważ ich wartości nie różnią się od siebie znacznie. Jednak pomiary 26,5 cm, 29,1 cm i 31,3 cm nie byłyby zbyt precyzyjne, ponieważ różnica między nimi jest znaczna. Zauważ, że aby określić precyzję, potrzebne są jedynie wyniki pomiarów, nie musimy wiedzieć, jaka jest wartość referencyjna.

Pomiary przedstawione w przykładzie z kartką papieru są dokładne oraz precyzyjne, ale zdarza się, że dokładne pomiary nie są precyzyjne lub że precyzyjne pomiary nie są dokładne. Załóżmy, że przy pomocy urządzenia GPS próbujesz znaleźć położenie restauracji. Wyobraź sobie, że restauracja znajduje się na mapie z naniesionym wzorem tarczy strzelniczej (restauracja znajduje się w jej środku), a każda próba zlokalizowania jej przez GPS oznaczana jest czarną kropką. Jak widać, na Rysunku 1.11 (a) pomiary GPS są od siebie oddalone, ale wszystkie znajdują się względnie blisko środka tarczy. Jest to równoznaczne z małą precyzją i dużą dokładnością systemu pomiarowego. Na Rysunku 1.11 (b) pomiary są położone blisko siebie, ale wszystkie są oddalone od środka tarczy. Świadczy to o dużej precyzji i małej dokładności systemu pomiarowego.



Rysunek 1.11 Przy pomocy urządzenia GPS próbujemy odnaleźć restaurację znajdującą się na samym środku tarczy. Czarne punkty pokazują poszczególne próby zlokalizowania restauracji. a) Punkty znajdują się w sporej odległości od siebie, ale wszystkie dość blisko restauracji, co świadczy o wysokiej dokładności. b) Punkty znajdują się blisko siebie, co świadczy o wysokiej precyzji, ale położone są daleko od restauracji, co z kolei świadczy o niskiej dokładności. (Źródło: Dark Evil)

Dokładność, precyzja, niepewność i błąd pomiaru

Precyzja pomiarów związana jest z **niepewnością pomiarową** (ang. **uncertainty**), a dokładność z **błędem pomiaru** (ang. **discrepancy**), czyli rozbieżnością między dobrze znaną wartością referencyjną a obliczoną. Niepewność określa, jak bardzo poszczególne pomiary różnią się między sobą ze względu na statystyczny charakter czynności pomiarowych. Błąd pomiaru to różnica między wartością zmierzoną a wartością oczekiwaną, dzięki znajomości znanego standardu.

Istnieje wiele różnych metod obliczania niepewności – wybór odpowiedniej z nich zależy od problemu. Czasami należy obliczyć różnicę między największą a najmniejszą zmierzoną wartością, czasem trzeba znać wartość odchylenia standardowego pomiarów. Jeśli pomiary nie są zbyt precyzyjne, niepewność pomiarowa jest wysoka. Jeśli z kolei nie są dokładne, to podczas pomiarów popełniany jest, mniej lub bardziej świadomie, duży błąd pomiarowy.

Wróćmy raz jeszcze do przykładu z mierzeniem długości kartki papieru: nasze pomiary były równe 29,8 cm, 29,6 cm i 30,0 cm, podczas gdy na opakowaniu podano wartość 29,7 cm. Możemy obliczyć średnią arytmetyczną z uzyskanych pomiarów. W takim przypadku otrzymamy 29,8 cm, a za niepewność pomiaru będzie można przyjąć 29,8 cm - 29,7 cm = 0,1 cm – wartość ta stanowi wymierną reprezentację dokładności. W analizowanym przypadku niepewność pomiaru wyniesie 30,0 cm - 29,6 cm = 0,4 cm. Powiemy wówczas, że długość kartki papieru to 29,8 cm plus minus 0,4 cm. Niepewność pomiaru A często zapisuje się jako ΔA (czytaj „delta A”), a więc wynik pomiaru należy zapisać w następujący sposób: $A \pm \Delta A$. Powiemy zatem, że długość kartki papieru jest równa 29,8 cm ± 0,4 cm. Błąd pomiaru wynosi 0,1 cm i jest mniejszy od niepewności pomiaru równej 0,4 cm. W związku z tym możemy powiedzieć, że wartość zmierzona jest zgodna z wartością referencyjną z określoną dokładnością.

Oto niektóre z czynników mogących mieć wpływ na wzrost niepewności pomiarowej:

- ograniczenia urządzeń pomiarowych;
- umiejętności osoby dokonującej pomiaru;
- nieregularny kształt mierzonego obiektu;
- wszystkie inne czynniki mające wpływ na wynik (są one w dużym stopniu zależne od sytuacji).

W omawianym przypadku czynniki mogłyby być następujące: podziałka linijki ma dokładność do 1 mm, osoba dokonująca pomiaru ma słaby wzrok, na jednym końcu skala linijki jest wytarta, krawędź kartki jest z jednej strony dłuż-

sza. W każdym przypadku w celu określenia precyzji pomiaru musi zostać obliczona niepewność. Jeśli znamy wartość referencyjną, warto również obliczyć różnicę bezwzględną (lub względną) pomiędzy otrzymaną wartością średnią (zmierzoną) a wartością referencyjną.

Niepewność względna

Niepewność pomiarową można przedstawić również jako procent zmierzonej wartości. Jeśli pomiar A obarczony jest niepewnością ΔA, to **niepewność względną** (ang. **relative uncertainty**) definiuje się jako

$$\text{Niepewność względna} = \frac{\Delta A}{A} \cdot 100\%.$$

Przykład 1.7

Obliczanie niepewności względnej: siatka jabłek

W pewnym sklepie spożywczym jabłka pakowane są w siatki po 5 kg. Powiedzmy, że w ciągu miesiąca kupiliśmy cztery siatki jabłek i za każdym razem ważyliśmy je. Wyniki pomiarów były następujące:

- Tydzień 1.: 4,8 kg
- Tydzień 2.: 5,3 kg
- Tydzień 3.: 4,9 kg
- Tydzień 4.: 5,4 kg

Możemy stwierdzić, że średnia wartość jest jedna i wynosi $(5{,}1 \pm 0{,}2)\ \text{kg}$. Jaka jest niepewność względna wagi siatki jabłek?

Strategia rozwiązania

Zauważ, że średnia waga siatki jabłek A jest równa 5,1 kg. Niepewność pomiarowaΔA jest równa 0,2 kg. W celu wyznaczenia niepewności względnej korzystamy z równania:

$$\text{Niepewność względna} = \frac{\Delta A}{A} \cdot 100\%. \tag{1.1}$$

Rozwiązanie

Po podstawieniu danych do wzoru otrzymujemy:

$$\text{Niepewność względna} = \frac{\Delta A}{A} \cdot 100\% = \frac{0{,}2\ \text{kg}}{5{,}1\ \text{kg}} \cdot 100\% = 3{,}9\% \approx 4\%$$

Znaczenie

Możemy wywnioskować, że średnia waga siatki jabłek jest równa 5,1 kg z niepewnością względną wynoszącą 4%. Zauważ, że niepewność względna jest bezwymiarowa – jednostki masy $\Delta A = 0{,}2\ \text{kg}$ oraz $A = 5{,}1\ \text{kg}$ skróciły się.



1.8 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Trener szkolnej sekcji biegów kupił nowy stoper. Według instrukcji niepewność stopera wynosi $\pm 0{,}05\ \text{s}$. Biegający w tej sekcji uczniowie na dystansie 100 m uzyskują wyniki od 11,49 s do 15,01 s. Na ostatnich zawodach zwycięzca przebiegł ten dystans w 12,04 s, a zdobywca drugiego miejsca w 12,07 s. Czy nowy stoper przyda się trenerowi? Dlaczego tak lub dlaczego nie?

Niepewność w obliczeniach

Wszystkie obliczenia oparte na pomiarach różnych wielkości obarczone są jakąś niepewnością. Na przykład pole powierzchni podłogi obliczone na podstawie długości i szerokości ma niepewność, ponieważ mają ją również długość i szerokość. Jak duża jest niepewność wartości obliczanej poprzez mnożenie lub dzielenie? Jeżeli pomiary, z których korzystasz podczas obliczeń, mają małe niepewności (nie większe niż kilka procent), w celu obliczenia niepewności wyniku możesz skorzystać z **metody dodawania niepewności procentowych** (ang. **method of adding percents**).

Według tej metody *wyrażona w procentach niepewność wartości, obliczonej na podstawie mnożenia lub dzielenia, jest sumą wyrażonych w procentach niepewności poszczególnych wartości użytych podczas obliczeń*. Jeśli na przykład podłoga ma długość równą 4,00 m oraz szerokość równą 3,00 m, a wartości te obarczone są odpowiednio niepewnością 2% i 1%, to pole powierzchni tej podłogi jest równe $10{,}0\ \mathrm{m}^2$, a niepewność pomiaru wynosi 3%. (Wartość niepewności możemy przedstawić też jako $0{,}36\ \mathrm{m}^2$, ponieważ $12{,}0\ \mathrm{m}^2 \cdot 0{,}03 = 0{,}36\ \mathrm{m}^2$, co zaokrąglamy do $0{,}4\ \mathrm{m}^2$, ponieważ wartość pola powierzchni podłogi podana jest z dokładnością do jednej dziesiątej metra).

Precyzja przyrządów pomiarowych i cyfry znaczące

Ważnym czynnikiem wpływającym na precyzję pomiaru jest używany przez nas przyrząd. Ogólnie rzecz biorąc, precyzyjny przyrząd powinien umożliwiać dokonywanie pomiarów z dokładnością do bardzo małych wartości. Przy pomocy zwykłej linijki możemy dokonywać pomiarów z dokładnością do 1 mm, podczas gdy pomiary dokonane przy pomocy suwmiarki mogą charakteryzować się dokładnością do 0,02 mm. Suwmiarka jest przyrządem bardziej precyzyjnym, ponieważ umożliwia wykrycie bardzo małych różnic w długości. Im bardziej precyzyjny przyrząd, tym wyższa precyzja pomiaru.

Wynik pomiaru należy zapisać tak, aby liczba cyfr po przecinku zgadzała się z liczbą cyfr wskazywanych przez przyrząd pomiarowy. Jeżeli mierzymy długość pręta przy pomocy zwykłej linijki, możemy stwierdzić, że ma on długość 36,7 cm. Nie możemy zapisać wartości 36,71 cm, ponieważ nasz przyrząd pomiarowy nie ma wystarczającej precyzji, aby mierzyć obiekty z dokładnością do setnych części centymetra. Należy zauważyć, że ostatnia cyfra musiała w jakiś sposób zostać oszacowana przez osobę dokonującą pomiaru. Jeżeli osoba mierząca wspomniany pręt przy pomocy linijki widzi, że jego długość zawiera się między 36,6 cm a 36,7 cm, musi ona oszacować wartość cyfry po przecinku. Zasada **cyfr znaczących** (ang. **significant figures**) mówi, że *ostatnia cyfra pomiaru jest pierwszą cyfrą obarczoną niepewnością pomiarową*. Aby określić liczbę cyfr znaczących, należy policzyć kolejne cyfry wartości. Na przykład wartość 36,7 cm składa się z trzech cyfr, co oznacza, że ma trzy cyfry znaczące. Liczba cyfr znaczących jest związana z precyzją przyrządu pomiarowego.

Zera

Podczas omawiania zagadnienia cyfr znaczących należy szczególnie skupić się na zerach. Zera w liczbie 0,053 nie są cyframi znaczącymi, ponieważ nie wpływają na wartość, otaczają jedynie przecinek. Liczba 0,053 ma dwie cyfry znaczące. Zera w liczbie 10,053 są cyframi znaczącymi – liczba ta ma pięć cyfr znaczących. Zera w liczbie 1300 mogą, ale nie muszą być cyframi znaczącymi – zależy to od sposobu zapisu. Mogą one oznaczać, że wartość liczby jest znana do ostatniej cyfry, mogą także być cyframi wypełniającymi. 1300 może mieć więc dwie, trzy lub cztery cyfry znaczące. Aby uniknąć niejednoznaczności, powinniśmy skorzystać z notacji wykładniczej. 1300 możemy zapisać jako $1{,}3 \cdot 10^3$, $1{,}30 \cdot 10^3$ lub $1{,}300 \cdot 10^3$ w zależności od tego, czy ma dwie, trzy czy cztery cyfry znaczące. *Zera są cyframi znaczącymi, chyba że służą jedynie jako cyfry wypełniające*.

Cyfry znaczące w obliczeniach

Jeżeli podczas obliczeń operujemy na pomiarach o różnym stopniu precyzji, *liczba cyfr znaczących wyniku nie może być większa niż liczba cyfr znaczących pomiaru o najmniejszej precyzji*. Wyróżniamy dwie zasady: jedną dla mnożenia i dzielenia, a drugą dla dodawania i odejmowania.

1. *Jeśli chodzi o mnożenie i dzielenie, wynik powinien mieć taką samą liczbę cyfr znaczących jak wartość pomiaru o najniższym stopniu precyzji*. Jeśli znamy promień koła, możemy obliczyć jego pole powierzchni, korzystając ze wzoru $A = \pi r^2$. Sprawdźmy, ile cyfr znaczących ma wartość pola koła, którego promień jest równy $r = 1{,}2\ \mathrm{m}$ (ma dwie cyfry znaczące). Używając kalkulatora o ośmiocyfrowym wyświetlaczu, otrzymalibyśmy

$$A = \pi r^2 = 3{,}141\,592\,7 \ldots \cdot (1{,}2\ \mathrm{m})^2 = 4{,}523\,893\,4\ \mathrm{m}^2.$$

Jednak wartość promienia podana jest z dokładnością do dwóch cyfr znaczących, co oznacza, że otrzymany wynik należy zaokrąglić:

$$A = 4{,}5\ \mathrm{m}^2,$$

mimo tego, że π podane jest z dokładnością do ośmiu cyfr znaczących.

2. *W przypadku dodawania lub odejmowania wynik nie może mieć więcej cyfr po przecinku niż najmniej precyzyjny pomiar.* Załóżmy, że w sklepie spożywczym kupujemy 7,56 kg ziemniaków – ważymy je przy pomocy wagi o precyzji 0,01 kg. W naszym laboratorium przy pomocy wagi o precyzji 0,001 kg odmierzamy 6,052 kg ziemniaków i zostawiamy je tam. Następnie wracamy do domu, skąd zabieramy 13,7 kg ziemniaków, zważonych przy pomocy wagi łazienkowej o precyzji 0,1 kg. Ile kilogramów ziemniaków mamy i ilu cyfr znaczących powinniśmy użyć przy formułowaniu odpowiedzi? Masę otrzymujemy dzięki prostemu dodawaniu i odejmowaniu:

$$(7{,}56\,\mathrm{kg} - 6{,}052\,\mathrm{kg}) + 13{,}7\,\mathrm{kg} = 15{,}208\,\mathrm{kg}\,.$$

Po dokonaniu obliczeń znajdujemy pomiar o najniższej precyzji: 13,7 kg. Wartość ta podana jest z dokładnością do jednego miejsca po przecinku, a więc wynik końcowy również powinien być podany z taką dokładnością. Zaokrąglamy otrzymany wcześniej wynik do części dziesiętnych i uzyskujemy 15,2 kg.

Cyfry znaczące w tym podręczniku

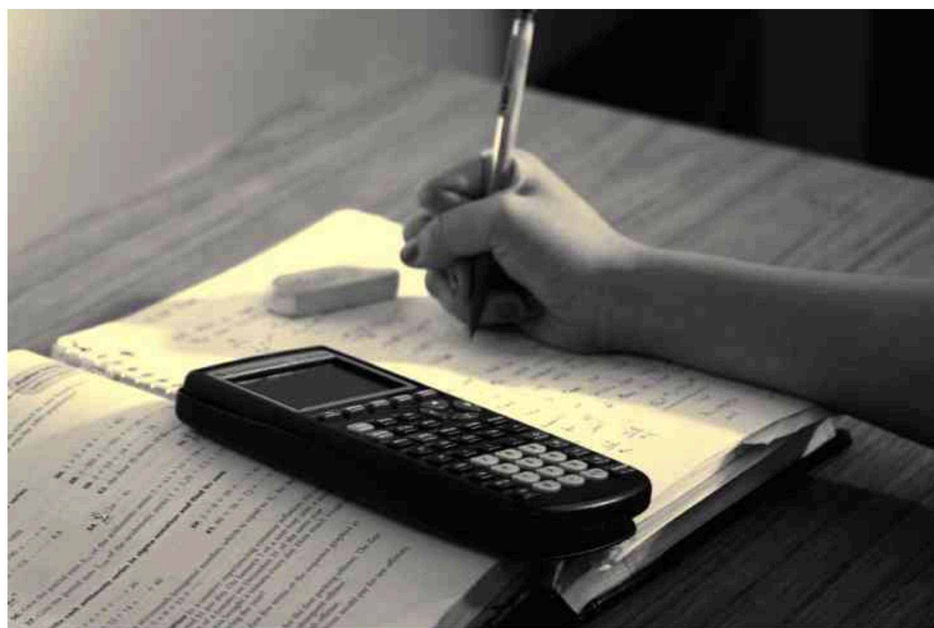
Większość liczb w tej książce podawana jest z dokładnością do trzech cyfr znaczących. Poza tym wszystkie wartości przedstawiane w danym przykładzie mają odpowiednią liczbę cyfr znaczących. Na przykład wynik podawany jest z dokładnością do trzech cyfr znaczących, ponieważ wartość początkowa również miała taką dokładność. Jeśli wartość początkowa ma mniej cyfr znaczących, wynik również będzie miał ich mniej. Liczba cyfr znaczących jest również odpowiednio dobrana do sytuacji. W przypadku niektórych dziedzin, zwłaszcza w optyce, potrzebne są liczby o wysokim stopniu precyzji. Jeżeli podana jest *dokładna* wartość liczby, jak na przykład 2 we wzorze na obwód koła, $C = 2\pi r$, nie ma ona wpływu na liczbę cyfr znaczących wyniku. Przeliczniki, takie jak na przykład $100\ \mathrm{cm} = 1\ \mathrm{m}$, są uznawane za wartości dokładne i również nie mają wpływu na liczbę cyfr znaczących wyniku.

1.7 | Rozwiązywanie zadań z zakresu fizyki

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- planować strategię prowadzącą do rozwiązania;
- obliczać wynik;
- sprawdzać poprawność obliczeń oraz wyciągać wnioski.



Rysunek 1.12 Rozwiązywanie zadań tekstowych jest konieczne, aby osiągnąć wprawę. (Źródło: „scui3asteveo”/Flickr)

Umiejętność rozwiązywania zadań jest niezbędna, jeśli chcemy zrozumieć fizykę. Co więcej, umiejętność zastosowania praw fizyki – reprezentowanych zazwyczaj przez wzory – do danej sytuacji stanowi istotną formę wiedzy. Jest to forma o wiele bardziej przydatna niż znajomość definicji. Zdolności analityczne oraz zdolność rozwiązywania problemów mogą być pomocne, kiedy spotkamy się z nową sytuacją, podczas gdy definicje nie zawierają rozwiązania dla każdego możliwego scenariusza. Zdolności analityczne przydają się zarówno podczas rozwiązywania problemów opisanych w tym rozdziale, jak i w codziennym życiu.

Pewnie zdajemy sobie sprawę z tego, że trudno jest znaleźć rozwiązanie zadania bez pewnej dozy kreatywności i intuicji. Nie istnieje algorytm, który zadziała w każdej sytuacji. Kreatywność oraz intuicja rozwijają się wraz z

doświadczeniem. Kiedy nabierze się wprawy, podstawowe problemy rozwiązuje się niemal automatycznie. Można podczas czytania rozwiązywać przykłady znajdujące się w tekście. Można też rozwiązywać zadania znajdujące się na końcu podrozdziału – najlepiej zacząć od tych prostszych, co doda nam pewności siebie, a następnie próbować rozwiązywać coraz trudniejsze. Z czasem zaczniemy dostrzegać znaczenie fizyki w otaczającym nas świecie i będziemy mogli stosować jej prawa w sytuacjach, z którymi spotkamy się w codziennym życiu, tak jak opisano to w wielu miejscach w tej książce.

Chociaż nie ma prostego algorytmu, który pozwoliłby rozwiązać każdy problem, opisana poniżej metoda ułatwia proces szukania rozwiązania i sprawia, że staje się on bardziej zrozumiały. Trzy etapy, które możemy wyróżnić podczas stosowania tej metody, to stworzenie strategii rozwiązania, rozwiązanie i sprawdzenie. Metoda ta jest stosowana podczas prezentowania rozwiązań zadań w tym podręczniku. Teraz przedstawimy każdy etap po kolei.

Strategia rozwiązywania zadań

Strategia jest początkowym etapem rozwiązania zadania. Należy rozważyć, na czym dokładnie polega problem i zaproponować strategię, umożliwiającą znalezienie rozwiązania. Poniższe rady mogą być pomocne podczas planowania strategii:

- *Analiza sytuacji pomoże ci stwierdzić, które prawa fizyki są istotne w danym zagadnieniu*. Warto na początku *stworzyć prosty plan*. Często trzeba zdecydować, którą opcję wybrać – możesz to zaznaczyć na swoim planie. Kiedy już stwierdzisz które prawa fizyki odgrywają rolę w rozważanym zagadnieniu, prościej będzie ci znaleźć i zastosować wzory opisujące te prawa. Zastosowanie odpowiedniego wzoru jest kluczowe, ale powinieneś pamiętać, że wzory stanowią jedynie reprezentację zasad fizyki, praw przyrody czy też związków zachodzących między różnymi wielkościami fizycznymi. Jeżeli nie zrozumiesz zagadnienia, uzyskanie wyniku na niewiele się zda.
- *Stwórz listę danych oraz informacji, które możesz wywnioskować na podstawie treści zadania*. Problemy często przedstawione są w bardzo zwięzły sposób i na pierwszy rzut oka możemy nie wiedzieć, co jest dane. W tym przypadku plan może być również bardzo przydatny. Zidentyfikowanie danych jest szczególnie ważne podczas stosowania fizyki w codziennych sytuacjach. Jeśli czytamy, że obiekt zatrzymał się, oznacza to, że jego prędkość jest równa zero. Poza tym poprzez zastosowanie układu współrzędnych możemy przyjąć, że początkowy czas oraz położenie były równe zero.
- *Zastanów się, czego szukasz (wypisz szukane wielkości)*. Szczególnie w przypadku problemów złożonych nie zawsze jest oczywiste jakie wielkości i w jakiej kolejności powinniśmy znaleźć. Stworzenie listy pomoże nam uporać się z tym problemem.
- *Zastanów się, które wielkości fizyczne pomogą ci w znalezieniu rozwiązania*. Jako że prawa fizyki często przedstawiane są w postaci równań matematycznych, pomocna może być lista znanych i nieznanych wartości. W najprostszym przypadku równanie zawiera tylko jedną niewiadomą – co oznacza, że wartości wszystkich pozostałych zmiennych są znane. Obliczenie wartości niewiadomej jest wtedy bardzo łatwe. Jeśli równanie zawiera więcej niewiadomych, konieczne jest rozwiązanie innych równań. W pewnych przypadkach, aby znaleźć szukaną wartość, należy najpierw obliczyć kilka innych. Bardzo istotne jest wtedy pamiętanie o prawach fizyki – w przeciwnym przypadku możemy zagubić się w gąszczu wzorów. Aby uzyskać wynik końcowy, być może będziesz musiał użyć dwóch (lub więcej) różnych wzorów.

Rozwiązanie

Rozwiązanie to ten etap, w którym wykonywane są obliczenia. *Podstaw dane wraz z jednostkami do wzoru, aby uzyskać wynik*. Skorzystaj z algebry, analizy matematycznej, geometrii lub arytmetyki, zależnie, od tego, czego potrzebujesz, aby znaleźć szukane wartości. Podczas obliczeń nie możesz zapominać o jednostkach. Ten etap jest bardzo ważny – to w nim uzyskujemy wyniki liczbowe wraz z jednostkami. Pamiętaj jednak, że to jedynie jedna trzecia całego procesu rozwiązywania zadania – istnieją również dwa inne etapy.

Sprawdzenie

Kiedy już otrzymasz wyniki obliczeń, możesz pomyśleć, że to koniec rozwiązywania zadania. Musisz jednak pamiętać, że fizyka to nie matematyka. Z punktu widzenia fizyki matematyka jest narzędziem pozwalającym zrozumieć naturę otaczającego nas świata. Dlatego po wykonaniu obliczeń powinieneś dokonać sprawdzenia:

- *Sprawdź jednostki.* Jeśli uzyskane w odpowiedzi jednostki są niepoprawne, wtedy będziesz musiał naprawić ten błąd, cofając się do poprzedniego etapu. Jednym ze sposobów na usunięcie tego błędu jest sprawdzenie jednostek we wszystkich użytych wcześniej wzorach. Bądź jednak uważny, gdyż prawidłowa jednostka wartości poszukiwanej nie oznacza jej poprawnej wartości liczbowej.
- *Zastanów się, czy wynik jest zgodny z logiką. Czy to ma sens?* Ten krok jest niezwykle ważny – celem fizyki jest opi-

sywanie świata zgodnie z rzeczywistością. Aby stwierdzić, czy uzyskany wynik ma sens, sprawdź jego wartość, znak oraz jednostkę. Wartość powinna być zbliżona do wartości oszacowanej. Należy porównać ją z innymi wartościami innych, podobnych wielkości. Znak zazwyczaj zawiera informację o zwrocie wielkości wektorowej i powinien być zgodny z oczekiwaniami. Im więcej zadań rozwiążesz, tym szybciej wyrobisz w sobie intuicję, która pomoże ci trafnie ocenić, czy uzyskany wynik ma sens. Na tym etapie wracamy do postrzegania zagadnienia w sposób konceptualny. Jeśli zamiast ograniczać się do mechanicznego rozwiązania zadania potrafisz ocenić, czy odpowiedź ma sens, oznacza to, że naprawdę zrozumiałeś zagadnienie.

- *Zastanów się, czy z odpowiedzi można wyciągnąć wnioski. Co to oznacza?* Ten podpunkt jest konsekwencją pytania: „Czy to ma sens?”. Fizyka próbuje wytłumaczyć otaczający nas świat, a zadania z zakresu fizyki rozwiązujemy, aby dowiedzieć się, jak funkcjonuje przyroda. Jeżeli stwierdzisz, że uzyskana przez ciebie odpowiedź ma sens, powinieneś zastanowić się, co ciekawego ta odpowiedź mówi ci o świecie. Nawet jeśli dana odpowiedź nie wydaje ci się interesująca, możesz zastanowić się nad sposobem, w jaki do niej doszedłeś. Czy sposób ten można by wykorzystać, aby uzyskać odpowiedź na pytanie, które cię interesuje? W dużej mierze dzięki odpowiedziom na takie pytania nauka wciąż posuwa się naprzód.

PODSUMOWANIE ROZDZIAŁU 1

KLUCZOWE POJĘCIA

bezwymiarowa (ang. dimensionless) wielkość o wymiarze $L^0M^0T^0I^0\Theta^0N^0J^0 = 1$ nazywana jest również liczbą o wymiarze 1 lub niemianowaną

brytyjski system miar (ang. English units) układ jednostek miar używany w Stanach Zjednoczonych; korzysta z takich jednostek jak stopa, galon czy funt

błąd pomiaru (ang. discrepancy) różnica między wartością zmierzoną a wartością oczekiwaną lub znanym standardem

cyfry znaczące (ang. significant figures) ich liczba świadczy o precyzji pomiaru

dokładność (ang. accuracy) określa, jak bardzo pomiar zbliżony jest do wartości referencyjnej

fizyka (ang. physics) nauka opisująca związki między energią, masą, materią, przestrzenią i czasem; zgłębia mechanizmy leżące u podstaw zjawisk

jednostka (ang. unit) wzorzec służący do wyrażania i porównywania wartości pomiarów

jednostka pochodna (ang. derived unit) jednostka wyprowadzona na podstawie jednostek podstawowych

jednostka podstawowa (ang. base unit) jednostka opisująca wielkość podstawową danego układu jednostek miar; definiowana jest na podstawie pomiaru wielkości podstawowej

kilogram (ang. kilogram) (kg) jednostka masy w układzie SI

metoda dodawania niepewności procentowych (ang. method of adding percents) niepewność względna wartości obliczonej na podstawie mnożenia lub dzielenia jest sumą niepewności względnych poszczególnych wartości użytych podczas obliczeń

metr (ang. meter) (m) jednostka długości w układzie SI

model (ang. model) reprezentacja czegoś, co nie może być pokazane bezpośrednio

niepewność pomiarowa (ang. uncertainty) liczba mówiąca o tym, jak bardzo poszczególne pomiary różnią się między sobą

niepewność względna (ang. relative uncertainty) stosunek niepewności pomiaru do wartości tego pomiaru; przedstawiana jest w procentach

precyzja (ang. precision) określa, w jakim stopniu różnią się od siebie kolejne pomiary wykonywane w tych samych warunkach

przelicznik (ang. conversion factor) liczba wskazująca, ile razy dana jednostka mieści się w innej

rząd wielkości (ang. order of magnitude) najbliższa wartości liczby potęga liczby 10

sekunda (ang. second) (s) jednostka czasu w układzie SI

spójność wymiarów (ang. dimensionally consistent) mówimy o niej, kiedy wszystkie składniki równania mają taki sam wymiar, a argumenty funkcji matematycznych są liczbami niemianowanymi

system metryczny (ang. metric system) system, w którym daną jednostkę można obliczyć, mnożąc inne jednostki przez potęgi liczby 10

szacowanie (ang. estimation) określenie przybliżonej wartości na podstawie dotychczasowego doświadczenia oraz logicznego rozumowania; szacowania dokonuje się na przykład podczas odpowiedzi na pytania Fermiego

teoria (ang. theory) wytłumaczenie wzorców, według których zachodzą zjawiska; musi być możliwa do przetestowania, poparta dowodami naukowymi oraz wielokrotnie zweryfikowana

układ SI (ang. SI units) międzynarodowy układ jednostek miar, używany przez naukowców w większości krajów; zawiera jednostki takie jak metry, litry czy gramy

wielkość fizyczna (ang. physical quantity) cecha charakterystyczna lub właściwość, którą można zmierzyć lub obliczyć na podstawie innych pomiarów

wielkość pochodna (ang. derived quantity) wielkość fizyczna wyprowadzona na podstawie wielkości podstawowych

wielkość podstawowa (ang. base quantity) taka wielkość fizyczna, na podstawie której wyprowadzić można wszystkie pozostałe wielkości fizyczne

wymiar (ang. dimension) opisuje zależność danej wielkości fizycznej od wielkości podstawowych; wyraża się go za pomocą iloczynu lub potęgi tych wielkości; wymiar wielkości fizycznej ma postać $L^a M^b T^c I^d \Theta^e N^f J^g$ dla wykładników a, b, c, d, e, f oraz g

zasada (ang. law) wzór matematyczny lub zwięzły, ogólny opis schematu zjawiska, poparty dowodami naukowymi i wynikami eksperymentów

NAJWAŻNIEJSZE WZORY

Niepewność względna $\text{Niepewność względna} = \frac{\Delta A}{A} \cdot 100\%$

PODSUMOWANIE

1.1 Zakres stosowalności praw fizyki

- Fizyka zajmuje się odkrywaniem zasad opisujących zjawiska naturalne.
- Fizyka dotyczy szerokiego zakresu długości, masy i czasu. Przedstawianie wartości przy pomocy rzędu wielkości pomaga stwierdzić, w jakiej skali zachodzi dane zjawisko. Dzięki rzędom wielkości można także porównywać ze sobą różne skale.
- Naukowcy próbują opisać otaczający nas świat, tworząc modele oraz formułując teorie i zasady.

1.2 Układy jednostek miar

- Systemy jednostek miar opierają się na niewielkiej liczbie jednostek podstawowych, zdefiniowanych dzięki dokładnym i precyzyjnym pomiarom wielkości podstawowych. Pozostałe jednostki wyprowadzane są na podstawie jednostek podstawowych.
- Wyróżniamy dwa główne systemy jednostek miar: układ SI oraz brytyjski system miar. Naukowcy oraz większość ludzi na świecie korzysta z jednostek układu SI, natomiast Amerykanie w życiu codziennym wciąż używają jednostek brytyjskiego systemu miar.
- Występujące w układzie SI jednostki podstawowe długości, masy i czasu to metr (m), kilogram (kg) oraz sekunda (s).
- Układ SI jest systemem metrycznym, co oznacza, że przedrostki jednostek zależne są od potęgi liczby 10. Przedrostki umożliwiają przeskalowanie jednostki podstawowej na taką, która jest odpowiednia do danego zastosowania.

1.3 Konwersja jednostek

- Aby zamienić daną jednostkę na inną, pomnóż wartość przez przelicznik w taki sposób, aby niechciana jednostka uległa skróceniu.
- Zwróć uwagę na obliczenia zawierające pola powierzchni i objętości. Jednostki podlegają prawom matematyki, więc nie możemy skrócić jednostki podniesionej do kwadratu z jednostką, która jest w pierwszej potędze.

1.4 Analiza wymiarowa

- Wymiar wielkości fizycznej pochodnej wyrażony jest przez wielkości podstawowe, od których ta wielkość pochodzi.
- Wszystkie wzory opisujące zjawiska fizyczne muszą być wymiarowo spójne. Tę wiedzę można wykorzystywać do zapamiętywania praw fizyki, do sprawdzania poprawności wyrażeń, a nawet do formułowania nowych zasad.

1.5 Szacowanie, pytania Fermiego

- Szacowanie jest to określenie przybliżonej wartości na podstawie dotychczasowego doświadczenia oraz logicznego rozumowania. Podczas szacowania pomocne mogą być następujące strategie:
  - Oszacuj większe długości na podstawie mniejszych.
  - Oszacuj pole powierzchni lub objętość na podstawie długości.
  - Oszacuj masę na podstawie objętości lub gęstości.
  - Jeśli wszystko inne zawodzi, ogranicz wartość.

- Wystarczy jedna cyfra znacząca.
- Czy to w ogóle ma sens?

1.6 Cyfry znaczące

- Dokładność pomiaru pozwala ocenić, w jakim stopniu uzyskana wartość zbliżona jest do wartości referencyjnej. Różnicę między tymi wartościami nazywamy błędem pomiaru.
- Precyzja pomiaru pozwala ocenić stopień zgodności kolejnych zmierzonych wartości. Precyzja pomiaru jest związana z niepewnością pomiarową.
- Precyzja przyrządu pomiarowego zależy od tego, jaka jest najmniejsza różnica między pomiarami. Im mniejsza różnica, tym bardziej precyzyjny przyrząd.
- Cyfry znaczące określają precyzję przyrządu pomiarowego.
- W przypadku mnożenia lub dzielenia zmierzonych wartości wynik końcowy nie może mieć więcej cyfr znaczących niż wartość o najniższym stopniu precyzji.
- W przypadku dodawania lub odejmowania zmierzonych wartości liczba cyfr po przecinku wyniku końcowego nie może być większa niż liczba cyfr po przecinku wartości o najniższym stopniu precyzji.

1.7 Rozwiązywanie zadań z zakresu fizyki

W tym podręczniku stosuje się trzy kolejne etapy rozwiązywania zadań z zakresu fizyki. Są to:

- *Strategia rozwiązania zadania*: Zdecyduj, które prawa fizyki związane są z zagadnieniem i zaplanuj strategię wykorzystującą te prawa.
- *Rozwiązanie*: Wykonaj niezbędne obliczenia. Pamiętaj o jednostkach.
- *Sprawdzenie*: Sprawdź rozwiązanie; zastanów się, czy jednostki i znak są poprawne oraz czy uzyskana wartość ma sens. Wyciągnij wnioski.

PYTANIA

1.1 Zakres stosowalności praw fizyki

1. Czym jest fizyka?

2. Niektórzy mówią, że fizyka to „poszukiwanie prostoty”. Jak myślisz, dlaczego taki opis może być uzasadniony?

3. Jeżeli dwie różne teorie opisują doświadczenie w tak samo dobry sposób, to czy jedna z nich może być uznana za bardziej prawidłową niż druga (zakładając, że obie z nich są zgodne z zasadami logiki)?

4. Co decyduje o tym, czy teoria może być uznana za prawidłową?

5. Aby teoria mogła być uznana za prawidłową, spełnione muszą zostać pewne kryteria. Czy kryteria te będą tak samo surowe, jeżeli w efekcie przeprowadzonego doświadczenia uzyskamy wynik oczekiwany i nieoczekiwany?

6. Czy model musi być uniwersalny, czy też może odnosić się do ograniczonej liczby sytuacji? Czy takie same wymagania dotyczą teorii lub zasady fizycznej?

1.2 Układy jednostek miar

7. Wymień zalety systemów metrycznych.

8. Jakie są podstawowe jednostki długości, masy i czasu w układzie SI?

9. Odpowiedz na następujące pytania.
a. Jaka jest różnica między jednostką podstawową a jednostką pochodną?
b. Jaka jest różnica między wielkością podstawową a wielkością pochodną?
c. Jaka jest różnica między jednostką podstawową a wielkością podstawową?

10. Aby zdecydować, który z przedrostków najlepiej zastosować w każdym podpunkcie, zajrzyj do Tabeli 1.1 i do Tabeli 1.3.
a. Chcesz stworzyć tabelę zawierającą odległości Słońca od każdej z planet znajdujących się w Układzie Słonecznym.
b. Chcesz porównać rozmiary najczęściej spotykanych wirusów, aby móc zaprojektować filtr, który będzie je zatrzymywał.
c. Chcesz stworzyć listę zawierającą średnice wszystkich pierwiastków układu okresowego.
d. Chcesz stworzyć listę odległości Ziemi od wszystkich gwiazd, do których dotarł sygnał radiowy wysłany z Ziemi 10 lat temu.

1.6 Cyfry znaczące

11. Opisz następujące związki.

a. Opisz związek między precyzją i niepewnością pomiaru.
b. Opisz związek między dokładnością a błędem pomiaru.

1.7 Rozwiązywanie zadań z zakresu fizyki

12. Jakie informacje są potrzebne, aby stwierdzić za pomocą których wzorów można znaleźć rozwiązanie problemu?

13. Co powinieneś zrobić kiedy uzyskasz już wynik obliczeń?

ZADANIA

1.1 Zakres stosowalności praw fizyki

14. Określ rząd wielkości podanych wielkości fizycznych.
a. Masa atmosfery ziemskiej: $5{,}1 \cdot 10^{18}\ \text{kg}$;
b. Masa atmosfery Księżyca: $25000{,}0\ \text{kg}$;
c. Masa hydrosfery ziemskiej: $1{,}4 \cdot 10^{21}\ \text{kg}$;
d. Masa Ziemi: $5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}$;
e. Masa Księżyca: $7{,}34 \cdot 10^{22}\ \text{kg}$;
f. Odległość Księżyca od Ziemi (półoś wielka): $3{,}84 \cdot 10^{8}\ \text{m}$;
g. Odległość Ziemi od Słońca: $1{,}5 \cdot 10^{11}\ \text{m}$;
h. Promień równikowy Ziemi: $6{,}38 \cdot 10^{6}\ \text{m}$;
i. Masa elektronu: $9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}$;
j. Masa protonu: $1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}$;
k. Masa Słońca: $1{,}99 \cdot 10^{30}\ \text{kg}$.

15. Skorzystaj z rzędów wielkości wyznaczonych w poprzednim zadaniu, aby odpowiedzieć na następujące pytania (odpowiedź podaj, określając rząd wielkości).
a. Masa ilu elektronów jest równa masie protonu?
b. Ile razy masa Słońca jest większa od masy Ziemi?
c. Ile razy odległość Słońca od Ziemi jest większa niż odległość Księżyca od Ziemi?
d. Ile razy masa atmosfery ziemskiej jest większa od masy atmosfery Księżyca?
e. Ile razy masa Ziemi jest większa od masy Księżyca?
f. Ile razy masa Słońca jest większa od masy protonu?

Aby rozwiązać kolejne zadania, musisz skorzystać z Tabeli 1.1, w którym opisano rzędy wielkości długości, masy i czasu.

16. Ile razy uderza serce w ciągu życia człowieka?

17. Pokolenie to około jedna trzecia życia. Ile pokoleń żyło od roku 1 n.e.?

18. Ile razy dłuższe jest ludzkie życie niż średni czas życia jądra atomu?

19. Z ilu atomów składa się bakteria? Przyjmij, że średnia masa atomów budujących bakterię jest 10 razy większa od masy protonu.

20. a. Z ilu komórek zbudowane jest ciało kolibra? Przyjmij, że masa przeciętnej komórki jest 10 razy większa niż masa bakterii.
b. Z ilu komórek zbudowane jest ludzkie ciało. Przyjmij to samo założenie co w poprzednim podpunkcie.

21. Zakładając, że jeden impuls musi się skończyć, zanim wytworzony zostanie następny, jaka jest maksymalna liczba impulsów nerwowych generowanych w ciągu sekundy?

22. Ile operacji zmiennoprzecinkowych może wykonać superkomputer w ciągu roku?

23. Ile operacji zmiennoprzecinkowych może wykonać superkomputer w czasie życia człowieka?

1.2 Układy jednostek miar

24. Podane wartości czasu przedstaw w sekundach, używając notacji naukowej. Na przykład 47 Ts należy zapisać jako $4{,}7 \cdot 10^{13}\ \text{s}$.
a. $980\ \text{Ps}$;
b. $980\ \text{fs}$;
c. $17\ \text{ns}$;
d. $577\ \mu\text{s}$.

25. Przedstaw podane wartości czasu za pomocą takich jednostek, aby otrzymana mantysa była większa niż 1, ale mniejsza niż 1000. Na przykład $7{,}9 \cdot 10^{-2}\ \text{s}$ można zapisać jako $7{,}9\ \text{cs}$ lub $79\ \text{ms}$.
a. $9{,}57 \cdot 10^{5}\ \text{s}$;
b. $0{,}045\ \text{s}$;
c. $5{,}5 \cdot 10^{-7}\ \text{s}$;
d. $3{,}16 \cdot 10^{7}\ \text{s}$.

26. Przedstaw podane wartości długości w metrach, używając notacji naukowej. Na przykład 4,2 Pm należy zapisać jako $4{,}2 \cdot 10^{15}\ \text{m}$.
a. $89\ \text{Tm}$;
b. $89\ \text{pm}$;
c. $711\ \text{mm}$;
d. $0{,}45\ \mu\text{m}$.

27. Przedstaw podane wartości długości za pomocą takich jednostek, aby otrzymana wartość była większa niż 1, ale mniejsza niż 1000. Na przykład $7{,}9 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$ można zapisać jako 7.9 cm lub 79 mm.

a. $7{,}59 \cdot 10^{7}$ m;
b. 0,0074 m;
c. $8{,}8 \cdot 10^{-11}$ m;
d. $1{,}63 \cdot 10^{13}$ m.

28. Przedstaw podane wartości masy w kilogramach, używając notacji naukowej. Na przykład 40 Mg należy zapisać jako $4 \cdot 10^{4}$ kg.
a. 23 mg;
b. 320 Tg;
c. 42 ng;
d. 7 g;
e. 9 Pg.

29. Przedstaw podane wartości masy za pomocą takich jednostek, aby otrzymana wartość była większa niż 1, ale mniejsza niż 1000. Na przykład $7 \cdot 10^{-4}$ kg można zapisać jako 70 cg lub 700 mg.
a. $3{,}8 \cdot 10^{-5}$ kg;
b. $2{,}3 \cdot 10^{17}$ kg;
c. $2{,}4 \cdot 10^{-11}$ kg;
d. $8 \cdot 10^{15}$ kg;
e. $4{,}2 \cdot 10^{-3}$ kg.

1.3 Konwersja jednostek

30. Rząd objętości kuli ziemskiej jest równy 10^{21} m^{3}.
a. Przedstaw tę wartość w metrach sześciennych (km^{3}).
b. Przedstaw tę wartość w milach sześciennych (mi^{3}).
c. Przedstaw tę wartość w centymetrach sześciennych (cm^{3}).

31. Ograniczenie prędkości na niektórych drogach ekspresowych jest równe 100 km/h.
a. Przedstaw tę wartość w metrach na sekundę.
b. Przedstaw tę wartość w milach na godzinę.

32. Samochód jedzie z prędkością 33 m/s.
a. Przedstaw tę wartość w kilometrach na godzinę.
b. Czy kierowca przekroczył dopuszczalną prędkość, jeśli ograniczenie na tej drodze jest równe 90 km/h?

33. Jednostką prędkości w układzie SI jest metr na sekundę (m/s). Być może przyzwyczaiłeś się jednak do tego, że prędkość podaje się w kilometrach na godzinę (km/h) lub w milach na godzinę (mi/h), w zależności od tego, gdzie mieszkasz. Rozwiązanie tego zadania uświadomi ci, że 1 m/s jest równy około 4 km/h lub 2 mi/h – ta wiedza pomoże ci kształtować fizyczną intuicję. Udowodnij, że
a. $1{,}0\ m/s = 3{,}6\ km/h$;
b. $1{,}0\ m/s = 2{,}2\ mi/h$.

34. Boisko do amerykańskiego futbolu ma długość 100 jardów, nie wliczając w to stref końcowych. Jaka jest długość boiska w metrach? (Przyjmij, że $1\ m = 3{,}281$ stopy).

35. Boiska do piłki nożnej mają różne wymiary. Duże boisko może mieć 115 m długości i 85,0 m szerokości. Jaka jest jego powierzchnia w stopach kwadratowych? (Przyjmij, że $1\ m = 3{,}281$ stopy).

36. Jeśli pewien człowiek mierzy 6 stóp i 1,0 cala, to jaki jest jego wzrost w metrach?

37. Mount Everest ma wysokość 29,028 ft i jest najwyższym szczytem na Ziemi. Jaka jest jego wysokość w kilometrach? (Przyjmij, że $1\ m = 3{,}281$ stopy).

38. Zmierzono prędkość dźwięku i uzyskano pomiar 342 m/s. Przedstaw tę wartość w kilometrach na godzinę.

39. Płyty tektoniczne są to olbrzymie segmenty litosfery, które powoli się przemieszczają. Załóżmy, że jedna z tych płyt porusza się ze średnią prędkością równą 4,0 cm na rok.
a. O ile przesuwa się płyta w ciągu 1,0 s?
b. Jaka jest prędkość płyty w kilometrach na milion lat?

40. Średnia odległość Ziemi od Słońca jest równa $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m.

a. Oblicz średnią prędkość ruchu Ziemi po orbicie w metrach na sekundę (przyjmij, że orbita jest okrągła).
b. Przedstaw tę prędkość w milach na godzinę.

41. Gęstość materii jądrowej jest równa około $10^{18}\ kg/m^{3}$. Wiedząc, że 1 ml ma objętość $1\ cm^{3}$, przedstaw gęstość materii jądrowej w megagramach na mikrolitr ($Mg/\mu l$)?

42. Aluminium ma gęstość $2{,}7\ g/cm^{3}$. Podaj jego gęstość w kilogramach na metr sześcienny.

43. Jednostką masy w brytyjskim systemie miar jest funt (lbm). Oblicz gęstość wody w funtach na stopę sześcienną wiedząc, że $1\ lbm = 0{,}454$ kg.

44. Furlong to 220 jardów. Przekształć 1 furlong na dwa tygodnie na milimetry na sekundę.

45. Aby okrążyć koło, potrzebne są 2π radiany (rad), czyli 360°. Ile radianów jest w 1° ?

46. Światło przebywa drogę około $3 \cdot 10^{8}$ m/s. Światłominuta to droga, jaką przebywa światło w ciągu 1 min. Słońce znajduje się $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m od Ziemi. Przedstaw tę odległość w światłominutach.

47. Światłonanosekunda to droga, jaką przebywa światło w ciągu 1 ns. Przekształć 1 stopę na światłonanosekundy.

48. Masa elektronu jest równa $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg. Masa protonu jest równa $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg. Przedstaw masę

protonu przy pomocy masy elektronu.

49. Jedna uncja płynu to około 30 ml. Puszka coli ma objętość 12 uncji płynu. Jaka to objętość w metrach sześciennych?

1.4 Analiza wymiarowa

50. Student próbuje zapamiętać kilka wzorów związanych z geometrią. Zakładamy, że: A oznacza pole powierzchni, V objętość, a pozostałe zmienne opisują długość. Które z następujących wyrażeń są wymiarowo spójne?
a. $V = \pi r^2 h$;
b. $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$;
c. $V = 0{,}5bh$;
d. $V = \pi d^2$;
e. $V = \pi d^3/6$.

51. Dane są wielkości fizyczne s, v, a i t o wymiarach $[s] = \mathrm{L}$, $[v] = \mathrm{LT}^{-1}$, $[a] = \mathrm{LT}^{-2}$ i $[t] = \mathrm{T}$. Czy następujące wyrażenia są wymiarowo spójne?
a. $v^2 = 2as$;
b. $s = vt^2 + 0{,}5at^2$;
c. $v = s/t$;
d. $a = v/t$.

52. Dane są wielkości fizyczne m, s, v, a, i t o wymiarach $[m] = \mathrm{M}$, $[s] = \mathrm{L}$, $[v] = \mathrm{LT}^{-1}$, $[a] = \mathrm{LT}^{-2}$ i $[t] = \mathrm{T}$. Zakładając, że wszystkie wyrażenia są wymiarowo spójne, znajdź wymiar wyrażenia znajdującego się po lewej stronie znaku równości.
a. $F = ma$;
b. $K = \frac{1}{2}mv^2$;
c. $p = mv$;
d. $W = mas$;
e. $L = mvr$.

53. Wielkość s ma wymiar długości, a t ma wymiar czasu. Wielkości v oraz a opisane są następującymi wzorami: $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ oraz $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$.
a. Jaki jest wymiar wielkości v?
b. Jaki jest wymiar wielkości a?
c. Jaki jest wymiar wielkości $\int v\mathrm{d}t$?
d. Jaki jest wymiar wielkości $\int a\mathrm{d}t$?
e. Jaki jest wymiar wielkości $\mathrm{d}a/\mathrm{d}t$?

54. Załóżmy, że $[V] = \mathrm{L}^3$, $[\rho] = \mathrm{ML}^{-3}$ i $[t] = T$.
a. Jaki wymiar ma wyrażenie $\int \rho \mathrm{d}V$?
b. Jaki wymiar ma wyrażenie $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$?
c. Jaki wymiar ma wyrażenie $\rho\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$?

55. Długość łuku s opartego na kącie θ w okręgu o promieniu r można zdefiniować za pomocą wzoru $s = r\theta$. Jakie są wymiary a) s, b) r i c) θ?

1.5 Szacowanie, pytania Fermiego

56. Zakładając, że ludzkie ciało składa się głównie z wody, oszacuj objętość człowieka.

57. Zakładając, że ludzkie ciało składa się głównie z wody, oszacuj liczbę cząstek, z których jest zbudowane. (Masa cząsteczkowa wody jest równa 18 g/mol, a w 1 molu znajduje się około 10^{24} atomów).

58. Oszacuj masę powietrza w sali lekcyjnej.

59. Oszacuj liczbę cząsteczek wchodzących w skład Ziemi, przy założeniu, że średnia masa cząsteczkowa jest równa 30 g/mol. (W 1 molu znajduje się około 10^{24} atomów).

60. Oszacuj pole powierzchni ludzkiego ciała.

61. Ile układów słonecznych potrzeba, żeby przykryć całą Drogę Mleczną?

62. a. Oszacuj gęstość Księżyca.
b. Oszacuj średnicę Księżyca.
c. Wiedząc, że dla znajdującego się na Ziemi obserwatora Księżyc zajmuje około pół stopnia, oszacuj jego odległość od Ziemi.

63. Średnia gęstość Słońca ma rząd $10^3\ \mathrm{kg/m^3}$.
a. Oszacuj długość średnicy Słońca.
b. Wiedząc, że dla znajdującego się na Ziemi obserwatora Słońce zajmuje około pół stopnia, oszacuj jego odległość od Ziemi.

64. Oszacuj masę wirusa.

65. Operacja zmiennoprzecinkowa jest to pojedyncza operacja arytmetyczna, taka jak dodawanie, odejmowanie, mnożenie czy dzielenie.
a. Oszacuj maksymalną liczbę operacji zmiennoprzecinkowych, jakie człowiek może wykonać w ciągu swojego życia.
b. Ile czasu potrzebowałby superkomputer na wykonanie tej liczby operacji zmiennoprzecinkowych?

1.6 Cyfry znaczące

66. Rozważmy równanie $4000/400 = 10{,}0$. Co można powiedzieć o liczbie cyfr znaczących dzielnej i dzielnika, jeśli wiadomo, że liczba cyfr znaczących wyniku jest poprawna?

67. Przypuśćmy, że ważysz się na wadze łazienkowej. Wskazuje ona pomiar 65 kg z niepewnością względną równą 3%. Jaka jest niepewność pomiarowa twojej wagi (w kilogramach)?

68. Miarka dobrej jakości może wskazywać pomiar z niepewnością równą 0,50 cm na każde 20 m. Podaj nie-

pewność względną.

69. Serce niemowlęcia bije w tempie (130 ± 5) uderzeń na minutę. Jaka jest niepewność względna tego pomiaru?

70. Przypuśćmy, że serce człowieka bije średnio w tempie 72,0 uderzeń na minutę. Ile uderzeń wykona serce w ciągu:
a. 2,0 lat;
b. 2,00 lat;
c. 2,000 lat.

71. Puszka zawiera 375 ml coli. Ile napoju zostanie po wypiciu 308 ml?

72. Z dokładnością do ilu cyfr znaczących powinny zostać przedstawione wyniki następujących obliczeń?

a. $106{,}7 \cdot 98{,}2 / (46{,}210 \cdot 1{,}01)$;
b. $(18{,}7)^2$;
c. $1{,}60 \cdot 10^{-19} \cdot 3712$.

73. a. Ile cyfr znaczących występuje w liczbach 99 i 100?
b. Jeżeli niepewność pomiarowa każdej z liczb jest równa 1, jakie są ich niepewności względne?
c. Z której metody określania dokładności lepiej skorzystać w tym przypadku: cyfr znaczących czy niepewności względnej?

74. a. Jeśli niepewność pomiarowa Twojego prędkościomierza jest równa 2,0 km/h przy wskazaniu 90 km/h, jaka jest niepewność względna?
b. Jeśli niepewność względna jest taka sama przy wskazaniu 60 km/h, z jaką największą i najmniejszą prędkością możesz wtedy jechać?

75. a. Ciśnienie krwi człowieka jest równe (120 ± 2) mm Hg. Podaj niepewność względną.
b. Jaka jest niepewność pomiaru 80 mm Hg przy takiej samej niepewności względnej?

76. Pewna osoba mierzy sobie puls, licząc uderzenia serca przez 30 s. Jeżeli w ciągu $(30{,}0 \pm 0{,}5)$ s naliczyła (40 ± 1) uderzeń, jaka jest prędkość bicia jej serca oraz niepewność pomiarowa w uderzeniach na minutę?

77. Oblicz pole powierzchni koła o średnicy 3,102 cm.

78. Określ liczbę cyfr znaczących w następujących wynikach pomiarów:

a. 0,0009;
b. 15 450,0;
c. $6 \cdot 10^3$;
d. 87,990;
e. 30,42.

79. Wykonaj obliczenia i przedstaw wynik przy pomocy odpowiedniej liczby cyfr znaczących.
a. Pewna kobieta ma dwie torby o wadze 13,5 kg i jedną o wadze 10,2 kg. Jaka jest całkowita waga toreb?
b. Siła F działająca na ciało jest równa jego masie m pomożonej przez jego przyspieszenie a. Jeśli przyspieszenie wózka o masie 55 kg jest równe $0{,}0255\ \mathrm{m/s^2}$, jaka siła działa na ten wózek? (Jednostką siły jest *niuton* opisywany symbolem N.)

ZADANIA DODATKOWE

80. Dane jest równanie $y = mt + b$. Wymiarem y jest długość, a wymiarem t czas, nastomiast m oraz b są stałymi. Jakie są wymiary (jednostki) wielkości w układzie SI a) m oraz b) b?

81. Dane jest równanie
$s = s_0 + v_0 t + a_0 t^2/2 + j_0 t^3/6 + S_0 t^4/24 + c t^5/120$,
gdzie s to długość, a t to czas. W jakich jednostkach układu SI wyrażone są następujące wielkości:
a. s_0;
b. v_0;
c. a_0;
d. j_0;
e. S_0;
f. c?

82. a. Prędkościomierz w samochodzie ma niepewność względną równą 5%. W jakim zakresie może mieścić się rzeczywista prędkość, jeśli prędkościomierz wskazuje 90 km/h?
b. Przedstaw uzyskany zakres w milach na godzinę. 1 km = 0,6214 mil.

83. Biegacz ukończył maraton (42,188 km) w czasie 2 h 30 min 12 s. Dystans jest obarczony niepewnością 25 m, a czas niepewnością równą 1 s.
a. Oblicz niepewność względną dystansu.
b. Oblicz niepewność względną uzyskanego czasu.
c. Jaka była średnia szybkość biegacza (w metrach na sekundę)?
d. Jaka jest niepewność średniej szybkości?

84. Boki małego prostopadłościennego pudełka mierzą $(1{,}80 \pm 0{,}1)$ cm, $(2{,}05 \pm 0{,}02)$ cm oraz $(3{,}1 \pm 0{,}1)$ cm. Oblicz objętość tego pudełka oraz jej niepewność w centymetrach sześciennych.

85. Kiedy w krajach Zjednoczonego Królestwa używano

jednostek niemetrycznych, masę mierzono w funtach (1 funt to 0,4539 kilograma).

a. Jeśli jednostka funta obarczona jest niepewnością równą 0,0001 kg, jaka jest jej niepewność względna?

b. Na podstawie wyznaczonej niepewności względnej określ jaka masa w funtach ma niepewność równą 1 kg?

86. Długość i szerokość prostokątnego pokoju są równe $(3{,}955 \pm 0{,}005)\ \mathrm{m}$ oraz $(3{,}050 \pm 0{,}005)\ \mathrm{m}$. Oblicz wartość pola powierzchni pokoju oraz jej niepewność w metrach kwadratowych.

87. Znajdujący się w silniku samochodowym tłok o średnicy $(7{,}500 \pm 0{,}002)\ \mathrm{cm}$ spręża znajdujący się w cylindrze gaz przesuwając się o $(3{,}250 \pm 0{,}001)\ \mathrm{cm}$.

a. O ile zmniejsza się objętość gazu (w centymetrach sześciennych)?

b. Oblicz niepewność pomiarową tej objętości.

ZADANIA TRUDNIEJSZE

88. Bomba atomowa po raz pierwszy została zdetonowana 16 lipca 1945 roku podczas testu Trinity, około 300 km na południe od Los Alamos. W 1947 roku rząd Stanów Zjednoczonych odtajnił nagranie z tego wydarzenia. Na podstawie tego nagrania brytyjski fizyk G. I. Taylor ustalił prędkość, z jaką rozprzestrzeniała się eksplozja. Dzięki analizie wymiarowej mógł następnie określić ilość energii uwolnionej podczas eksplozji. W tamtym czasie była to informacja tajna, w związku z czym Taylor opublikował wyniki swojej analizy dopiero w roku 1950. Możesz spróbować sam odtworzyć przebieg przeprowadzonych przez Taylora obliczeń.

a. Opierając się na intuicji będącej wynikiem wieloletniego doświadczenia, Taylor uznał, że promień r obszaru objętego eksplozją zależny był od czasu t, który upłynął od wybuchu, gęstości powietrza ρ oraz energii początkowej eksplozji E. W oparciu o te założenia stwierdził, że $r = kE^a\rho^b t^c$, gdzie k jest bezwymiarową stałą, natomiast a, b oraz c są nieznanymi wykładnikami. Wiedząc, że $[E] = \mathrm{ML^2T^{-2}}$, określ wartości wykładników tak, aby równanie było wymiarowo spójne.

Wskazówka : Zauważ, że po przekształceniu wzoru uzyskamy $k = rE^{-a}\rho^{-b}t^{-c}$ oraz że $[k] = 1$.

b. Po zapoznaniu się z danymi dotyczącymi środków wybuchowych generujących dużą ilość energii, Taylor stwierdził, że opracowany przez niego wzór jest poprawny, jeśli stała k ma wartość 1,03. Na podstawie nagrania Taylor mógł określić wiele wartości r i związanych z nimi wartości t. Na przykład stwierdził, że po 25,0 ms promień obszaru objętego eksplozją był równy 130,0 m. Skorzystaj z podanych tu wartości, aby obliczyć całkowitą energię uwolnioną podczas eksplozji, w dżulach (J). Przyjmij, że średnia gęstość powietrza jest równa $1{,}25\ \mathrm{kg/m^3}$.

(*Wskazówka*: Aby obliczyć energię w dżulach, musisz się upewnić, że wszystkie wartości, na jakich operujesz, podane są w podstawowych jednostkach układu SI).

c. Energia uwolniona podczas dużych eksplozji często wyrażana jest w tonach trotylu. 1 t trotylu to około 4,2 GJ. Przedstaw wynik uzyskany w podpunkcie b) w kilotonach trotylu. Porównaj swoją odpowiedź z wartością 10 kt trotylu, którą oszacował Enrico Fermi wkrótce po tym, jak zobaczył eksplozję z dystansu, który uznał za bezpieczny. (Podobno Fermi umieścił na ziemi kawałki papieru tuż przed tym jak, dotarła do niego fala uderzeniowa, co pozwoliło mu zaobserwować, jak daleko kawałki te zostały przeniesione).

89. Celem tego ćwiczenia jest pokazanie, że cała idea spójności wymiarów wynika z tego, że nie można dodać do siebie różnych rzeczy. Jeżeli na analizie matematycznej uczyłeś się o szeregach potęgowych, to wiesz, że standardowe funkcje matematyczne, takie jak funkcje trygonometryczne, logarytmiczne lub eksponencjalne, można przedstawić jako nieskończone sumy postaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$, gdzie a_n jest bezwymiarową stałą, n przyjmuje wartości $n = 0{,}1{,}2, \cdots$, a x jest argumentem funkcji (jeżeli nie przerabiałeś jeszcze szeregów potęgowych, po prostu zaufaj nam). Wykorzystaj ten fakt, aby wytłumaczyć dlaczego definicja spójności wymiarów sprowadza się tylko do tego, aby wszystkie składniki w równaniu miały ten sam wymiar. Wzór ten sugeruje, że argumenty standardowych funkcji matematycznych powinny być bezwymiarowe, a więc tego ostatniego warunku nie trzeba zawierać w definicji spójności wymiarowej.

2 | WEKTORY



Rysunek 2.1 Drogowskazy zawierają informacje o odległościach i kierunkach, w jakich znajdują się różne miejscowości. Odległość, nazywana w fizyce drogą, jest wielkością skalarną. Jeśli chcemy dostać się w dane miejsce, nie wystarczy, że wiemy, jak daleko się ono znajduje, musimy znać również kierunek, w którym trzeba się udać w stosunku do bieżącego położenia. Kierunek oraz odległość tworzą wektor, nazywany wektorem przemieszczenia, możemy więc powiedzieć, że drogowskazy zawierają informacje o wektorach przemieszczenia. (Źródło: modyfikacja pracy „studio tdes”/Flickr)

Treść rozdziału

Wstęp

Wektory stanowią ważne zagadnienie w fizyce oraz inżynierii. Wiele podstawowych wielkości fizycznych to wielkości wektorowe. Należą do nich m.in.: przemieszczenie, prędkość, siła, wektor pola elektrycznego oraz wektor pola magnetycznego. Obliczenie ich iloczynu wektorowego pozwala na zdefiniowanie kolejnych wielkości wektorowych, takich jak moment obrotowy lub moment pędu. Poprzez obliczenie iloczynu skalarnego wielkości wektorowych możemy uzyskać wielkości skalarne, takie jak na przykład energia. Krótko mówiąc, wektory w fizyce pełnią tak podstawową funkcję, jak zdania w literaturze.

Wektory reprezentowane są w przestrzeni euklidesowej jedno-, dwu- lub trójwymiarowej jako strzałki. Wektory można dodawać, odejmować lub mnożyć. Rachunek wektorowy odgrywa znaczącą rolę w wielu dziedzinach fizyki. W tym rozdziale skupimy się na jego zastosowaniach w działach takich jak mechanika oraz elektryczność i magnetyzm.

2.1 | Skalary i wektory

Cel dydaktyczny

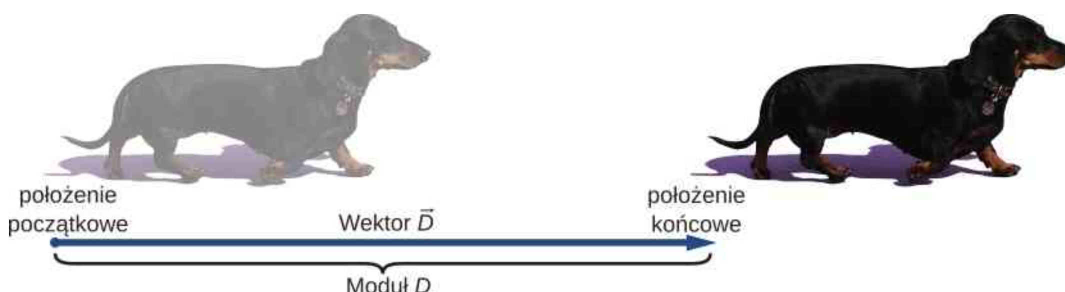
W tym podrozdziale nauczysz się:

- różnic między wielkościami skalarnymi i wektorowymi;
- określać moduł i kierunek wektora;
- mnożyć wielkości wektorowe przez skalar;
- dodawać i odejmować wielkości wektorowe w przestrzeni jednowymiarowej;
- stosować metodę graficzną dodawania i odejmowania wektorów leżących na płaszczyźnie;
- rozpoznawać równanie wektorowe.

Wiele wielkości fizycznych można opisać, podając liczbę oraz odpowiednią jednostkę. Możemy powiedzieć na przykład „lekcja trwa 45 minut”, „bak w moim samochodzie ma pojemność 65 l” lub „odległość między tymi słupami to 100 m”. Wielkości, które można określić w ten sposób, nazywamy **wielkościami skalarnymi** (ang. **scalar quantity**). Skalar oznacza liczbę. Czas, masa, droga, długość, objętość, temperatura oraz energia są przykładami wielkości *skalarnych*.

Wielkości skalarne przedstawiane przy pomocy tych samych jednostek mogą być dodawane lub odejmowane tak jak pozostałe liczby. Na przykład lekcja, która skończy się 10 min przed czasem, będzie trwała $45 \text{ min} - 10 \text{ min} = 35 \text{ min}$. Całkowita energia zawarta w bananie, który ma 90 kalorii, oraz w pączku, który ma 200 kalorii, jest równa $90 \text{ cal} + 200 \text{ cal} = 290 \text{ cal}$. W wyniku mnożenia wielkości skalarnej przez liczbę otrzymamy tę samą liczbę, choć o innej wartości. Przykładowo, jeśli zjedzone przez nas wczoraj śniadanie miało 200 kalorii, a to, które zjedliśmy dziś, było 4 razy bardziej kaloryczne, to energia dzisiejszego śniadania była równa $4 \cdot 200 \text{ cal} = 800 \text{ cal}$. Wielkości skalarne mogą być mnożone lub dzielone przez siebie nawzajem. Wynikiem takich działań są pochodne wielkości skalarne. Jeśli pociąg przebywa drogę 100 km w ciągu 1,0 h, oznacza to, że jedzie ze średnią szybkością $100 \text{ km}/1{,}0 \text{ h} = 100 \text{ km/h} = 27{,}8 \text{ m/s}$, gdzie szybkość jest pochodną wielkością skalarną, otrzymaną w wyniku dzielenia drogi przez czas.

Do opisu wielu wielkości fizycznych nie wystarczą jednak liczba i jednostka. Jeśli straż przybrzeżna wysyła jednostkę ratunkową, nie wystarczy, że zna odległość od miejsca, z którego wysłano sygnał SOS, musi również znać kierunek, z którego ten sygnał dochodzi. Wielkości fizyczne, które opisuje się, podając liczbę jednostek (długość) oraz kierunek, nazywamy **wielkościami wektorowymi** (ang. **vector quantity**). Należą do nich przemieszczenie, prędkość, siła oraz moment siły. Wielkości wektorowe reprezentowane są przez obiekty matematyczne zwane **wektorami** (ang. **vector**) (Rysunek 2.2). Wektory można dodawać lub odejmować, można je również mnożyć przez skalar lub przez inny wektor, natomiast dzielenie wektora przez skalar to mnożenie przez odwrotność skalara.

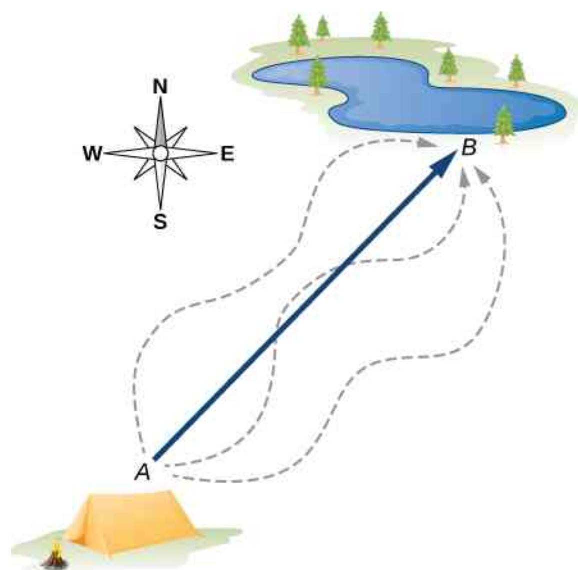


Rysunek 2.2 Wektor rysujemy od punktu zaczepienia (nazywanego też początkiem wektora) do punktu końcowego (nazywanego też końcem wektora) oznaczonego grotem strzałki. Moduł wektora jest równy jego długości – jest to liczba dodatnia. (Źródło: modyfikacja pracy Cate Sevilla)

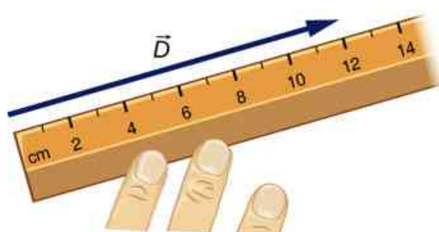
Na początku zapoznamy się z metodą graficzną dodawania i odejmowania wektorów – pomoże ci to zrozumieć podstawowe pojęcia i nauczyć się odpowiedniego sposobu myślenia. W rzeczywistości podczas rozwiązywania zadań korzysta się z metod analitycznych, o czym wkrótce się przekonamy. Metody analityczne są dokładniejsze, a wykonywane w ich przypadku obliczenia bardzo proste. Aby odróżnić wielkości skalarne od wektorowych, przyjmiemy, że pochylona litera ze strzałką u góry oznacza wektor. Na przykład drogę równą 2,0 km, a więc wielkość skalarną, zapiszemy jako $d = 2{,}0 \text{ km}$, natomiast przemieszczenie w konkretnym kierunku, równe 2,0 km zapiszemy jako $\vec{d}$, ponieważ jest to wielkość wektorowa.

Wyobraź sobie, że jesteś z przyjacielem na kempingu i mówisz mu, że odkryłeś fantastyczne miejsce do wędkowania, 6 km od twojego namiotu. Jeśli nie powiesz, w jakim kierunku od obozowiska znajduje się to miejsce, twój przyjaciel najprawdopodobniej go nie znajdzie, ponieważ nie podając kierunku określiłeś jedynie okrąg, na którego obwodzie znajduje się to miejsce. Możesz powiedzieć na przykład „Idź 6 km na północny wschód od mojego namiotu”. Krótko mówiąc, musisz podać *dwie* informacje — odległość (6 km) oraz kierunek (północny wschód).

Przemieszczenie jest to ogólne pojęcie opisujące *zmianę położenia*, jak na przykład podczas wędrówki z namiotu do miejsca wędkowania. Przemieszczenie jest przykładem wielkości wektorowej. Jeśli idziesz od namiotu (położenie A) do jeziora (położenie B), jak przedstawiono na Rysunku 2.3, wektor $\vec{D}$, reprezentujący Twoje **przemieszczenie** (ang. **displacement**), przedstawia się za pomocą strzałki z początkiem w punkcie A i końcem w punkcie B. Grot strzałki oznacza koniec wektora. Kierunek strzałki jest kierunkiem wektora przemieszczenia $\vec{D}$. Długość strzałki przedstawia **moduł** (ang. **magnitude**) D wektora $\vec{D}$. W tym przypadku jest to $D = 6\text{ km}$. Ponieważ moduł wektora jest jego długością, a więc liczbą dodatnią, moduł można również zapisać, obejmując symbol wektora wartością bezwzględną: $D \equiv \left|\vec{D}\right|$. Aby rozwiązać zadanie dotyczące wektorów graficznie, musimy narysować wektor $\vec{D}$ w odpowiedniej skali. Jeśli przyjmiemy, że jedna jednostka długości (1 km) na rysunku będzie odpowiadała długości $u = 2\text{ cm}$, wektor przemieszczenia będzie miał całkowitą długość $d = 6u = 6 \cdot 2\text{ cm} = 12\text{ cm}$, jak widzimy na Rysunku 2.4. Zauważ, że użyliśmy różnych symboli, aby oznaczyć moduł wektora ($D = 6\text{ km}$) oraz długość jego reprezentacji graficznej ($d = 12\text{ cm}$).



Rysunek 2.3 Wektor przemieszczenia z początkiem w punkcie A (w obozowisku) oraz końcem w punkcie B (przy jeziorze) obrazuje strzałka o początku w punkcie A oraz końcu w punkcie B. Przemieszczenie jest takie samo dla każdej z dróg (reprezentowanych na rysunku przez inne strzałki) łączącej punkty A oraz B.

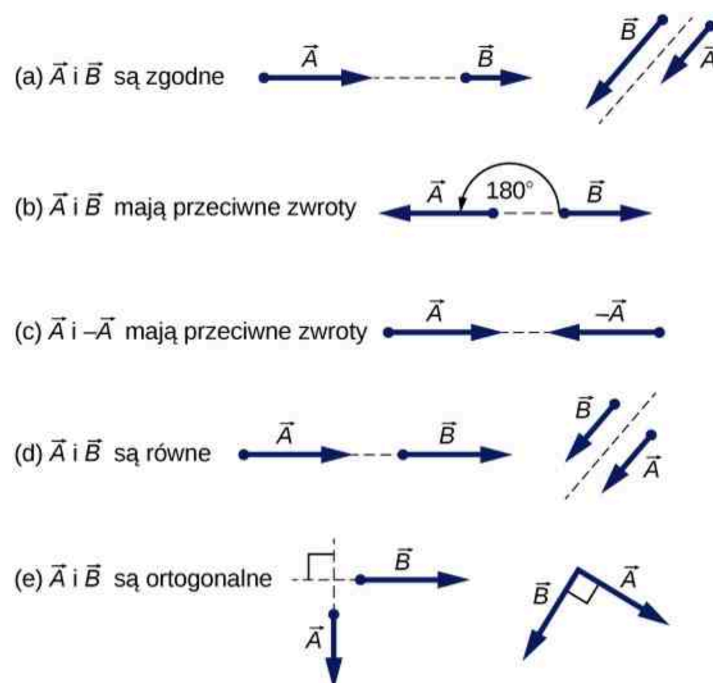


Rysunek 2.4 Jeśli przyjmiemy, że 2 cm oznaczają 1 jednostkę przemieszczenia (w tym przypadku 1 km), to przesunięcie $\vec{D}$ o module 6 km należy przedstawić graficznie za pomocą strzałki o długości 12 cm.

Przypuśmy, że twój przyjaciel idzie z obozowiska znajdującego się w punkcie A do jeziora znajdującego się w punkcie B, a następnie z powrotem: z jeziora znajdującego się w B do obozowiska znajdującego się w A. Moduł wektora przemieszczenia $\vec{D}_{AB}$ z A do B jest równy modułowi wektora przemieszczenia $\vec{D}_{BA}$ z B do A (w obu przypadkach jest równy 6 km), możemy więc zapisać, że $D_{AB} = D_{BA}$. Jednak wektor $\vec{D}_{AB}$ *nie jest* równy wektorowi $\vec{D}_{BA}$,

ponieważ wektory te mają inny zwrot: $\vec{D}_{AB} \neq \vec{D}_{BA}$. Na Rysunku 2.3 wektor $\vec{D}_{BA}$ miałby początek w punkcie B, a koniec w punkcie A, co oznacza, że $\vec{D}_{BA}$ wskazuje na południowy-zachód, zatem kąt między wektorem $\vec{D}_{AB}$ i $\vec{D}_{BA}$ wynosi $180°$. Mówimy, że wektor $\vec{D}_{BA}$ oraz wektor $\vec{D}_{AB}$ są **wektorami przeciwnymi** (ang. **antiparallel vectors**). Zależność tę zapisujemy: $\vec{D}_{AB} = -\vec{D}_{BA}$, gdzie minus oznacza kierunek przeciwny.

Wektory zwrócone w tym samym kierunku nazywamy **wektorami zgodnie skierowanymi** (ang. **parallel vectors**), co oznacza, że mają one *ten sam zwrot*. Dwa wektory o tym samym zwrocie $\vec{A}$ oraz $\vec{B}$ są równe, co zapisujemy $\vec{A} = \vec{B}$, wtedy i tylko wtedy, kiedy ich moduły są równe $\left|\vec{A}\right| = \left|\vec{B}\right|$. Równe są także wektory o różnych punktach zaczepienia, o ile mają taki sam kierunek, zwrot i moduł. Dwa wektory o zwrotach różniących się o $90°$ to **wektory ortogonalne** (ang. **orthogonal vectors**), czyli wektory prostopadłe. Relacje między wektorami pokazano na Rysunku 2.5.



Rysunek 2.5 Zależności między dwoma wektorami $\vec{A}$ i $\vec{B}$. (a) $\vec{A} \neq \vec{B}$, ponieważ $A \neq B$. (b) $\vec{A} \neq \vec{B}$, ponieważ mają różne zwroty oraz $A \neq B$. (c) $\vec{A} \neq -\vec{A}$, ponieważ ich zwroty są różne (mimo tego, że $\left|\vec{A}\right| = \left|-\vec{A}\right| = A$). (d) $\vec{A} = \vec{B}$, ponieważ mają takie same zwroty oraz równe moduły. $A = B$ (e) $\vec{A} \neq \vec{B}$, ponieważ ich kierunki są różne; ich kierunki różnią się o $90°$, czyli są to wektory ortogonalne.

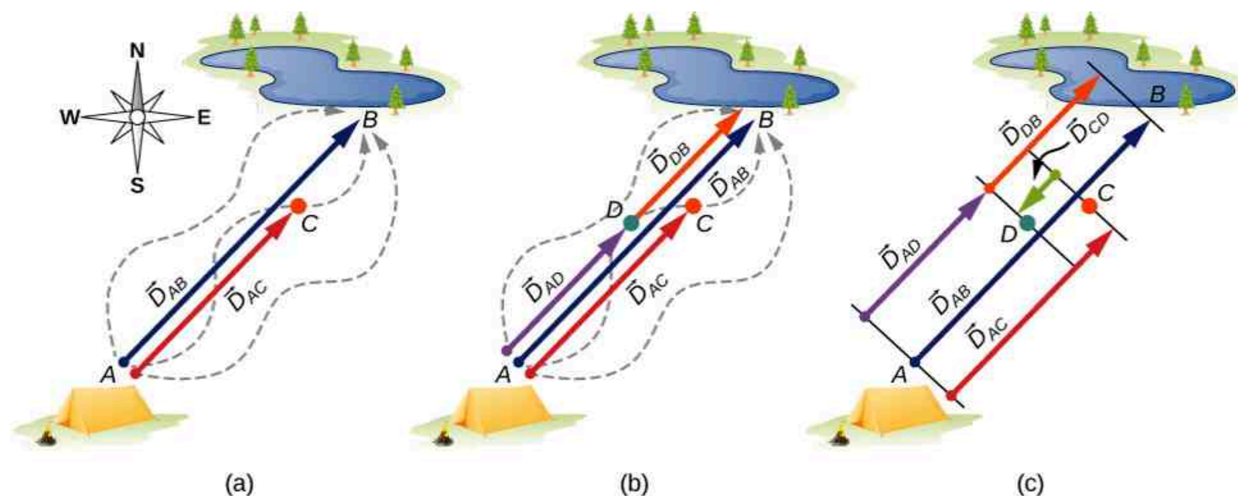


2.1 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Dwie łodzie motorowe o nazwach „Alicja” i „Beata” poruszają się po jeziorze. Na podstawie poniższych informacji określ, czy ich wektory prędkości są równe, czy nie.

a. „Alicja” porusza się na północ z prędkością 6 węzłów, a „Beata” porusza się na zachód z prędkością 6 węzłów.
b. „Alicja” porusza się na zachód z prędkością 6 węzłów, a „Beata” porusza się na zachód z prędkością 3 węzłów.
c. „Alicja” porusza się na północny wschód z prędkością 6 węzłów, a „Beata” porusza się na południe z prędkością 3 węzłów.
d. „Alicja” porusza się na północny wschód z prędkością 6 węzłów, a „Beata” porusza się na południowy zachód z prędkością 6 węzłów.
e. „Alicja” porusza się na północny wschód z prędkością 2 węzłów, a „Beata” znajduje się bliżej brzegu i porusza się na północny wschód z prędkością 2 węzłów.

Rachunek wektorowy w jednym wymiarze

Wektory mogą być mnożone przez skalar, dodawane lub odejmowane od innych wektorów. Pokażemy te działania na przykładzie wyprawy na ryby, który przedstawiliśmy już na Rysunku 2.6.



Rysunek 2.6 Wektory przemieszczenia podczas wyprawy na ryby. (a) Postój w punkcie C podczas wędrówki z obozowiska (punkt A) nad jezioro (punkt B). (b) Powrót po zgubioną skrzynkę (punkt D). (c) Zakończenie wędrówki nad jeziorem.

Przypuśćmy, że twój przyjaciel wyrusza z punktu A (z obozowiska) i idzie w kierunku punktu B (jeziora), ale w pewnym momencie robi postój w punkcie C, znajdującym się w trzech czwartych drogi między punktem A a punktem B (Rysunek 2.6(a)). Jaki jest jego wektor przemieszczenia $\vec{D}_{AC}$, kiedy znajduje się w punkcie C? Wiemy, że jeśli przejdzie całą drogę do punktu B, jego wektor przemieszczenia o początku w punkcie A jest równy $\vec{D}_{AB}$, jego moduł jest równy $D_{AB} = 6 \text{ km}$, a kierunek wektora to północny wschód. Jeśli przejdzie 0,75 drogi, utrzymując kierunek północno-wschodni, to będąc w punkcie C, musi znajdować się $0{,}75 D_{AB} = 4{,}5 \text{ km}$ od obozowiska w punkcie A. Oznacza to, że wektor przemieszczenia, kiedy znajduje się on w punkcie C, ma moduł równy $D_{AC} = 4{,}5 \text{ km} = 0{,}75 D_{AB}$ i jest równoległy do wektora przemieszczenia $\vec{D}_{AB}$. Można to przedstawić za pomocą poniższego **równania wektorowego** (ang. **vector equation**):

$$\vec{D}_{AC} = 0{,}75 \vec{D}_{AB}.$$

W równaniu wektorowym po obu stronach znaku równości znajdują się wektory. Powyższe równanie jest przykładem mnożenia wektora przez dodatni skalar (liczbę) $\alpha = 0{,}75$. Wynikiem $\vec{D}_{AC}$ mnożenia jest nowy wektor o tym samym kierunku i zwrocie co wektor $\vec{D}_{AB}$.

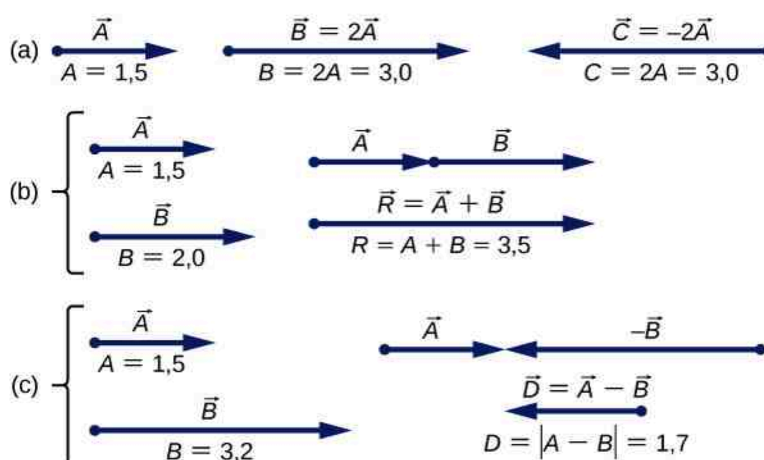
Wynikiem mnożenia wektora $\vec{A}$ przez liczbę *dodatnią* α jest nowy wektor $\vec{B}$ *o tym samym kierunku oraz zwrocie* co wektor $\vec{A}$:

$$\vec{B} = \alpha \vec{A}. \tag{2.1}$$

Moduł $|\vec{B}|$ nowego wektora oblicza się uwzględniając moduł $|\vec{A}|$ oryginalnego wektora. Ukazuje to poniższe **równanie skalarne** (ang. **scalar equation**):

$$B = |\alpha| A. \quad (2.2)$$

W równaniu skalarnym po obu stronach znaku równości znajdują się liczby. Równanie 2.2 jest równaniem skalarnym, ponieważ moduły wektorów są liczbami (dodatnimi). Jeśli skalar α występujący w wektorowym Równaniu 2.1 jest *ujemny*, to moduł $\left|\vec{B}\right|$ nowego wektora wciąż obliczamy z Równania 2.2, ale zwrot jest *przeciwny* do zwrotu wektora $\vec{A}$. Dokładne zasady przedstawione zostały na Rysunku 2.7(a) na dwóch przykładach, gdzie długość wektora $\vec{A}$ wynosi 1,5 jednostki. Kiedy $\alpha = 2$, nowy wektor $\vec{B} = 2\vec{A}$ ma długość $B = 2A = 3{,}0$ jednostki (jest dwa razy dłuższy) i ma taki sam zwrot oraz kierunek, co pierwszy wektor. Kiedy $\alpha = -2$, nowy wektor $\vec{C} = -2\vec{A}$ ma długość $C = |-2|\,A = 3{,}0$ jednostki (jest dwa razy dłuższy) i ma ten sam kierunek co pierwszy wektor, lecz przeciwny zwrot.



Rysunek 2.7 Rachunek wektorowy w jednym wymiarze. (a) Mnożenie przez skalar. (b) Dodawanie dwóch wektorów ($\vec{R}$ jest *sumą* wektorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$). (c) Odejmowanie dwóch wektorów ($\vec{D}$ jest *różnicą* wektorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$).

Teraz załóżmy, że twój przyjaciel wędkarz wyrusza z punktu A i idzie w kierunku punktu B, ale po drodze zauważa, że zgubił skrzynkę z przyborami wędkarskimi. Wraca więc do punktu C (w trzech czwartych drogi między punktem A a punktem B), gdzie zrobił postój, bo pamięta, że tam na pewno jeszcze miał ją przy sobie. Zawraca więc i idzie w kierunku obozowiska. Znajduje skrzynkę leżącą przy ścieżce 1,2 km od punktu C, w punkcie D (zobacz Rysunek 2.6(b)). Jaki jest jego wektor przemieszczenia $\vec{D}_{AD}$, jeśli skrzynka znajdowała się w punkcie D? Jaki jest jego wektor przemieszczenia $\vec{D}_{DB}$ od punktu D do jeziora? Już wcześniej stwierdziliśmy, że w punkcie C jego wektor przesunięcia jest równy $\vec{D}_{AC} = 0{,}75\vec{D}_{AB}$. Po wznowieniu marszu w punkcie C wędkarz idzie na południowy zachód (w kierunku obozowiska), co oznacza, że jego wektor przemieszczenia $\vec{D}_{CD}$ o początku w punkcie C i końcu w punkcie D ma zwrot przeciwny do wektora $\vec{D}_{AB}$. Jego moduł $\left|\vec{D}_{CD}\right|$ jest równy $D_{CD} = 1{,}2\text{ km} = 0{,}2D_{AB}$, a więc jego drugi wektor przemieszczenia jest równy $\vec{D}_{CD} = -0{,}2\vec{D}_{AB}$. Jego całkowite przemieszczenie $\vec{D}_{AD}$ względem obozu jest **sumą wektorów** (ang. **vector sum**) przemieszczenia: wektora $\vec{D}_{AC}$ (od obozu do miejsca postoju) oraz wektora $\vec{D}_{CD}$ (od miejsca postoju do miejsca, w którym znalazł zgubioną skrzynkę):

$$\vec{D}_{AD} = \vec{D}_{AC} + \vec{D}_{CD}. \quad (2.3)$$

Jeśli wektory znajdujące się po prawej stronie Równania 2.3 są znane, możemy znaleźć sumę $\vec{D}_{AD}$ w następujący sposób:

$$\vec{D}_{AD} = \vec{D}_{AC} + \vec{D}_{CD} = 0{,}75\vec{D}_{AB} - 0{,}2\vec{D}_{AB} = (0{,}75 - 0{,}2)\,\vec{D}_{AB} = 0{,}55\vec{D}_{AB}. \quad (2.4)$$

Kiedy twój przyjaciel dotrze wreszcie nad jezioro (do punktu B), wektor jego przemieszczenia $\vec{D}_{AB}$ z punktu A będzie sumą wektorów przemieszczenia $\vec{D}_{AD}$ z punktu A do punktu D oraz wektora przemieszczenia $\vec{D}_{DB}$ z punktu D do docelowego punktu nad jeziorem $\vec{D}_{AB} = \vec{D}_{AD} + \vec{D}_{DB}$ (zobacz Rysunek 2.6(c)). Oznacza to, że wektor jego przemieszczenia $\vec{D}_{DB}$ będzie **różnicą wektorów** (ang. **difference of two vectors**):

$$\vec{D}_{DB} = \vec{D}_{AB} - \vec{D}_{AD} = \vec{D}_{AB} + \left(-\vec{D}_{AD}\right). \quad (2.5)$$

Zauważ, że różnica dwóch wektorów jest po prostu sumą wektora, który jest pierwszym jej składnikiem, oraz wektora o zwrocie przeciwnym. Drugim składnikiem Równania 2.5 jest wektor $-\vec{D}_{AD}$ (który ma zwrot przeciwny niż wektor $\vec{D}_{AD}$). Jeśli podstawimy Równanie 2.4 do Równania 2.5, otrzymamy drugi wektor przemieszczenia:

$$\vec{D}_{DB} = \vec{D}_{AB} - \vec{D}_{AD} = \vec{D}_{AB} - 0{,}55\vec{D}_{AB} = (1{,}0 - 0{,}55)\,\vec{D}_{AB} = 0{,}45\vec{D}_{AB}. \quad (2.6)$$

Wynik oznacza, że twój przyjaciel przeszedł $D_{DB} = 0{,}45 D_{AB} = 0{,}45 \cdot 6{,}0\text{ km} = 2{,}7\text{ km}$ od punktu, w którym znalazł zgubioną skrzynkę, do punktu docelowego nad jeziorem.

Jeśli wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$ są do siebie równoległe, tak jak w przykładzie z wyprawą na ryby, to wektory będące ich sumą $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ i różnicą $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$ również są do nich równoległe – mają ten sam kierunek. Dodawanie i odejmowanie wektorów możemy przedstawić graficznie, rysując je z zachowaniem skali, tak jak przedstawiono na Rysunku 2.7.

Aby narysować wektor będący sumą wektorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$ o tym samym kierunku i zwrocie, rysujemy je jeden za drugim, łącząc punkt początkowy jednego z nich z punktem końcowym drugiego (zobacz Rysunek 2.7(b)). Moduł wektora wynikowego jest sumą modułów wektorów składowych: $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$. Zwrot wektora wynikowego jest taki sam jak zwrot wektorów składowych. Kiedy wektor $\vec{A}$ ma zwrot przeciwny do wektora $\vec{B}$, rysujemy je, łącząc ze sobą punkty końcowe (Rysunek 2.7(c)) lub początkowe. Moduł wektora będącego różnicą wektorów jest *wartością bezwzględną* $D = |A - B|$ różnicy modułów wektorów składowych. Zwrot wektora wynikowego $\vec{D}$ jest taki sam jak zwrot wektora składowego o większym module.

Ogólnie rzecz biorąc, niezależnie od liczby wymiarów przestrzeni, możemy dodawać dowolną liczbę wektorów w dowolnej kolejności, ponieważ dodawanie wektorów jest **przemienne** (ang. **commutative**),

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}, \quad (2.7)$$

oraz **łączne** (ang. **associative**),

$$\left(\vec{A} + \vec{B}\right) + \vec{C} = \vec{A} + \left(\vec{B} + \vec{C}\right). \quad (2.8)$$

Mnożenie przez skalar jest **rozdzielne** (ang. **distributive**) względem dodawania:

$$\alpha_1\vec{A} + \alpha_2\vec{A} = (\alpha_1 + \alpha_2)\,\vec{A}. \quad (2.9)$$

Z cechy rozdzielności mnożenia względem dodawania korzystamy w Równaniu 2.4 i Równaniu 2.6.

Podczas dodawania wielu wektorów w jednym wymiarze przydatne jest pojęcie **wektora jednostkowego** (ang. **unit vector**). Wektor jednostkowy oznaczać będziemy przez pochyloną literę z daszkiem, jak na przykład $\hat{u}$. Jego moduł jest równy jeden, a sam wektor nie jest opisywany przez żadną jednostkę, więc $|\hat{u}| = u = 1$. Jedyną rolą wektora jednostkowego jest ustalenie kierunku. Na przykład zamiast mówić, że wektor $\vec{D}_{AB}$ ma moduł równy 6,0 km i kierunek północno-wschodni, możemy posłużyć się wektorem jednostkowym $\hat{u}$ o kierunku północno-wschodnim i zapisać $\vec{D}_{AB} = 6{,}0\,\text{km} \cdot \hat{u}$. Kierunek południowo-zachodni wskazywany jest wtedy przez wektor jednostkowy $-\hat{u}$. Przemieszczenie o 6,0 km w kierunku południowo-zachodnim możemy zapisać w następujący sposób:

$$\vec{D}_{BA} = -6{,}0\,\text{km} \cdot \hat{u}.$$

Przykład 2.1

Wędrująca biedronka

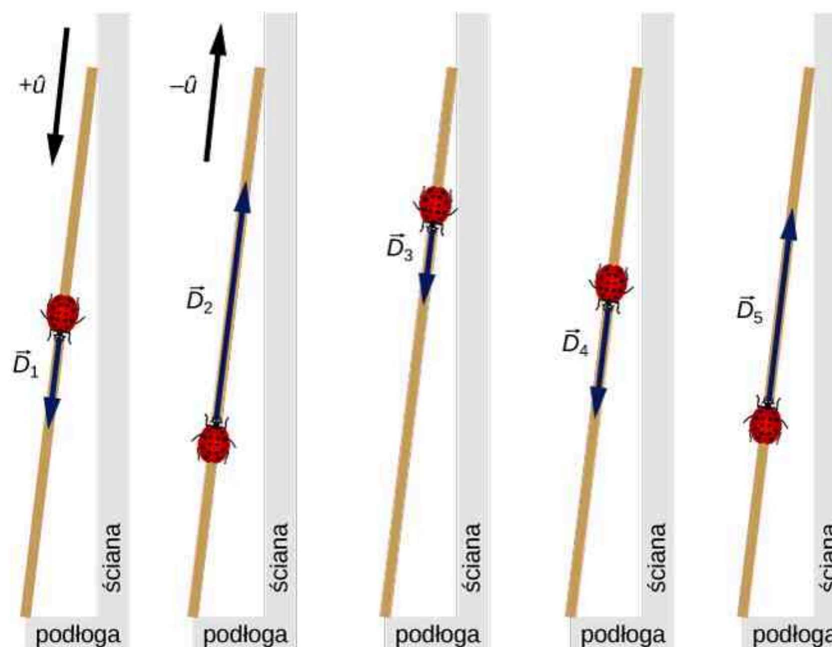
Długa drewniana miarka stoi oparta o ścianę w laboratorium fizycznym. Jej koniec, oznaczony wartością 200 cm, dotyka podłogi. Biedronka ląduje na wartości 100 cm i zaczyna się przemieszczać wzdłuż miarki. Najpierw przechodzi 15 cm w stronę podłogi, następnie 56 cm w stronę ściany, a później znowu 3 cm w stronę podłogi. Następnie zatrzymuje się na chwilę, przechodzi 25 cm w stronę podłogi i 19 cm w stronę ściany, po czym zatrzymuje się (Rysunek 2.8). Znajdź wektor przemieszczenia biedronki i ustal jej końcowe położenie na miarce.

Strategia rozwiązania

Jeśli przyjmiemy, że kierunek wektora jednostkowego $\hat{u}$ wskazuje w stronę podłogi, to kierunek ten oznaczymy przez $+\hat{u}$, a kierunek od podłogi w górę przez $-\hat{u}$. Możemy wyróżnić pięć wektorów przemieszczenia biedronki:

$$\vec{D}_1 = 15\,\text{cm} \cdot (+\hat{u}),$$
$$\vec{D}_2 = 56\,\text{cm} \cdot (-\hat{u}),$$
$$\vec{D}_3 = 3\,\text{cm} \cdot (+\hat{u}),$$
$$\vec{D}_4 = 25\,\text{cm} \cdot (+\hat{u}),$$
$$\vec{D}_5 = 19\,\text{cm} \cdot (-\hat{u}).$$

Całkowity wektor przemieszczenia $\vec{D}$ jest sumą wszystkich wektorów przemieszczenia.



Rysunek 2.8 Pięć wektorów przemieszczenia biedronki. Zauważ, że na tym schemacie moduły poszczególnych wektorów nie zachowują skali. (Źródło: modyfikacja pracy „Persian Poet Gal”/Wikimedia Commons)

Rozwiązanie

Suma wszystkich wektorów przemieszczenia jest następująca:

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \vec{D}_1 + \vec{D}_2 + \vec{D}_3 + \vec{D}_4 + \vec{D}_5 \\ &= 15\text{ cm}\cdot(+\hat{u}) + 56\text{ cm}\cdot(-\hat{u}) + 3\text{ cm}\cdot(+\hat{u}) + 25\text{ cm}\cdot(+\hat{u}) + 19\text{ cm}\cdot(-\hat{u}) \\ &= (15\text{ cm} - 56\text{ cm} + 3\text{ cm} + 25\text{ cm} - 19\text{ cm})\cdot\hat{u} \\ &= -32\text{ cm}\cdot\hat{u}.\end{aligned}$$

W powyższych obliczeniach korzystamy z prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania przedstawionego w Równaniu 2.9. Wynik interpretujemy w następujący sposób: punkt zaczepienia wektora całkowitego przemieszczenia znajduje się w punkcie oznaczonym 100 cm (w miejscu wylądowania biedronki). Wektor skierowany jest w stronę ściany. Na dotykającym ściany końcu miarki znajduje się wartość 0 cm, a więc biedronka po zakończeniu wędrówki znajduje się w punkcie wyznaczonym przez proste odejmowanie $100\text{ cm} - 32\text{ cm} = 68\text{ cm}$.



2.2 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Nurek jaskiniowy wpływa do długiego podwodnego tunelu. Kiedy jego przemieszczenie względem początku tunelu jest równe 20 m, przypadkowo upuszcza aparat fotograficzny, ale zauważa to dopiero po przepłynięciu kolejnych 6 m. Kiedy zauważa brak aparatu, zawraca i przepływa 10 m, nie może go jednak znaleźć i decyduje się zakończyć nurkowanie. Jak daleko znajduje się od początku tunelu? Przyjmując, że wektor zwrócony na zewnątrz tunelu ma wartość dodatnią, jaki jest jego wektor przemieszczenia?

Rachunek wektorowy w dwóch wymiarach

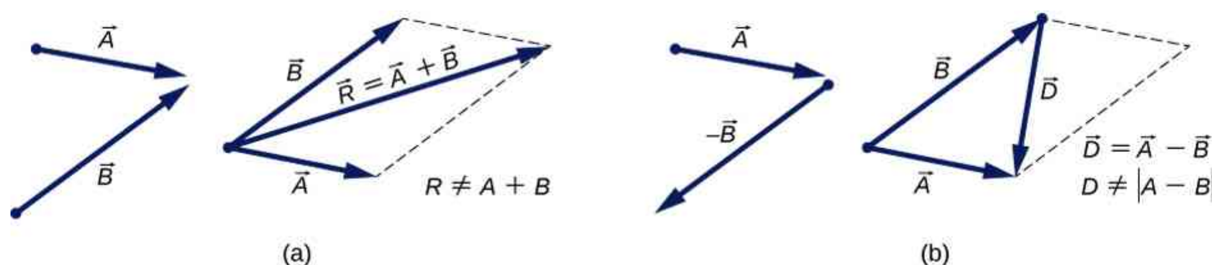
Wektory leżące na płaszczyźnie, to znaczy w przestrzeni dwuwymiarowej, mogą być mnożone przez skalar, dodawane oraz odejmowane od innych wektorów, zgodnie z zasadami przedstawionymi w Równaniu 2.1, Równaniu 2.2, Równaniu 2.7 oraz Równaniu 2.8. Jednak dodawanie wektorów w przestrzeni dwuwymiarowej jest bardziej skomplikowane niż dodawanie w jednym wymiarze. Wektory można dodawać metodą graficzną, korzystając z zasad geometrii, lecz

aby obliczyć zwrot, kierunek i moduł wektora wypadkowego, potrzebna będzie trygonometria. Metoda graficzna często wykorzystywana jest w nawigacji (Rysunek 2.9). Podczas konstrukcji wektorów z zachowaniem skali potrzebne ci będą dwie linijki, ekierka, kątomierz, ołówek oraz gumka do ścierania.



Rysunek 2.9 Wektory przemieszczenia dodawane są na mapach za pomocą metody graficznej.

Podczas graficznego dodawania wektorów na płaszczyźnie stosujemy **metodę równoległoboku** (ang. **parallelogram rule**). Załóżmy, że dwa wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$ znajdują się w przypadkowych pozycjach przedstawionych na Rysunku 2.10. Jeden z wektorów należy przesunąć tak, aby punkt zaczepienia obu wektorów był wspólny. Następnie od punktu końcowego wektora $\vec{A}$ prowadzimy odcinek równoległy do wektora $\vec{B}$, a od punktu końcowego wektora $\vec{B}$ prowadzimy odcinek równoległy do wektora $\vec{A}$ (odcinki te na Rysunku 2.10 oznaczone są liniami przerywanymi). W ten sposób tworzymy równoległobok. Rysujemy przekątną zawierającą punkt zaczepienia wektorów. Przekątna ta jest sumą $\vec{R}$ dwóch wektorów: $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ (Rysunek 2.10(a)). Druga przekątna równoległoboku jest różnicą dwóch wektorów $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$, co przedstawiono na Rysunku 2.10(b). Zauważ, że punkt końcowy wektora będącego różnicą wektorów jest wspólny z punktem końcowym wektora $\vec{A}$.

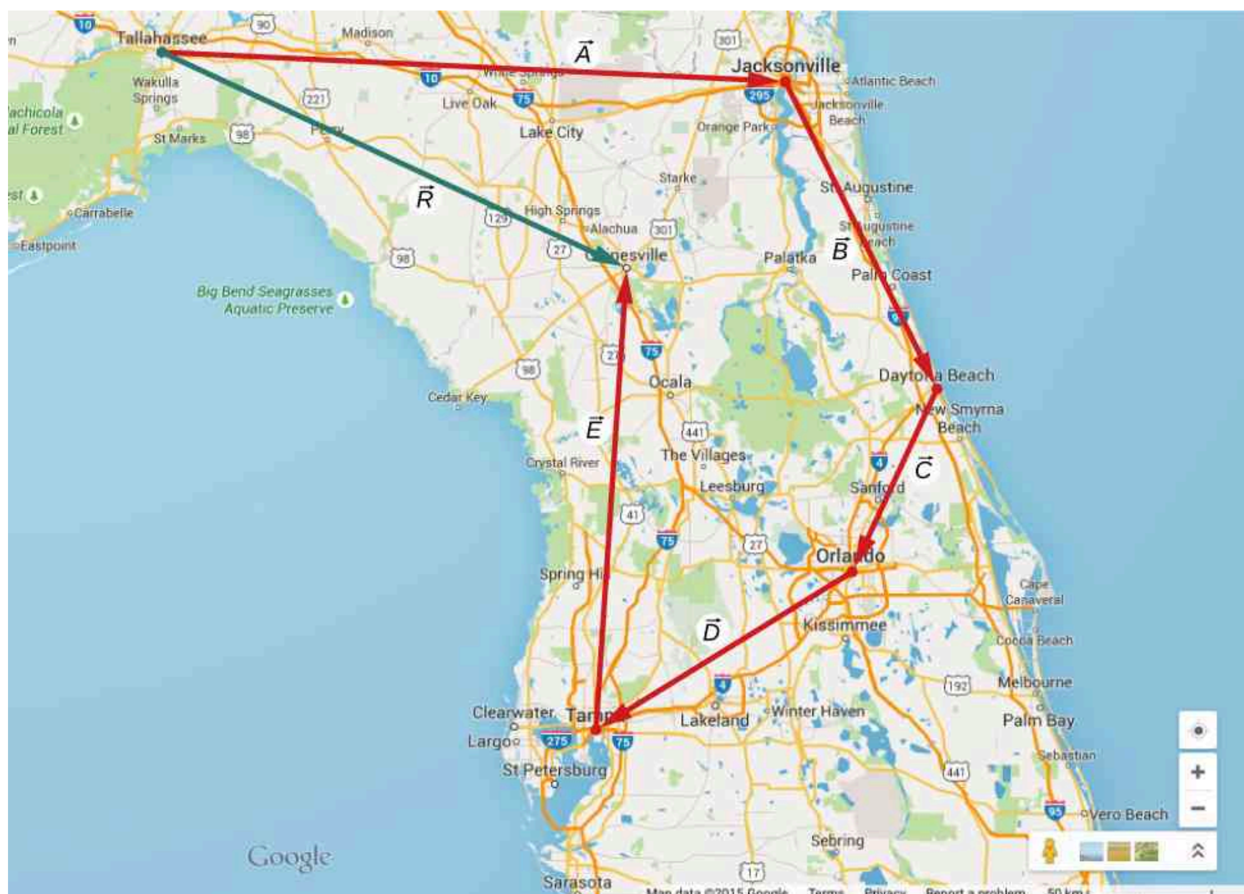


Rysunek 2.10 Metoda równoległoboku dodawania dwóch wektorów. Przesuń jeden z wektorów w taki sposób, aby punkt zaczepienia (oznaczony kropką) obu wektorów był wspólny. Skonstruuj równoległobok, którego dwoma bokami będą wektory, a pozostałymi dwoma odcinki do nich równoległe (oznaczone na rysunku linią przerywaną). (a) Wektor o tym samym punkcie zaczepienia, jaki mają dodawane wektory, pokrywający się z przekątną równoległoboku, to suma wektorów R. Moduł R sumy wektorów *nie jest* równy sumie modułów dodawanych wektorów. (b) Przekątna łącząca punkty końcowe wektorów tworzy wektor będący różnicą wektorów $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$. Punkt początkowy wektora $\vec{D}$ powinien być wspólny z punktem końcowym wektora $\vec{B}$, a punkt końcowy wektora $\vec{D}$ powinien być wspólny z punktem końcowym wektora $\vec{A}$. Moduł D różnicy wektorów *nie jest* równy różnicy modułów odejmowanych wektorów.

Zgodnie z regułą równoległoboku moduł sumy wektorów ani moduł różnicy wektorów nie mogą być obliczone poprzez dodawanie, ani odejmowanie modułów wektorów A i B, ponieważ długość przekątnej równoległoboku nie jest równa sumie ani różnicy długości boków. Jeśli chcemy znaleźć wartość modułów $|\vec{R}|$ i $|\vec{D}|$, musimy posłużyć się trygonometrią, co może prowadzić do skomplikowanych obliczeń. Istnieją dwa sposoby na ich obejście. Jednym z nich jest wykorzystanie współrzędnych wektorów, co zaprezentujemy w następnym podrozdziale. Drugi sposób, którym zajmiemy się teraz, polega na narysowaniu wektorów z zachowaniem skali, tak jak robią to nawigatorzy, i zmierzeniu długości i kierunku uzyskanego wektora.

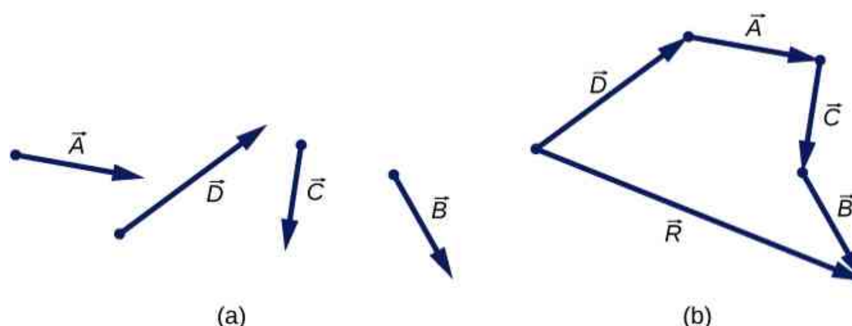
Jeśli musimy dodać do siebie trzy lub więcej wektorów, postępujemy zgodnie z metodą równoległoboku, dodając do siebie pary wektorów, aż otrzymamy wektor będący sumą wszystkich sum. Na przykład jeśli chcemy dodać trzy wektory, najpierw znajdujemy sumę wektorów numer 1 i numer 2, a następnie tę sumę dodajemy do wektora numer 3. Kolejność dodawania poszczególnych wektorów jest bez znaczenia, ponieważ dodawanie wektorów jest przemienne i łączne (zobacz Równanie 2.7 i Równanie 2.8). Zanim sformułujemy zasadę wynikającą z metody równoległoboku, spójrzmy na przykład przedstawiony poniżej.

Wyobraź sobie, że planujesz podróż do Ameryki, aby odwiedzić swoją rodzinę mieszkającą na Florydzie. Wyruszasz ze stolicy stanu Tallahassee. Najpierw zamierzasz odwiedzić wujka w Jacksonville, złożyć wizytę kuzynce w Daytona Beach, wspólnie zwiedzić Orlando, zobaczyć cyrk w Tampie, a na końcu odwiedzić University of Florida w Gainesville. Przebytą przez ciebie trasę można przedstawić przy pomocy pięciu wektorów przemieszczenia $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$ i $\vec{E}$, na Rysunku 2.11 zaznaczonych kolorem czerwonym. Jaki będzie wektor twojego przemieszczenia w chwili, kiedy dotrzesz do Gainesville? Całkowite przemieszczenie jest sumą wszystkich pięciu wektorów przemieszczenia i można je znaleźć, cztery razy stosując metodę równoległoboku. Wiemy jednak, że wektor przemieszczenia ma swój punkt początkowy (Tallahassee) oraz punkt końcowy (Gainesville), a więc wektor całkowitego przemieszczenia można narysować od razu, łącząc Tallahassee z Gainesville (zielony wektor na Rysunku 2.11). Jeśli cztery razy zastosujemy metodę równoległoboku, uzyskany przez nas wektor sumy $\vec{R}$ będzie pokrywał się z zielonym wektorem: $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E}$.



Rysunek 2.11 Przez czterokrotne zastosowanie metody równoległoboku otrzymujemy wektor sumy $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E}$, zaznaczony na rysunku kolorem zielonym.

Rysowanie wektora będącego sumą wielu wektorów można uprościć poprzez **łączenie punktów końcowych i początkowych wektorów** (ang. **tail-to-head geometric construction**). Załóżmy, że chcemy narysować wektor sumy $\vec{R}$ czterech wektorów $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$ (Rysunek 2.12(a)). Wybieramy którykolwiek z czterech wektorów i zaczepiamy inny wektor w punkcie końcowym wektora pierwszego. Następnie wybieramy kolejny wektor i zaczepiamy go w punkcie końcowym wektora drugiego. W ten sposób łączymy wszystkie wektory (Rysunek 2.12). Wektor sumy $\vec{R}$ rysujemy, łącząc punkt początkowy pierwszego wektora z punktem końcowym ostatniego wektora. Punkt końcowy wektora sumy pokrywa się z punktem końcowym ostatniego wektora. Kolejność łączenia wektorów jest dowolna, ponieważ dodawanie jest przemienne i łączne.



Rysunek 2.12 Metoda łączenia punktów końcowych i początkowych wektorów pozwala na znalezienie sumy wektorów $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$. (a) Cztery wektory o różnych modułach i kierunkach. (b) Połączenie punktów końcowych i początkowych wektorów; wektor sumy rysujemy, łącząc punkt początkowy pierwszego wektora z punktem końcowym ostatniego wektora.

Przykład 2.2

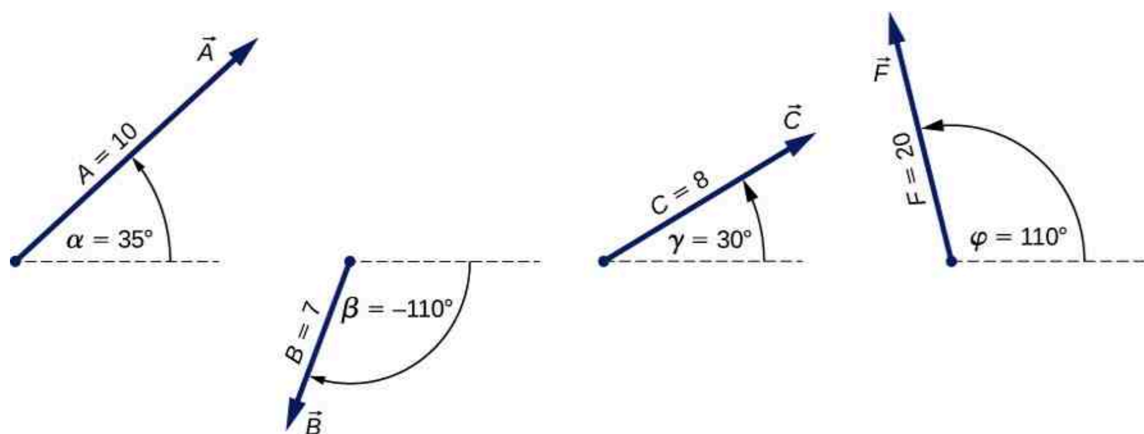
Konstrukcja sumy wektorów

Moduły wektorów przemieszczenia $\vec{A}$, $\vec{B}$ i $\vec{C}$ na Rysunku 2.13 są równe $A = 10{,}0$, $B = 7{,}0$ i $C = 8{,}0$, a ich kąty nachylenia do poziomu są równe $\alpha = 35^\circ$, $\beta = -110^\circ$ i $\gamma = 30^\circ$. Wartości modułów podane są w centymetrach. Zastosuj odpowiednią skalę i użyj linijki oraz kątomierza, aby znaleźć sumy następujących wektorów:

a. $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$,

b. $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$,

c. $\vec{S} = \vec{A} - 3\vec{B} + \vec{C}$.



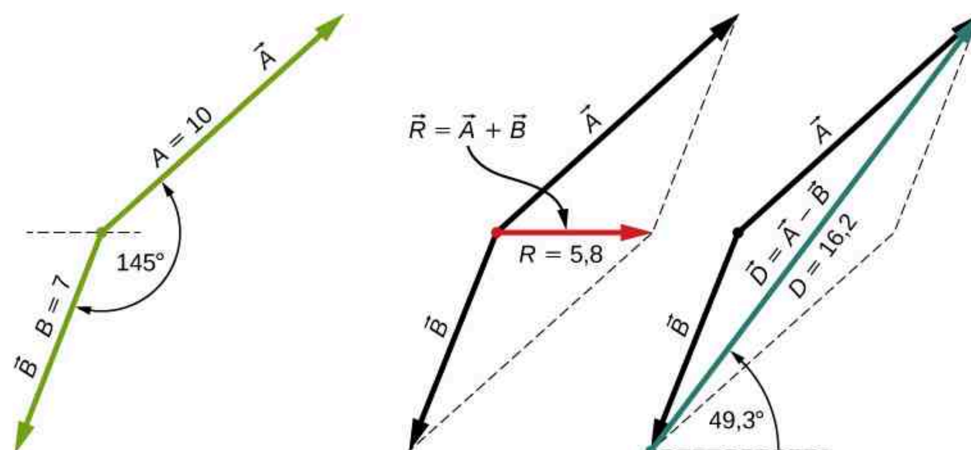
Rysunek 2.13 Wektory użyte w Przykładzie 2.2 oraz w zadaniu „Sprawdź, czy rozumiesz”.

Strategia rozwiązania zadania

„Znalezienie wektora” oznacza znalezienie jego modułu oraz kąta nachylenia do poziomu. Należy narysować, z zachowaniem skali, wektory znajdujące się po prawej stronie znaku równości, po czym dokonać konstrukcji szukanego wektora. Wartość modułu i kąta nachylenia należy odczytać przy pomocy linijki i kątomierza. Dla podpunktów (a) i (b) stosujemy metodę równoległoboku, w podpunkcie (c) łączymy punkty końcowe i początkowe wektorów.

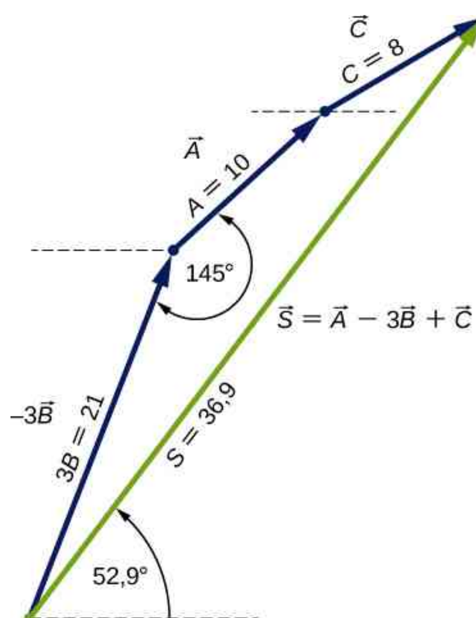
Rozwiązanie

W podpunktach (a) i (b) łączymy punkty początkowe wektorów $\vec{B}$ i $\vec{A}$, jak na Rysunku 2.14, i tworzymy równoległobok. Krótsza przekątna tego równoległoboku jest sumą $\vec{A} + \vec{B}$. Dłuższa przekątna równoległoboku to różnica $\vec{A} - \vec{B}$. Za pomocą linijki mierzymy długości przekątnych, a za pomocą kątomierza mierzymy kąty nachylenia. Moduł wektora $\vec{R}$ jest równy $R = 5{,}8\text{ cm}$, a kąt $\theta_R \approx 0^\circ$. Moduł wektora $\vec{D}$ jest równy $D = 16{,}2\text{ cm}$, a kąt nachylenia $\theta_D = 49,3^\circ$, jak pokazano na Rysunku 2.14.



Rysunek 2.14 Zastosowanie metody równoległoboku w celu znalezienia (a) sumy wektorów (wektor czerwony) (b) różnicy wektorów (wektor niebieski).

Aby rozwiązać zadanie z podpunktu (c), do wektora $-3\vec{B}$ przyłączamy kolejne wektory (punkty początkowe łącząc z punktami końcowymi, tak jak na Rysunku 2.15. Kolejność, w jakiej połączymy wektory, jest bez znaczenia, ale zachowanie skali jest niezwykle ważne. Następnie rysujemy wektor $\vec{S}$, łącząc punkt początkowy pierwszego wektora z punktem końcowym ostatniego wektora. Przy pomocy linijki mierzymy długość wektora $\vec{S}$ – jego moduł jest równy $S = 36{,}9\text{ cm}$. Przy pomocy kątomierza mierzymy kąt nachylenia $\theta_S = 52{,}9^\circ$. Rozwiązanie przedstawiono na Rysunku 2.15.



Rysunek 2.15 Rozwiązanie podpunktu (c) przez łączenie punktów końcowych i początkowych wektorów (znalezienie zielonego wektora $\vec{S}$).



2.3 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Wybierz odpowiednią skalę oraz użyj linijki i kątomierza w celu znalezienia wektora $\vec{G} = \vec{A} + 2\vec{B} - \vec{F}$ (wektory $\vec{A}$, $\vec{B}$ i $\vec{F}$ przedstawiono na Rysunku 2.13).



Powtórz wiadomości o dodawaniu wektorów i zobacz kalkulator wektorów (https://openstaxcollege.org/l/21compveccalc) oraz tę symulację (https://openstaxcollege.org/l/21phetvecaddsim) .

2.2 | Układy współrzędnych i składowe wektora

Cel dydaktyczny

W tym rozdziale nauczysz się:

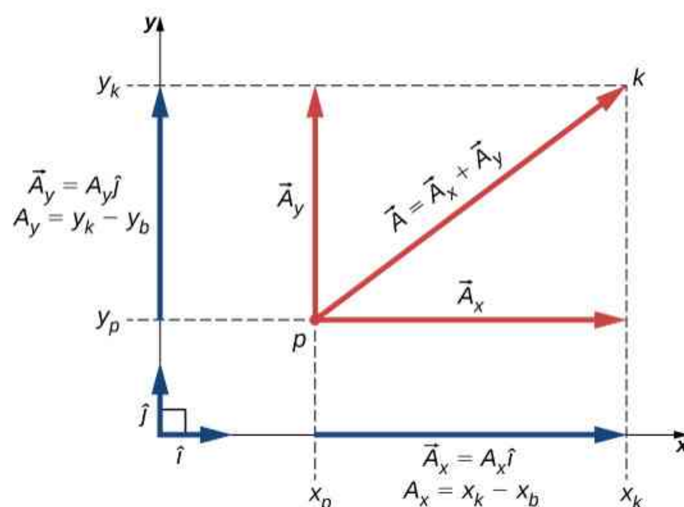
- opisywać wektory leżące w przestrzeni dwuwymiarowej i trójwymiarowej przy pomocy wersorów osi;
- jakie są różnice między składową wektora a wartością tej składowej;
- obliczać moduł wektora na podstawie jego składowych;
- określać kąt skierowany wektora leżącego na płaszczyźnie;
- jaki jest związek między współrzędnymi biegunowymi i współrzędnymi kartezjańskimi.

Wektory zazwyczaj opisuje się, podając ich współrzędne w **układzie współrzędnych** (ang. **coordinate system**). Nawet w życiu codziennym mamy skłonność do opisu rzeczywistości przy użyciu prostokątnego układu współrzędnych. Jeśli zapytasz kogoś, jak dostać się w pewne miejsce, bardziej prawdopodobne jest to, że usłyszysz, aby jechać 40 km na wschód, a następnie 30 km na północ, a nie 50 km, pod kątem $37°$ na północ od kierunku wschodniego.

W dwuwymiarowym, prostokątnym (kartezjańskim) układzie współrzędnych położenie punktu podaje się poprzez określenie jego dwóch współrzędnych $(x,\ y)$. Położenie wektora $\vec{A}$ opisuje się w podobny sposób. Rolę współrzędnej x wektora $\vec{A}$ pełni *składowa pozioma*, a rolę współrzędnej y wektora $\vec{A}$ pełni *składowa pionowa*. Składowa pozioma to wektor zapisywany $\vec{A}_x$. Składowa pionowa to wektor zapisywany $\vec{A}_y$. W kartezjańskim układzie współrzędnych **składowe** (ang. **vector components**) x i y wektora są jego rzutami na osie układu współrzędnych: x oraz y. Dlatego, zgodnie z regułą równoległoboku, każdy wektor leżący na płaszczyźnie kartezjańskiej można przedstawić jako sumę jego składowych:

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y. \tag{2.10}$$

Jak widać na Rysunku 2.16, wektor $\vec{A}$ jest przekątną prostokąta, w którym składowa x $\vec{A}_x$ jest bokiem równoległym do osi x, a składowa y $\vec{A}_y$ jest bokiem równoległym do osi y. Składowa $\vec{A}_x$ jest prostopadła do składowej $\vec{A}_y$.



Rysunek 2.16 Wektor $\vec{A}$ położony na płaszczyźnie w układzie współrzędnych kartezjańskich jest sumą swojej składowej poziomej i pionowej. Składowa $\vec{A}_x$ jest rzutem wektora $\vec{A}$ na oś x. Składowa $\vec{A}_y$ jest rzutem wektora $\vec{A}$ na oś y. Liczby A_x oraz A_y, przez które mnożone są wektory jednostkowe, są wartościami składowych wektora.

Przyjęło się oznaczać dodatni kierunek osi x przy pomocy wektora jednostkowego $\hat{i}$, a dodatni kierunek osi y przy

pomocy wektora jednostkowego $\hat{j}$. Wektory jednostkowe osi (ang. **unit vectors of the axes**), nazywane **wersorami osi**, $\hat{i}$ oraz $\hat{j}$, określają dwa prostopadłe względem siebie kierunki na płaszczyźnie. Jak widać poniżej (Rysunek 2.16), składowe x i y wektora można zapisać przy pomocy wersorów osi:

$$\begin{cases} \vec{A}_x = A_x\hat{i} \\ \vec{A}_y = A_y\hat{j}. \end{cases} \tag{2.11}$$

Wektory $\vec{A}_x$ i $\vec{A}_y$ występujące w Równaniu 2.11 są *składowymi* wektora $\vec{A}$. Liczby A_x i A_y są **składowymi skalarnymi** (ang. **scalar component**) wektora $\vec{A}$. W wyniku połączenia Równania 2.10 i Równania 2.11 otrzymujemy **rozkład wektora na składowe** (ang. **the component form of a vector**):

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} \tag{2.12}$$

Jeżeli znamy współrzędne $p(x_\text{p}\ y_\text{p})$ punktu początkowego wektora (p oznacza „początek”) i współrzędne $k(x_\text{k},\ y_\text{k})$ punktu końcowego wektora (k oznacza „koniec”), możemy poznać składowe skalarne wektora, odejmując współrzędne punktu początkowego od współrzędnych punktu końcowego:

$$\begin{cases} A_x = x_\text{k} - x_\text{p}, \\ A_y = y_\text{k} - y_\text{p}. \end{cases} \tag{2.13}$$

Przykład 2.3

Przemieszczenie kursora

Przyjmując, że lewy dolny róg monitora jest początkiem układu współrzędnych, to kursor myszy znajduje się w punkcie $(6{,}0\,\text{cm};\ 1{,}6\,\text{cm})$. Jeśli najedziesz kursorem na ikonę znajdującą się w punkcie $(2{,}0\,\text{cm};\ 4{,}5\,\text{cm})$, jaki będzie wektor jego przemieszczenia?

Strategia rozwiązania

Początkiem dwuwymiarowego układu współrzędnych jest lewy dolny róg ekranu. Oznacza to, że wersor $\hat{i}$ osi x skierowany jest w prawo, a wersor $\hat{j}$ osi y skierowany jest w górę. Punkt początkowy wektora przemieszczenia p leży w $(6{,}0;\ 1{,}6)$. Punkt końcowy wektora przemieszczenia k leży w $(2{,}0;\ 4{,}5)$. Podstaw współrzędne tych punktów do Równania 2.13, aby otrzymać składowe skalarne D_x oraz D_y wektora przemieszczenia $\vec{D}$. Aby uzyskać rozkład wektora na składowe, podstaw obliczone składowe do Równania 2.12.

Rozwiązanie

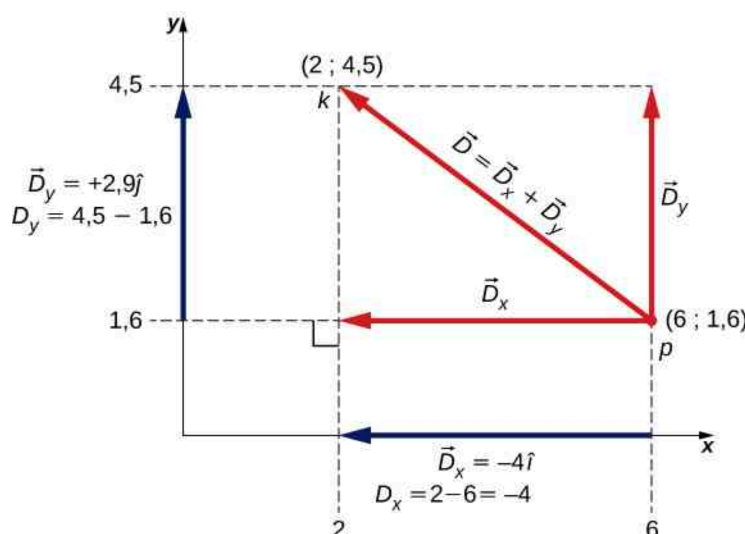
Na podstawie treści zadania mamy $x_\text{p} = 6{,}0$, $x_\text{k} = 2{,}0$, $y_\text{p} = 1{,}6$ i $y_\text{k} = 4{,}5$, gdzie jednostką jest 1 cm. Możemy obliczyć składowe skalarne x oraz y wektora:

$$D_x = x_\text{k} - x_\text{p} = 2{,}0\,\text{cm} - 6{,}0\,\text{cm} = -4{,}0\,\text{cm}\,,$$
$$D_y = y_\text{k} - y_\text{p} = 4{,}5\,\text{cm} - 1{,}6\,\text{cm} = +2{,}9\,\text{cm}\,.$$

Rozkład wektora na składowe przedstawia się następująco:

$$\vec{D} = D_x\hat{i} + D_y\hat{j} = -4{,}0\,\text{cm}\cdot\hat{i} + 2{,}9\,\text{cm}\cdot\hat{j}. \tag{2.14}$$

Rozwiązanie przedstawiono na Rysunku 2.17.



Rysunek 2.17 Wektor przemieszczenia w układzie współrzędnych. Punkt początkowy wektora oznaczony jest przez p, a punkt końcowy przez k.

Znaczenie

Zauważ, że jednostkę – w tym przypadku 1 cm – można umieścić albo przy każdej składowej, przed symbolem wersora, albo dla obu składowych jednocześnie, jak w Równaniu 2.14. Wygodniej jest korzystać z drugiego sposobu, ponieważ jest on prostszy.

Moduł wektora $\vec{D}_x = -4{,}0\hat{i} = 4{,}0\cdot(-\hat{i})$, czyli składowej poziomej wektora przemieszczenia, jest równy $\left|\vec{D}_x\right| = |-4{,}0|\cdot\left|\hat{i}\right| = 4{,}0$, ponieważ moduł wektora jednostkowego jest równy $\left|\hat{i}\right| = 1$. Zauważ, że kierunek składowej x jest równy $-\hat{i}$, a więc jest on przeciwny do kierunku osi x. Oznacza to, że składowa x wektora $\vec{D}_x$ skierowana jest w lewo, tak jak przedstawia to Rysunek 2.17. Składowa skalarna x wektora $\vec{D}$ jest równa $D_x = -4{,}0$.

Moduł wektora y $\vec{D}_y = +2{,}9\hat{j}$, czyli składowej pionowej wektora przemieszczenia, jest równy $\left|\vec{D}_y\right| = |2{,}9|\cdot\left|\hat{j}\right| = 2{,}9$, ponieważ moduł wektora jednostkowego jest równy $\left|\hat{j}\right| = 1$. Kierunek składowej y jest równy $+\hat{j}$, a więc jest on zgodny z kierunkiem osi y. Oznacza to, że składowa y wektora $\vec{D}_y$ skierowana jest w górę, tak jak przedstawiono na Rysunku 2.17. Składowa skalarna y wektora $\vec{D}$ jest równa $D_y = +2{,}9$. Wektor przemieszczenia $\vec{D}$ jest sumą swoich składowych.

Rozkład wektora na składowe (Równanie 2.14) mówi nam, że kursor został przesunięty o 4,0 cm w lewo i o 2,9 cm do góry.



2.4 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Mucha ląduje na arkuszu papieru milimetrowego w punkcie położonym 10,0 cm na prawo od jego lewej krawędzi i 8,0 cm powyżej krawędzi dolnej, po czym przemieszcza się do punktu położonego 5,0 od lewej krawędzi i 5,0 cm od krawędzi dolnej. Przyjmij, że lewy dolny róg arkusza jest początkiem prostokątnego układu współrzędnych i znajdź wektor przemieszczenia muchy. Przedstaw rozwiązanie graficznie.

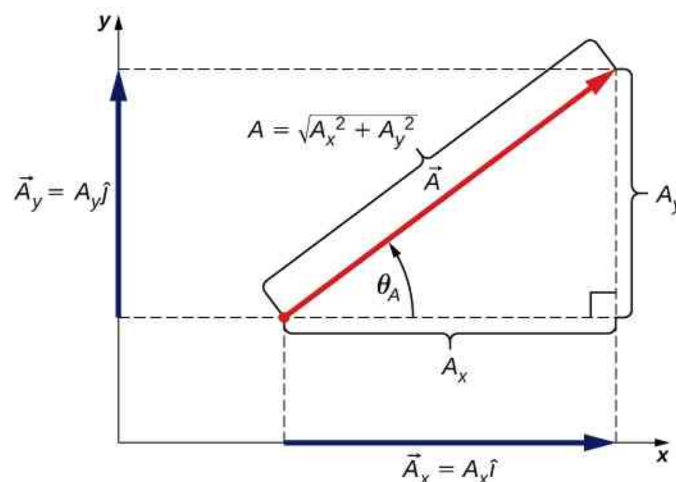
Jeśli znamy składowe skalarne A_x i A_y wektora $\vec{A}$, możemy znaleźć jego moduł A oraz jego kierunek opisywany

przez kąt θ_A . **Kierunek** wektora określa się względem kąta nachylenia wektora do osi x. Kąt θ_A , patrząc od osi x, mierzony jest *przeciwnie* do ruchu wskazówek zegara (Rysunek 2.18). Ponieważ odcinki o długościach A, A_x i A_y tworzą trójkąt prostokątny, zależność między nimi opisuje twierdzenie Pitagorasa:

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 \iff A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}. \tag{2.15}$$

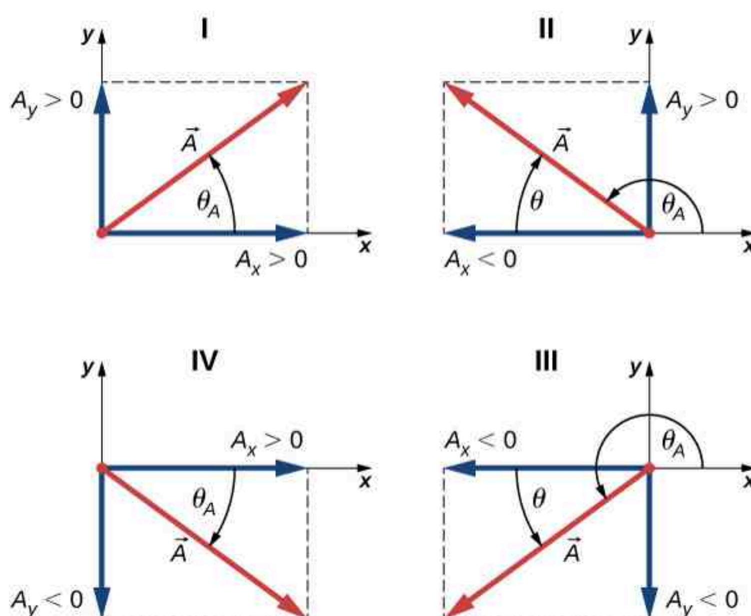
Zależność ta jest spełniona, nawet jeśli składowe skalarne wektora są liczbami ujemnymi. Kierunek wektora definiuje się obliczając tangens kąta θ_A (Rysunek 2.18):

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{A_y}{A_x} \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{A_y}{A_x}\right). \tag{2.16}$$



Rysunek 2.18 Moduł A oraz kąt nachylenia θ_A wektora $\vec{A}$ związane są z długością jego składowych, ponieważ A, A_x oraz A_y tworzą trójkąt prostokątny.

Jeśli wektor leży w pierwszej lub czwartej ćwiartce, gdzie składowa A_x jest liczbą dodatnią (Rysunek 2.19), kąt θ (z Równania 2.16) jest identyczny z kątem nachylenia θ_A . Jeśli wektor leży w czwartej ćwiartce, kąt θ jest ujemny, co oznacza, że kąt nachylenia θ_A takiego wektora do osi x mierzy się *zgodnie* z ruchem wskazówek zegara, rozpoczynając od osi x. Jeśli wektor leży w drugiej ćwiartce, kąt θ również jest ujemny. Jeśli wektor leży w drugiej lub trzeciej ćwiartce, gdzie składowa A_x jest liczbą ujemną, kąt nachylenia wektora jest równy $\theta_A = \theta + 180°$ (Rysunek 2.19).



Rysunek 2.19 Wartości składowych wektora mogą być dodatnie lub ujemne. Dla wektorów leżących w pierwszej ćwiartce (I) wartości obu składowych są dodatnie, a dla wektorów leżących w trzeciej ćwiartce (III) obie te wartości są ujemne. Kąt nachylenia wektora znajdującego się w II lub III ćwiartce do osi x jest równy $\theta_A = \theta + 180^\circ$.

Przykład 2.4

Moduł i kierunek wektora przemieszczenia

Przesuwasz kursor z punktu początkowego $(6{,}0\ \text{cm};\ 1{,}6\ \text{cm})$ na ikonę znajdującą się w punkcie $(2{,}0\ \text{cm};\ 4{,}5\ \text{cm})$. Jaki jest moduł i kierunek wektora przemieszczenia kursora?

Strategia rozwiązania

W Przykładzie 2.3 znaleźliśmy wektor przemieszczenia $\vec{D}$ kursora (zobacz Równanie 2.14). Na początku musimy określić wartości składowych wektora: $D_x = -4{,}0\ \text{cm}$ i $D_y = +2{,}9\ \text{cm}$ i podstawić je do Równania 2.15 i Równania 2.16, aby znaleźć moduł D wektora oraz jego kąt nachylenia θ_D .

Rozwiązanie

Moduł wektora $\vec{D}$ jest równy

$$D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = \sqrt{(-4{,}0\ \text{cm})^2 + (2{,}9\ \text{cm})^2} = \sqrt{(4{,}0)^2 + (2{,}9)^2}\ \text{cm} = 4{,}9\ \text{cm}.$$

Kąt nachylenia wektora do osi jest równy

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{D_y}{D_x} = \frac{2{,}9\ \text{cm}}{-4{,}0\ \text{cm}} = -0{,}725 \implies \theta = \operatorname{arctg}(-0{,}725) = -35{,}9^\circ.$$

Wektor $\vec{D}$ leży w drugiej ćwiartce, więc jego kierunek opisujemy przy pomocy kąta

$$\theta_D = \theta + 180^\circ = -35{,}9^\circ + 180^\circ = 144{,}1^\circ.$$



2.5 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Jeśli przemieszczenie muchy wędrującej po arkuszu papieru milimetrowego jest równe $\vec{D} = -5{,}00\ \text{cm} \cdot \hat{i} - 3{,}00\ \text{cm} \cdot \hat{j}$, znajdź jego moduł i kierunek.

W praktyce często zdarza się, że trzeba znaleźć sumę wielu wektorów, których moduły i kierunki są znane. Wyobraź sobie na przykład, że podczas silnego wiatru na moście znajduje się jednocześnie 400 samochodów. Każdy z nich oddziałuje na most naciskiem o innym kierunku, a my chcemy dowiedzieć się, jaka jest suma nacisku. Poznałeś już

metodę graficzną znajdowania sumy wektorów, więc wiesz, że metoda ta, ze względu na mierzenie długości i kątów, może szybko prowadzić do znaczących błędów. W przypadku metod analitycznych takie zagrożenie nie występuje. Pierwszym krokiem podejścia analitycznego, jeśli moduł i kierunek wektora są dane, jest znalezienie jego składowych.

Wróćmy do trójkąta prostokątnego z Rysunku 2.18. Stosunek długości przyprostokątnej A_x i przeciwprostokątnej A jest cosinusem kąta θ_A , $A_x / A = \cos \theta_A$, a stosunek długości przyprostokątnej A_y i przeciwprostokątnej A jest sinusem kąta θ_A , $A_y / A = \sin \theta_A$. Jeśli moduł A i kierunek θ_A są znane, możemy znaleźć wartości składowych wektora:

$$\begin{cases} A_x = A \cos \theta_A \\ A_y = A \sin \theta_A . \end{cases} \qquad (2.17)$$

Podczas obliczania składowych wektora przy pomocy Równania 2.17 należy pamiętać o zasadach wyznaczania kąta. Kąt θ_A jest kątem mierzonym *przeciwnie* do ruchów wskazówek zegara, zaczynając od osi x. Kąt mierzony zgodnie z ruchem wskazówek zegara będzie ujemny.

Przykład 2.5

Składowe wektorów przemieszczenia

Ekipa ratunkowa szukająca zaginionego dziecka podąża za Azorem, psem tropiącym. Azor często gubi trop i często zawraca. W końcu znajduje dziecko i wszystko dobrze się kończy, więc możemy skupić się na wektorach przemieszczenia Azora. Wektory te są bardzo zróżnicowane: najpierw Azor przebiegł 200,0 m na południowy wschód, następnie 300,0 m na północ, później węsząc przeszedł 50,0 m w kierunku 30° na zachód od kierunku północnego. Po przejściu 80,0 m na południe Azor złapał świeży trop i skręcił w kierunku 23° na zachód od kierunku południowego, po czym przebiegł 150,0 m. Znajdź wartości składowych wektorów przemieszczenia Azora i wektory przemieszczenia (w postaci rozkładu na składowe) dla każdej z przebytych przez niego ścieżek.

Strategia rozwiązania

W celu rozwiązania tego zadania skorzystamy z prostokątnego układu współrzędnych o osi x skierowanej na wschód oraz osi y skierowanej na północ. Oznacza to, że wersor $\hat{i}$ będzie wskazywał na wschód, a wersor $\hat{j}$ na północ. Azor wytyczył pięć ścieżek, co oznacza, że jego przemieszczenie składa się z pięciu wektorów przemieszczenia. Zaczniemy od znalezienia ich modułów i kierunków, następnie użyjmy Równania 2.17, aby znaleźć wartości składowych wektorów i zapiszemy wektory w postaci przedstawionej na Równaniu 2.12.

Rozwiązanie

Moduł przemieszczenia Azora na pierwszej ścieżce jest równy $L_1 = 200{,}0\text{ m}$, a wektor ma kierunek południowo-wschodni. Za kąt nachylenia θ_1 możemy przyjąć albo -45° mierzone od kierunku południe-północ, jeśli zmierzymy kąt zgodnie z ruchem wskazówek zegara, albo $45^\circ + 270^\circ$, jeśli zmierzymy go przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. W pierwszym przypadku $\theta_1 = -45^\circ$, a w drugim $\theta_1 = +315^\circ$. Możemy użyć którejkolwiek z tych wartości. Składowe są więc równe:

$$L_{1x} = L_1 \cos \theta_1 = 200{,}0\,\text{m} \cdot \cos 315^\circ = 141{,}4\,\text{m},$$
$$L_{1y} = L_1 \sin \theta_1 = 200{,}0\,\text{m} \cdot \sin 315^\circ = -141{,}4\,\text{m}.$$

Wektor przemieszczenia na pierwszej ścieżce jest równy:

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_{1x}\hat{i} + \vec{L}_{1y}\hat{j} = 141{,}4\text{ m} \cdot \hat{i} - 141{,}4\text{ m} \cdot \hat{j}.$$

Moduł przemieszczenia Azora na drugiej ścieżce jest równy $L_2 = 300{,}0\text{ m}$, a wektor skierowany jest na północ. Kąt nachylenia $\theta_2 = +90^\circ$. Otrzymujemy następujące wyniki:

$$\begin{aligned} L_{2x} &= L_2 \cos\theta_2 = 300{,}0\,\text{m}\cdot\cos 90^\circ = 0{,}0\,\text{m},\\ L_{2y} &= L_2 \sin\theta_2 = 300{,}0\,\text{m}\cdot\sin 90^\circ = 300{,}0\,\text{m},\\ \vec{L}_2 &= L_{2x}\hat{i} + L_{2y}\hat{j} = 300{,}0\,\text{m}\cdot\hat{j}. \end{aligned}$$

Moduł przemieszczenia Azora na trzeciej ścieżce jest równy $L_3 = 50{,}0\,\text{m}$, a wektor skierowany jest 30° na zachód od kierunku północnego. Kąt nachylenia mierzony przeciwnie do ruchu wskazówek zegara od osi x jest równy $\theta_3 = 30^\circ + 90^\circ = +120^\circ$. Otrzymujemy następujące wyniki:

$$\begin{aligned} L_{3x} &= L_3 \cos\theta_3 = 50{,}0\,\text{m}\cdot\cos 120^\circ = -25{,}0\,\text{m},\\ L_{3y} &= L_3 \sin\theta_3 = 50{,}0\,\text{m}\cdot\sin 120^\circ = +43{,}3\,\text{m},\\ \vec{L}_3 &= L_{3x}\hat{i} + L_{3y}\hat{j} = -25{,}0\,\text{m}\cdot\hat{i} + 43{,}3\,\text{m}\cdot\hat{j}. \end{aligned}$$

Moduł przemieszczenia Azora na czwartej ścieżce jest równy $L_4 = 80{,}0\,\text{m}$, a wektor skierowany jest na południe. Za kąt nachylenia możemy przyjąć $\theta_4 = -90^\circ$ albo $\theta_4 = +270^\circ$. Otrzymujemy następujące wyniki:

$$\begin{aligned} L_{4x} &= L_4 \cos\theta_4 = 80{,}0\,\text{m}\cdot\cos(-90^\circ) = 0{,}0\,\text{m},\\ L_{4y} &= L_4 \sin\theta_4 = 80{,}0\,\text{m}\cdot\sin(-90^\circ) = -80{,}0\,\text{m},\\ \vec{L}_4 &= L_{4x}\hat{i} + L_{4y}\hat{j} = -80{,}0\,\text{m}\cdot\hat{j}. \end{aligned}$$

Moduł przemieszczenia Azora na ostatniej ścieżce to $L_5 = 150{,}0\,\text{m}$, a kąt nachylenia jest równy $\theta_5 = -23^\circ + 270^\circ = +247^\circ$ (23° na zachód od kierunku południowego), co daje:

$$\begin{aligned} L_{5x} &= L_5 \cos\theta_5 = 150{,}0\,\text{m}\cdot\cos 247^\circ = -58{,}6\,\text{m},\\ L_{5y} &= L_5 \sin\theta_5 = 150{,}0\,\text{m}\cdot\sin 247^\circ = -138{,}1\,\text{m},\\ \vec{L}_5 &= L_{5x}\hat{i} + L_{5y}\hat{j} = -58{,}6\,\text{m}\cdot\hat{i} - 138{,}1\,\text{m}\cdot\hat{j}. \end{aligned}$$



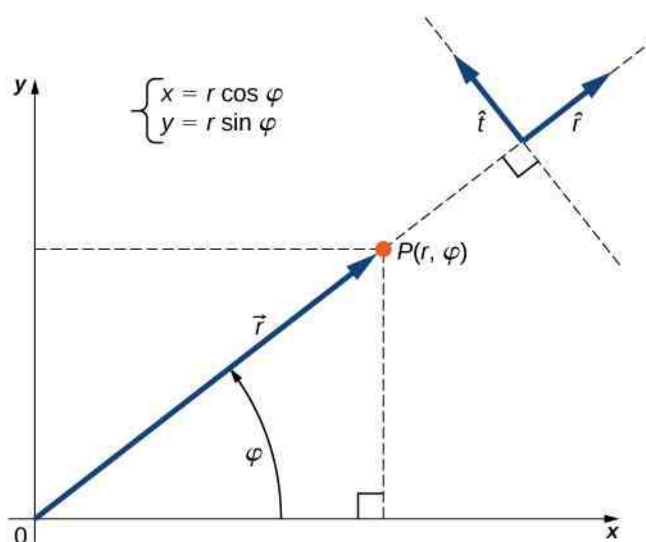
2.6 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Jeśli Azor przebiegnie 20 m na zachód, jaki będzie wektor jego przemieszczenia?

Współrzędne biegunowe

Aby opisać położenie punktu na płaszczyźnie, potrzebujemy dwóch ortogonalnych kierunków. W kartezjańskim układzie współrzędnych kierunki te są wyznaczone przez wersor $\hat{i}$ osi x oraz wersor $\hat{j}$ osi y. Korzystanie z kartezjańskiego układu współrzędnych jest wygodne, jeśli chodzi o opis przemieszczeń, prędkości i sił. Jednak w przypadku ruchu obrotowego korzystanie z tego układu okazuje się nieefektywne. Opisu ruchu obrotowego dokonuje się zazwyczaj w **układzie współrzędnych biegunowych** (ang. **polar coordinate system**).

W układzie współrzędnych biegunowych położenie punktu P określa się za pomocą dwóch **współrzędnych biegunowych** (ang. **polar coordinates**) (Rysunek 2.20). Pierwsza współrzędna biegunowa to **promień wodzący** (ang. **radial coordinate** r, czyli odległość punktu P od bieguna. Drugą współrzędną biegunową jest kąt φ zawarty między promieniem wodzącym a pewną prostą (ang. **direction angle**), zazwyczaj osią x. W układzie współrzędnych biegunowych miarę kątów podaje się w radianach. Punktem początkowym promienia wodzącego jest punkt $(0, 0)$, a punktem końcowym punkt P. Kierunek promienia wodzącego opisuje wektor jednostkowy $\hat{r}$. Drugi wektor jednostkowy $\hat{t}$ jest prostopadły do wektora $\hat{r}$. Kierunek dodatni $+\hat{t}$ informuje nas, że kąt φ zmienia się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Położenie punktu P o współrzędnych (x, y) w prostokątnym układzie współrzędnych może być również opisane przez współrzędne biegunowe (r, φ). Równanie 2.17 jest spełnione dla wszystkich wektorów, więc za jego pomocą możemy wyrazić współrzędne x oraz y wektora $\vec{r}$. W ten sposób możemy wyznaczyć zależność między współrzędnymi kartezjańskimi i biegunowymi punktu P:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \tag{2.18}$$



Rysunek 2.20 Wektor jednostkowy $\hat{r}$ definiuje kierunek promienia wodzącego r, a prostopadły do niego wektor jednostkowy $\hat{t}$ definiuje kierunek obrotu promienia o kąt φ.

Przykład 2.6

Współrzędne biegunowe

Poszukiwacz skarbów znajduje srebrną monetę 20,0 m od wyschniętej studni w kierunku 20° na północ od kierunku wschodniego i złotą monetę 10,0 m od studni w kierunku 20° na północ od kierunku zachodniego. Jakie są współrzędne biegunowe i kartezjańskie jego znalezisk względem studni?

Strategia rozwiązania

Miejsce położenia studni jest biegunem układu współrzędnych, a wschód to dodatni kierunek osi x. Promienie wodzące łączące biegun z miejscami poszczególnych znalezisk są równe $r_S = 20{,}0\text{ m}$ (miejsce znalezienia srebrnej monety) i $r_Z = 10{,}0\text{ m}$ (miejsce znalezienia złotej monety). W celu określenia wartości kąta φ przekształcamy $20°$ na radiany: $20° = \pi \cdot 20/180\text{ rad} = \pi/9\text{ rad}$. Aby znaleźć współrzędne x i y monet, korzystamy z Równania 2.18.

Rozwiązanie

Kąt położenia srebrnej monety jest równy $\varphi_S = \pi/9$, a kąt położenia złotej monety jest równy $\varphi_Z = \pi - \pi/9 = 8\pi/9$. Współrzędne biegunowe srebrnej monety są więc równe $(r_S, \varphi_S) = (20{,}0\text{ m}; \pi/9\text{ rad})$, natomiast współrzędne monety złotej to $(r_Z, \varphi_Z) = (10{,}0\text{ m}; 8\pi/9\text{ rad})$. Aby otrzymać współrzędne kartezjańskie, podstawiamy współrzędne biegunowe do Równania 2.18. Współrzędne kartezjańskie miejsca znalezienia złotej monety są równe

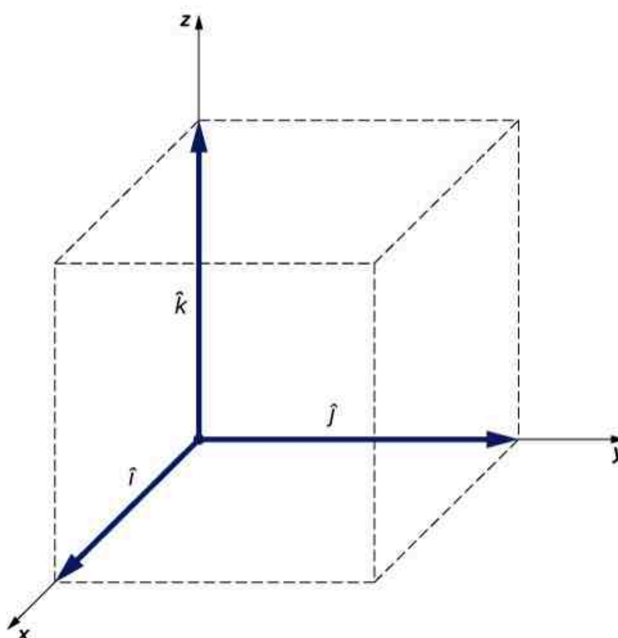
$$\begin{cases} x_Z = r_Z\cos\varphi_Z = 10{,}0\text{ m}\cdot\cos(8\pi/9) = -9{,}4\text{ m} \\ y_Z = r_Z\sin\varphi_Z = 10{,}0\text{ m}\cdot\sin(8\pi/9) = 3{,}4\text{ m} \end{cases} \implies (x_Z, y_Z) = (-9{,}4\text{ m}; 3{,}4\text{ m}).$$

Współrzędne miejsca znalezienia srebrnej monety są równe

$$\begin{cases} x_S = r_S\cos\varphi_S = 20{,}0\text{ m}\cdot\cos(\pi/9) = 18{,}9\text{ m} \\ y_S = r_S\sin\varphi_S = 20{,}0\text{ m}\cdot\sin(\pi/9) = 6{,}8\text{ m} \end{cases} \implies (x_S, y_S) = (18{,}9\text{ m}; 6{,}8\text{ m}).$$

Wektory w przestrzeni trójwymiarowej

Aby określić położenie punktu w przestrzeni, potrzebne są trzy zmienne (x, y, z), gdzie x oraz y określają położenie punktu na płaszczyźnie, natomiast współrzędna z informuje o odległości od płaszczyzny w pionie. W przestrzeni trójwymiarowej możemy wyróżnić trzy kierunki ortogonalne, a więc do opisu tej przestrzeni potrzebne są *trzy* wektory jednostkowe. W układzie współrzędnych kartezjańskich pierwsze dwa wektory jednostkowe to wersory osi x $\hat{i}$ oraz y $\hat{j}$. Trzecim wektorem jednostkowym $\hat{k}$ jest wektor informujący o kierunku osi z, a więc wersor tej osi (Rysunek 2.21). Kolejność podpisywania osi, a tym samym kolejność definiowania wektorów jednostkowych jest istotna, ponieważ od niej zależy orientacja układu współrzędnych. Kolejność x–y–z, równoważna z kolejnością $\hat{i}$–$\hat{j}$–$\hat{k}$, oznacza, że mamy do czynienia z układem prawoskrętnym, który definiuje się, używając metody śruby prawoskrętnej.



Rysunek 2.21 Trzy wektory jednostkowe definiują układ współrzędnych kartezjańskich w przestrzeni trójwymiarowej. Od kolejności podpisywania osi zależy orientacja układu współrzędnych. Układ przedstawiony na rysunku jest układem prawoskrętnym.

W przestrzeni trójwymiarowej wektor $\vec{A}$ ma trzy składowe: składową x: $\vec{A}_x = A_x\hat{i}$, będącą rzutem wektora $\vec{A}$ na oś x, składową y: $\vec{A}_y = A_y\hat{j}$, będącą rzutem wektora $\vec{A}$ na oś y, oraz składową z: $\vec{A}_z = A_z\hat{k}$, będącą rzutem wektora na oś z. Wektor w przestrzeni trójwymiarowej jest sumą swoich trzech składowych. (Rysunek 2.22):

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}. \tag{2.19}$$

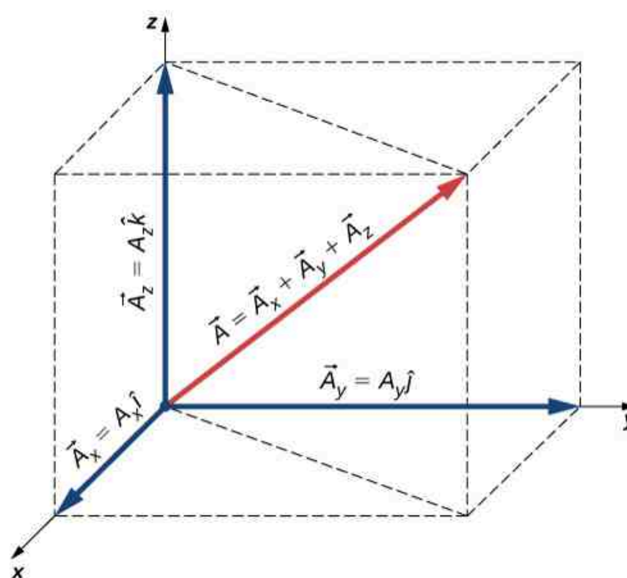
Jeśli znamy współrzędne punktu początkowego wektora $p(x_{\mathrm{p}}, y_{\mathrm{p}}, z_{\mathrm{p}})$ oraz współrzędne jego punktu końcowego $k(x_{\mathrm{k}}, y_{\mathrm{k}}, z_{\mathrm{k}})$, możemy obliczyć wartości składowych wektora, odejmując od siebie współrzędne punktów – dla A_x i A_y zostało to pokazane w Równaniu 2.13. Wartość składowej z uzyskujemy w następujący sposób:

$$A_z = z_{\mathrm{k}} - z_{\mathrm{p}}. \tag{2.20}$$

Moduł A obliczamy, wykonując Równanie 2.15 dla trzech wymiarów:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \tag{2.21}$$

Powyższy wzór wynika z dwukrotnego zastosowania twierdzenia Pitagorasa. Jak widać na Rysunku 2.22, przekątna w płaszczyźnie xy ma długość $\sqrt{A_x^2 + A_y^2}$, a po podniesieniu do kwadratu i dodaniu A_z^2 daje A^2. Zauważ, że kiedy składowa z jest równa zero, wektor leży w płaszczyźnie xy, w związku z czym jego opis ogranicza się do dwóch wymiarów.



Rysunek 2.22 Wektor w przestrzeni trójwymiarowej jest sumą swoich składowych.

Przykład 2.7

Lot drona

Podczas startu dron IAI Heron (Rysunek 2.23) znajduje się 100 m nad ziemią, 300 m na wschód i 200 m na północ względem wieży kontroli lotów. Minutę później dron znajduje się 250 m nad ziemią, 1200 m na wschód i 2100 m na północ względem wieży. Jaki jest wektor przemieszczenia drona względem wieży? Jaki jest moduł tego wektora?



Rysunek 2.23 Dron IAI Heron. (Źródło: SSgt Reynaldo Ramon, USAF)

Strategia rozwiązania

Przyjmujemy, że miejsce położenia wieży stanowi początek układu współrzędnych. Dodatni kierunek osi x określa wektor jednostkowy $\hat{i}$ (jest to kierunek wschodni), dodatni kierunek osi y określa wektor jednostkowy-

kowy $\hat{j}$ (jest to kierunek północny), a dodatni kierunek osi z określa wektor jednostkowy $\hat{k}$ (skierowany pionowo względem ziemi). Pozycja, z której startuje dron, stanowi punkt początkowy wektora przemieszczenia, a jego pozycja po upływie minuty stanowi jego punkt końcowy.

Rozwiązanie

Określamy współrzędne punktów $p(300{,}0\ \text{m};\ 200{,}0\ \text{m};\ 100{,}0\ \text{m})$ oraz $k(1200{,}0\ \text{m};\ 2100{,}0\ \text{m};\ 250{,}0\ \text{m})$, a następnie znajdujemy wartości składowych wektora przemieszczenia przy pomocy Równania 2.13 oraz Równania 2.20:

$$\begin{cases} D_x = x_\text{k} - x_\text{p} = 1200{,}0\ \text{m} - 300{,}0\ \text{m} = 900{,}0\ \text{m}, \\ D_y = y_\text{k} - y_\text{p} = 2100{,}0\ \text{m} - 200{,}0\ \text{m} = 1900{,}0\ \text{m}, \\ D_z = z_\text{k} - z_\text{p} = 250{,}0\ \text{m} - 100{,}0\ \text{m} = 150{,}0\ \text{m}. \end{cases}$$

Aby znaleźć wektor przemieszczenia, podstawiamy powyższe wartości do Równania 2.19:

$$\vec{D} = D_x\hat{i} + D_y\hat{j} + D_z\hat{k} = 900{,}0\ \text{m} \cdot \hat{i} + 1900{,}0\ \text{m} \cdot \hat{j} + 150{,}0\ \text{m} \cdot \hat{k}.$$

Aby znaleźć moduł wektora przemieszczenia, podstawiamy moduły poszczególnych składowych do Równania 2.21:

$$D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2 + D_z^2} = \sqrt{(0{,}90\ \text{km})^2 + (1{,}90\ \text{km})^2 + (0{,}15\ \text{km})^2} = 2{,}11\ \text{km}.$$



2.7 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Jeśli wektor średniej prędkości drona z Przykładu 2.7 jest równy $\vec{u} = 15{,}0\ \text{m/s} \cdot \hat{i} + 31{,}7\ \text{m/s} \cdot \hat{j} + 2{,}5\ \text{m/s} \cdot \hat{k}$, jaka jest wartość modułu tego wektora?

2.3 | Działania na wektorach

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- stosować metody analityczne dodawania wektorów i rozwiązywania równań, w których szukany jest wektor;
- opisywać zjawiska fizyczne przy pomocy wektorów.

Wektory można dodawać i mnożyć przez skalary. Dodawanie wektorów jest łączne (Równanie 2.8) i przemienne (Równanie 2.7), a mnożenie wektorów przez sumę skalarów jest rozdzielne względem dodawania (Równanie 2.9). Mnożenie skalarów przez sumę wektorów również jest rozdzielne względem dodawania:

$$\alpha\left(\vec{A} + \vec{B}\right) = \alpha\vec{A} + \alpha\vec{B}. \tag{2.22}$$

W powyższym równaniu α może być jakąkolwiek liczbą (skalarem). Przykładowo wektor o zwrocie przeciwnym do zwrotu wektora $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ można przedstawić, mnożąc $\vec{A}$ przez $\alpha = -1$:

$$-\vec{A} = -A_x\hat{i} - A_y\hat{j} - A_z\hat{k}. \tag{2.23}$$

Przykład 2.8

Kierunek ruchu

Dany jest układ współrzędnych kartezjańskich, gdzie $\hat{i}$ jest skierowany na wschód, $\hat{j}$ jest skierowany n północ, a $\hat{k}$ jest skierowany pionowo i oznacza wysokość nad poziomem morza. Oddział żołnierzy przemieszcza się po nieznanym terenie z prędkością $\vec{v} = 4{,}0\ \text{km/h} \cdot \hat{i} + 3{,}0\ \text{km/h} \cdot \hat{j} + 0{,}1\ \text{km/h} \cdot \hat{k}$. Jeśli zarządzono by odwrót, w jakim kierunku geograficznym oddział musiałby ruszyć?

Rozwiązanie

Trzecia składowa wektora prędkości jest równa $\vec{v}_z = +0{,}1\ \text{km/h} \cdot \hat{k}$, co oznacza, że oddział wspina się z prędkością 100 m/h. Prędkość w kierunku wschodnim jest równa 4,0 km/h, a w kierunku północnym 3,0 km/h, a więc kierunek oddziału na płaszczyźnie to $\text{arctg}(3/4) \approx 37°$ na północ od kierunku wschodniego. Jeśli oddział musiałby zawrócić, zwrot nowego wektora prędkości $\vec{u}$ musiałby być przeciwny do wektora $\vec{v}$. Można go zapisać $\vec{u} = -\alpha\vec{v}$, gdzie α jest liczbą dodatnią. Prędkość zawracającego oddziału byłaby więc równa $\vec{u} = \alpha\left(-4{,}0\ \text{km/h} \cdot \hat{i} - 3{,}0\ \text{km/h} \cdot \hat{j} - 0{,}1\ \text{km/h} \cdot \hat{k}\right)$. Minus przy trzeciej składowej oznacza, że oddział będzie szedł w dół. Kierunek nowego wektora prędkości opisuje kąt $\text{arctg}(-3\alpha/-4\alpha) \approx 37°$ na południe od kierunku zachodniego. W płaszczyźnie oddział będzie poruszał się w kierunku $37°$ na południe od kierunku zachodniego.

W rachunku wektorowym występuje pojęcie **wektora zerowego** (ang. **null vector**), zapisywanego $\vec{0}$. Wszystkie składowe wektora zerowego są równe zero, $\vec{0} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$, więc nie ma on długości ani kierunku.

Wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$ są równe wtedy i tylko wtedy, kiedy ich różnica jest wektorem zerowym:

$$\vec{0} = \vec{A} - \vec{B} = \left(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}\right) - \left(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}\right) = (A_x - B_x)\,\hat{i} + \left(A_y - B_y\right)\hat{j} + (A_z - B_z)\,\hat{k}.$$

Oznacza to, że muszą być spełnione równania $A_x - B_x = 0$, $A_y - B_y = 0$ oraz $A_z - B_z = 0$. Aby stwierdzić, że $\vec{A} = \vec{B}$, poszczególne składowe wektorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$ muszą być równe:

$$\vec{A} = \vec{B} \iff \begin{cases} A_x = B_x \\ A_y = B_y \\ A_z = B_z. \end{cases} \tag{2.24}$$

Dwa wektory są równe, jeśli wartości ich składowych są takie same.

Rozkład wektora na składowe i przedstawienie tego w formie takiej jak w Równaniu 2.19 pozwala na znalezienie sumy i różnicy wielu wektorów *analitycznie* (to znaczy bez użycia metod graficznych). Na przykład aby znaleźć sumę dwóch wektorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$, należy po prostu dodać do siebie ich poszczególne składowe

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = \left(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}\right) + \left(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}\right) = (A_x + B_x)\,\hat{i} + \left(A_y + B_y\right)\hat{j} + (A_z + B_z)\,\hat{k}.$$

Wartości składowych wektora sumy $\vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k}$ są więc sumami wartości odpowiednich składowych dodawanych wektorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$:

$$\begin{cases} R_x = A_x + B_x \\ R_y = A_y + B_y \\ R_z = A_z + B_z. \end{cases}$$

Przy pomocy metody analitycznej można obliczyć sumę wielu wektorów. Jeśli na przykład chcemy dodać N wektorów $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_N$, gdzie każdy wektor $\vec{F}_k = F_{kx}\hat{i} + F_{ky}\hat{j} + F_{kz}\hat{k}$, wektor sumy $\vec{F}_R$ będzie równy

$$\begin{aligned} \vec{F}_R &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_N \\ &= \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k = \sum_{k=1}^{N} \left(F_{kx}\hat{i} + F_{ky}\hat{j} + F_{kz}\hat{k} \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{N} F_{kx} \right)\hat{i} + \left(\sum_{k=1}^{N} F_{ky} \right)\hat{j} + \left(\sum_{k=1}^{N} F_{kz} \right)\hat{k}. \end{aligned}$$

Wartości składowych wektora sumy są równe:

$$\begin{cases} F_{Rx} = \sum_{k=1}^{N} F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{Nx} \\ F_{Ry} = \sum_{k=1}^{N} F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{Ny} \\ F_{Rz} = \sum_{k=1}^{N} F_{kz} = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{Nz}. \end{cases} \tag{2.25}$$

Skoro znamy wartości składowych wektora, możemy przedstawić rozkład wektora na składowe:

$$\vec{F}_R = F_{Rx}\hat{i} + F_{Ry}\hat{j} + F_{Rz}\hat{k}.$$

Obliczanie sumy wektorów – i rozwiązywanie równań wektorowych w ogóle – za pomocą metod analitycznych jest bardzo przydatne, ponieważ wiele wielkości fizycznych to wielkości wektorowe. Metodę analityczną stosujemy na przykład w kinematyce, kiedy chcemy znaleźć sumę wektorów przemieszczenia lub prędkości, w mechanice podczas obliczania wynikowego wektora siły oraz różnych wielkości pochodnych, czy też w elektryczności i magnetyzmie podczas obliczania sumy wektorów natężenia pola elektrycznego lub magnetycznego.

Przykład 2.9

Obliczanie sumy i różnicy wektorów metodą analityczną

Moduły trzech leżących na płaszczyźnie (Rysunek 2.13) wektorów $\vec{A}$, $\vec{B}$ oraz $\vec{C}$ są równe $A = 10{,}0$, $B = 7{,}0$ i $C = 8{,}0$. Ich kąty odchylenia od poziomu są równe $\alpha = 35^\circ$, $\beta = -110^\circ$ oraz $\gamma = 30^\circ$. Wartości modułów podane są w centymetrach. Znajdź wartości składowych poszczególnych wektorów i wykonaj następujące działania:

a. $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$,

b. $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$,

c. $\vec{S} = \vec{A} - 3\vec{B} + \vec{C}$.

Strategia rozwiązania

Najpierw znajdujemy wartości poszczególnych składowych każdego wektora i zapisujemy wektory w postaci rozkładu na składowe (Równanie 2.12). Następnie stosujemy metodę analityczną rachunku wektorowego.

Rozwiązanie

Dokonujemy rozkładu wektorów na składowe:

$$\begin{cases} A_x = A\cos\alpha = 10{,}0\,\text{cm} \cdot \cos(35°) = 8{,}19\,\text{cm}, \\ A_y = A\sin\alpha = 10{,}0\,\text{cm} \cdot \sin(35°) = 5{,}73\,\text{cm}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_x = B\cos\beta = 7{,}0\,\text{cm} \cdot \cos(-110°) = -2{,}39\,\text{cm}, \\ B_y = B\sin\beta = 7{,}0\,\text{cm} \cdot \sin(-110°) = -6{,}58\,\text{cm}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_x = C\cos\gamma = 8{,}0\,\text{cm} \cdot \cos(30°) = 6{,}93\,\text{cm}, \\ C_y = C\sin\gamma = 8{,}0\,\text{cm} \cdot \sin(30°) = 4{,}00\,\text{cm}. \end{cases}$$

(a) Aby otrzymać wartości składowych wektora wynikowego, możemy po prostu podstawić otrzymane wartości do Równania 2.24:

$$\begin{cases} R_x = A_x + B_x + C_x = 8{,}19 \text{ cm} - 2{,}39 \text{ cm} + 6{,}93 \text{ cm} = 12{,}73 \text{ cm} \\ R_y = A_y + B_y + C_y = 5{,}73 \text{ cm} - 6{,}58 \text{ cm} + 4{,}00 \text{ cm} = 3{,}15 \text{ cm}. \end{cases}$$

Otrzymujemy wektor $\vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} = 12{,}7 \text{ cm} \cdot \hat{i} + 3{,}2 \text{ cm} \cdot \hat{j}$.

(b) Różnicę wektorów możemy zapisać jako

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = \left(A_x\hat{i} + A_y\hat{j}\right) - \left(B_x\hat{i} + B_y\hat{j}\right) = (A_x - B_x)\,\hat{i} + \left(A_y - B_y\right)\hat{j}.$$

Wartości składowych wektora różnicy są równe

$$\begin{cases} D_x = A_x - B_x = 8{,}19 \text{ cm} - (-2{,}39 \text{ cm}) = 10{,}58 \text{ cm} \\ D_y = A_y - B_y = 5{,}73 \text{ cm} - (-6{,}58 \text{ cm}) = 12{,}31 \text{ cm}. \end{cases}$$

Otrzymujemy następujący wektor różnicy: $\vec{D} = D_x\hat{i} + D_y\hat{j} = 10{,}6 \text{ cm} \cdot \hat{i} + 12{,}3 \text{ cm} \cdot \hat{j}$.

(c) Możemy zapisać wektor $\vec{S}$ w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \vec{A} - 3\vec{B} + \vec{C} = \left(A_x\hat{i} + A_y\hat{j}\right) - 3\left(B_x\hat{i} + B_y\hat{j}\right) + \left(C_x\hat{i} + C_y\hat{j}\right) \\ &= (A_x - 3B_x + C_x)\,\hat{i} + \left(A_y - 3B_y + C_y\right)\hat{j}. \end{aligned}$$

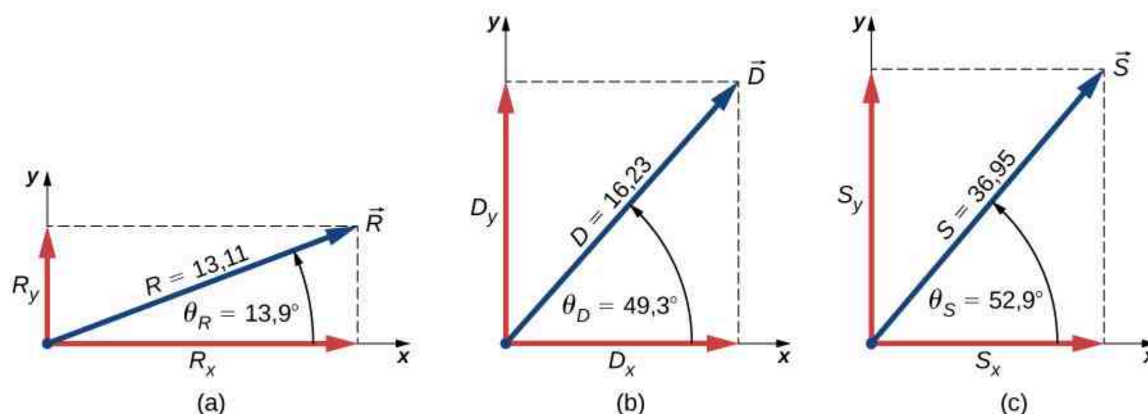
Wartości składowych wektora $\vec{S}$ są równe

$$\begin{cases} S_x = A_x - 3B_x + C_x = 8{,}19 \text{ cm} - 3 \cdot (-2{,}39 \text{ cm}) + 6{,}93 \text{ cm} = 22{,}29 \text{ cm} \\ S_y = A_y - 3B_y + C_y = 5{,}73 \text{ cm} - 3 \cdot (-6{,}58 \text{ cm}) + 4{,}00 \text{ cm} = 29{,}47 \text{ cm}. \end{cases}$$

Otrzymujemy wektor $\vec{S} = S_x\hat{i} + S_y\hat{j} = 22{,}3 \text{ cm} \cdot \hat{i} + 29{,}5 \text{ cm} \cdot \hat{j}$.

Znaczenie

Kiedy znamy już składowe wektorów, możemy przedstawić te wektory graficznie lub obliczyć ich moduły i kąty określające kierunek, jak przedstawiono to na Rysunku 2.24. Wyniki otrzymane podczas obliczania modułów w sytuacjach (b) i (c) można porównać z wynikami uzyskanymi przy pomocy metody graficznej, jak w Rysunku 2.14 oraz Rysunku 2.15. Wyniki uzyskane przy pomocy metody analitycznej są precyzyjne, a ich dokładność nie jest ograniczona przez skalę linijki ani kątomierza, jak dzieje się w przypadku metody graficznej (Przykład 2.2).



Rysunek 2.24 Ilustracja wyników otrzymanych przy pomocy metody analitycznej w Przykładzie 2.9.

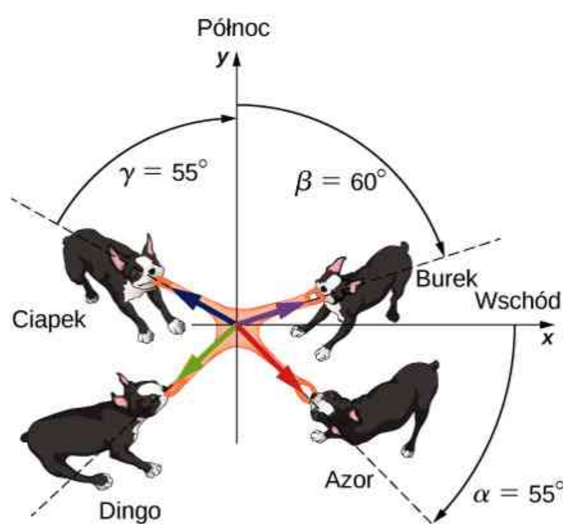


2.8 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Moduły trzech wektorów przemieszczenia $\vec{A}$, $\vec{B}$ oraz $\vec{F}$ (Rysunek 2.13) są równe $A = 10{,}0$, $B = 7{,}0$ oraz $F = 20{,}0$. Kąty nachylenia tych wektorów do poziomu są równe kolejno $\alpha = 35^\circ$, $\beta = -110^\circ$, $\varphi = 110^\circ$. Wartości modułów podane są w centymetrach. Za pomocą metody analitycznej znajdź wektor $\vec{G} = \vec{A} + 2\vec{B} - \vec{F}$. Sprawdź, czy wartość modułu $G = 28{,}15 \text{ cm}$ oraz czy kąt $\theta_G = -68,65^\circ$.

Przykład 2.10

Psia zabawa

Cztery psy – Azor, Burek, Ciapek i Dingo – jednocześnie ciągną zabawkę, każdy w swoją stronę (Rysunek 2.25). Azor ciągnie ją pod kątem $\alpha = 55^\circ$ na południe od kierunku wschodniego, Burek pod kątem $\beta = 60^\circ$ na wschód od kierunku północnego, a Ciapek pod kątem $\gamma = 55^\circ$ na zachód od kierunku północnego. Azor ciągnie siłą o wartości $A = 160{,}0 \text{ N}$, Burek siłą o wartości $B = 200{,}0 \text{ N}$, a Ciapek siłą o wartości $C = 140{,}0 \text{ N}$. Dingo ciągnie zabawkę siłą, która równoważy siły wywierane przez pozostałe psy, co oznacza, że zabawka jest cały czas w tym samym miejscu. Jaki jest kierunek oraz wartość siły wywieranej na zabawkę przez Dingo?



Rysunek 2.25 Cztery psy ciągnące zabawkę, każdy w swoją stronę.

Strategia rozwiązania

Zakładamy, że kierunek wschodni jest dodatnim kierunkiem osi x, a kierunek północny jest dodatnim kierunkiem osi y. Najpierw, podobnie jak w Przykładzie 2.9, musimy dokonać rozkładu wektorów $\vec{A}$, $\vec{B}$ oraz $\vec{C}$ na składowe, a następnie znaleźć wartości składowych wynikowego wektora $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$. Siła $\vec{D}$ równoważy pozostałe siły, co oznacza, że suma wektorów $\vec{D}$ i $\vec{R}$ musi być wektorem zerowym: $\vec{D} + \vec{R} = \vec{0}$. Wynika z tego, że $\vec{D} = -\vec{R}$, a więc siła, z jaką ciągnie zabawkę Dingo, jest wektorem o tym samym kierunku, lecz zwrocie przeciwnym do zwrotu $\vec{R}$.

Rozwiązanie

Kąty nachylenia wektorów do osi x są równe $\theta_A = -\alpha = -55^\circ$, $\theta_B = 90^\circ - \beta = 30^\circ$, $\theta_C = 90^\circ + \gamma = 145^\circ$. Podstawiając je do Równania 2.17, otrzymujemy wartości składowych wektorów siły:

$$\begin{cases} A_x = A\cos\theta_A = 160{,}0\,\text{N}\cdot\cos(-55^\circ) = 91{,}8\,\text{N}, \\ A_y = A\sin\theta_A = 160{,}0\,\text{N}\cdot\sin(-55^\circ) = -131{,}1\,\text{N}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_x = B\cos\theta_B = 200{,}0\,\text{N}\cdot\cos(30^\circ) = 173{,}2\,\text{N}, \\ B_y = B\sin\theta_B = 200{,}0\,\text{N}\cdot\sin(30^\circ) = 100{,}0\,\text{N}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_x = C\cos\theta_C = 140{,}0\,\text{N}\cdot\cos(145^\circ) = -114{,}7\,\text{N}, \\ C_y = C\sin\theta_C = 140{,}0\,\text{N}\cdot\sin(145^\circ) = 80{,}3\,\text{N}. \end{cases}$$

Następnym krokiem jest obliczenie wartości składowych wektora wynikowego $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$:

$$\begin{cases} R_x = A_x + B_x + C_x = +91{,}8\,\text{N} + 173{,}2\,\text{N} - 114{,}7\,\text{N} = +150{,}3\,\text{N}, \\ R_y = A_y + B_y + C_y = -131{,}1\,\text{N} + 100{,}0\,\text{N} + 80{,}3\,\text{N} = +49{,}2\,\text{N}. \end{cases}$$

Następnie zapisujemy wektor o tym samym kierunku co wektor $\vec{R}$, ale o przeciwnym zwrocie

$$\vec{D} = -\vec{R} = -R_x\hat{i} - R_y\hat{j} = -150{,}3\,\text{N}\cdot\hat{i} - 49{,}2\,\text{N}\cdot\hat{j}.$$

Siła, z jaką ciągnie zabawkę Dingo, ma moduł równy

$$D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = \sqrt{(-150{,}3\,\text{N})^2 + (-49{,}2\,\text{N})^2} = 158{,}1\,\text{N}.$$

Kierunek tej siły to

$$\theta = \text{arctg}\left(\frac{D_y}{D_x}\right) = \text{arctg}\left(\frac{-49{,}2\,\text{N}}{-150{,}3\,\text{N}}\right) = 18,1^\circ.$$

Dingo ciągnie zabawkę pod kątem $18,1^\circ$ na południe od kierunku zachodniego, ponieważ wartości obu składowych wektora siły są ujemne – wektor leży w trzeciej ćwiartce (Rysunek 2.19).



2.9 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Przypuśćmy, że Burek (Przykład 2.10) porzuca zabawę na rzecz ważniejszych spraw. Siła, z jaką zabawkę ciągną Azor i Ciapek, nie zmienia się, ale Dingo puszcza ją na chwilę i łapie w innym miejscu. Określ kierunek i wartość siły, z jaką musi ciągnąć zabawkę Dingo, aby zrównoważyć siły wywierane przez Azora i Ciapka. Narysuj diagram przedstawiający wszystkie wektory siły.

Przykład 2.11

Algebra wektorów

Znajdź moduł wektora $\vec{C}$ spełniającego równanie $2\vec{A} - 6\vec{B} + 3\vec{C} = 2\hat{j}$, gdzie $\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{k}$ i $\vec{B} = -\hat{j} + \hat{k}/2$.

Strategia rozwiązania

Na początku przekształcamy równanie, aby wyznaczyć $\vec{C}$. Do tak przekształconego równania podstawiamy $\vec{A}$ i $\vec{B}$. Następnie grupujemy wyrażenia według kierunków $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ i wyznaczamy wartości składowych C_x, C_y, C_z. Na końcu podstawiamy wyniki do Równania 2.21 w celu znalezienia modułu wektora $\vec{C}$.

Rozwiązanie

$$
\begin{aligned}
2\vec{A} - 6\vec{B} + 3\vec{C} &= 2\hat{j}, \\
3\vec{C} &= 2\hat{j} - 2\vec{A} + 6\vec{B}, \\
\vec{C} &= \frac{2}{3}\hat{j} - \frac{2}{3}\vec{A} + 2\vec{B} \\
&= \frac{2}{3}\hat{j} - \frac{2}{3}\left(\hat{i} - 2\hat{k}\right) + 2\left(-\hat{j} + \frac{\hat{k}}{2}\right) \\
&= \frac{2}{3}\hat{j} - \frac{2}{3}\hat{i} + \frac{4}{3}\hat{k} - 2\hat{j} + \hat{k} \\
&= -\frac{2}{3}\hat{i} + \left(\frac{2}{3} - 2\right)\hat{j} + \left(\frac{4}{3} + 1\right)\hat{k} \\
&= -\frac{2}{3}\hat{i} - \frac{4}{3}\hat{j} + \frac{7}{3}\hat{k}.
\end{aligned}
$$

Wartości składowych szukanego wektora są następujące: $C_x = -2/3$, $C_y = -4/3$, $C_z = 7/3$. Po podstawieniu ich do Równania 2.21 otrzymujemy

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2} = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{23}{3}}.$$

Przykład 2.12

Przemieszczenie narciarza

Narciarz biegowy rusza ze stacji narciarskiej i biegnie 5,0 km na północ, następnie 3,0 km na zachód, a później 4,0 km na południowy zachód. Znajdź wektor jego całkowitego przemieszczenia o punkcie początkowym w stacji narciarskiej. Jaki dystans i w jakim kierunku musi przebyć narciarz, aby wrócić do stacji najkrótszą drogą?

Strategia rozwiązania

Do rozwiązania tego zadania posłużymy się prostokątnym układem współrzędnych, którego początkiem będzie stacja narciarska. Wektor jednostkowy $\hat{i}$ będzie wskazywał wschód, a wektor jednostkowy $\hat{j}$ będzie wskazywał północ. Możemy wyróżnić trzy wektory przemieszczenia: $\vec{D}_1$, $\vec{D}_2$ i $\vec{D}_3$. Ich moduły są równe $D_1 = 5{,}0\text{ km}$, $D_2 = 3{,}0\text{ km}$, i $D_3 = 4{,}0\text{ km}$. Ich kąty nachylenia do osi x są równe $\theta_1 = 90^\circ$, $\theta_2 = 180^\circ$ i $\theta_3 = 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$. Każdy z wektorów rozbijamy na składowe, które podstawiamy do Równania

2.24 – w ten sposób otrzymamy wartości składowych wektora całkowitego przemieszczenia $\vec{D}$. Przemieszczenie narciarza w drodze powrotnej jest równe $\vec{B} = -\vec{D}$. W końcu możemy określić moduł i kierunek wektora $\vec{B}$.

Rozwiązanie

Wartości składowych wektorów przemieszczenia są równe

$$\begin{cases} D_{1x} = D_1 \cos\theta_1 = 5{,}0\,\text{km} \cdot \cos(90°) = 0{,}0\,\text{km}, \\ D_{1y} = D_1 \sin\theta_1 = 5{,}0\,\text{km} \cdot \sin(90°) = 5{,}0\,\text{km}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_{2x} = D_2 \cos\theta_2 = 3{,}0\,\text{km} \cdot \cos(180°) = -3{,}0\,\text{km}, \\ D_{2y} = D_2 \sin\theta_2 = 3{,}0\,\text{km} \cdot \sin(180°) = 0{,}0\,\text{km}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_{3x} = D_3 \cos\theta_3 = 4{,}0\,\text{km} \cdot \cos(225°) = -2{,}8\,\text{km}, \\ D_{3y} = D_3 \sin\theta_3 = 4{,}0\,\text{km} \cdot \sin(225°) = -2{,}8\,\text{km}. \end{cases}$$

Wartości składowych wynikowego wektora przemieszczenia są równe

$$\begin{cases} D_x = D_{1x} + D_{2x} + D_{3x} = 0\,\text{km} - 3{,}0\,\text{km} - 2{,}8\,\text{km} = -5{,}8\,\text{km}, \\ D_y = D_{1y} + D_{2y} + D_{3y} = 5{,}0\,\text{km} + 0\,\text{km} - 2{,}8\,\text{km} = +2{,}2\,\text{km}. \end{cases}$$

Wektor całkowitego przemieszczenia narciarza jest więc równy $\vec{D} = D_x\hat{i} + D_y\hat{j} = -5{,}8\,\text{km} \cdot \hat{i} + 2{,}2\,\text{km} \cdot \hat{j}$. Wektor jego przemieszczenia w drodze powrotnej ma przeciwny zwrot: $\vec{B} = -\vec{D} = -\left(-5{,}8\,\text{km} \cdot \hat{i} + 2{,}2\,\text{km}\hat{j}\right) = 5{,}8\,\text{km} \cdot \hat{i} - 2{,}2\,\text{km} \cdot \hat{j}$. Moduł tego wektora jest równy $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(5{,}8\,\text{km})^2 + (-2{,}2\,\text{km})^2} = 6{,}2\,\text{km}$, a jego kąt nachylenia do osi x jest równy $\theta = \text{arctg}(-2{,}2/5{,}8) = -20{,}8°$, co oznacza, że aby wrócić prostą drogą do stacji, narciarz musi przebiec 6,2 km w kierunku około 21° na południe od kierunku wschodniego.

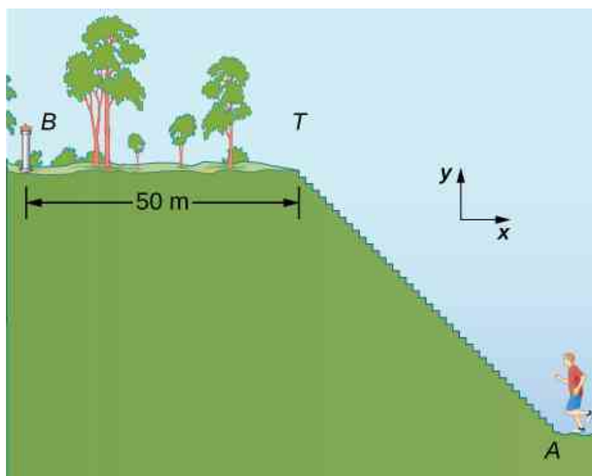
Znaczenie

Rozwiązanie przy pomocy metody analitycznej nie wymaga rysowania czegokolwiek, zawsze jednak warto wykonać prosty szkic – pomoże nam to stwierdzić, czy uzyskane przez nas wyniki są sensowne.

Przykład 2.13

Przemieszczenie biegacza

Biegacz dostaje się na szczyt wzgórza, pokonując 200 schodów, biegnie szczytem przez 50,0 m, po czym zatrzymuje sie przy fontannie (Rysunek 2.26). Wektor jego przemieszczenia z punktu A u podnóża schodów do punktu B przy fontannie jest równy $\vec{D}_{AB} = -90{,}0\text{m} \cdot \hat{i} + 30{,}0\text{m} \cdot \hat{j}$. Jaka jest wysokość i szerokość każdego stopnia? Jaki dystans przebył biegacz? Jaki będzie wektor jego przemieszczenia, jeśli wróci on do punktu A tą samą drogą?



Rysunek 2.26 Biegacz pokonuje schody.

Strategia rozwiązania

Wektor przemieszczenia $\vec{D}_{AB}$ jest sumą wektorów $\vec{D}_{AT}$ (od punktu A u podnóża schodów do punktu T na szczycie schodów) oraz $\vec{D}_{TB}$ (od punktu T do punktu B przy fontannie). Musimy znaleźć składową poziomą i pionową wektora $\vec{D}_{TB}$. Jeśli szerokość stopnia oznaczymy przez w, a jego wysokość przez h, składowa pozioma wektora $\vec{D}_{TB}$ musi być równa $200w$, a składowa pionowa $200h$. Dystans pokonany przez biegacza jest sumą dystansu, jaki pokonał, wbiegając po schodach, i dystansu (50,0 m), jaki przebiegł szczytem pagórka.

Rozwiązanie

W układzie współrzędnych przedstawionym na Rysunku 2.26 wektor przemieszczenia biegacza po szczycie wzgórza jest równy $\vec{D}_{TB} = -50{,}0\ \text{m} \cdot \hat{i}$. Wektor jego całkowitego przemieszczenia to

$$\vec{D}_{AB} = \vec{D}_{AT} + \vec{D}_{TB}.$$

Wektor jego przemieszczenia od podnóża schodów na szczyt $\vec{D}_{TB}$ jest więc równy

$$\begin{aligned}\vec{D}_{AT} &= \vec{D}_{AB} - \vec{D}_{TB}\\ &= -90{,}0\ \text{m} \cdot \hat{i} + 30{,}0\ \text{m} \cdot \hat{j} - \left(-50{,}0\ \text{m} \cdot \hat{i}\right)\\ &= (-90{,}0\ \text{m} + 50{,}0\ \text{m}) \cdot \hat{i} + 30{,}0\ \text{m} \cdot \hat{j}\\ &= -40{,}0\ \text{m} \cdot \hat{i} + 30{,}0\ \text{m} \cdot \hat{j}.\end{aligned}$$

Wartości jego składowych sa równe $D_{ATx} = -40{,}0\ \text{m}$ oraz $D_{ATy} = 30{,}0\ \text{m}$. Dlatego

$$\begin{aligned}200w &= |-40{,}0\ \text{m}| = 40{,}0\ \text{m},\\ 200h &= 30{,}0\ \text{m}.\end{aligned}$$

Szerokość stopnia jest więc równa $w = 40{,}0\ \text{m}/200 = 0{,}2\ \text{m} = 20\ \text{cm}$, a jego wysokość $h = 30{,}0\ \text{m}/200 = 0{,}15\ \text{m} = 15\ \text{cm}$. Dystans, jaki pokonuje biegacz, wbiegając na schody, jest równy

$$D_{AT} = \sqrt{D_{ATx}^2 + D_{ATy}^2} = \sqrt{(-40{,}0\ \text{m})^2 + (30{,}0\ \text{m})^2} = 50{,}0\ \text{m}.$$

Dystans, jaki pokonał biegacz, jest więc równy $D_{AT} + D_{TB} = 50{,}0\ \text{m} + 50{,}0\ \text{m} = 100{,}0\ \text{m}$. Jeśli biegacz wróci do punktu A tą samą drogą, przebyty przez niego dystans będzie dwa razy dłuższy – będzie równy

200,0 m. Wektor jego przemieszczenia będzie w takim wypadku wektorem zerowym – jego punkt początkowy będzie jednocześnie punktem końcowym, a więc wartości składowych wektora będą równe zero (Równanie 2.13).

W wielu sytuacjach musimy znać kierunek wektora. Na przykład gdy chcemy wiedzieć, jaki jest kierunek wektora pola magnetycznego lub w jakim kierunku porusza się ciało. Wiemy już, że kierunek określany jest przez wektor jednostkowy nie posiadający jednostki. Jeśli wektor, którego kierunku szukamy, jest równoległy do jednej z osi układu współrzędnych, nie ma problemu – jego kierunek jest zgodny lub przeciwny do kierunku wektora jednostkowego tej osi. Przykładowo kierunkiem wektora $\vec{d} = -5\text{ m} \cdot \hat{i}$ jest wektor jednostkowy $\hat{d} = -\hat{i}$. Aby znaleźć wektor jednostkowy $\hat{V}$ wektora $\vec{V}$, należy podzielić go przez jego moduł V:

$$\hat{V} = \frac{\vec{V}}{V}. \tag{2.26}$$

Dzięki Równaniu 2.26 widzimy, że wektor jednostkowy rzeczywiście jest liczbą niemianowaną – licznik i mianownik mają tę samą jednostkę. Równanie 2.26 pozwala na wyrażenie wektora jednostkowego za pomocą wersorów osi. Poniższy przykład wyjaśnia tę zasadę.

Przykład 2.14

Wektor jednostkowy określający kierunek

Jeśli wektor prędkości oddziału żołnierzy z Przykładu 2.8 jest równy $\vec{v} = 4{,}0\text{ km/h} \cdot \hat{i} + 3{,}0\text{ km/h} \cdot \hat{j} + 0{,}1\text{ km/h} \cdot \hat{k}$, jaki wektor jednostkowy określa jego kierunek?

Strategia rozwiązania

Wektor jednostkowy $\hat{v}$ określający kierunek ruchu oddziału jest zgodny z wektorem prędkości. Wektor jednostkowy znajdujemy, dzieląc wektor przez jego moduł, zgodnie z Równaniem 2.26.

Rozwiązanie

Moduł wektora $\vec{v}$ jest równy

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(4{,}000\text{ km/h})^2 + (3{,}000\text{ km/h})^2 + (0{,}100\text{ km/h})^2} = 5{,}001\text{ km/h}.$$

Aby otrzymać wektor jednostkowy $\hat{v}$, dzielimy wektor $\vec{v}$ przez jego moduł:

$$\begin{aligned}\hat{v} = \frac{\vec{v}}{v} &= \frac{4{,}000\text{ km/h} \cdot \hat{i} + 3{,}000\text{ km/h} \cdot \hat{j} + 0{,}100\text{ km/h} \cdot \hat{k}}{5{,}001\text{ km/h}} \\ &= \frac{4{,}000\hat{i} + 3{,}000\hat{j} + 0{,}100\hat{k}}{5{,}001} \\ &= \frac{4{,}000}{5{,}001}\hat{i} + \frac{3{,}000}{5{,}001}\hat{j} + \frac{0{,}100}{5{,}001}\hat{k} \\ &= \left(79{,}98\hat{i} + 59{,}99\hat{j} + 2{,}00\hat{k}\right) \cdot 10^{-2}.\end{aligned}$$

Znaczenie

Jeśli stosujesz metodę analityczną i korzystasz z kalkulatora, warto prowadzić obliczenia na liczbach z dokładnością co najmniej do trzech miejsc po przecinku, a dopiero po uzyskaniu ostatecznego wyniku zastosować wymagane zaokrąglenie, tak jak zrobiliśmy to w tym przykładzie. Zaokrąglanie kolejnych liczb podczas obliczeń powoduje, że niedokładność wyniku wzrasta.



2.10 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Obliczając moduł wektora $\hat{v}$, uzyskany w Przykładzie 2.14, udowodnij, że rzeczywiście jest on wektorem jednostkowym. Jeśli oddział z Przykładu 2.8 poruszałby się po płaskim terenie, a więc jeśli trzecia składowa wektora jego prędkości byłaby równa zero, jaki wektor jednostkowy określałby jego kierunek? Jaki kierunek geograficzny wskazywałby ten wektor?

2.4 | Mnożenie wektorów

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- różnic między iloczynem skalarnym a iloczynem wektorowym dwóch wektorów;
- obliczać iloczyn skalarny dwóch wektorów;
- obliczać iloczyn wektorowy dwóch wektorów;
- jakie zastosowanie w fizyce mają iloczyny wektorów.

Wektor można pomnożyć przez inny wektor, ale nie można go przez niego podzielić. Możemy wyróżnić dwa rodzaje mnożenia wektorów. Pierwszy rodzaj mnożenia to *iloczyn skalarny*. Wynik iloczynu skalarnego jest, jak sama nazwa wskazuje, skalarem, czyli liczbą. Z iloczynu skalarnego korzysta się podczas określania pracy i energii. Przykładowo, praca wykonywana przez pewną siłę (wektor) działającą na ciało i jednocześnie powodującą jego przesunięcie jest iloczynem skalarnym wektora siły i wektora przemieszczenia. Drugim rodzajem mnożenia jest *iloczyn wektorowy*. Iloczyn wektorowy jest wektorem. Wykorzystywany jest do definiowania wektorowych wielkości pochodnych. Na przykład wielkość wektorową zwaną *momentem siły* definiuje się jako iloczyn wektorowy siły oraz promienia wodzącego łączącego oś obrotu z punktem przyłożenia tej siły.

Iloczyn skalarny dwóch wektorów

Wynikiem iloczynu skalarnego jest skalar, czyli liczba.

Iloczyn skalarny

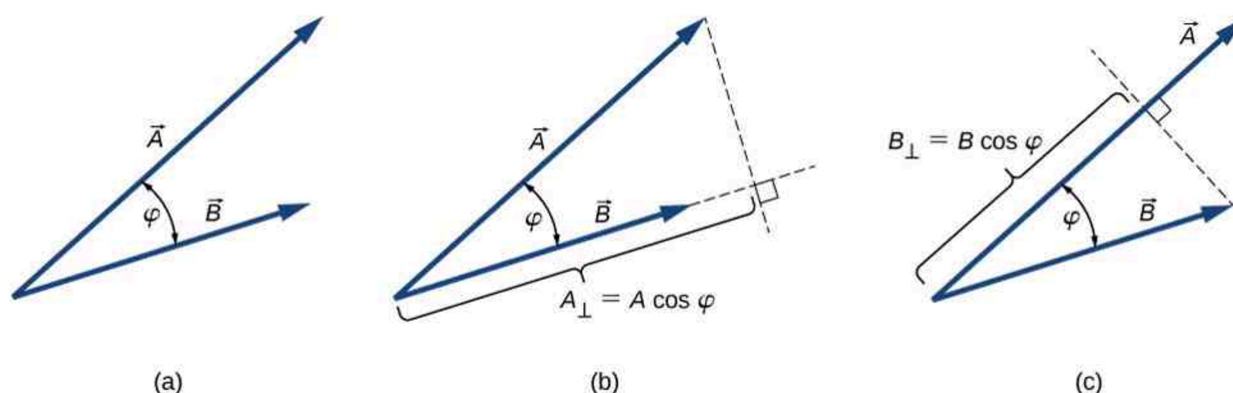
Iloczyn skalarny (ang. **dot product**) $\vec{A} \cdot \vec{B}$ dwóch wektorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$ jest liczbą określoną wzorem

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \varphi, \tag{2.27}$$

gdzie φ jest kątem między wektorami (zobacz Rysunek 2.27).

Kierunek, w jakim mierzymy kąt φ, jest bez znaczenia, ponieważ $\cos \varphi = \cos(-\varphi) = \cos(2\pi - \varphi)$. Iloczyn skalarny jest liczbą ujemną, kiedy $90^\circ < \varphi \leqslant 180^\circ$, a liczbą dodatnią, kiedy $0^\circ \leqslant \varphi < 90^\circ$. Iloczyn skalarny wektorów o tym samym kierunku i zwrocie jest równy $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos 0^\circ = AB$. Iloczyn skalarny dwóch wektorów o tym samym kierunku, lecz przeciwnych zwrotach jest równy $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos 180^\circ = -AB$. Iloczyn skalarny dwóch *wektorów ortogonalnych* jest równy zero: $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos 90^\circ = 0$. Iloczyn skalarny wektora mnożonego przez samego siebie jest kwadratem modułu tego wektora:

$$\vec{A}^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = AA \cos 0^\circ = A^2. \tag{2.28}$$



Rysunek 2.27 Iloczyn skalarny dwóch wektorów. (a) Kąt między wektorami. (b) Rzut prostopadły $A_\perp$ wektora $\vec{A}$ na kierunek wektora $\vec{B}$. (c) Rzut prostopadły $B_\perp$ wektora $\vec{B}$ na kierunek wektora $\vec{A}$.

Przykład 2.15

Iloczyn skalarny

Znajdź iloczyn skalarny $\vec{A} \cdot \vec{F}$ (wektory przedstawione są na Rysunku 2.13).

Strategia rozwiązania

Moduły wektorów $\vec{A}$ i $\vec{F}$ są równe $A = 10{,}0$ oraz $F = 20{,}0$. Kąt θ między tymi wektorami jest równy $\theta = \varphi - \alpha = 110^\circ - 35^\circ = 75^\circ$. Po podstawieniu powyższych wartości do Równania 2.27 otrzymujemy skalar.

Rozwiązanie

Na podstawie obliczeń otrzymujemy

$$\vec{A} \cdot \vec{F} = AF\cos\theta = 10{,}0 \cdot 20{,}0 \cdot \cos 75^\circ = 51{,}76.$$



2.11 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Znajdź następujące iloczyny skalarne wektorów przedstawionych na Rysunku 2.13: $\vec{A} \cdot \vec{B}$ oraz $\vec{F} \cdot \vec{C}$.

W układzie współrzędnych kartezjańskich iloczyn skalarny wektorów jednostkowych zawsze jest równy zero, ponieważ wektory te są do siebie prostopadłe:

$$\begin{aligned} \hat{i} \cdot \hat{j} &= \left|\hat{i}\right| \cdot \left|\hat{j}\right| \cdot \cos 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0, \\ \hat{i} \cdot \hat{k} &= \left|\hat{i}\right| \cdot \left|\hat{k}\right| \cdot \cos 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0, \\ \hat{k} \cdot \hat{j} &= \left|\hat{k}\right| \cdot \left|\hat{j}\right| \cdot \cos 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

W tych równaniach korzystamy z faktu, że moduły wszystkich wektorów jednostkowych są równe jeden: $\left|\hat{i}\right| = \left|\hat{j}\right| = \left|\hat{k}\right| = 1$. Na podstawie Równania 2.28 możemy zapisać:

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = i^2 = \hat{j} \cdot \hat{j} = j^2 = \hat{k} \cdot \hat{k} = k^2 = 1. \quad (2.30)$$

Iloczyn skalarny $\vec{A} \cdot \vec{B}$ można również interpretować jako iloczyn B oraz rzutu prostopadłego $A_\perp$ wektora $\vec{A}$ na kierunek wektora $\vec{B}$ (Rysunek 2.27(b)) lub jako iloczyn A oraz rzutu prostopadłego $B_\perp$ wektora $\vec{B}$ na kierunek wektora $\vec{A}$ (Rysunek 2.27(c)):

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} &= AB\cos\varphi \\ &= B\,(A\cos\varphi) = BA_{\perp} \\ &= A\,(B\cos\varphi) = AB_{\perp}.\end{aligned}$$

Na przykład w prostokątnym, dwuwymiarowym układzie współrzędnych, wartość składowej x wektora jest iloczynem skalarnym tego wektora oraz wersora $\hat{i}$, natomiast wartość składowej y wektora jest iloczynem skalarnym tego wektora oraz wersora $\hat{j}$:

$$\begin{cases}\vec{A}\cdot\hat{i} = \left|\vec{A}\right|\cdot\left|\hat{i}\right|\cdot\cos\theta_A = A\cos\theta_A = A_x, \\ \vec{A}\cdot\hat{j} = \left|\vec{A}\right|\cdot\left|\hat{j}\right|\cdot\cos(90^{\circ}-\theta_A) = A\sin\theta_A = A_y.\end{cases}$$

Iloczyn skalarny jest przemienny

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}, \tag{2.31}$$

oraz rozdzielny względem dodawania

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}+\vec{C}\right) = \vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}. \tag{2.32}$$

Prawa przemienności i rozdzielności względem dodawania pozwalają na przedstawienie wzorów w przekształconej formie. Iloczyn skalarny dwóch wektorów możemy przedstawić na przykład przy pomocy ich składowych.



2.12

Sprawdź, czy rozumiesz. Wektor $\vec{A} = A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$ znajduje się w prostokątnym układzie współrzędnych. Skorzystaj z Równania 2.29 oraz z Równania 2.32, aby udowodnić, że $\vec{A}\cdot\hat{i} = A_x$, $\vec{A}\cdot\hat{j} = A_y$ oraz $\vec{A}\cdot\hat{k} = A_z$.

Kiedy wektory z Równania 2.27 rozłożone są na składowe

$$\vec{A} = A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k} \text{ oraz } \vec{B} = B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k},$$

możemy obliczyć ich iloczyn skalarny w następujący sposób:

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} &= \left(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}\right)\cdot\left(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}\right) \\ &= A_xB_x\hat{i}\cdot\hat{i}+A_xB_y\hat{i}\cdot\hat{j}+A_xB_z\hat{i}\cdot\hat{k} \\ &\quad +A_yB_x\hat{j}\cdot\hat{i}+A_yB_y\hat{j}\cdot\hat{j}+A_yB_z\hat{j}\cdot\hat{k} \\ &\quad +A_zB_x\hat{k}\cdot\hat{i}+A_zB_y\hat{k}\cdot\hat{j}+A_zB_z\hat{k}\cdot\hat{k}.\end{aligned}$$

Jako że iloczyn dwóch różnych wektorów jednostkowych jest równy zero, a wektor jednostkowy pomnożony skalarnie przez samego siebie daje jeden (zobacz Równanie 2.29 i Równanie 2.30), to w powyższym równaniu znajdują się tylko trzy wyrażenia, których wartość jest różna od zera. Upraszczamy więc iloczyn skalarny do następującej postaci:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (2.33)$$

Możemy zastosować Równanie 2.33, aby znaleźć **kąt między dwoma wektorami** (ang. **angle between two vectors**). Kiedy podzielimy Równanie 2.27 przez AB, otrzymamy wzór na $\cos \varphi$, do którego podstawimy Równanie 2.33:

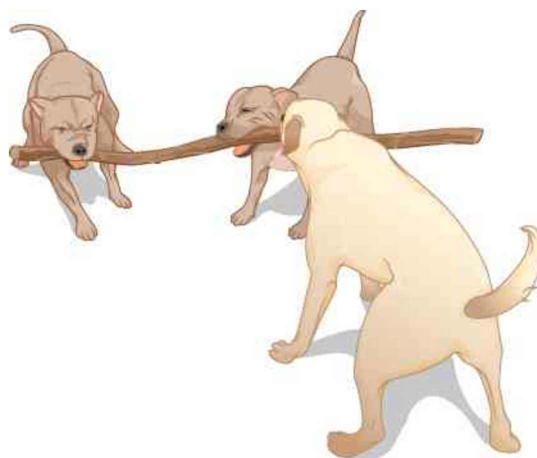
$$\cos \varphi = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{AB}. \quad (2.34)$$

Kąt φ między wektorami $\vec{A}$ i $\vec{B}$ znajdziemy, obliczając arcus cosinus wyrażenia z Równania 2.34.

Przykład 2.16

Kąt między dwiema siłami

Trzy psy ciągną patyk w różne strony (Rysunek 2.28). Pierwszy z nich ciągnie z siłą $\vec{F}_1 = 10{,}0\,\text{N} \cdot \hat{i} - 20{,}4\,\text{N} \cdot \hat{j} + 2{,}0\,\text{N} \cdot \hat{k}$, drugi z siłą $\vec{F}_2 = -15{,}0\,\text{N} \cdot \hat{i} - 6{,}2\,\text{N} \cdot \hat{k}$, a trzeci z siłą $\vec{F}_3 = 5{,}0\,\text{N} \cdot \hat{i} + 12{,}5\,\text{N} \cdot \hat{j}$. Jaki jest kąt między siłami $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$?



Rysunek 2.28 Psy bawią się patykiem.

Strategia rozwiązania

Składowe wektora siły $\vec{F}_1$ są równe $F_{1x} = 10{,}0\,\text{N}$, $F_{1y} = -20{,}4\,\text{N}$ i $F_{1z} = 2{,}0\,\text{N}$, a składowe wektora $\vec{F}_2$ są równe $F_{2x} = -15{,}0\,\text{N}$, $F_{2y} = 0{,}0\,\text{N}$ i $F_{2z} = -6{,}2\,\text{N}$. Kąt znajdujemy, obliczając iloczyn skalarny tych wektorów oraz ich moduły i podstawiając otrzymane wartości do Równania 2.34.

Rozwiązanie

Moduły wektorów siły $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ są równe

$$F_1 = \sqrt{F_{1x}^2 + F_{1y}^2 + F_{1z}^2} = \sqrt{(10{,}0\,\text{N})^2 + (20{,}4\,\text{N})^2 + (2{,}0\,\text{N})^2} = 22{,}8\,\text{N},$$

oraz

$$F_2 = \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2 + F_{2z}^2} = \sqrt{(15{,}0\,\text{N})^2 + (6{,}2\,\text{N})^2} = 16{,}2\,\text{N}.$$

Obliczamy iloczyn skalarny, podstawiając wartości składowych do Równania 2.33

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 &= F_{1x}F_{2x} + F_{1y}F_{2y} + F_{1z}F_{2z} \\ &= 10{,}0\,\text{N} \cdot (-15{,}0\,\text{N}) + (-20{,}4\,\text{N}) \cdot 0{,}0\,\text{N} + 2{,}0\,\text{N} \cdot (-6{,}2\,\text{N}) \\ &= -162{,}4\,\text{N}^2.\end{aligned}$$

Po podstawieniu wszystkiego do Równania 2.34 otrzymujemy kąt

$$\cos\varphi = \frac{\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2}{F_1 F_2} = \frac{-162{,}4\,\text{N}^2}{22{,}8\,\text{N} \cdot 16{,}2\,\text{N}} = -0{,}438 \implies \varphi = \arccos(-0{,}439) = 116{,}0^\circ.$$

Znaczenie

Zauważ, że jeśli wektory opisane są przy pomocy wersorów osi, możemy znaleźć kąt między nimi, nie wiedząc, jakie kierunki geograficzne wskazują te wersory. W tym przykładzie oś x może wskazywać na wschód, a oś y na północ. Jednak kąt między wektorami siły będzie taki sam, jeśli oś x wskazywać będzie na zachód, a oś y na południe.



2.13 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Znajdź kąt zawarty między wektorami siły $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_3$ z Przykładu 2.16.

Przykład 2.17

Praca wykonywana przez siłę

Kiedy siła $\vec{F}$ ciągnie ciało powodując przemieszczenie $\vec{D}$, mówimy, że siła ta wykonuje pracę. Praca wykonywana przez siłę jest iloczynem skalarnym $\vec{F} \cdot \vec{D}$. Jeśli patyk z Przykładu 2.16 zostanie przemieszczony o wektor $\vec{D} = -7{,}9\,\text{cm} \cdot \hat{j} - 4{,}2\,\text{cm} \cdot \hat{k}$, to jaka praca zostanie wykonana przez trzeciego psa?

Strategia rozwiązania

Obliczamy siłę, z jaką ciągnie patyk trzeci pies, czyli iloczyn skalarny wektora przemieszczenia $\vec{D}$ i wektora siły $\vec{F}_3 = 5{,}0\,\text{N} \cdot \hat{i} + 12{,}5\,\text{N} \cdot \hat{j}$. Przez W_3 oznaczymy pracę wykonaną przez siłę $\vec{F}_3$ powodującą przemieszczenie $\vec{D}$.

Rozwiązanie

Obliczamy pracę, czyli iloczyn skalarny

$$\begin{aligned}W_3 &= \vec{F}_3 \cdot \vec{D} = F_{3x}D_x + F_{3y}D_y + F_{3z}D_z \\ &= 5{,}0\,\text{N} \cdot 0{,}0\,\text{cm} + 12{,}5\,\text{N} \cdot (-7{,}9\,\text{cm}) + 0{,}0\,\text{N} \cdot (-4{,}2\,\text{cm}) \\ &= -98{,}7\,\text{N} \cdot \text{cm}.\end{aligned}$$

Znaczenie

Jednostką pracy w układzie SI jest dżul (J), $1\,\text{J} = 1\,\text{N} \cdot \text{m}$. Jednostkę $\text{cm} \cdot \text{N}$ możemy zapisać jako $10^{-2}\,\text{m} \cdot \text{N} = 10^{-2}\,\text{J}$, więc odpowiedź możemy zapisać jako $W_3 = -0{,}9875\,\text{J} \approx -1{,}0\,\text{J}$.



2.14 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Jaką pracę wykonały dwa pierwsze psy z Przykładu 2.16, przy przemieszczeniu z Przykładu 2.17?

Iloczyn wektorowy dwóch wektorów

Iloczyn wektorowy dwóch wektorów jest wektorem.

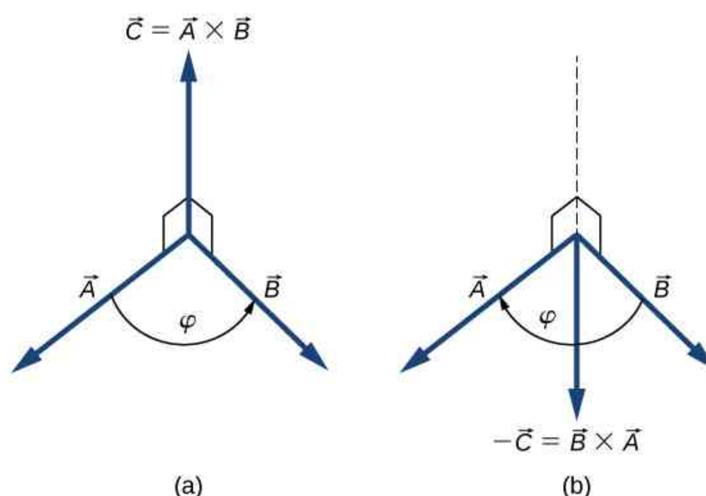
Iloczyn wektorowy

Iloczyn wektorowy (ang. **cross product**) dwóch wektorów $\vec{A}$ oraz $\vec{B}$ zapisujemy $\vec{A} \times \vec{B}$. Iloczyn wektorowy jest wektorem o kierunku prostopadłym do wektorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$. Inaczej mówiąc, $\vec{A} \times \vec{B}$ jest prostopadły do płaszczyzny, na której leżą wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$, jak przedstawia Rysunek 2.29. Moduł iloczynu wektorowego definiuje się jako

$$\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = AB \sin \varphi, \tag{2.35}$$

gdzie kąt między wektorami φ mierzy się od wektora $\vec{A}$ (pierwszego wektora w iloczynie) w kierunku wektora $\vec{B}$, jak przedstawiono na Rysunku 2.29. Kąt ten przyjmuje wartości od $0°$ do $180°$.

Zgodnie z Równaniem 2.35 iloczyn wektorowy równy jest zero, jeśli kierunek wektorów jest taki sam ($\varphi = 0°$ lub $\varphi = 180°$), ponieważ $\sin 0° = \sin 180° = 0$.

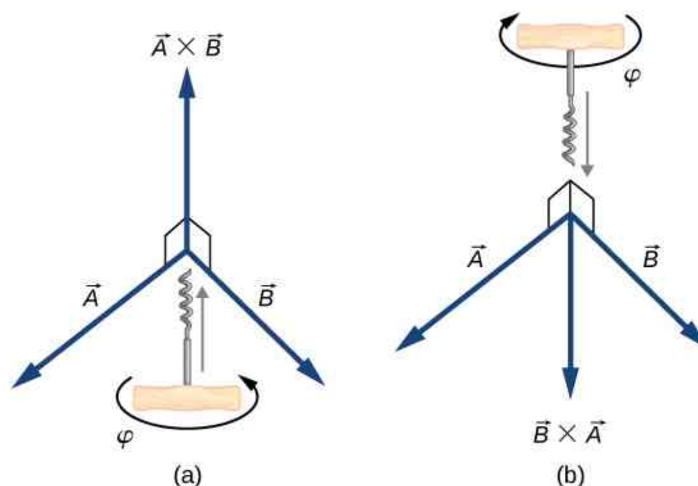


Rysunek 2.29 Iloczyn wektorowy dwóch wektorów rysuje się w przestrzeni trójwymiarowej. (a) Iloczyn wektorowy $\vec{A} \times \vec{B}$ jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny, w której leżą wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$. Narysowane pod kątem kwadraty oznaczają kąty proste między $\vec{A}$ i $\vec{C}$, oraz między $\vec{B}$ i $\vec{C}$, więc jeśli $\vec{A}$ i $\vec{B}$ leżałyby na podłodze, wektor $\vec{C}$ wskazywałby sufit. (b) Iloczyn wektorowy $\vec{B} \times \vec{A}$ ma zwrot przeciwny do wektora $\vec{A} \times \vec{B}$.

Wektor prostopadły do płaszczyzny, w której leżą wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$, może mieć jeden z dwóch możliwych zwrotów – w górę albo w dół (zobacz Rysunek 2.29). Jeżeli kąt między wektorami mierzony jest przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, rozpoczynając od pierwszego wektora, zwrot wektora $\vec{A} \times \vec{B}$ wskazuje *w górę* (zobacz Rysunek 2.29(a)). W przeciwnym wypadku, to znaczy jeśli pierwszym czynnikiem jest $\vec{B}$, zwrot wektora $\vec{B} \times \vec{A}$ wskazuje *w dół* (zobacz Rysunek 2.29(b)). Oznacza to, że wektory $\vec{A} \times \vec{B}$ oraz $\vec{B} \times \vec{A}$ mają *przeciwne zwroty*, a iloczyn wektorowy *nie* jest przemienny. Oznacza to, że zmiana kolejności czynników w iloczynie wektorowym powoduje zmianę znaku wyniku:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}. \tag{2.36}$$

Aby określić zwrot wektora będącego wynikiem iloczynu wektorowego stosujemy **regułę korkociągu** (ang. **corkscrew right-hand rule**), nazywaną też regułą śruby prawoskrętnej. Jak przedstawiono na Rysunku 2.30, korkociąg znajduje się pod kątem prostym do płaszczyzny, w której leżą wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$, i jest on obracany w kierunku od wektora będącego pierwszym czynnikiem do wektora będącego drugim czynnikiem iloczynu wektorowego. Zwrot wektora będącego wynikiem iloczynu określony jest przez kierunek, w jakim porusza się korkociąg.



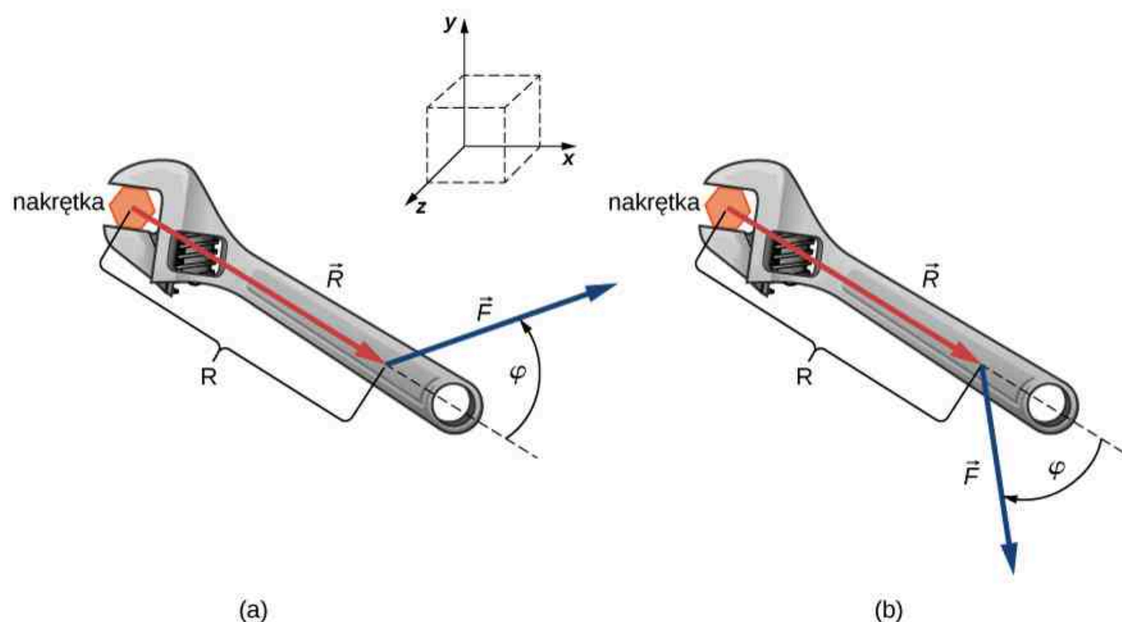
Rysunek 2.30 Regułę korkociągu stosuje się, aby określić zwrot wektora $\vec{A} \times \vec{B}$. Umieść korkociąg pod kątem prostym do płaszczyzny, w której leżą wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$ i obracaj go w kierunku od pierwszego do drugiego wektora, po mniejszym kącie. Na podstawie kierunku, w jakim porusza się korkociąg, możemy określić zwrot wektora będącego wynikiem iloczynu wektorowego. (a) Jeśli korkociąg porusza się w górę, zwrot wektora również wskazuje w górę. (b) Jeśli korkociąg porusza się w dół, zwrot wektora również wskazuje w dół.

Przykład 2.18

Moment siły

Efekt, który możemy uzyskać dzięki kluczowi (Rysunek 2.31), zależy od modułu F siły, od jej kierunku w stosunku do uchwytu klucza i od tego, w jakiej odległości od nakrętki siła ta została przyłożona. Odległość R od nakrętki do punktu przyłożenia wektora siły $\vec{F}$ jest modułem wektora wodzącego $\vec{R}$. Wielkość wektorową powodującą obrót nakrętki nazywamy *momentem siły* ($\vec{M}$). Moment siły jest iloczynem wektorowym wektora wodzącego, łączącego trzpień z punktem przyłożenia siły, oraz siły: $\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$.

Próbując poluzować zardzewiałą nakrętkę, do uchwytu klucza, pod kątem $\varphi = 40^\circ$ w odległości 0,25 m od nakrętki przyłożono siłę równą 20,00 N (Rysunek 2.31(a)). Znajdź moduł i kierunek wektora momentu siły działającego na nakrętkę. Jaki byłby moduł i kierunek momentu siły, jeśli siłę przyłożono by pod kątem $\varphi = 45^\circ$ (Rysunek 2.31(b))? Dla jakiego kąta φ moduł momentu siły jest największy?



Rysunek 2.31 Stosując klucz w celu obrócenia nakrętki, uzyskujemy zysk mechaniczny. (a) Obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, aby poluzować nakrętkę. (b) Obrót w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, aby dokręcić nakrętkę.

Strategia rozwiązania

Stosujemy punkt odniesienia taki, jak na Rysunku 2.31, gdzie wektory $\vec{R}$ i $\vec{F}$ leżą na płaszczyźnie xy, a punkt biegunowy znajduje się w miejscu położenia nakrętki. Kierunek wektora $\vec{R}$ (o zwrocie od bieguna) jest kierunkiem odniesienia umożliwiającym zmierzenie kąta φ, ponieważ wektor $\vec{R}$ jest pierwszym czynnikiem iloczynu wektorowego $\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$. Wektor $\vec{M}$ musi leżeć wzdłuż osi z, ponieważ oś ta jest prostopadła do płaszczyzny xy, w której leżą wektory $\vec{R}$ oraz $\vec{F}$. W celu obliczenia modułu M stosujemy Równanie 2.35. Aby znaleźć zwrot wektora $\vec{M}$, stosujemy regułę śruby prawoskrętnej (Rysunek 2.30).

Rozwiązanie

Dla przypadku przedstawionego w (a), dzięki regule korkociągu możemy ustalić, że zwrot wektora $\vec{R} \times \vec{F}$ jest zgodny z dodatnim kierunkiem osi z. Oznacza to, że wektor momentu siły $\vec{M}$ skierowany jest w górę kartki, prostopadle do uchwytu korkociągu. Wiemy, że $F = 20{,}00\text{ N}$ oraz $R = 0{,}25\text{ m}$, więc stosując Równanie 2.11, możemy obliczyć moduł wektora:

$$M = \left|\vec{R} \times \vec{F}\right| = RF\sin\varphi = 0{,}25\text{ m} \cdot 20{,}00\text{ N} \cdot \sin 40^\circ = 3{,}21\text{ N} \cdot \text{m}.$$

W przypadku przedstawionym w (b), wektor $\vec{R} \times \vec{F}$ zwrócony jest w ujemnym kierunku osi z. Oznacza to, że wektor $\vec{M}$ wskazuje za kartkę, prostopadle do uchwytu korkociągu. Moduł momentu siły jest równy

$$M = \left|\vec{R} \times \vec{F}\right| = RF\sin\varphi = 0{,}25\text{ m} \cdot 20{,}00\text{ N} \cdot \sin 45^\circ = 3{,}53\text{ N} \cdot \text{m}.$$

Moduł momentu siły jest największy, kiedy $\sin\varphi = 1$, a więc kiedy $\varphi = 90^\circ$. Oznacza to, że zastosowanie klucza jest najbardziej efektywne – daje największy zysk mechaniczny – kiedy przyłożymy siłę prostopadle do uchwytu klucza. Dla danych z tego przykładu największy moduł jest równy $M_{\text{max}} = RF = 0{,}25\text{ m} \cdot 20{,}00\text{ N} = 5{,}00\text{ N} \cdot \text{m}$.

Znaczenie

Rozwiązywanie zadań związanych z mechaniką dosyć często nie wymaga korzystania z reguły korkociągu, o czym przekonamy się, analizując alternatywne podejście do rozwiązania powyższego zadania. Stwierdziliśmy, że wektor $\vec{R} \times \vec{F}$ leży wzdłuż osi z, a więc możemy zapisać go przy pomocy $\hat{k}$, czyli wersora osi z:

$$\vec{R} \times \vec{F} = RF \sin \varphi \cdot \hat{k}.$$

Liczba, przez którą mnożymy wersor $\hat{k}$, to wartość składowej z wektora $\vec{R} \times \vec{F}$. Podczas obliczania wartości tej składowej, kąt φ musi być mierzony w kierunku *przeciwnym* do ruchu wskazówek zegara od wektora $\vec{R}$ (pierwszego czynnika) do wektora $\vec{F}$ (drugiego czynnika). Stosując tę zasadę pomiaru kątów, otrzymujemy $RF \sin 40^\circ = 3{,}2 \text{ N} \cdot \text{m}$ dla przypadku (a) oraz $RF \sin(-45^\circ) = -3{,}5 \text{ N} \cdot \text{m}$ dla przypadku (b). W przypadku (b) kąt jest ujemny, ponieważ jak widać na Rysunku 2.31, kąt mierzony jest zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Jednak taki sam wynik otrzymamy, jeśli kąt ten zmierzymy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, ponieważ $360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$ i $\sin 315^\circ = \sin(-45^\circ)$. W ten sposób otrzymujemy rozwiązanie bez korzystania z reguły korkociągu. Dla przypadku (a) rozwiązaniem jest $\vec{R} \times \vec{F} = 3{,}2 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \hat{k}$. Dla przypadku (b) rozwiązaniem jest $\vec{R} \times \vec{F} = -3{,}5 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \hat{k}$.



2.15 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Oblicz następujące iloczyny wektorowe wektorów z Rysunku 2.13: $\vec{A} \times \vec{B}$ i $\vec{C} \times \vec{F}$.

Podobnie jak iloczyn skalarny (Równanie 2.31), iloczyn wektorowy jest rozdzielny względem dodawania:

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}. \tag{2.37}$$

Z własności rozdzielności względem dodawania często korzysta się, zapisując wektory rozłożone na składowe.

Kiedy zastosujemy definicję iloczynu wektorowego (Równanie 2.35) do wektorów jednostkowych $\hat{i}$, $\hat{j}$ i $\hat{k}$, określających dodatnie kierunki osi x, y i z, otrzymamy

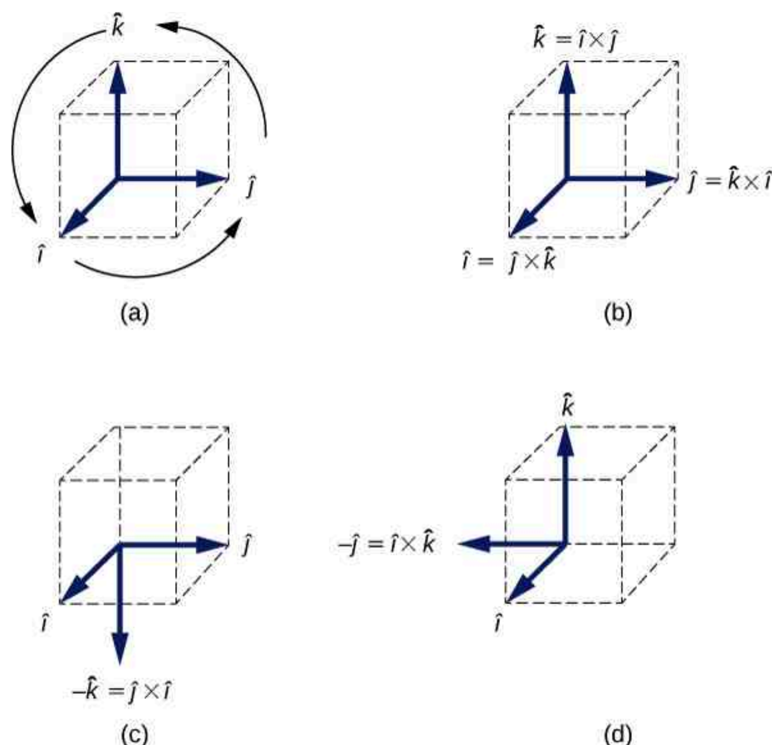
$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0. \tag{2.38}$$

Moduły wszystkich wektorów jednostkowych muszą być równe jeden, ponieważ $\hat{i}$, $\hat{j}$ oraz $\hat{k}$ są ortogonalne. Przykładowo, dla pary wektorów $\hat{i}$ i $\hat{j}$ moduł jest równy $\left|\hat{i} \times \hat{j}\right| = i \cdot j \cdot \sin 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$. Wektor $\hat{i} \times \hat{j}$ musi być prostopadły do płaszczyzny xy, a więc jego kierunek musi być taki sam jak kierunek osi z. Wektorami jednostkowymi o kierunku zgodnym z kierunkiem osi z są $-\hat{k}$ i $+\hat{k}$. Zgodnie z regułą korkociągu zwrot wektora $\hat{i} \times \hat{j}$ musi być zgodny z dodatnim kierunkiem osi z. Dlatego wynikiem mnożenia $\hat{i} \times \hat{j}$ jest $+\hat{k}$. Analogiczne rozumowanie możemy przeprowadzić dla pozostałych par wektorów jednostkowych. Uzyskamy wtedy:

$$\begin{cases} \hat{i} \times \hat{j} = +\hat{k} \\ \hat{j} \times \hat{k} = +\hat{i} \\ \hat{k} \times \hat{i} = +\hat{j}. \end{cases} \tag{2.39}$$

Zauważ, że w Równaniu 2.39 wektory jednostkowe $\hat{i}$, $\hat{j}$ i $\hat{k}$ pojawiają się w *porządku cyklicznym* przedstawionym na diagramie na Rysunku 2.32(a). Porządek cykliczny oznacza, że we wzorze $\hat{i}$ występuje po $\hat{k}$, ale przed $\hat{j}$, $\hat{k}$ występuje po $\hat{j}$, ale przed $\hat{i}$, zaś $\hat{j}$ występuje po $\hat{i}$, ale przed $\hat{k}$. Wynikiem iloczynu wektorowego wersorów dwóch osi zawsze

jest wersor trzeciej osi. Kiedy mnożone wektorowo wersory dwóch osi występują w porządku cyklicznym, wynikiem jest wersor trzeciej osi, jak przedstawiono na Rysunku 2.32(b). Kiedy mnożone wektorowo wersory występują w innej kolejności, wynikiem jest wektor jednostkowy o zwrocie przeciwnym do zwrotu wersora trzeciej osi (to znaczy, że w wyniku występuje znak minus, tak jak na Rysunku 2.32(c) oraz Rysunku 2.32(d)). Zasada ta jest bardzo przydatna w przypadku obliczania iloczynu wektorowego wektorów rozłożonych na składowe.



Rysunek 2.32 (a) Diagram przedstawiający porządek cykliczny wersorów osi. (b) Wszystkie iloczyny wektorowe, w których wersory osi występują w porządku cyklicznym. Wektory wynikowe mają znak dodatni. (c, d) Dwa przykłady iloczynów wektorowych, w których wersory osi nie występują w porządku cyklicznym. Wektory wynikowe mają znak ujemny.

Przypuśćmy, że chcemy obliczyć iloczyn wektorowy $\vec{A} \times \vec{B}$, gdzie $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ i $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$. Podczas obliczeń możemy skorzystać z własności rozdzielności względem dodawania (Równanie 2.37), z faktu, że iloczyn wektorowy nie jest przemienny (ang. **anticommutative property**) (Równanie 2.36), oraz ze wzorów dla wektorów jednostkowych (Równanie 2.38 oraz Równanie 2.39):

$$\begin{aligned}
\vec{A} \times \vec{B} &= \left(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}\right) \times \left(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}\right) \\
&= A_x\hat{i} \times \left(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}\right) + A_y\hat{j} \times \left(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}\right) + A_z\hat{k} \times \left(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}\right) \\
&= \quad A_xB_x\hat{i} \times \hat{i} + A_xB_y\hat{i} \times \hat{j} + A_xB_z\hat{i} \times \hat{k} \\
&\quad + A_yB_x\hat{j} \times \hat{i} + A_yB_y\hat{j} \times \hat{j} + A_yB_z\hat{j} \times \hat{k} \\
&\quad + A_zB_x\hat{k} \times \hat{i} + A_zB_y\hat{k} \times \hat{j} + A_zB_z\hat{k} \times \hat{k} \\
&= \quad A_xB_x \cdot 0 + A_xB_y \cdot \hat{k} + A_xB_z \cdot \left(-\hat{j}\right) \\
&\quad + A_yB_x \cdot \left(-\hat{k}\right) + A_yB_y \cdot 0 + A_yB_z \cdot \hat{i} \\
&\quad + A_zB_x \cdot \hat{j} + A_zB_y \cdot \left(-\hat{i}\right) + A_zB_z \cdot 0.
\end{aligned}$$

Podczas obliczania iloczynu wektorowego pamiętaj o tym, że działanie to nie jest przemienne, co oznacza, że musisz pamiętać o zachowaniu odpowiedniej kolejności czynników. Aby dokończyć zadanie, musimy wykonać jeszcze dwa kroki. Pierwszym z nich jest pogrupowanie wyrazów mnożonych przez ten sam wektor jednostkowy, a drugim rozkład wektora na składowe. W ten sposób otrzymujemy poniższy wzór, który jest bardzo przydatny podczas obliczania iloczynu wektorowego:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \left(A_y B_z - A_z B_y\right) \hat{i} + \left(A_z B_x - A_x B_z\right) \hat{j} + \left(A_x B_y - A_y B_x\right) \hat{k}. \tag{2.40}$$

Wartości poszczególnych składowych wektora wynikowego są równe

$$\begin{cases} C_x = A_y B_z - A_z B_y \\ C_y = A_z B_x - A_x B_z \\ C_z = A_x B_y - A_y B_x. \end{cases} \tag{2.41}$$

Podczas obliczania iloczynu wektorowego możemy skorzystać z Równania 2.35 lub z Równania 2.40, w zależności od tego, które z nich wymaga mniej skomplikowanych obliczeń. Wynik otrzymany za pomocą każdego z tych wzorów będzie taki sam. Jeśli chcemy się upewnić, że uzyskany przez nas wynik jest poprawny, możemy skorzystać z obu równań.

Przykład 2.19

Cząstka w polu magnetycznym

Niektóre cząstki poruszające się w polu magnetycznym mogą doświadczyć wpływu siły Lorentza. Bez zbędnego wchodzenia w szczegóły – dokładny opis zjawisk związanych z polem magnetycznym znajduje się w późniejszych rozdziałach – wyjaśnimy tylko, że pole magnetyczne $\vec{B}$ jest wektorem, siła Lorentza $\vec{F}$ jest wektorem i prędkość cząstki $\vec{u}$ również jest wektorem. Wektor siły Lorentza jest wprost proporcjonalny do iloczynu wektorowego wektora prędkości oraz wektora pola magnetycznego, co zapisujemy jako $\vec{F} = \zeta \vec{u} \times \vec{B}$. We wzorze tym stała ζ zapewnia zachowanie odpowiedniej jednostki, dzięki czemu możemy pominąć jednostki występujące przy wektorach $\vec{u}$ oraz $\vec{B}$. Na potrzeby tego przykładu przyjmijmy, że stała ζ jest liczbą dodatnią.

Cząstka poruszająca się w przestrzeni z prędkością $\vec{u} = -5{,}0\hat{i} - 2{,}0\hat{j} + 3{,}5\hat{k}$ wpada w obszar oddziaływania pola magnetycznego, gdzie zaczyna działać na nią siła Lorentza. Znajdź siłę Lorentza $\vec{F}$ działającą na tę cząstkę w miejscu, w którym wektor indukcji pola magnetycznego jest równy (a) $\vec{B} = 7{,}2\hat{i} - \hat{j} - 2{,}4\hat{k}$ i (b) $\vec{B} = 4{,}5\hat{k}$. Dla obu przypadków znajdź moduł F siły Lorentza oraz kąt θ między wektorem siły $\vec{F}$ oraz wektorem indukcji pola magnetycznego $\vec{B}$.

Strategia rozwiązania

Na początku musimy obliczyć iloczyn $\vec{u} \times \vec{B}$, ponieważ dzięki temu, przy pomocy $\vec{F} = \zeta \vec{u} \times \vec{B}$, będziemy mogli określić siłę Lorentza. Moduł F można znaleźć albo podstawiając wartości składowych do wzoru $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$, albo bezpośrednio z wyniku iloczynu wektorowego: $\left|\vec{u} \times \vec{B}\right|$ (Równanie 2.35). W przypadku drugiego sposobu będziemy musieli znaleźć kąt między wektorami $\vec{u}$ i $\vec{B}$. Jeżeli znamy wektor $\vec{F}$, kąt θ możemy znaleźć, obliczając iloczyn skalarny $\vec{F} \cdot \vec{B}$ i podstawiając wynik do Równania 2.34. Iloczyn wektorowy możemy obliczyć albo przy pomocy Równania 2.40, albo bezpośrednio, w zależności od tego, która metoda wydaje nam się prostsza.

Rozwiązanie

Składowe wektora prędkości są równe $u_x = -5{,}0$, $u_y = -2{,}0$ oraz $u_z = 3{,}5$.

(a) Wartości składowych wektora indukcji pola magnetycznego są równe $B_x = 7{,}2$, $B_y = -1{,}0$ oraz $B_z = -2{,}4$. Podstawiając je do Równania 2.41, uzyskamy wartości składowych wektora $\vec{F} = \zeta \vec{u} \times \vec{B}$:

$$\begin{cases} F_x = \zeta\left(u_y B_z - u_z B_y\right) = \zeta\left[-2{,}0 \cdot (-2{,}4) - 3{,}5 \cdot (-1{,}0)\right] = 8{,}3\zeta, \\ F_y = \zeta\left(u_z B_x - u_x B_z\right) = \zeta\left[3{,}5 \cdot 7{,}2 - (-5{,}0) \cdot (-2{,}4)\right] = 13{,}2\zeta, \\ F_z = \zeta\left(u_x B_y - u_y B_x\right) = \zeta\left[-5{,}0 \cdot (-1{,}0) - (-2{,}0) \cdot 7{,}2\right] = 19{,}4\zeta. \end{cases}$$

Na tej podstawie możemy zapisać wektor siły Lorentza: $\vec{F} = \zeta \left(8{,}3\hat{i} + 13{,}2\hat{j} + 19{,}4\hat{k} \right)$. Jego moduł jest równy

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{(8{,}3\zeta)^2 + (13{,}2\zeta)^2 + (19{,}4\zeta)^2} = 24{,}9\zeta.$$

Aby obliczyć kąt θ, musimy znaleźć moduł wektora indukcji pola magnetycznego

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{(7{,}2)^2 + (-1{,}0)^2 + (-2{,}4)^2} = 7{,}6,$$

oraz iloczyn skalarny $\vec{F} \cdot \vec{B}$:

$$\vec{F} \cdot \vec{B} = F_x B_x + F_y B_y + F_z B_z = 8{,}3\zeta \cdot 7{,}2 + 13{,}2\zeta \cdot (-1{,}0) + 19{,}4\zeta \cdot (-2{,}4) = 0.$$

Po podstawieniu wartości do Równania 2.34 otrzymujemy kąt θ:

$$\cos\theta = \frac{\vec{F} \cdot \vec{B}}{FB} = \frac{0}{18{,}2\zeta \cdot 7{,}6} = 0 \implies \theta = 90^\circ.$$

Wektor siły Lorentza jest więc prostopadły do wektora indukcji pola magnetycznego. (Moglibyśmy oszczędzić trochę czasu, gdybyśmy wcześniej obliczyli iloczyn skalarny).

(b) Ponieważ wektor $\vec{B} = 4{,}5\hat{k}$ ma tylko jedną składową, której wartość jest różna od zera, możemy obliczyć iloczyn wektorowy bezpośrednio:

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \zeta\vec{u} \times \vec{B} = \zeta \left(-5{,}0\hat{i} - 2{,}0\hat{j} + 3{,}5\hat{k} \right) \times \left(4{,}5\hat{k} \right) \\
&= \zeta \left[-5{,}0 \cdot 4{,}5 \cdot \hat{i} \times \hat{k} + (-2{,}0) \cdot 4{,}5 \cdot \hat{j} \times \hat{k} + 3{,}5 \cdot 4{,}5 \cdot \hat{k} \times \hat{k} \right] \\
&= \zeta \left[-22{,}5(-\hat{j}) - 9{,}0\hat{i} + 0 \right] \\
&= \zeta \left(-9{,}0\hat{i} + 22{,}5\hat{j} \right).
\end{aligned}$$

Moduł siły Lorentza jest równy

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \zeta\sqrt{(-9{,}0\zeta)^2 + (22{,}5\zeta)^2 + (0{,}0\zeta)^2} = 24{,}2\zeta.$$

Ponieważ iloczyn skalarny jest równy

$$\vec{F} \cdot \vec{B} = F_x B_x + F_y B_y + F_z B_z = -9{,}0\zeta \cdot 0 + 22{,}5\zeta \cdot 0 + 0\zeta \cdot 4{,}5 = 0,$$

wektor siły Lorentza $\vec{F}$ jest prostopadły do wektora indukcji pola magnetycznego $\vec{B}$.

Znaczenie

Nawet bez obliczania iloczynu skalarnego możemy przewidzieć, że wektor siły Lorentza zawsze będzie prostopadły do wektora indukcji pola magnetycznego. Wektor siły Lorentza jest iloczynem wektorowym $\vec{F} = \zeta\vec{u} \times \vec{B}$, a z definicji iloczynu wektorowego (zobacz Rysunek 2.29) wektor $\vec{F}$ musi być prostopadły do wektorów $\vec{u}$ i $\vec{B}$.



2.16 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Dane są dwa wektory $\vec{A} = -\hat{i} + \hat{j}$ i $\vec{B} = 3\hat{i} - \hat{j}$. Oblicz:

a. $\vec{A} \times \vec{B}$;

b. $\left|\vec{A} \times \vec{B}\right|$;

c. kąt między $\vec{A}$ i $\vec{B}$;

d. kąt między $\vec{A} \times \vec{B}$ i $\vec{C} = \hat{i} + \hat{k}$.

Na koniec chcemy jeszcze raz podkreślić, jaka jest różnica między iloczynem skalarnym a iloczynem wektorowym. Wynikiem iloczynu skalarnego jest skalar, czyli liczba, podczas gdy wynikiem iloczynu wektorowego jest wektor.

PODSUMOWANIE ROZDZIAŁU 2

KLUCZOWE POJĘCIA

iloczyn skalarny (ang. dot product) wynik mnożenia wektorów skalarnie, wynik tej operacji jest skalarem (liczbą)

iloczyn wektorowy (ang. cross product) wynik mnożenia wektorów wektorowo, wynik tej operacji jest wektorem

konstrukcja wektora sumy (ang. tail-to-head geometric construction) sposób graficzny dodawania wektorów polegający na łączeniu punktów końcowych i początkowych kolejnych wektorów

kąt skierowany (ang. direction angle) kąt między rosnącym kierunkiem osi x a wektorem, mierzony od osi do wektora

moduł (ang. magnitude) długość wektora

nieprzemienność iloczynu wektorowego (ang. anticommutative property) zmiana kolejności występowania czynników powoduje pojawienie się minusa (wektor ma przeciwny zwrot)

promień wodzący (ang. radial coordinate) odległość punktu od bieguna w układzie współrzędnych biegunowych

przemienność (ang. commutative) wyrazy mogą podlegać działaniu w dowolnej kolejności

przemieszczenie (ang. displacement) zmiana położenia

reguła równoległoboku (ang. parallelogram rule) reguła, według której dokonuje się konstrukcji sumy wektorów na płaszczyźnie

reguła śruby prawoskrętnej (ang. right-hand corkscrew rule) inaczej reguła korkociągu; pozwala określić zwrot wektora będącego wynikiem iloczynu wektorowego

rozdzielność (ang. distributive) iloczyn pewnej liczby przez sumę składników jest równy sumie składników pomnożonych przez tę liczbę

rozkład wektora na składowe (ang. component form of a vector) zapis wektora w postaci sumy jego składowych, przy pomocy wersorów osi

równanie skalarne (ang. scalar equation) równanie, w którym po obu stronach znaku równości znajdują się liczby

równanie wektorowe (ang. vector equation) równanie, w którym po obu stronach znaku równości znajdują się wektory

różnica dwóch wektorów (ang. difference of two vectors) suma wektora pierwszego i wektora o zwrocie przeciwnym do wektora pierwszego

skalar (ang. scalar) liczba; w fizyce jednoznaczne z wielkością skalarną

składowe wektora (ang. vector components) rzuty wektora na poszczególne osie układu współrzędnych; wektor jest sumą swoich składowych

suma wektorów (ang. vector sum) wektor powstały w wyniku dodawania dwóch lub więcej wektorów

układ współrzędnych biegunowych (ang. polar coordinate system) układ współrzędnych, w którym położenie punktu na płaszczyźnie określone jest za pomocą współrzędnych biegunowych

wartość składowej (ang. scalar component) liczba, przez którą należy pomnożyć wersor osi, aby otrzymać składową wektora

wektor (ang. vector) obiekt matematyczny o określonym module, kierunku i zwrocie

wektor jednostkowy (ang. unit vector) wektor o module równym jeden, nie posiada on jednostki, służy jedynie do określenia kierunku

wektor zerowy (ang. null vector) wektor, którego wszystkie składowe są równe zero

wektory ortogonalne (ang. orthogonal vectors) wektory, których kąty skierowane różnią się o $90°$, inaczej wektory prostopadłe

wektory przeciwne (ang. antiparallel vectors) dwa wektory, których zwroty różnią się o $180°$

wektory równe (ang. equal vectors) dwa wektory są równe wtedy i tylko wtedy, kiedy ich poszczególne składowe są równe; równe wektory mają ten sam kierunek, zwrot oraz moduł

wektory zgodne (ang. parallel vectors) wektory o tych samych kątach skierowanych

wersory osi (ang. unit vectors of the axes) wektory jednostkowe definiujące kierunki ortogonalne na płaszczyźnie lub w przestrzeni

wielkość skalarna (ang. scalar quantity) wielkość fizyczna, którą można określić jedynie za pomocą liczby i odpowiedniej jednostki

wielkość wektorowa (ang. vector quantity) wielkość fizyczna reprezentowana przez wektor (moduł, kierunek i zwrot) w fizyce jednoznaczna z wektorem

współrzędne biegunowe (ang. polar coordinates) promień wodzący i kąt skierowany tego promienia

łączność (ang. associative) kolejność wyrazów w działaniu może być dowolna

NAJWAŻNIEJSZE WZORY

Mnożenie przez skalar (działanie na wektorach)	$\vec{B} = \alpha \vec{A}$
Mnożenie przez skalar (działanie na modułach wektorów)	$B = \lvert\alpha\rvert A$
Suma dwóch wektorów	$\vec{D}_{AD} = \vec{D}_{AC} + \vec{D}_{CD}$
Prawo przemienności	$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$
Prawo łączności	$\left(\vec{A} + \vec{B}\right) + \vec{C} = \vec{A} + \left(\vec{B} + \vec{C}\right)$
Prawo rozdzielności względem dodawania	$\alpha_1 \vec{A} + \alpha_2 \vec{A} = (\alpha_1 + \alpha_2)\vec{A}$
Rozkład wektora na składowe w przestrzeni dwuwymiarowej	$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$
Wartości składowych wektora w przestrzeni dwuwymiarowej	$\begin{cases} A_x = x_\mathrm{k} - x_\mathrm{p} \\ A_y = y_\mathrm{k} - y_\mathrm{p} \end{cases}$
Moduł wektora leżącego na płaszczyźnie	$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$
Kąt skierowany wektora leżącego na płaszczyźnie	$\theta_A = \operatorname{arctg}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$
Wartości składowych wektora leżącego na płaszczyźnie	$\begin{cases} A_x = A \cos \theta_A \\ A_y = A \sin \theta_A \end{cases}$
Współrzędne biegunowe na płaszczyźnie	$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$
Rozkład wektora na składowe w przestrzeni trójwymiarowej	$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$
Wartość składowej z wektora w przestrzeni trójwymiarowej	$A_z = z_\mathrm{k} - z_\mathrm{p}$
Moduł wektora w przestrzeni trójwymiarowej	$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$
Prawo rozdzielności względem dodawania	$\alpha\left(\vec{A} + \vec{B}\right) = \alpha\vec{A} + \alpha\vec{B}$
Wektor o zwrocie przeciwnym do wektora $\vec{A}$	$-\vec{A} = -A_x \hat{i} - A_y \hat{j} - A_z \hat{k}$
Wektory równe	$\vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A_x = B_x \\ A_y = B_y \\ A_z = B_z \end{cases}$

Składowe wektora sumy N wektorów	$\begin{cases} F_{Rx} = \sum_{k=1}^{N} F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{Nx} \\ F_{Ry} = \sum_{k=1}^{N} F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{Ny} \\ F_{Rz} = \sum_{k=1}^{N} F_{kz} = F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{Nz} \end{cases}$
Wektor jednostkowy (wersor)	$\hat{V} = \frac{\vec{V}}{V}$
Definicja iloczynu skalarnego	$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos\varphi$
Przemienność iloczynu skalarnego	$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$
Rozdzielność iloczynu skalarnego względem dodawania	$\vec{A} \cdot \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$
Iloczyn skalarny obliczany przy pomocy poszczególnych składowych wektorów	$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$
Cosinus kąta między dwoma wektorami	$\cos\varphi = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}$
Iloczyn skalarny wektorów jednostkowych	$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0$
Moduł iloczynu wektorowego (definicja)	$\left\lvert \vec{A} \times \vec{B} \right\rvert = AB \sin\varphi$
Nieprzemienność iloczynu wektorowego	$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
Rozdzielność iloczynu wektorowego względem dodawania	$\vec{A} \times \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$
Iloczyn wektorowy wektorów jednostkowych	$\begin{cases} \hat{i} \times \hat{j} = +\hat{k} \\ \hat{j} \times \hat{k} = +\hat{i} \\ \hat{k} \times \hat{i} = +\hat{j}. \end{cases}$
Iloczyn skalarny obliczany przy pomocy wartości składowych wektorów	$\vec{A} \times \vec{B} = \left(A_y B_z - A_z B_y\right)\hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{j} + \left(A_x B_y - A_y B_x\right)\hat{k}$

PODSUMOWANIE

2.1 Skalary i wektory

- Wielkość wektorowa to wielkość, która ma moduł, zwrot oraz kierunek, jak na przykład przemieszczenie lub prędkość. Wielkości wektorowe reprezentowane są przez wektory.
- Graficzną reprezentacją wektora jest strzałka. Długość strzałki odpowiada modułowi wektora, który jest liczbą dodatnią. Kierunek wektora na płaszczyźnie określony jest przez kąt, jaki wektor tworzy z pewnym kierunkiem odniesienia. Kierunek wektora jest wielkością skalarną.
- Dwa wektory są równe wtedy i tylko wtedy, kiedy ich moduły, kierunki oraz zwroty są równe. Wektory zgodne mają ten sam kierunek i zwrot, ale mogą mieć różne moduły. Wektory przeciwne mają ten sam kierunek, lecz przeciwny zwrot. Kierunki wektorów ortogonalnych różnią się od siebie o 90° .
- W wyniku mnożenia wektora przez skalar (różny od jedności) uzyskujemy wektor o innej długości. Mnożenie przez skalar będący liczbą dodatnią nie zmienia zwrotu wektora. Mnożenie przez liczbę ujemną zmienia zwrot wektora – wynikiem tego jest wektor przeciwny do wektora początkowego. Mnożenie przez wektor jest rozdzielne względem dodawania. Wektory można dzielić przez skalary, ale nie można ich dzielić przez wektory.

- Wektory mogą być dodawane do innych wektorów, nie mogą jednak być dodawane do skalarów. Dodawanie wektorów jest przemienne i łączne.
- Graficzne dodawanie dwóch wektorów realizujemy, stosując metodę równoległoboku. Graficzne dodawanie większej liczby wektorów realizujemy, łącząc kolejno punkty końcowe i początkowe wektorów.

2.2 Układy współrzędnych i składowe wektora

- Opisu wektorów dokonuje się przy pomocy ich składowych. W przestrzeni jednowymiarowej wektor ma jedną składową, w dwuwymiarowej (na płaszczyźnie) wektor ma dwie składowe, w trójwymiarowej – trzy.
- Składowa wektora jest to rzut wektora na daną oś. Wartość składowej wektora jest to długość rzutu wektora na daną oś. Wektor jest sumą swoich składowych.
- Wartości składowych wektora oblicza się, odejmując współrzędne punktu początkowego wektora od współrzędnych jego punktu końcowego. W prostokątnym układzie współrzędnych moduł wektora jest równy pierwiastkowi sumy kwadratów wartości jego składowych.
- Kierunek wektora na płaszczyźnie określany jest przez kąt, jaki ten wektor tworzy z dodatnim kierunkiem osi x. Kąt ten mierzy się w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara. Wartość składowej x wektora oblicza się, mnożąc moduł tego wektora przez cosinus kąta określającego kierunek. Wartość składowej y wektora oblicza się, mnożąc moduł tego wektora przez sinus kąta określającego kierunek.
- Możemy wyróżnić dwa rodzaje układów współrzędnych w przestrzeni dwuwymiarowej. Układ współrzędnych kartezjańskich (prostokątny układ współrzędnych) charakteryzowany jest przez $\hat{i}$, czyli wersor osi x, oraz $\hat{j}$, czyli wersor osi y. Układ współrzędnych biegunowych charakteryzowany jest przez wektor jednostkowy $\hat{r}$ określający kierunek promienia wodzącego oraz wektor jednostkowy $\hat{t}$, prostopadły (ortogonalny) do wektora $\hat{r}$.

2.3 Działania na wektorach

- Metoda analityczna obliczania wektorów pozwala na znajdowanie sum i różnic wektorów bez konieczności ich rysowania. Metoda ta, w przeciwieństwie do metody graficznej, jest bardzo precyzyjna.
- Z metody analitycznej korzysta się w dziedzinach takich jak mechanika, elektryczność, czy magnetyzm. W fizyce stanowi ona bardzo ważne narzędzie.

2.4 Mnożenie wektorów

- Wyróżniamy dwa rodzaje mnożenia wektorów – iloczyn skalarny, którego wynikiem jest liczba (skalar), oraz iloczyn wektorowy, którego wynikiem jest wektor.
- Zarówno iloczyn skalarny, jak i iloczyn wektorowy są rozdzielne względem dodawania, ale tylko iloczyn skalarny jest przemienny. Iloczyn wektorowy nie jest przemienny – jeśli zamienimy czynniki miejscami, wynik zmieni się na przeciwny.
- Iloczyn skalarny dwóch wektorów obliczamy, mnożąc przez siebie moduły tych wektorów oraz cosinus kąta między nimi. Iloczyn skalarny wektorów ortogonalnych jest równy zero; iloczyn skalarny wektorów o przeciwnych zwrotach jest liczbą ujemną.
- Iloczyn wektorowy dwóch wektorów jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny, w której leżą mnożone wektory. Jego moduł obliczamy, mnożąc moduły mnożonych wektorów przez sinus kąta między nimi. Zwrot wektora wynikowego możemy określić, stosując regułę korkociągu (regułę śruby prawoskrętnej). Iloczyn wektorowy dwóch równoległych wektorów jest wektorem zerowym. Moduł wektora wynikowego jest największy, jeśli mnożone wektory są ortogonalne.
- Iloczyn skalarny wykorzystuje się do obliczania kątów między wektorami oraz do definiowania pochodnych wielkości fizycznych, takich jak praca lub energia.
- Iloczyn wektorowy wykorzystuje się do definiowania pochodnych wektorowych wielkości fizycznych, takich jak moment siły lub siła Lorentza oraz do opisu ruchu obrotowego.

PYTANIA

2.1 Skalary i wektory

1. Według prognozy pogody temperatura ma spaść do -5°. Czy temperatura jest wielkością wektorową czy skalarną? Wytłumacz.

2. Wzrost człowieka, wysokość Mt. Everestu, prędkość muchy, wiek Ziemi, temperatura wrzenia wody, cena książki, populacja światowa, przyspieszenie grawitacyjne – które z wymienionych wielkości to wektory?

3. Podaj przykład wektora wraz z jego modułem, jednostką i zwrotem.

4. Jakie są cechy wspólne wektorów i skalarów? Jakie są między nimi różnice?

5. Przypuśmy, że chcesz dodać do siebie dwa wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$. Jaki powinien być kąt między nimi, aby moduł wektora sumy był jak największy? Jaka jest maksymalna możliwa wartość modułu wektora sumy? Jaki powinien być kąt między nimi, aby moduł wektora sumy był jak najmniejszy? Jaka jest najmniejsza możliwa wartość modułu wektora sumy?

6. Czy wielkość skalarną można dodać do wielkości wektorowej?

7. Czy suma dwóch wektorów o różnych modułach może być równa zero? Czy suma trzech wektorów o różnych modułach może być równa zero? Wyjaśnij dlaczego.

8. Czy drogomierz wskazuje wielkość skalarną czy wektorową?

9. Biegacz bierze udział w wyścigu na 10 000 m na bieżni o długości 400 m. Jakie jest jego przemieszczenie? Czy to przemieszczenie może być równe zero? Wyjaśnij dlaczego.

10. Moduł wektora jest równy zero. Czy należy określić jego zwrot? Wyjaśnij dlaczego.

11. Czy moduł wektora może być liczbą ujemną?

12. Czy moduł wektora przemieszczenia cząstki może być większy niż przebyty przez nią dystans?

13. Jeśli dwa wektory są równe, co możesz powiedzieć o ich składowych? Co możesz powiedzieć o ich modułach? A o ich zwrotach i kierunkach?

14. Jeśli suma trzech wektorów jest równa zero, w jaki sposób są one rozmieszczone na płaszczyźnie?

2.2 Układy współrzędnych i składowe wektora

15. Podaj przykład niezerowego wektora, którego składowa ma wartość zero.

16. Wyjaśnij, dlaczego składowa wektora nie może mieć wartości większej od modułu tego wektora.

17. Jeżeli dwa wektory są równe, co możesz powiedzieć o ich składowych?

18. Jeżeli wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$ są ortogonalne, jaka jest składowa wektora $\vec{B}$ w kierunku wektora $\vec{A}$? Jaka jest składowa wektora $\vec{A}$ w kierunku wektora $\vec{B}$?

19. Jeśli wartość jednej ze składowych wektora jest różna od zera, czy wartość drugiej składowej może być równa zero?

20. Jeśli moduły dwóch wektorów są równe, to czy wartości ich składowych muszą być takie same?

2.4 Mnożenie wektorów

21. Co się nie zgadza w przedstawionych wyrażeniach? Jak można je poprawić?

a. $C = \vec{A}\vec{B}$,
b. $\vec{C} = \vec{A}\vec{B}$,
c. $C = \vec{A} \times \vec{B}$,
d. $C = A\vec{B}$,
e. $C + 2\vec{A} = B$,
f. $\vec{C} = A \times \vec{B}$,
g. $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{A} \times \vec{B}$,
h. $\vec{C} = 2\vec{A} \cdot \vec{B}$,
i. $C = \vec{A}/\vec{B}$,
j. $C = \vec{A}/B$.

22. Jeżeli iloczyn wektorowy dwóch wektorów jest wektorem zerowym, co można powiedzieć o kierunkach mnożonych wektorów?

23. Jeśli iloczyn skalarny dwóch wektorów jest równy zero, co można powiedzieć o kierunkach mnożonych wektorów?

24. Jeżeli pewien wektor $\vec{w}$ pomnożymy wektorowo przez inny wektor, a następnie skalarnie przez wektor $\vec{w}$, co otrzymamy?

ZADANIA

2.1 Skalary i wektory

25. Nurek powoli zanurza się w głąb oceanu. Jego pozycja w pionie względem znajdującej się na powierzchni wody łódki zmienia się kilkakrotnie. Po raz pierwszy zatrzymuje się 9,0 m od łódki. Ma problem z wyrównaniem ciśnienia, więc wynurza się o 3,0 m, a następnie zanurza się 12,0 m głębiej, gdzie zatrzymuje się po raz drugi. Wynurza się o 4,0 m, następnie zanurza o 18,0 m, wynurza o 7,0 m i znów zanurza, tym razem o 24,0 m. Tam zatrzymuje się i czeka na kolegę. Zakładając, że wektor zwrócony w kierunku powierzchni jest wekto-

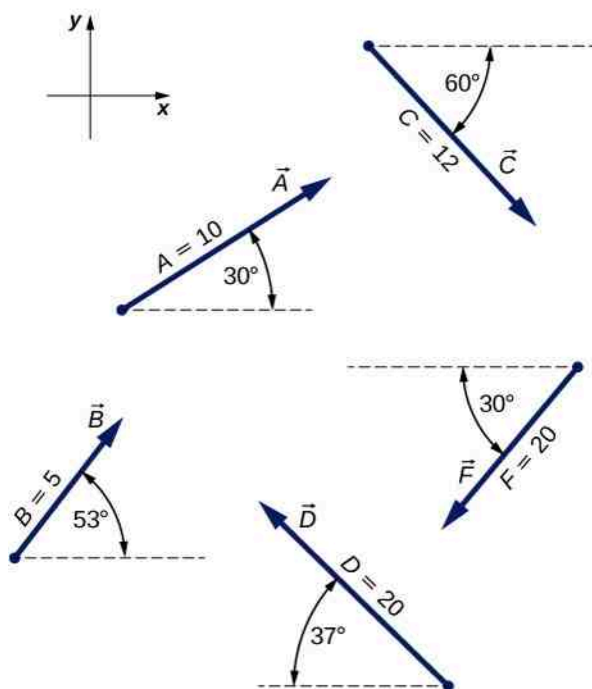
rem dodatnim, wyraź wektor przemieszczenia nurka w kierunku pionowym przy pomocy wektora jednostkowego. Jaka jest odległość nurka od łódki?

26. Na obozie szkolnym urządzono zawody w przeciąganiu liny. 15 uczniów jednocześnie ciągnie linę, próbując przeciągnąć znajdujący się na jej środku węzeł na jedną ze stron. Dwóch uczniów ciągnie w prawo z siłą 196 N, czterech uczniów ciągnie w lewo z siłą 98 N, pięciu uczniów ciągnie w lewo z siłą 62 N, trzech uczniów ciągnie w prawo z siłą 150 N, a jeden uczeń ciągnie w lewo z siłą 250 N. Zakładając dodatni zwrot w prawo, wyraź przemieszczenie węzła przy pomocy wektora jednostkowego. Jaka siła działa na węzeł? Jaki jest jej kierunek?

27. Przypuśćmy, że idziesz 18,0 m na zachód, a następnie 25,0 m na północ. Jak daleko jesteś od punktu początkowego i jaki jest kierunek wektora twojego przemieszczenia? Rozwiąż za pomocą metody graficznej.

28. Użyj metody graficznej, aby znaleźć następujące wektory:

a. $\vec{A} + \vec{B}$,
b. $\vec{C} + \vec{B}$,
c. $\vec{D} + \vec{F}$,
d. $\vec{A} - \vec{B}$,
e. $\vec{D} - \vec{F}$,
f. $\vec{A} + 2\vec{F}$,
g. $\vec{A} - 4\vec{D} + 2\vec{F}$.



29. Kurier zabiera przesyłki z poczty, jedzie 40 km na północ, następnie 20 km na zachód, 60 km na północny wschód i 50 km na północ, po czym zatrzymuje się na obiad. Przy pomocy metody graficznej znajdź wektor jego przemieszczenia.

30. Pies podróżnik ucieka z domu, biegnie 3 przecznice na wschód, 2 przecznice na północ, 1 przecznicę na wschód i 2 przecznice na zachód. Przyjmując, że przecznica to około 100 m, jak daleko od domu i w jakim kierunku znajduje się pies? Użyj metody graficznej.

31. Rozbitek planuje uciec z bezludnej wyspy, buduje więc tratwę i wypływa na morze. Wiatr jest bardzo zmienny, więc tratwa znoszona jest w różnych kierunkach: najpierw 2,50 km $45,0^\circ$ na północ od kierunku zachodniego, następnie 4,70 km $60,0^\circ$ na południe od kierunku wschodniego, 1,30 km $25,0^\circ$ na południe od kierunku zachodniego, 5,10 km na wschód, 1,70 km $5,0^\circ$ na wschód od kierunku północnego, 7,20 km $55,0^\circ$ na południe od kierunku zachodniego i 2,80 km $10,0^\circ$ na północ od kierunku wschodniego. Metodą graficzną określ końcowe położenie rozbitka względem wyspy.

32. Mały samolot leci 40,0 km pod kątem 60° na północ od kierunku wschodniego, a następnie 30,0 km pod kątem 15° na północ od kierunku wschodniego. Użyj metody graficznej, aby określić odległość samolotu od punktu startowego oraz kierunek jego przemieszczenia.

33. Turysta idzie ze schroniska nad jezioro oddalone od niego w linii prostej o 5,0 km. Użyj metody równoległoboku, aby określić przemieszczenie turysty w kierunku północnym i przemieszczenie w kierunku wschodnim, których suma jest całkowitym przemieszczeniem. Gdyby turysta szedł zygzakiem, tylko na północ i tylko na wschód, to ile kilometrów musiałby przejść, aby dotrzeć nad jezioro?



34. Geodeta mierzy szerokość rzeki płynącej prosto na północ w następujący sposób: rozpoczyna w punkcie leżącym naprzeciwko rosnącego po drugiej stronie rzeki drzewa i przechodzi 100 m wzdłuż rzeki, tworząc w ten sposób podstawę trójkąta. Następnie mierzy kąt między podstawą trójkąta a odcinkiem łączącym drzewo z punktem, w którym obecnie się znajduje, i stwierdza, że kąt ten jest równy 35°. Jak szeroka jest rzeka?

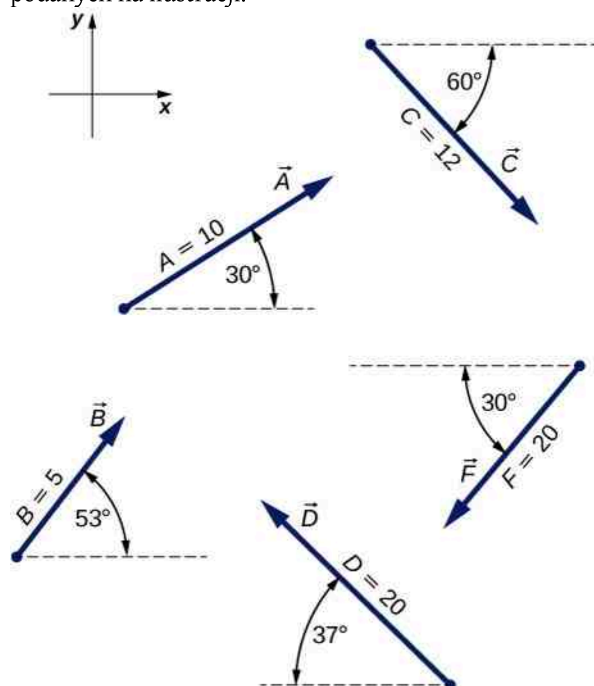
35. Pewien człowiek przeszedł 6,0 km w kierunku wschodnim, a następnie 13,0 km w kierunku północnym. Znajdź przemieszczenie oraz kierunek przemieszczenia tego człowieka przy pomocy metody graficznej.

36. Moduły dwóch wektorów przemieszczenia są

równe $A = 20$ m i $B = 6$ m . Jaka jest najmniejsza i największa możliwa wartość sumy wektorów $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$?

2.2 Układy współrzędnych i składowe wektora

37. Zakładając, że oś x leży w poziomie i skierowana jest w prawo, dokonaj rozkładu na składowe wektorów podanych na ilustracji.



38. Idziesz 18,0 m na zachód, a następnie 25,0 m na północ. Jak daleko jesteś od punktu startowego? Jaki jest wektor twojego przemieszczenia? Jaki jest kierunek twojego przemieszczenia? Przyjmij, że oś x leży w poziomie i skierowana jest w prawo.

39. Jedziesz 7,50 km pod kątem 15° na wschód od kierunku północnego.
a. Jaką drogę musiałbyś przebyć prosto na wschód, a następnie prosto na północ, aby znaleźć się w tym samym punkcie?
b. Udowodnij, że jeśli przejedziesz odcinki drogi w odwrotnej kolejności (najpierw na północ, a następnie na wschód), znajdziesz się w tym samym miejscu. Przyjmij, że dodatni kierunek osi x skierowany jest na wschód.

40. Dwa konie ciągną sanie po płaskim terenie. Siła wywierana na sanie w prostokątnym układzie współrzędnym jest wektorem $\vec{F} = -2980{,}0\,\mathrm{N} \cdot \hat{i} + 8200{,}0\,\mathrm{N} \cdot \hat{j}$, gdzie $\hat{i}$ i $\hat{j}$ oznaczają odpowiednio kierunek wschodni i północny. Znajdź moduł i kierunek wektora siły.

41. Turystka idzie ze schroniska nad jezioro. W prostej linii jezioro oddalone jest od schroniska o 5,0 km. Określ składowe wektora w kierunkach wschodnim i północnym. O ile kilometrów dłuższy dystans musiałaby przejść, gdyby szła wzdłuż składowych wektora? Jaki jest wektor jej przemieszczenia?



42. Współrzędne biegunowe punktu są równe $4\pi/3$ i 5,50 m. Jakie są jego współrzędne kartezjańskie?

43. Współrzędne biegunowe dwóch punktów są równe $P_1(2{,}500\ \mathrm{m};\ \pi/6)$ oraz $P_2(3{,}800\ \mathrm{m};\ 2\pi/3)$. Ustal, jakie są ich współrzędne kartezjańskie oraz określ, z dokładnością do centymetra, jaka odległość dzieli te punkty w prostokątnym układzie współrzędnych.

44. Kameleon leży na dachu werandy i czeka, aż w pobliżu pojawi się owad. Przyjmijmy, że lewy dolny róg dachu jest początkiem prostokątnego układu współrzędnych, a oś x skierowana jest w prawo. Jeżeli kameleon znajduje się w punkcie $(2{,}0\ \mathrm{m};\ 1{,}0\ \mathrm{m})$,
a. jak daleko znajduje się od narożnika dachu?
b. Jakie są jego współrzędne biegunowe?

45. Współrzędne dwóch punktów znajdujących się w prostokątnym układzie współrzędnych są równe $A(2{,}00\ \mathrm{m};\ -4{,}00\ \mathrm{m})$ oraz $B(-3{,}00\ \mathrm{m};\ 3{,}00\ \mathrm{m})$. Określ odległość między tymi punktami oraz ich współrzędne biegunowe.

46. Mucha wlatuje przez otwarte okno i zaczyna krążyć po pokoju. Osie trójwymiarowego układu współrzędnych kartezjańskich skierowane są wzdłuż trzech krawędzi pokoju. Mucha przemieszcza się z punktu $p(4{,}0\ \mathrm{m};\ 1{,}5\ \mathrm{m};\ 2{,}5\ \mathrm{m})$ do punktu $k(1{,}0\ \mathrm{m};\ 4{,}5\ \mathrm{m};\ 0{,}5\ \mathrm{m})$. Znajdź wartości składowych wektora przemieszczenia muchy oraz moduł tego wektora. Przedstaw rozkład wektora na składowe.

2.3 Działania na wektorach

47. Dane są wektory $\vec{B} = -\hat{i} - 4\hat{j}$ oraz $\vec{A} = -3\hat{i} - 2\hat{j}$. Oblicz:

a. wektor $\vec{A} + \vec{B}$, jego moduł oraz kąt nachylenia do osi poziomej;

b. wektor $\vec{A} - \vec{B}$, jego moduł oraz kąt nachylenia do osi poziomej.

48. Ruch cząstki opisują trzy wektory: $\vec{D}_1 = 3{,}0\ \mathrm{mm} \cdot \hat{i} - 4{,}0\ \mathrm{mm} \cdot \hat{j} - 2{,}0\ \mathrm{mm} \cdot \hat{k}$, $\vec{D}_2 = 1{,}0\ \mathrm{mm} \cdot \hat{i} - 7{,}0\ \mathrm{mm} \cdot \hat{j} + 4{,}0\ \mathrm{mm} \cdot \hat{k}$ oraz

$\vec{D}_3 = -7{,}0\text{ mm} \cdot \hat{i} + 4{,}0\text{ mm} \cdot \hat{j} + 1{,}0\text{ mm} \cdot \hat{k}$.

a. Znajdź sumę wektorów przemieszczenia tej cząstki.

b. Jaki jest moduł tej sumy?

c. Jaki dystans przebyłaby cząstka, gdyby wszystkie wektory przemieszczenia leżały w jednej linii?

49. Dane są dwa wektory przemieszczenia $\vec{A} = 3{,}00\text{ m} \cdot \hat{i} - 4{,}00\text{ m} \cdot \hat{j} + 4{,}00\text{ m} \cdot \hat{k}$ oraz $\vec{B} = 2{,}00\text{ m} \cdot \hat{i} + 3{,}00\text{ m} \cdot \hat{j} - 7{,}00\text{ m} \cdot \hat{k}$. Znajdź następujące wektory przemieszczenia oraz oblicz ich moduły:

a. $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$;

b. $\vec{D} = 2\vec{A} - \vec{B}$.

50. Samolot leci $40{,}0\text{ km}$ pod kątem 60° na północ od kierunku wschodniego, a następnie $30{,}0\text{ km}$ pod kątem 15° na północ od kierunku wschodniego. Użyj metody analitycznej, aby obliczyć moduł oraz kierunek geograficzny wektora przemieszczenia samolotu.

51. Aby uciec z bezludnej wyspy, rozbitek buduje tratwę i rusza na morze. Wiatr jest bardzo zmienny i znosi tratwę w różne strony. Najpierw płynie ona 2,50 km pod kątem $45,0^\circ$ na północ od kierunku zachodniego, następnie 4,70 km pod kątem $60,0^\circ$ na południe od kierunku wschodniego, 1,30 km pod kątem $25,0^\circ$ na południe od kierunku zachodniego, 5,10 km na wschód, 1,70 km pod kątem $5,0^\circ$ na wschód od kierunku północnego, 7,20 km pod kątem $55,0^\circ$ na południe od kierunku zachodniego i na końcu 2,80 km pod kątem $10,0^\circ$ na północ od kierunku wschodniego. Skorzystaj z metody analitycznej, aby obliczyć sumę wszystkich wektorów przemieszczenia tratwy. Jaki jest moduł i kierunek tego wektora sumy?

52. Jeśli oś x skierowana jest w prawo, znajdź za pomocą metody analitycznej następujące wektory:

a. $\vec{A} + \vec{B}$,

b. $\vec{C} + \vec{B}$,

c. $\vec{D} + \vec{F}$,

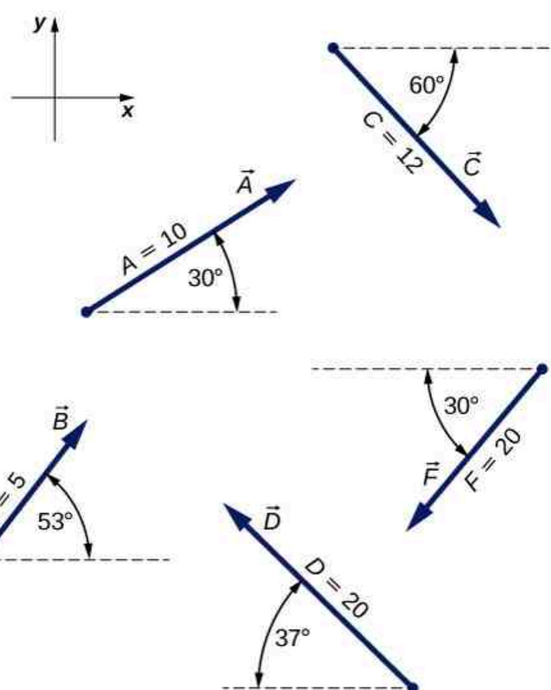
d. $\vec{A} - \vec{B}$,

e. $\vec{D} - \vec{F}$,

f. $\vec{A} + 2\vec{F}$,

g. $\vec{C} - 2\vec{D} + 3\vec{F}$,

h. $\vec{A} - 4\vec{D} + 2\vec{F}$.



Rysunek 2.33

53. Znajdź wektor $\vec{R}$ spełniający równanie (a) $\vec{D} + \vec{R} = \vec{F}$ (b) $\vec{C} - 2\vec{D} + 5\vec{R} = 3\vec{F}$. Przyjmij, że oś x skierowana jest w prawo.

54. Kurier jedzie 40 km na północ, 20 km na zachód, a następnie 60 km na północny wschód. Po 50 km jazdy na północ zatrzymuje się w restauracji na obiad.

a. Znajdź wektor jego przemieszczenia.

b. Oblicz odległość między restauracją a punktem startowym.

c. Jeśli kurier pojedzie z restauracji do biura po linii prostej, jaki będzie wektor przemieszczenia po jego drodze powrotnej?

d. W jakim kierunku geograficznym będzie jechał, wracając? Użyj metody analitycznej. Przyjmij, że dodatnim kierunkiem osi x jest kierunek wschodni.

55. Żądny przygód pies wymyka się z domu, biegnie trzy przecznice na wschód, dwie przecznice na północ, jedną przecznicę na wschód, jedną przecznicę na północ i dwie przecznice na zachód. Przyjmij, że przecznica to około 100 metrów, i za pomocą metody analitycznej wyznacz wektor przemieszczenia psa, jego moduł oraz kierunek. Dodatni kierunek osi x to kierunek wschodni.

56. Dane są wektory $\vec{D} = 6{,}00\text{ m} \cdot \hat{i} - 8{,}00\text{ m} \cdot \hat{j}$, $\vec{B} = -8{,}00\text{ m} \cdot \hat{i} + 3{,}00\text{ m} \cdot \hat{j}$ oraz $\vec{A} = 26{,}0\text{ m} \cdot \hat{i} + 19{,}0\text{ m} \cdot \hat{j}$. Znajdź współczynniki a oraz b spełniające równanie $a\vec{D} + b\vec{B} + \vec{A} = \vec{0}$.

57. Dany jest wektor przemieszczenia $\vec{D} = 3\text{ m} \cdot \hat{i} - 4\text{ m} \cdot \hat{j}$. Znajdź wektor przemieszczenia $\vec{R}$ taki, aby $\vec{D} + \vec{R} = -4D\hat{j}$.

58. Znajdź wektor jednostkowy, określający kierunek następujących wektorów:

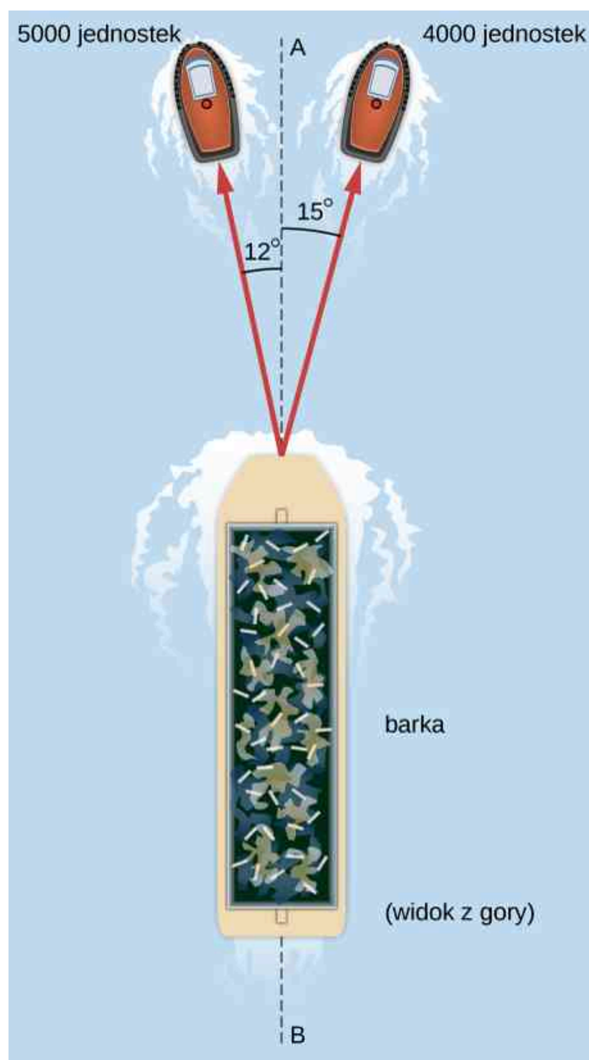
a. siła $\vec{F} = 3{,}0\,\text{N} \cdot \hat{i} - 2{,}0\,\text{N} \cdot \hat{j}$,

b. przemieszczenie $\vec{D} = -3{,}0\,\text{m} \cdot \hat{i} - 4{,}0\,\text{m} \cdot \hat{j}$,

c. prędkość $\vec{v} = -5{,}00\,\text{m/s} \cdot \hat{i} + 4{,}00\,\text{m/s} \cdot \hat{j}$.

59. Kierunek wektora natężenia pola elektrycznego określony jest w układzie współrzędnych kartezjańskich przez wektor jednostkowy $\hat{E} = 1/\sqrt{5} \cdot \hat{i} - 2/\sqrt{5} \cdot \hat{j}$. Jeśli moduł wektora natężenia pola elektrycznego jest równy $E = 400{,}0\,\text{V/m}$, jakie są wartości jego składowych E_x, E_y oraz E_z? Jaki kąt θ_E określa kierunek tego wektora?

60. Dwa holowniki ciągną barkę w sposób przedstawiony na poniższym rysunku. Jeden z holowników ciągnie barkę z siłą o module 4000 jednostek siły, pod kątem 15° w stosunku do odcinka AB, a drugi z siłą o module 5000 jednostek, pod kątem 12° w stosunku do odcinka AB. Wyznacz wartości składowych wektorów siły i znajdź składowe wynikowego wektora siły działającej na barkę. Jaki jest moduł wektora wynikowego? Jaki jest jego kierunek w stosunku do odcinka AB?



Rysunek 2.34

61. Kontroler lotów na lotnisku śledzi zmianę położenia dwóch samolotów w stosunku do wieży kontroli lotów. Jeden z samolotów to Boeing 747, a drugi to Douglas DC-3. Boeing znajduje się na wysokości 2500 m, wznosi się pod kątem 10° do powierzchni ziemi i leci w kierunku 30° na północ od kierunku zachodniego. DC-3 znajduje się na wysokości 3000 m, wznosi się pod kątem 5° do powierzchni ziemi i leci prosto na zachód.

a. Znajdź wektory wodzące samolotów w stosunku do wieży kontroli lotów.

b. Jaka odległość dzieliła samoloty w momencie, w którym kontroler odczytał ich pozycje?

2.4 Mnożenie wektorów

62. Przyjmując, że oś x jest pozioma i ma zwrot w prawo, znajdź następujące iloczyny skalarne:

a. $\vec{A} \cdot \vec{C}$,

b. $\vec{A} \cdot \vec{F}$,

c. $\vec{D} \cdot \vec{C}$,

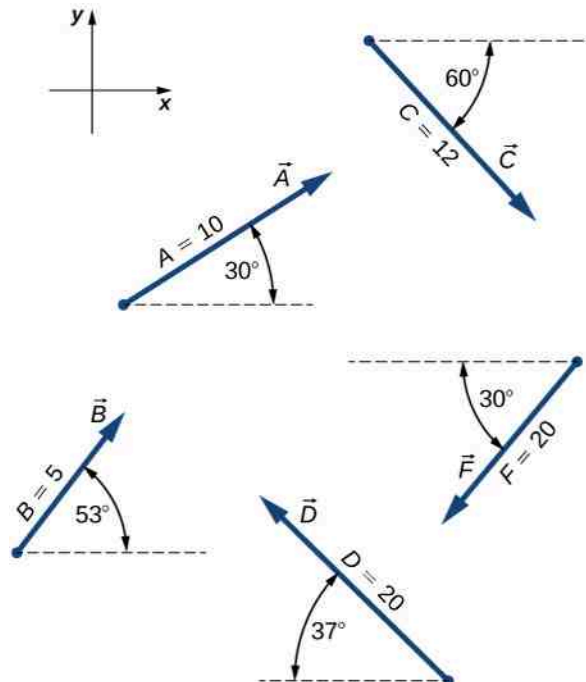
d. $\vec{A} \cdot \left(\vec{F} + 2\vec{C}\right)$,

e. $\hat{i} \cdot \vec{B}$,

f. $\hat{j} \cdot \vec{B}$,

g. $\left(3\hat{i} - \hat{j}\right) \cdot \vec{B}$,

h. $\hat{B} \cdot \vec{B}$.



63. Przyjmując, że oś x jest pozioma i ma zwrot w prawo, dla tych samych wektorów co w poprzednim zadaniu znajdź

a. rzut wektora $\vec{A}$ na kierunek wektora $\vec{C}$,

b. rzut wektora $\vec{C}$ na kierunek wektora $\vec{A}$,

c. rzut wektora $\hat{i}$ na kierunek wektora $\vec{F}$,

d. rzut wektora $\vec{F}$ na kierunek wektora $\hat{i}$.

64. Znajdź kąty między wektorami

a. $\vec{D} = -3{,}0\,\text{m} \cdot \hat{i} - 4{,}0\,\text{m} \cdot \hat{j}$ i $\vec{A} = -3{,}0\,\text{m} \cdot \hat{i} + 4{,}0\,\text{m} \cdot \hat{j}$,

b. $\vec{D} = 2{,}0\,\text{m} \cdot \hat{i} - 4{,}0\,\text{m} \cdot \hat{j} + 1{,}0\,\text{m} \cdot \hat{k}$ i $\vec{B} = -2{,}0\,\text{m} \cdot \hat{i} + 3{,}0\,\text{m} \cdot \hat{j} + 2{,}0\,\text{m} \cdot \hat{k}$.

65. Znajdź kąty, jakie wektor $\vec{D} = 2{,}0\,\text{m} \cdot \hat{i} - 4{,}0\,\text{m} \cdot \hat{j} + 1{,}0\,\text{m} \cdot \hat{k}$ tworzy z osiami x, y i z.

66. Udowodnij, że wektor siły $\vec{D} = 2{,}0\,\text{N} \cdot \hat{i} - 4{,}0\,\text{N} \cdot \hat{j} + 1{,}0\,\text{N} \cdot \hat{k}$ jest prostopadły do wektora siły $\vec{G} = 3{,}0\text{N} \cdot \hat{i} + 4{,}0\text{N} \cdot \hat{j} + 10{,}0\text{N} \cdot \hat{k}$.

67. Przyjmując, że oś x jest pozioma i ma zwrot w prawo, znajdź następujące iloczyny wektorowe

a. $\vec{A} \times \vec{C}$,

b. $\vec{A} \times \vec{F}$,

c. $\vec{D} \times \vec{C}$,

d. $\vec{A} \times \left(\vec{F} + 2\vec{C}\right)$,

e. $\hat{i} \times \vec{B}$,

f. $\hat{j} \times \vec{B}$,

g. $\left(3\hat{i} - \hat{j}\right) \times \vec{B}$,

h. $\hat{B} \times \vec{B}$.

68. Oblicz $\vec{A} \times \vec{C}$ dla

a. $\vec{A} = 2{,}0\hat{i} - 4{,}0\hat{j} + \hat{k}$ i $\vec{C} = 3{,}0\hat{i} + 4{,}0\hat{j} + 10{,}0\hat{k}$,

b. $\vec{A} = 3{,}0\hat{i} + 4{,}0\hat{j} + 10{,}0\hat{k}$ i $\vec{C} = 2{,}0\hat{i} - 4{,}0\hat{j} + \hat{k}$,

c. $\vec{A} = -3{,}0\hat{i} - 4{,}0\hat{j}$ i $\vec{C} = -3{,}0\hat{i} + 4{,}0\hat{j}$,

d. $\vec{C} = -2{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j} + 2{,}0\hat{k}$ i $\vec{A} = -9{,}0\hat{j}$.

69. Dla wektorów z poprzedniego rysunku znajdź

a. $\left(\vec{A} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{D}$,

b. $\left(\vec{A} \times \vec{F}\right) \cdot \left(\vec{D} \times \vec{B}\right)$,

c. $\left(\vec{A} \cdot \vec{F}\right) \cdot \left(\vec{D} \times \vec{B}\right)$.

70.

a. Jeżeli $\vec{A} \times \vec{F} = \vec{B} \times \vec{F}$, to czy możemy wywnioskować, że $\vec{A} = \vec{B}$?

b. Jeżeli $\vec{A} \cdot \vec{F} = \vec{B} \cdot \vec{F}$, to czy możemy wywnioskować, że $\vec{A} = \vec{B}$?

c. Jeżeli $F\vec{A} = \vec{B}F$, to czy możemy wywnioskować, że $\vec{A} = \vec{B}$?

Dlaczego tak lub dlaczego nie?

ZADANIA DODATKOWE

71. Lecisz $32{,}0\,\text{km}$ w linii prostej, przy bezwietrznej pogodzie pod kątem $35{,}0°$ na południe od kierunku zachodniego.

a. Jaki dystans musiałbyś przelecieć, żeby znaleźć się w tym samym punkcie, jeśli leciałbyś prosto na południe, a następnie prosto na zachód?

b. Jaki dystans musiałbyś przelecieć, żeby znaleźć się w tym samym punkcie, jeśli leciałbyś najpierw na południowy zachód, a następnie na północny zachód? Zauważ, że wektory przemieszczenia są obrócone o $45{,}0°$ względem wektorów z podpunktu (a).

72. Współrzędne kartezjańskie punktu to $(2,\ y)$, a jego współrzędne biegunowe $(r,\ \pi/6)$. Znajdź y oraz r.

73. Jeśli współrzędnymi biegunowymi punktu są $(r,\ \varphi)$, jego współrzędnymi kartezjańskimi $(x,\ y)$, określ współrzędne biegunowe następujących punktów:

a. $(-x,\ y)$,

b. $(-2x,\ -2y)$,

c. $(3x,\ -3y)$.

74. Wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$ mają moduły równe 5,0 jednostek. Znajdź kąt między tymi wektorami, jeśli $\vec{A} + \vec{B} = 5\sqrt{2}\hat{j}$.

75. Łódź rybacka wyrusza z wyspy Moi położonej w nieznanym archipelagu. Przed powrotem na Moi zatrzymuje się na wyspach Noi i Poi. Łódź przepływa najpierw 4,76 mil morskich (nmi) pod kątem $37°$ na północ od kierunku wschodniego, po czym dociera do Noi. Następnie płynie pod kątem $69°$ na zachód od kierunku północnego, aż dociera do Poi. W drodze powrotnej z Poi płynie pod kątem $28°$ na wschód od kierunku południowego. Jaki dystans przepływa łódź między wyspami Noi i Poi? Jaki dystans przepływa między Moi i Poi? Przedstaw wyniki w milach morskich oraz w kilometrach. $1\,\text{nmi} = 1852\,\text{m}$.

76. Pracownik wieży kontroli lotów zauważa na monitorze radaru sygnały dwóch samolotów. Jeden z nich znajduje się na wysokości 800 m i w odległości (w poziomie) 19,2 km od wieży, pod kątem $25°$ na południe od kierunku zachodniego. Drugi samolot znajduje się na wysokości 1100 m, w odległości (w poziomie) 17,6 km od wieży, pod kątem $20°$ na południe od kierunku zachodniego. Jaka jest odległość między samolotami?

77. Udowodnij, że jeśli $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$, to $C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\varphi$, gdzie φ jest kątem między wektorami $\vec{A}$ i $\vec{B}$.

78. Każdy z czterech wektorów siły ma taki sam moduł równy f. Jaka może być maksymalna wartość modułu wektora sumy tych czterech wektorów? Jaka może być jego najmniejsza wartość? Przedstaw obie sytuacje graficznie.

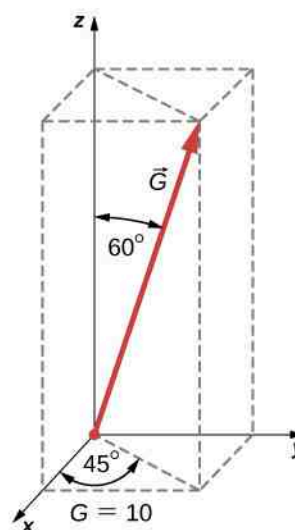
79. Deskorolkarz jedzie po okrągłym torze o średnicy 5,00 m w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Jeśli przebył połowę okręgu, licząc od punktu wysuniętego najbardziej na zachód, znajdź (a) moduł wektora jego przemieszczenia oraz (b) odległość, jaką przejechał. (c) Jaki będzie moduł wektora jego przemieszczenia, jeśli przejedzie cały tor i wróci do wysuniętego na zachód punktu początkowego?

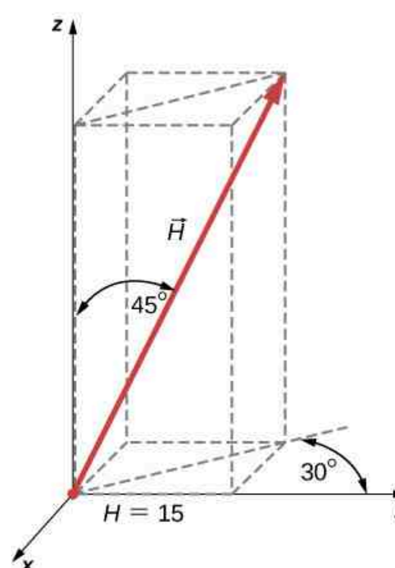
80. Właściciel wyprowadza swojego ciekawskiego psa na smyczy. W pewnym momencie pies czuje intrygujący zapach dochodzący z pewnego miejsca na ziemi i chce dokładnie go zbadać, jednak właściciel jest niecierpliwy i ciągnie smycz z siłą $\vec{F} = 98{,}0\ \mathrm{N}\cdot\hat{i} + 132{,}0\ \mathrm{N}\cdot\hat{j} + 32{,}0\ \mathrm{N}\cdot\hat{k}$.

a. Jaki jest moduł siły, z jaką właściciel ciągnie smycz?
b. Jaki kąt tworzy smycz z pionem?

81. Jeżeli wektor prędkości niedźwiedzia polarnego jest równy $\vec{u} = -18{,}0\ \mathrm{km/h}\cdot\hat{i} - 13{,}0\ \mathrm{km/h}\cdot\hat{j}$, jak szybko i w jakim kierunku geograficznym porusza się ten niedźwiedź? Wektory $\hat{i}$ oraz $\hat{j}$ wskazują odpowiednio na wschód i na północ.

82. Znajdź składowe wektorów $\vec{G}$ i $\vec{H}$ znajdujących się w przestrzeni trójwymiarowej. Przedstaw rozkład wektora przy pomocy wersorów osi.





83. Nurek bada rafę koralową u wybrzeża Belize. Na początku płynie 90,0 m na północ, następnie 200,0 m na wschód, po czym zauważa dużego granika i podąża za nim przez 80,0 metrów pod kątem 30° na północ od kierunku wschodniego. W międzyczasie prąd znosi go 150,0 m na południe. Zakładając, że prąd już nie oddziałuje, w jakim kierunku i jak daleko powinien płynąć nurek, aby wrócić do punktu startowego?

84. Składowe x i y wektora siły $\vec{A}$ są równe odpowiednio −8,80 jednostek siły i 15,00 jednostek siły. Składowe x i y wektora siły $\vec{B}$ są równe odpowiednio 13,20 jednostek siły i −6,60 jednostek siły. Znajdź składowe wektora siły $\vec{C}$, spełniającego równanie $\vec{A} - \vec{B} + 3\vec{C} = 0$.

85. Wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$ leżą na płaszczyźnie xy, mają takie same moduły i są ortogonalne. Jeśli $\vec{A} = 3{,}0\hat{i} + 4{,}0\hat{j}$, znajdź $\vec{B}$.

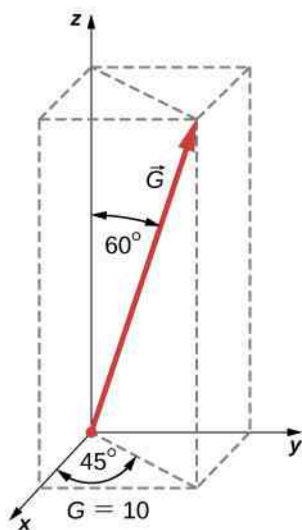
86. Dla przedstawionych na rysunku wektorów leżą-

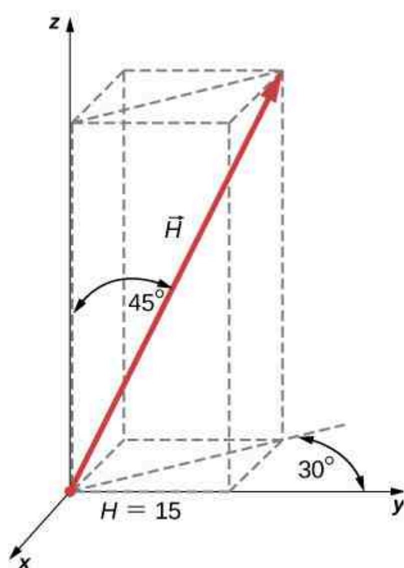
cych w przestrzeni trójwymiarowej oblicz:

a. $\vec{G} \times \vec{H}$,

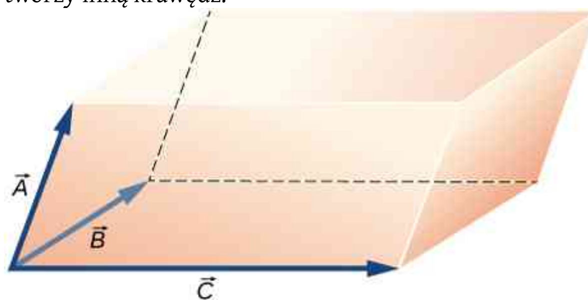
b. $\left|\vec{G} \times \vec{H}\right|$,

c. $\vec{G} \cdot \vec{H}$.





87. Udowodnij, że $\left(\vec{B} \times \vec{C}\right) \cdot \vec{A}$ jest wzorem na objętość równoległościanu, gdzie każdy z trzech wektorów tworzy inną krawędź.

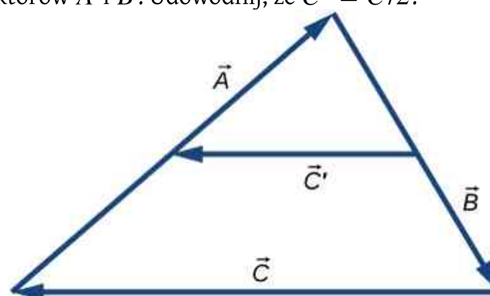


ZADANIA TRUDNIEJSZE

88. Moduł wektora $\vec{B}$ jest równy 5,0 cm, a moduł wektora $\vec{A}$ jest równy 4,0 cm. Znajdź kąt między tymi wektorami, jeśli $\left|\vec{A} + \vec{B}\right| = 3{,}0\,\mathrm{cm}$ i $\left|\vec{A} - \vec{B}\right| = 3{,}0\,\mathrm{cm}$.

89. Jaka jest wartość rzutu wektora siły $\vec{G} = 3{,}0\,\mathrm{N} \cdot \hat{i} + 4{,}0\,\mathrm{N} \cdot \hat{j} + 10{,}0\,\mathrm{N} \cdot \hat{k}$ na kierunek wektora siły $\vec{H} = 1{,}0\,\mathrm{N} \cdot \hat{i} + 4{,}0\,\mathrm{N} \cdot \hat{j}$?

90. Poniższy rysunek przedstawia trójkąt stworzony przez trzy wektory $\vec{A}$, $\vec{B}$ i $\vec{C}$. Wektor $\vec{C}'$ łączy środki wektorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$. Udowodnij, że $\vec{C}' = \vec{C}/2$.



91. Odległości między punktami leżącymi na płaszczyźnie nie zmieniają się podczas obrotu układu współrzęd-

nych. Innymi słowy, moduł wektora podczas obrotu układu współrzędnych jest *niezmienny*. Przypuśćmy, że układ współrzędnych S obracamy względem swojego początku o kąt φ, tworząc nowy układ współrzędnych S' (zobacz rysunek). Punkt leżący na płaszczyźnie opisują współrzędne (x, y) układu S oraz współrzędne (x', y') układu S'.

(a) Udowodnij, że współrzędne układu S' oraz współrzędne układu S związane są ze sobą w następujący sposób:

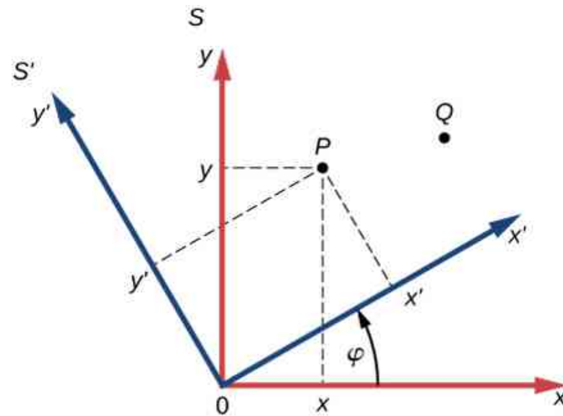
$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$$

(b) Udowodnij, że obrót układu współrzędnych nie ma wpływu na odległość punktu P od początku układu współrzędnych. Musisz dowieść, że

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

(c) Udowodnij, że obrót układu współrzędnych nie ma wpływu na odległość między punktami P i Q. Musisz dowieść, że

$$\sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} = \sqrt{(x'_P - x'_Q)^2 + (y'_P - y'_Q)^2}.$$



3 | RUCH PROSTOLINIOWY



Rysunek 3.1 Pendolino ED250 to najszybszy pociąg na polskich torach, jeżdżący np. na linii Kraków–Warszawa. Ruch Pendolino możesz opisać dzięki równaniom kinematycznym, które poznasz w tym rozdziale.

Treść rozdziału

Wstęp

Wszechświat jest wypełniony obiektami, które są w nieustannym ruchu. Od ciał niebieskich, takich jak planety, gwiazdy, całe galaktyki; poprzez ludzi i zwierzęta na Ziemi; aż po molekuły i atomy w skali mikroskopowej – wszystkie obiekty we Wszechświecie się poruszają. Fizyka zajmuje się opisem ruchu w dwóch aspektach, o czym traktują jej działy: dynamika i kinematyka. Dynamika zajmuje się zagadnieniem przyczyn ruchu, co opisujemy w rozdziale Zasady dynamiki Newtona, jednak i bez wnikania w przyczyny ruchu możemy wiele o nim powiedzieć. Kinematyka zajmuje się opisem samego ruchu, bez dyskusji o jego przyczynach, wykorzystując do tego pojęcia takie jak: położenie, czas, prędkość i przyspieszenie. Właśnie kinematyką zajmiemy się w niniejszym rozdziale.

Najbardziej ogólnym przypadkiem ruchu i przedmiotem badań **kinematyki** jest ruch w trzech wymiarach. Na razie jednak skupimy się na ruchu w jednym wymiarze, dzięki czemu poznamy narzędzia potrzebne także do opisu ruchu wielowymiarowego. Dobrym przykładem ruchu w jednym wymiarze jest pociąg Pendolino, który widzisz na zdjęciu. Gdy pociąg jedzie np. z Krakowa do Warszawy, w różnych momentach znajduje się w różnych położeniach na trasie, co oznacza, że przemieszcza się, czyli dochodzi do zmiany jego położenia. Na wielu odcinkach porusza się dokładnie po linii prostej. W swej podróży ma też cały wachlarz różnych prędkości – np. przy peronach lub na łukach

zatrzymuje się lub zwalnia. Doznaje w związku z tym przyspieszeń, czyli zmian prędkości w czasie. Dzięki umiejętnościom zdobytym w tym rozdziale będziesz potrafił obliczyć te wielkości, a także prędkość średnią i szybkość średnią. Wszystkie te wielkości potrafimy obliczyć, używając tylko kinematyki, bez znajomości masy pociągu ani sił, jakie na niego działają. Tym zajmuje się **dynamika**.

3.1 | Położenie, przemieszczenie, prędkość średnia

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- podawać definicję położenia, przemieszczenia i drogi;
- obliczać całkowite przemieszczenie ciała, znając wektor położenia w funkcji czasu;
- określać całkowitą drogę przebytą przez ciało;
- obliczać wektor prędkości średniej, znając przemieszczenie i czas.

Gdy jesteś w ruchu, możesz sobie zadać podstawowe pytania: Gdzie się znajdujesz? W którym kierunku podążasz? Jak szybko tam zmierzasz? Odpowiedzi na te pytania wymagają od ciebie podania twojego położenia, przemieszczenia oraz średniej prędkości, a więc wielkości, które zdefiniujemy w tej sekcji.

Położenie

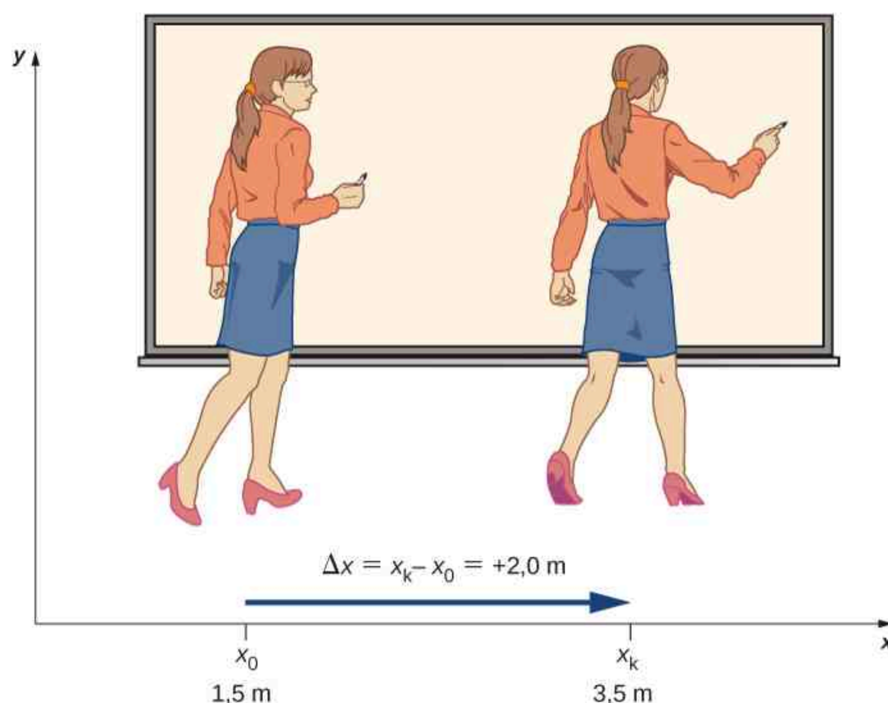
Aby opisać ruch ciała, musisz w pierwszej kolejności potrafić podać jego **położenie** w odniesieniu do wybranej osi układu współrzędnych (x): *gdzie znajduje się ono w danej chwili czasu*. Mówiąc precyzyjniej, musisz zdefiniować położenie ciała w wybranym układzie odniesienia, z którym zwiążesz pewien matematyczny układ współrzędnych. **Układ odniesienia** jest dowolnie wybranym układem osi, względem których mierzymy położenie i opisujemy ruch ciała. Najczęściej wybieramy w tym celu Ziemię (planetę) i względem spoczywających na Ziemi obiektów opisujemy ruch ciał. Mówimy wtedy często: ruch względem Ziemi (podłoża, gruntu, powierzchni itd.). Przykładowo, start rakiety możemy opisać w układzie związanym z Ziemią, tak jak ruch rowerzystki ze zdjęcia (Rysunek 3.2) – jej położenie i prędkość – możemy podać względem budynków stojących przy ulicy, a więc związanych z Ziemią. Możemy też opisać ruch rowerzystki względem jadącej obok koleżanki – w tym przypadku układ odniesienia sam porusza się względem Ziemi. Aby opisać ruch pasażera samolotu na pokładzie, wybierzemy samolot jako układ odniesienia, a nie Ziemię. Bardziej szczegółowo dyskutujemy tę kwestię w ostatniej sekcji następnego rozdziału. Położenie ciała w ruchu jednowymiarowym podajemy najczęściej wzdłuż osi x. W dalszych sekcjach tego rozdziału, gdzie omawiamy spadek swobodny, wprowadzimy oś y. Ruch jednowymiarowy – po linii prostej – nazywamy też często ruchem prostoliniowym.



Rysunek 3.2 Położenie rowerzystek można podać względem ulicy, budynków czy względem siebie nawzajem. Ich ruch można opisać poprzez położenie oraz przemieszczenie, w wybranym układzie odniesienia.

Przemieszczenie

Jeżeli jakieś ciało się porusza — np. nauczycielka przechodzi od lewej do prawej strony tablicy (Rysunek 3.3) — to jej położenie się zmienia. Ta zmiana położenia nazywa się **przemieszczeniem**. Wyraz *przemieszczenie* jednoznacznie sugeruje ruch, czyli zmianę położenia – ciało się przemieściło lub doznało przemieszczenia. Tak jak położenie jest wartością liczbową x wzdłuż pewnej prostej, po której ciało może się poruszać, tak przemieszczenie jest *różnicą położeń* na tej prostej przed i po wykonaniu ruchu. Ponieważ przemieszczenie wyraźnie wskazuje na kierunek ruchu, jest wektorem i może być zarówno dodatnie, jak i ujemne, w zależności od wyboru dodatniego kierunku. Zazwyczaj wybieramy kierunek osi x w prawo jako dodatni (dodatni kierunek osi x). Na ruch ciała może składać się wiele przemieszczeń, które w efekcie dają wypadkowe przemieszczenie. Jeśli za dodatni kierunek przyjmiemy kierunek w prawo, a nauczycielka przesuwa się najpierw o 2 m w prawo, a potem o 4 m w lewo, to składowe pojedyncze przemieszczenia wynoszą odpowiednio 2 m oraz −4 m. Całkowite przemieszczenie jest równe −2 m.



Rysunek 3.3 Nauczycielka podczas lekcji przechodzi z jednej strony tablicy na drugą. Jej położenie względem Ziemi mierzymy współrzędną x. Przemieszczenie nauczycielki od położenia początkowego do końcowego, równe +2,0 m, zaznaczono strzałką o zwrocie w prawo.

Przemieszczenie

Przemieszczenie Δx jest zmianą położenia ciała i obliczamy je jako różnicę położenia końcowego i początkowego:

$$\Delta x = x_k - x_0, \tag{3.1}$$

gdzie Δx jest przemieszczeniem, x_k jest położeniem końcowym, a x_0 jest położeniem początkowym. Często położenie początkowe będziemy też oznaczać przez x_p.

Dużej litery greckiego alfabetu - delty (Δ) używamy do oznaczenia „zmiany" wielkości, której symbol zapisujemy po prawej stronie, np. Δx oznacza *zmianę położenia* (położenie końcowe odjąć położenie początkowe). Zawsze obliczamy przemieszczenie od położenia końcowego x_k, odejmując położenie początkowe x_0. Zwróć uwagę na to, że przemieszczenie, w układzie jednostek SI podaje się w metrach, ale używamy często jednostek wielokrotnych i podwielokrotnych, a także innych jednostek metrycznych (jak np. mile, cale itd.). Pamiętaj, że jeśli w zadaniu i innych problemach masz do czynienia z jednostkami innymi niż metry, to zawsze możesz je zamienić na metry, i najczęściej tak należy zrobić (po szczegóły zajrzyj do Załącznika B).

Ciała w ruchu mogą doznawać kilku lub nawet całej serii przemieszczeń. W przykładzie powyżej nauczycielka najpierw przemieściła się o 2 m w prawo, od położenia $x_0 = 0\,\text{m}$ do położenia $x_1 = 2\,\text{m}$. Następnie mogła wrócić do położenia $x_2 = -2\,\text{m}$, przechodząc 4 m w lewo. Jej pojedyncze przemieszczenia wynoszą +2 m oraz −4 m, odpowiednio, co wypadkowo daje przemieszczenie −2 m. **Całkowite przemieszczenie** $\Delta x_{\text{całk}}$ definiujemy jako *sumę pojedynczych przemieszczeń*, co matematycznie ujmiemy w postaci wzoru

$$\Delta x_{\text{całk}} = \sum \Delta x_i, \tag{3.2}$$

gdzie Δx_i są pojedynczymi składowymi przemieszczeniami. W przykładzie mieliśmy

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0 = 2\,\text{m} - 0\,\text{m} = 2\,\text{m}.$$

Podobnie

$$\Delta x_2 = x_2 - x_1 = (-2\,\text{m}) - 2\,\text{m} = -4\,\text{m}.$$

W takim razie

$$\Delta x_{\text{całk}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 2\,\text{m} - 4\,\text{m} = -2\,\text{m}.$$

Całkowite przemieszczenie wynosi $2\,\text{m} + (-4\,\text{m}) = 2\,\text{m} - 4\,\text{m} = -2\,\text{m}$ w lewo lub, równoważnie, w kierunku ujemnym. Użyteczna jest również znajomość wartości przemieszczenia, czyli jego wielkości. Wartość przemieszczenia jest zawsze liczbą nieujemną (dodatnią lub równą zero). W przypadku jednowymiarowym obliczamy ją jako wartość bezwzględną. W przypadkach wielowymiarowych jest to długość wektora, która jest zawsze nieujemna. W naszym przykładzie wartość przemieszczenia całkowitego wynosi 2 m, a wartości przemieszczeń składowych wynoszą 2 m i 4 m.

W ogólnym przypadku długość przemieszczenia nie powinna być mylona z drogą, jaką przebyło ciało. To jest częsty błąd, którego nie możesz popełniać. Droga przebyta w ruchu przez ciało, którą oznaczamy przez $s_{\text{całk}}$, jest długością toru, po którym ciało się porusza między dwoma punktami. W przykładzie, który dyskutujemy, **całkowita droga** jest sumą długości wektorów przemieszczeń składowych:

$$s_{\text{całk}} = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 2\,\text{m} + 4\,\text{m} = 6\,\text{m},$$

Tak będzie też w każdym przypadku ruchu po linii prostej (w jednym wymiarze). Drogę znajdujemy jako sumę długości poszczególnych przemieszczeń i nigdy nie jest to wartość ujemna ani nawet równa zero, mimo iż przemieszczenie całkowite może być ujemne lub zerowe. Gdyby nauczycielka z przykładu powyżej wróciła w lewo w to samo miejsce ($x_2 = 0\,\text{m}$), to jej przemieszczenie całkowite byłoby równe zero, podczas gdy droga, jaką pokonałaby w całym ruchu, wynosiłaby 4 m. W przypadku dwu- lub trójwymiarowym sprawa jest jeszcze bardziej złożona. Obliczenie drogi jako długości toru ruchu ciała, który może być przecież dowolną krzywą na płaszczyźnie lub w przestrzeni, jest ogólnie zadaniem trudnym. Przemieszczenie jest wektorem, którego długość zawsze łatwo znajdziemy, bo jest to długość odcinka między dwoma punktami. Wrócimy jeszcze do tego zagadnienia w dalszych sekcjach.

Prędkość średnia

Do dyskusji o kolejnych wielkościach fizycznych używanych w kinematyce musimy użyć nowej zmiennej, którą jest czas. Włączenie do naszego opisu zmiennej czasowej pozwala nie tylko stwierdzić, gdzie w przestrzeni znajduje się ciało (jakie jest jego położenie w danym momencie), ale także określić, jak szybko się porusza. O tym, jak szybko ciało porusza się w trakcie ruchu, mówi nam prędkość, czyli zmiana położenia w czasie.

Każdemu położeniu x_i ciała przyporządkujemy odpowiadający mu czas t_i. Jeżeli nie interesują nas szczegóły o ruchu w danym momencie, najczęściej wystarczy podać **średnią prędkość** $\bar{v}$, aby określić jak szybko ciało się porusza. Jest to wielkość wektorowa, którą wyraża iloraz całkowitego przemieszczenia między dwoma punktami i czasu, w jakim to przemieszczenie nastąpiło. Ten czas nazywamy **całkowitym czasem ruchu** i oznaczamy Δt.

Prędkość średnia

Jeżeli x_1 i x_2 są położeniami ciała w chwilach czasu t_1 i t_2, to

$$\text{Prędkość średnia} = \bar{v} = \frac{\text{Przemieszczenie między dwoma punktami}}{\text{Całkowity czas ruchu między dwoma punktami}},$$
$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \tag{3.3}$$

Ważne jest, abyś pamiętał, że średnia prędkość jest wielkością wektorową i może być ujemna (skierowana przeciwnie do wybranej osi), w zależności od wartości położeń x_1 i x_2. Oznaczenie $\bar{v}$, którego używamy, odnosi się jedynie do prędkości średniej (wektora i jego wartości).

Przykład 3.1

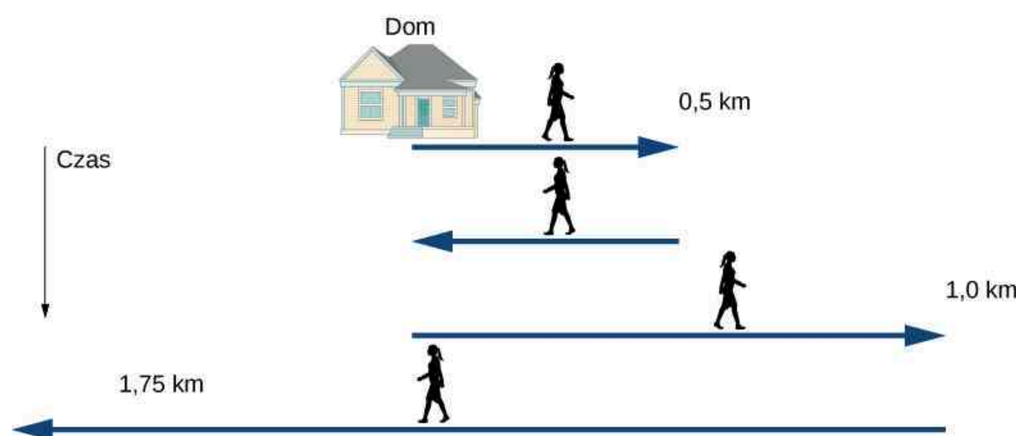
Roznoszenie ulotek

Monika roznosi ulotki z informacjami o organizowanym przez nią kiermaszu książek. Wyrusza ze swojego

domu i wrzuca ulotki do skrzynek na listy swoich sąsiadów, których domy stoją wzdłuż długiej, prostej ulicy, ale po pokonaniu 0,5 km w ciągu 9 min rozdaje wszystkie ulotki, które zabrała. Wraca więc do domu po kolejną partię, co zajmuje kolejne 9 min. Kontynuuje roznoszenie od miejsca, gdzie skończyła, i po 15 min dociera do punktu oddalonego o 1,0 km od jej domu. W drodze powrotnej mija dom i kieruje się do parku. Ten ostatni odcinek o długości 1,75 km pokonuje w 25 min.

a. Jakie jest całkowite przemieszczenie Moniki od domu do parku?
b. Jaka jest długość całkowitego przemieszczenia?
c. Jaki jest wektor prędkości średniej Moniki?
d. Jaką całkowitą drogę pokonała Monika?
e. Jak wygląda wykres położenia Moniki w funkcji czasu?

Szkic wszystkich etapów ruchu Moniki znajdziesz na Rysunku 3.4.



Rysunek 3.4 Szkic ruchów Moniki podczas roznoszenia ulotek.

Strategia rozwiązania

Ruch Moniki jest wieloetapowy, dlatego wygodnie będzie zebrać informacje o istotnych wielkościach fizycznych na każdym etapie w formie tabeli. Znamy czas i położenie po każdym etapie, więc łatwo znajdziemy przemieszczenie i czas trwania kolejnych etapów. Na podstawie tych informacji wyznaczymy całkowite przemieszczenie i prędkość średnią. Kierunek w prawo przyjmiemy za dodatni. Dom Moniki będzie punktem początkowym x_0. Spójrzmy na poniższą tabelę.

Czas t_i (min)	Położenie x_i (km)	Przemieszczenie Δx_i (km)
$t_0 = 0$	$x_0 = 0$	$\Delta x_0 = 0$
$t_1 = 9$	$x_1 = 0{,}5$	$\Delta x_1 = x_1 - x_0 = 0{,}5$
$t_2 = 18$	$x_2 = 0$	$\Delta x_2 = x_2 - x_1 = -0{,}5$
$t_3 = 33$	$x_3 = 1{,}0$	$\Delta x_3 = x_3 - x_2 = 1{,}0$
$t_4 = 58$	$x_4 = -0{,}75$	$\Delta x_4 = x_4 - x_3 = -1{,}75$

Rozwiązanie

a. Na podstawie danych zebranych w powyższej tabeli obliczamy całkowite przemieszczenie

$$\sum_i \Delta x_i = 0{,}5\,\text{km} - 0{,}5\,\text{km} + 1{,}0\,\text{km} - 1{,}75\,\text{km} = -0{,}75\,\text{km}.$$

b. Długość całkowitego przemieszczenia wynosi $|-0{,}75\,\text{km}| = 0{,}75\,\text{km}$.

c. $\text{Prędkość średnia} = \frac{\text{Całkowite przemieszczenie}}{\text{Całkowity czas}} = \bar{v} = \frac{-0{,}75 \text{ km}}{58 \text{ min}} = -0{,}013 \frac{\text{km}}{\text{min}}$.

d. Całkowita droga pokonana przez Monikę (suma wartości bezwzględnych poszczególnych przemieszczeń) wynosi $s_{\text{całk}} = \sum_i |\Delta x_i| = 0{,}5 \text{ km} + 0{,}5 \text{ km} + 1{,}0 \text{ km} + 1{,}75 \text{ km} = 3{,}75 \text{ km}$.

e. Wykres zależności położenia Moniki w funkcji czasu jest przydatnym narzędziem do analizy jej ruchu. Przedstawiamy go na Rysunku 3.5.



Rysunek 3.5 Ten wykres przedstawia położenie Moniki w funkcji czasu. Średnią prędkość znajdziemy jako nachylenie prostej łączącej punkt początkowy z punktem końcowym.

Znaczenie

Całkowite przemieszczenie Moniki wynosi −0,75 km, co oznacza, że koniec jej wędrówki znajduje się w odległości 0,75 km od jej domu po lewej stronie (przeciwnie do kierunku roznoszenia ulotek). Prędkość średnią możemy rozumieć tak, że gdyby ktoś wyruszył spod domu Moniki w tym samym momencie co ona i szedł w kierunku parku (w lewo) ze stałą prędkością o wartości 0,013 km/min, to dotarłby do parku dokładnie w tym samym momencie co Monika, która po drodze przemierzyła wiele kilometrów. Zwróć uwagę, że gdyby Monika skończyła swoją wędrówkę w domu, to zarówno całkowite przemieszczenie, jak i prędkość średnia byłyby równe zero. Po drugie, całkowita droga, jaką pokonała Monika, to aż 3,75 km, podczas gdy długość przemieszczenia całkowitego wynosi tylko 0,75 km.

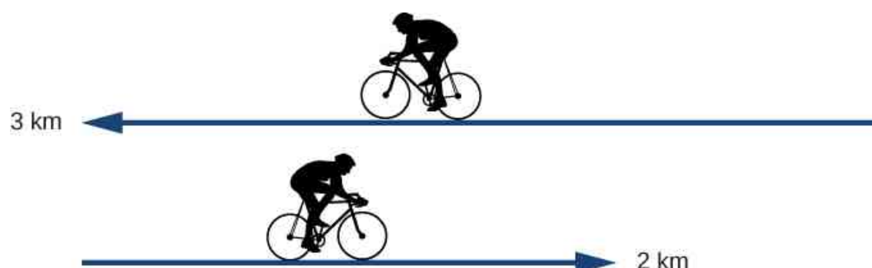


3.1 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Kolarz jedzie przez 3 km na zachód, a następnie zawraca i jedzie na wschód przez 2 km.

a. Jakie jest jego przemieszczenie?

b. Jaką drogę pokonał?

c. Jaka jest wartość przemieszczenia kolarza?



3.2 | Prędkość chwilowa i szybkość średnia

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- wyjaśniać różnicę między prędkością średnią a prędkością chwilową;
- opisywać różnice między szybkością a prędkością;
- obliczać prędkość chwilową, znając zależność położenia od czasu;
- obliczać szybkość, znając prędkość chwilową;
- obliczać szybkość średnią.

Do tej pory nauczyliśmy się, jak obliczać prędkość średnią ciała w ruchu od punktu początkowego do punktu końcowego. W rzeczywistych przypadkach fizycznych ciała najczęściej poruszają się w sposób ciągły, dlatego bardziej interesująca byłaby informacja o aktualnej prędkości ciała w danej chwili czasu i w danym punkcie jego ruchu. Potrafimy znaleźć prędkość ciała w dowolnym punkcie jego toru ruchu, używając do tego podstaw rachunku różniczkowego. Wiedza zawarta w tej sekcji rozdziału 3 jest bardzo ważna do lepszego zrozumienia kinematyki ruchu i będzie bardzo przydatna w dalszych częściach podręcznika.

Prędkość chwilowa

Wielkość mówiąca o tym, jak szybko ciało porusza się wzdłuż swojego toru ruchu w danym momencie, nazywa się **prędkością chwilową** (często po prostu prędkością). Jest to średnia prędkość ciała między dwoma punktami jego toru, ale w granicy, gdy czas i – w konsekwencji – przemieszczenie ciała między tymi punktami zmierzają do zera. Mówimy, że są nieskończenie małe lub infinitezymalne. Aby wyrazić powyższe stwierdzenie w sposób bardziej zmatematyzowany, musimy znać zależność położenia x od czasu t, a więc ciągłą funkcję $x(t)$. Przypomnijmy sobie wyrażenie na prędkość średnią między dwoma punktami: $\overline{v} = [x(t_2) - x(t_1)] / [t_2 - t_1]$. Żeby znaleźć wzór na prędkość chwilową, podstawimy $t_1 = t$ oraz $t_2 = t + \Delta t$ i zażądamy, aby $\Delta t \to 0$. Oznacza to, że przyrost czasu i zmiana położenia mają w granicy (łac. **limes**) zdążać do zera. W takim razie definicja prędkości chwilowej, ujęta w postaci wzoru matematycznego, jest następująca:

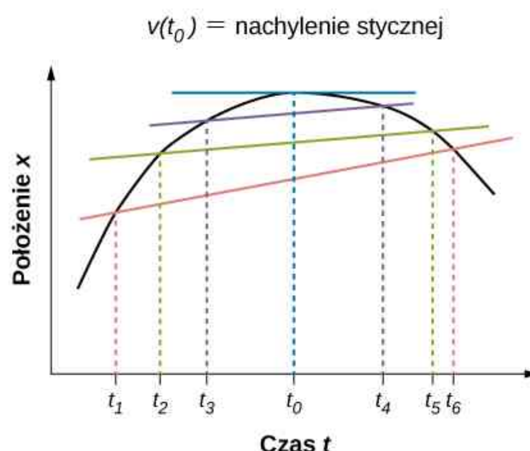
$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Prędkość chwilowa

Prędkość chwilowa jest równa prędkości średniej w granicy czasu zdążającego do zera lub, równoważnie, jest to pochodna położenia x po czasie t. Czasem mówimy także, że prędkość (chwilowa) jest zmianą położenia w czasie.

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t). \quad (3.4)$$

Podobnie jak prędkość średnia, także i prędkość chwilowa jest wektorem o wymiarze metr na sekundę (m/s). Prędkość w pewnej chwili czasu t_0 jest tempem (szybkością) zmian funkcji położenia od czasu. Interpretacja geometryczna pochodnej pomaga nam dodatkowo zauważyć, że prędkość jest miarą nachylenia funkcji położenia od czasu $x(t)$ w punkcie t_0. Wykres przedstawiony na Rysunku 3.6 pokazuje, jak prędkość średnia $\overline{v} = \Delta x / \Delta t$ między dwiema chwilami zmierza do prędkości chwilowej w momencie t_0, gdy Δt dąży do zera. Prędkość chwilowa jest zaznaczona prostą przechodzącą przez punkt t_0, która jest styczną do krzywej $x(t)$ w punkcie t_0. W tym konkretnym przypadku ta styczna ma zerowe nachylenie do osi poziomej, a więc wyznacza maksimum krzywej $x(t)$. Prędkość chwilowa w tym momencie jest więc zero. W innych punktach, np. t_1, t_2 lub kolejnych, prędkość chwilowa jest różna od zera, bo nachylenia stycznych są niezerowe. Prędkości w tych punktach są dodatnie lub ujemne. Gdyby w punkcie t_0 krzywa miała minimum, to prędkość chwilowa także byłaby zero. Z tego wynika ciekawy wniosek, że prędkość chwilowa jest zero w punktach, gdzie funkcja położenia ma ekstremum (minimum lub maksimum).

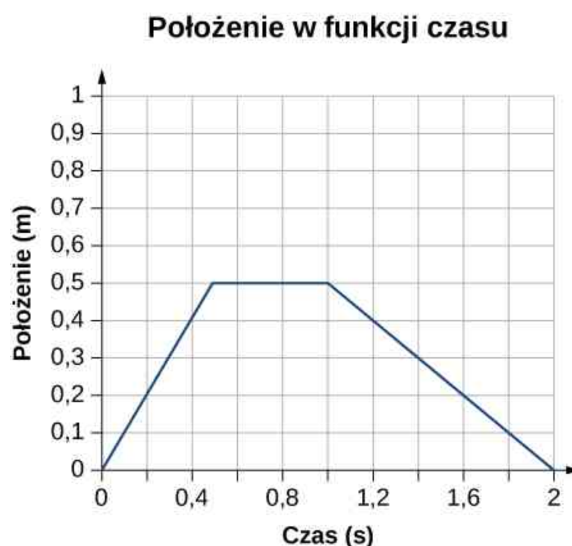


Rysunek 3.6 Na wykresie zależności położenia od czasu prędkość chwilowa jest nachyleniem stycznej do wykresu w danym punkcie. Prędkości średnie $\overline{v} = \Delta x/\Delta t = \left(x_{\text{k}} - x_{\text{p}}\right)/\left(t_{\text{k}} - t_{\text{p}}\right)$ między chwilami $\Delta t' = t_6 - t_1$, $\Delta t'' = t_5 - t_2$ oraz $\Delta t''' = t_4 - t_3$ są zaznaczone różnymi kolorami. W granicy $\Delta t \rightarrow 0$ prędkości średnie stają się prędkością chwilową w $t = t_0$.

Przykład 3.2

Obliczanie prędkości na podstawie wykresu zależności położenia od czasu

Na podstawie wykresu zależności położenia od czasu, Rysunek 3.7, stwórz wykres zależności prędkości od czasu.



Rysunek 3.7 Ciało porusza się w kierunku dodatnim, potem zatrzymuje się, by zawrócić i zatrzymać się w punkcie początkowym. (Zwróć uwagę, że powyższy wykres może być jedynie przybliżeniem rzeczywistego przypadku ruchu ciała. Zauważ, że ciało zatrzymuje się natychmiastowo – w miejscu – co w rzeczywistości wymagałoby użycia nieskończenie dużej siły. Pojęcie sił i ich wpływu na ruch dyskutujemy w rozdziale Zasady dynamiki Newtona.)

Strategia rozwiązania

Wykres składa się z trzech prostych odcinków w trzech przedziałach czasu. Dla każdego z nich znajdziemy prędkość jako nachylenie prostoliniowych odcinków, zmierzone za pomocą siatki.

Rozwiązanie

Przedział czasu od 0 s do 0,5 s: $\bar{v} = \Delta x / \Delta t = (0{,}5\ \text{m} - 0{,}0\ \text{m}) \ / \ (0{,}5\ \text{s} - 0{,}0\ \text{s}) = 1{,}0\ \text{m/s}$

Przedział czasu od 0,5 s do 1,0 s: $\bar{v} = \Delta x / \Delta t = (0{,}5\ \text{m} - 0{,}5\ \text{m}) \ / \ (1{,}0\ \text{s} - 0{,}5\ \text{s}) = 0{,}0\ \text{m/s}$

Przedział czasu od 1,0 s do 2,0 s: $\bar{v} = \Delta x / \Delta t = (0{,}0\ \text{m} - 0{,}5\ \text{m}) \ / \ (2{,}0\ \text{s} - 1{,}0\ \text{s}) = -0{,}5\ \text{m/s}$

Wyniki nanosimy na wykres zależności prędkości od czasu – Rysunek 3.8.



Rysunek 3.8 Prędkość jest dodatnia w pierwszej fazie ruchu. Gdy ciało się zatrzymuje – spada do zera, a w ruchu z powrotem – jest ujemna.

Znaczenie

W przedziale czasu między 0 s a 5,0 s ciało oddala się od początku układu współrzędnych, przez co nachylenie położenia w funkcji czasu jest dodatnie. Oznacza to, że prędkość jest na tym odcinku dodatnia. W dowolnej chwili czasu z tego przedziału nachylenie położenia jest dodatnie i równe +1 m/s, co widać na Rysunku 3.8. W kolejnym przedziale czasu, między 0,5 s a 1,0 s, położenie się nie zmienia i nachylenie wynosi zero. Od 1,0 s do 2,0 s ciało porusza się do tyłu, w stronę początku układu współrzędnych, przez co nachylenie jest –0,5 m/s. Ciało ma wtedy odwrotny kierunek ruchu oraz ujemną prędkość.

Szybkość i szybkość średnia

W codziennym życiu nie rozróżniamy pojęć **prędkość** oraz **szybkość** i używamy ich naprzemiennie. W fizyce jednak nie są to te same wielkości i znacząco się różnią. Prędkość jest wektorem, który poznaliśmy już przed chwilą. Ma kierunek, zwrot i wartość. Szybkość natomiast jest skalarem, nie ma kierunku ani zwrotu. W zadaniach będziemy najczęściej myśleć o wektorze, mówiąc prędkość, chociaż sformułowanie „samochód jedzie na wschód z prędkością 100 km/h” rozumiemy oczywiście jak „z prędkością o wartości 100 km/h i kierunku na wschód”.

Szybkość średnią definiujemy jako stosunek całkowitej drogi i całkowitego czasu, w którym ta droga została pokonana:

$$\text{Szybkość średnia} = v_{\text{śr}} = \frac{\text{Całkowita droga}}{\text{Całkowity czas}} = \frac{s_{\text{całk}}}{t_{\text{całk}}}. \tag{3.5}$$

Szybkość średnia niekoniecznie jest równa wartości prędkości średniej, którą liczymy jako iloraz długości całkowitego przemieszczenia i całkowitego czasu. Jeśli np. podróż zaczyna się i kończy w tym samym punkcie, to całkowite przemieszczenie ma wartość zero, a więc i prędkość średnia ma zerową wartość. Szybkość średnia w tej podróży jednak nie jest zero, bo całkowita droga w tej podróży jest niezerowa, może być nawet bardzo duża. Jeżeli chcielibyśmy wyruszyć w drogę do celu oddalonego o 300 km, gdzie chcemy dotrzeć na konkretną godzinę, to będziemy oczywiście zainteresowani szybkością średnią w naszym ruchu.

Jednocześnie zawsze możemy policzyć **(chwilową) szybkość** jako długość prędkości chwilowej:

$$\text{Szybkość} = |v(t)|\ . \tag{3.6}$$

Jeśli jedna cząstka porusza się wzdłuż osi x z prędkością +7,0 m/s, a druga cząstka porusza się względem tej samej osi z prędkością −7,0 m/s, to obie cząstki mają różne prędkości, ale tę samą szybkość równą 7,0 m/s. W tabeli poniżej prezentujemy typowe szybkości niektórych ciał i zjawisk.

Szybkość	m/s	km/h
Wędrówka kontynentów	10^{-7}	$3{,}6 \cdot 10^{-7}$
Energiczny marsz	1,7	6,0
Rowerzysta	5	18
Bieg sprinterski	12,1	43,6
Ograniczenie prędkości poza obszarem zabudowanym	25	90
Oficjalny rekord szybkości na powierzchni Ziemi	341,1	1 228
Szybkość dźwięku na poziomie morza w warunkach normalnych*	343,2	1 235,2
Statek kosmiczny podczas wejścia w atmosferę	7 800	28 080
Prędkość ucieczki z Ziemi**	11 200	40 320
Średnia szybkość Ziemi na orbicie wokół Słońca	29 783	107 218,8
Prędkość światła w próżni	299 792 458	2 414 219 864,4

Tabela 3.1 Przykładowe szybkości różnych obiektów i zjawisk
* Warunki normalne oznaczają temperaturę 20° i ciśnienie 1013,25 hPa.
** Prędkość ucieczki to taka prędkość, jaką należy nadać ciału, aby opuściło ono pole grawitacyjne Ziemi i już nie wróciło na jej powierzchnię.

Obliczanie prędkości chwilowej

Żeby obliczyć prędkość chwilową w danej chwili czasu, a także ogólną zależność prędkości od czasu, trzeba znać dokładną funkcję zależności położenia od czasu $x(t)$. Prędkość chwilowa jest pochodną położenia po czasie. Na razie skupimy się na postaci funkcji położenia od czasu typu wielomianu: $x(t) = At^n$, bo jest to funkcja stosunkowo łatwa do różniczkowania.

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = nAt^{n-1}\ . \tag{3.7}$$

Przykład poniżej ilustruje, jak korzystać z Równania 3.7.

Przykład 3.3

Prędkość chwilowa a prędkość średnia

Położenie cząstki dane jest funkcją $x(t) = \left(3{,}0t + 0{,}5t^3\right)\ \text{m}$.

a. Korzystając z Równania 3.4 i Równania 3.7, oblicz szybkość średnią w chwili $t = 2{,}0\ \text{s}$.
b. Oblicz prędkość średnią cząstki pomiędzy chwilą 1,0 s oraz 3,0 s.

Strategia rozwiązania

Równanie 3.4 pozwala obliczyć prędkość chwilową jako pochodną położenia po czasie. Zależność położenia od czasu jest, jak widzimy, funkcją wielomianową argumentu t. Dlatego użyjemy Równania 3.7 na pochodną wielomianu, aby znaleźć rozwiązanie. Równania 3.6 z poprzedniej sekcji użyjemy do obliczenia prędkości średniej.

Rozwiązanie

a. $v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \left(3{,}0 + 1{,}5t^2\right)\ \mathrm{m/s}$.
   Podstawiając $t = 2{,}0\ \mathrm{s}$ do tego równania otrzymujemy:
   $v(2{,}0\ \mathrm{s}) = \left[3{,}0 + 1{,}5 \cdot (2{,}0)^2\right]\ \mathrm{m/s} = 9{,}0\ \mathrm{m/s}$.

b. Żeby obliczyć prędkość średnią cząstki między chwilą 1,0 s i 3,0 s, musimy znaleźć wartości $x(1{,}0\ \mathrm{s})$ oraz $x(3{,}0\ \mathrm{s})$:

$$x(1{,}0\ \mathrm{s}) = \left[3{,}0 \cdot 1{,}0 + 0{,}5 \cdot (1{,}0)^3\right]\ \mathrm{m} = 3{,}5\ \mathrm{m},$$

$$x(3{,}0\ \mathrm{s}) = \left[3{,}0 \cdot 3{,}0 + 0{,}5 \cdot (3{,}0)^3\right]\ \mathrm{m} = 22{,}5\ \mathrm{m}.$$

   Wobec tego prędkość średnia wynosi

$$\bar{v} = \frac{x(3{,}0\ \mathrm{s}) - x(1{,}0\ \mathrm{s})}{3{,}0\ \mathrm{s} - 1{,}0\ \mathrm{s}} = \frac{22{,}5\ \mathrm{m} - 3{,}5\ \mathrm{m}}{3{,}0\ \mathrm{s} - 1{,}0\ \mathrm{s}} = 9{,}5\ \mathrm{m/s}.$$

Znaczenie

W granicy przedziału czasu, potrzebnego do obliczenia $\bar{v}$, zmierzającego do zera, wartość prędkości średniej $\bar{v}$ zbiega się coraz bardziej z wartością prędkości chwilowej v.

Przykład 3.4

Prędkość chwilowa a szybkość

Rozważmy teraz ruch cząstki, w którym zależność położenia od czasu wynosi $x(t) = \left(3{,}0t - 3{,}0t^2\right)\ \mathrm{m}$.

a. Jaka jest prędkość cząstki w chwilach $t = 0{,}25\ \mathrm{s}$, $t = 0{,}50\ \mathrm{s}$ oraz $t = 1{,}0\ \mathrm{s}$?
b. Jaka jest szybkość cząstki w tych chwilach?

Strategia rozwiązania

Prędkość chwilowa jest pochodną położenia po czasie, natomiast szybkość to wartość prędkości. Użyjemy Równania 3.4 i Równania 3.7 do obliczenia prędkości chwilowej.

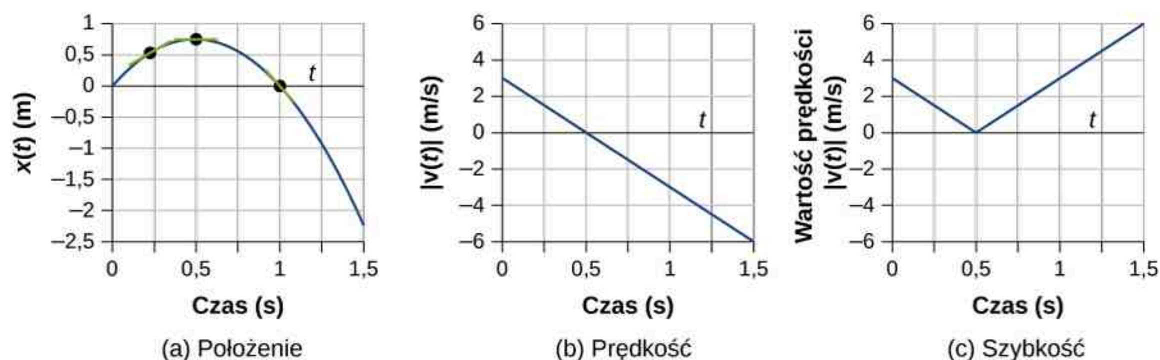
Rozwiązanie

a. $v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = (3{,}0 - 6{,}0t)\ \mathrm{m/s}$,
   $v(0{,}25\ \mathrm{s}) = 1{,}50\ \mathrm{m/s}$, $v(0{,}5\ \mathrm{s}) = 0{,}0\ \mathrm{m/s}$, $v(1{,}0\ \mathrm{s}) = -3{,}0\ \mathrm{m/s}$.
b. Szybkość $= |v(t)|$, stąd $|v(0{,}25\ \mathrm{s})| = 1{,}50\ \mathrm{m/s}$, $|v(0{,}50\ \mathrm{s})| = 0{,}0\ \mathrm{m/s}$ oraz $|v(1{,}0\ \mathrm{s})| = 3{,}0\ \mathrm{m/s}$.

Znaczenie

Prędkość jest wektorem i daje nam informację o kierunku, wskazując, czy cząstka porusza się w kierunku dodatnim lub kierunku ujemnym względem osi. Szybkość daje informację o prędkości. Lepiej zrozumiemy różnice między tymi wielkościami (położenie, prędkość i szybkość), rysując wykresy zależności od czasu (Rysunek 3.9). Na wykresie (a) widzimy, że cząstka porusza się wzdłuż dodatniego kierunku osi do chwili $t = 0{,}5\ \mathrm{s}$, po czym zmienia kierunek ruchu. Tę zmianę kierunku zauważamy też na wykresie (b), gdzie w chwili równej 0,5 s wykres prędkości cząstki przechodzi przez zero a następnie wartości prędkości stają się ujemne. Po czasie równym 1,0 s cząstka dociera z powrotem do miejsca, z którego wystartowała. Prędkość cząstki w chwili 1,0 s jest nadal ujemna, bo cząstka dalej porusza się wzdłuż ujemnego kierunku osi x. Z

kolei na wykresie (c) wartości są zawsze dodatnie – szybkość jest zawsze nieujemna w całym czasie trwania ruchu. Na podstawie rysunków możemy też zinterpretować prędkość jako nachylenie krzywej położenia w funkcji czasu. Nachylenie $x(t)$ do momentu 5,0 s jest dodatnie, ale maleje do zera. Potem rośnie, ale po stronie ujemnych wartości. Taka analiza porównawcza wykresów położenia, prędkości i szybkości w funkcji czasu, jak powyższa, pomaga wychwycić ewentualne błędy w naszych obliczeniach. Wykresy muszą być spójne ze sobą, a gdy są poprawne, pomagają w interpretacji wyników.



Rysunek 3.9 (a) Wykres położenia w funkcji czasu $x(t)$. (b) Wykres prędkości w funkcji czasu $v(t)$. Nachylenie funkcji położenia daje informację o prędkości. Pobieżne porównanie nachylenia stycznych na wykresie (a) w punktach 0,25 s, 0,5 s i 1,0 s z wielkością prędkości, w odpowiednich chwilach czasu wskazuje na poprawność naszych wyników. (c) Zależność szybkości od czasu $|v(t)|$. Szybkość ma zawsze wartości nieujemne (dodatnie lub zero).


3.2 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Położenie ciała w funkcji czasu wynosi $x(t) = -3t^2$ m.

a. Jaką funkcją czasu jest prędkość cząstki?
b. Czy prędkość jest zawsze dodatnia?
c. Jakie są prędkość i szybkość w chwili $t = 1{,}0$ s?

3.3 | Przyspieszenie średnie i chwilowe

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- obliczać średnie przyspieszenie w ruchu między dwoma punktami;
- znajdować przyspieszenie chwilowe, mając funkcję zależności prędkości od czasu;
- wyjaśniać wektorowy charakter chwilowej prędkości i przyspieszenia;
- wyjaśniać różnice między przyspieszeniem chwilowym a średnim;
- znajdować przyspieszenie chwilowe w danym momencie na podstawie wykresu zależności prędkości od czasu.

Zagadnienie przyspieszenia dotyczy zarówno naszego życia codziennego, jak i szerokiego spektrum zjawisk w przestrzeni kosmicznej, czy mikroświata w skali subatomowej. W rozumieniu potocznym **przyspieszać** oznacza rozpędzać się, zwiększać szybkość. Doskonale to rozumiemy podczas jazdy samochodem. Przyspieszamy przy wciskaniu pedału gazu, z drugiej strony, gdy wciskamy pedał hamulca – zwalniamy, hamujemy, co też jest związane z pojęciem przyspieszenia. Im większe jest przyspieszenie, tym większa jest zmiana prędkości w danym przedziale czasu. Przyspieszenie jest powszechnym zjawiskiem w fizyce eksperymentalnej. W eksperymentach zderzeń cząstek elementarnych, z użyciem na przykład liniowego akceleratora, są one rozpędzane do olbrzymich prędkości i zderzane ze sobą. Wyniki zderzeń są badane i dostarczają informacji np. o budowie świata subatomowego lub początkach Wszechświata. Promieniowanie kosmiczne rozchodzące się w przestrzeni jest także złożone z cząstek przyspieszonych do wielkich energii we wnętrzu supernowych (wybuchające olbrzymie gwiazdy) lub w aktywnych jądrach galaktyk. Z punktu

widzenia techniki ważne jest poznanie mechanizmów przyspieszania takich cząstek, aby móc konstruować osłony antyradiacyjne w statkach kosmicznych, które będą chronić ludzi i elektronikę przed wysoce przenikliwym promieniowaniem.

Przyspieszenie średnie

Formalna definicja przyspieszenia jest zbieżna z określeniami, które podaliśmy wyżej. Ujmijmy ją jednak w sposób matematyczny.

Przyspieszenie średnie

Przyspieszenie średnie jest zmianą wektora prędkości w pewnym przedziale czasu. W ruchu po linii prostej zapiszemy

$$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{\mathrm{k}} - v_0}{t_{\mathrm{k}} - t_0}, \tag{3.8}$$

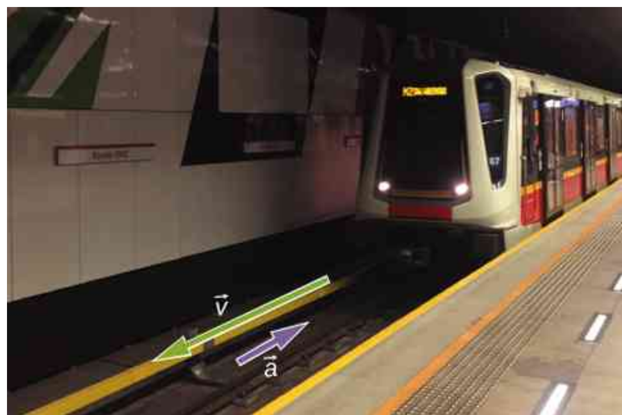
gdzie $\overline{a}$ jest **wektorem przyspieszenia średniego**, v jest wektorem prędkości, natomiast t jest czasem (kreska nad a jest oznaczeniem średniego przyspieszenia).

Ponieważ przyspieszenie jest prędkością wyrażoną w jednostkach metr na sekundę, podzieloną przez czas, w sekundach, to jednostką przyspieszenia w układzie SI jest metr na sekundę do kwadratu: $\mathrm{m/s^2}$. Dosłownie możemy rozumieć przyspieszenie jako miarę tego, o ile metrów na sekundę prędkość zmienia się w ciągu każdej sekundy. Przypomnij sobie, że prędkość jest wektorem – ma wartość oraz kierunek i zwrot. Zatem zmiana prędkości może oznaczać zmianę wartości prędkości (szybkości), ale też zmianę kierunku i zwrotu. Przykładowo, biegacz, który z szybkością 10 km/h biegnie na wschód, następnie zwalnia, zatrzymuje się i rusza w przeciwną stronę (na zachód) z szybkością również 10 km/h, doznał zmiany prędkości, mimo że wartość prędkości się nie zmieniła – w obu kierunkach jest taka sama. Zatem przyspieszenie występuje wtedy, gdy zmianie ulega wartość (zwiększa się lub zmniejsza) lub kierunek i zwrot prędkości, albo gdy wszystkie zmieniają się jednocześnie.

Przyspieszenie jako wektor

Przyspieszenie jest wektorem, którego kierunek jest równoległy do kierunku zmiany wektora prędkości Δv. Ponieważ prędkość jest wektorem, może zmieniać się jej wartość lub kierunek i zwrot lub wszystkie naraz. W takim razie przyspieszenie jest zmianą wartości i/lub kierunku prędkości w czasie.

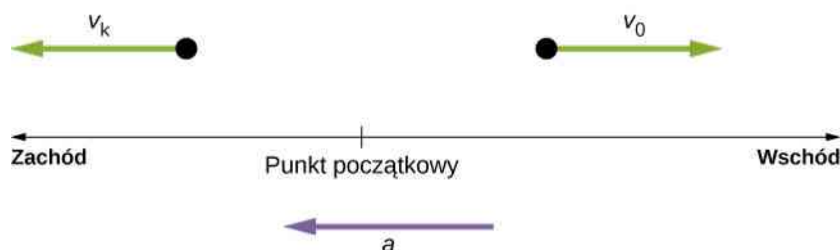
Pamiętaj, że chociaż przyspieszenie ma kierunek zmiany prędkości, to nie zawsze jest zwrócone w kierunku ruchu. Gdy ciało hamuje w ruchu prostoliniowym, wektor przyspieszenia jest przeciwny do kierunku, w którym ciało się porusza. Takie przyspieszenie (o zwrocie przeciwnym do wektora prędkości, przeciwnie do ruchu) nazywamy często **opóźnieniem** – patrz Rysunek 3.10. Rozumiemy je jednak jako przyspieszenie o zwrocie przeciwnym do kierunku ruchu, albo także jako ujemne przyspieszenie (piszemy jego wartość ze znakiem minus).



Rysunek 3.10 Pociąg metra w Warszawie zwalnia, gdy wjeżdża na stację. Jego przyspieszenie jest zwrócone przeciwnie do kierunku ruchu.

Wyrażenie opóźnienie może powodować wiele nieporozumień – nie jest to wektor i nie ma kierunku ani zwrotu względem wybranego układu współrzędnych – dlatego raczej nie będziemy go używać w naszej analizie, chyba że w klarownych sytuacjach. Przyspieszenie jest wektorem i względem osi układu współrzędnych może mieć dodatni lub ujemny znak, zależnie od naszego wyboru zwrotu osi. W przypadku pociągu na Rysunku 3.10 przyspieszenie ma *przeciwny zwrot niż oś wybranego układu współrzędnych*, dlatego powiemy, że pociąg doznaje ujemnego przyspieszenia.

Jeżeli ciało będące w ruchu ma prędkość, której zwrot jest zgodny z kierunkiem ruchu ciała oraz doznaje stałego w czasie ujemnego przyspieszenia, to w końcu zatrzyma się i zawróci, a po odpowiednio długim czasie nawet minie z powrotem punkt początkowy – tym razem w ruchu w przeciwnym kierunku. Ilustruje to Rysunek 3.11.



Rysunek 3.11 Ciało poruszające się w prawo doznaje ujemnego przyspieszenia i hamuje, następnie zatrzymuje się i zawraca. Po odpowiednio długim czasie mija z powrotem punkt początkowy poruszając się w lewo.

Przykład 3.5

Obliczanie przyspieszenia średniego: Start konia wyścigowego

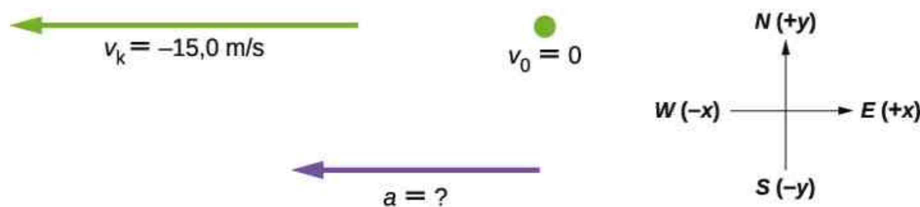
Koń wyścigowy wypuszczony z boksu przyspiesza od zera do 15,0 m/s w czasie 1,80 s. Jakie jest jego średnie przyspieszenie?



Rysunek 3.12 Koń wyścigowy przyspiesza po opuszczeniu bramki startowej.

Strategia rozwiązania

Naszkicujmy najpierw sytuację fizyczną i dokonajmy wyboru układu współrzędnych – Rysunek 3.13. To zadanie jest na tyle proste, że nie musielibyśmy tego robić, ale taka wizualizacja zawsze pomaga w lepszym zrozumieniu problemu i poprawnym rozwiązaniu. Zauważ, że wybraliśmy wschód i północ jako dodatnie kierunki osi układu współrzędnych. W takim układzie prędkość jest ujemna – zakładamy bieg konia w lewo (na zachód).



Rysunek 3.13 Na schemacie wizualizujemy problem fizyczny, dokonujemy wyboru układu współrzędnych i określamy, co jest niewiadomą do wyznaczenia.

Na podstawie danych w zadaniu znajdziemy Δv oraz Δt i dzięki temu policzymy średnie przyspieszenie $\overline{a} = \Delta v / \Delta t = (v_k - v_0) / (t_k - t_0)$.

Rozwiązanie

Wypiszmy najpierw dane podane w treści zadania: $v_0 = 0$, $v_k = -15{,}0\ \text{m/s}$ (ujemny znak oznacza kierunek w lewo, na zachód), $\Delta t = 1{,}80\ \text{s}$.

Teraz obliczmy zmianę prędkości konia. Ponieważ startuje on z prędkością początkową równą zero, to zmiana prędkości jest równa prędkości końcowej:

$$\Delta v = v_k - v_0 = v_k = -15{,}0\ \text{m/s}.$$

Wreszcie możemy podstawić znane wielkości (Δv i Δt) do wzoru na nieznane przyspieszenie $\bar{a}$:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-15{,}0\ \text{m/s}}{1{,}80\ \text{s}} = -8{,}33\ \text{m/s}^2.$$

Znaczenie

Ujemny znak przyspieszenia oznacza, że jest ono skierowane na zachód, w lewo. Jego wartość równa $8{,}33\ \text{m/s}^2$ mówi nam, że koń zwiększa swoją prędkość o 8,33 m/s w ciągu każdej sekundy, stale poruszając się w lewo. Zwróć uwagę, że obliczone przez nas przyspieszenie jest rzeczywiście średnie. Ruch konia nie jest płynny (powiemy: nie jest jednostajnie przyspieszony). Jak się dowiemy w dalszych rozdziałach, przyspieszenie o takiej wartości, działające na jeźdźca, wymagałoby zadziałania na niego siłą równą niemal jego ciężarowi.


3.3 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Protony są przyspieszane w akceleratorze liniowym od zera do $2{,}0 \cdot 10^7\ \text{m/s}$ w czasie $10^{-4}\ \text{s}$. Jakie jest średnie przyspieszenie protonów?

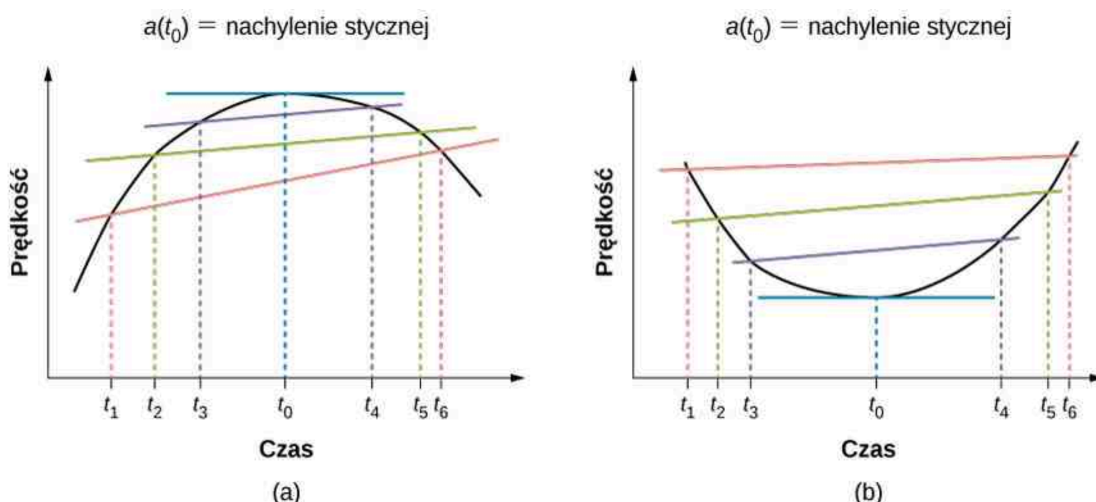
Przyspieszenie chwilowe

Przyspieszenie chwilowe a, inaczej *przyspieszenie w danej chwili czasu*, definiujemy analogicznie do prędkości chwilowej z poprzedniej sekcji. Mianowicie obliczamy średnią prędkość między dwoma punktami odległymi w czasie o Δt i żądamy, by Δt zdążało do zera. W efekcie otrzymujemy pochodną po czasie funkcji prędkości $v(t)$. Właśnie taką wielkość nazywamy **przyspieszeniem chwilowym** i w sposób matematyczny wyrażamy jako

$$a(t) = \frac{\text{d}}{\text{d}t} v(t). \tag{3.9}$$

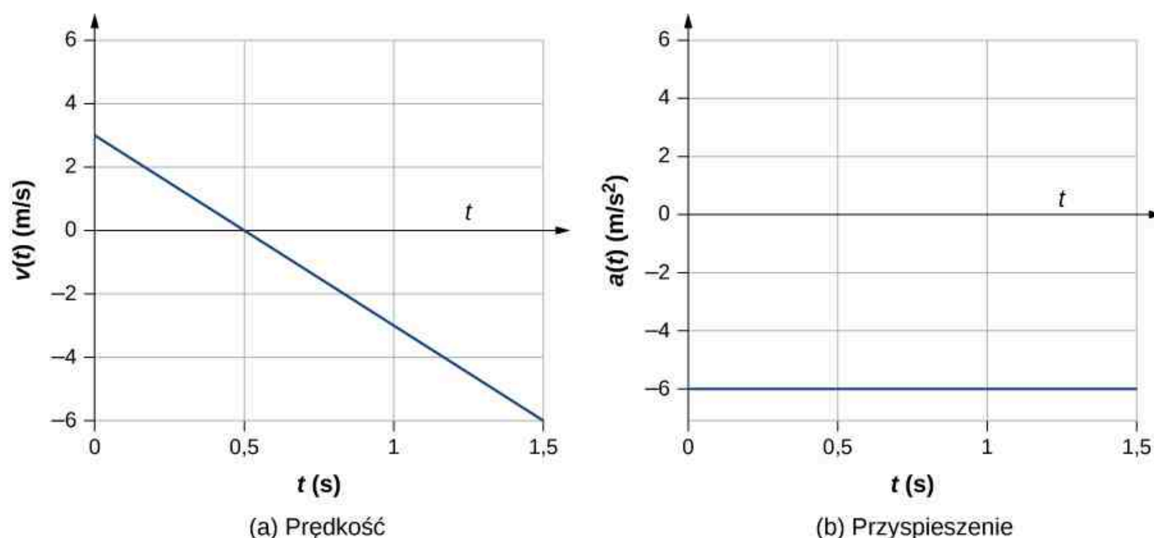
Zatem podobnie jak prędkość jest pochodną położenia po czasie, tak przyspieszenie definiujemy jako pochodną prędkości po czasie. Definicję tę możemy przedstawić graficznie, także w podobny sposób jak poprzednio. Na Rysunku 3.14 przyspieszenie chwilowe w chwili t_0 jest nachyleniem prostej stycznej do wykresu zależności prędkości od czasu w punkcie t_0. Widzimy też, że przyspieszenie średnie $\overline{a} = \Delta v / \Delta t$ staje się przyspieszeniem chwilowym wraz z Δt zmierzającym do zera. W części (a) rysunku widzimy, że przyspieszenie jest zero w punkcie, dla którego krzywa

ma maksimum. Styczna ma w tym punkcie nachylenie równe zero. Także w części (b) widzimy, że styczna ma zerowe nachylenie w minimum. Tam także przyspieszenie wynosi zero. Rozumując odwrotnie, możemy powiedzieć, że zerowe wartości przyspieszenia są wyznacznikiem minimum lub maksimum zależności prędkości od czasu.



Rysunek 3.14 Na wykresie prędkości od czasu przyspieszenie jest nachyleniem stycznej. (a) Przyspieszenia styczne $\overline{a} = \Delta v / \Delta t = (v_{\mathrm{k}} - v_0) / (t_{\mathrm{k}} - t_0)$ w przedziałach czasu $\Delta t = t_6 - t_1$, $\Delta t = t_5 - t_2$ oraz $\Delta t = t_4 - t_3$. Gdy $\Delta t \to 0$, przyspieszenie średnie staje się przyspieszeniem chwilowym w punkcie t_0. Na rysunku (a) pokazano przyspieszenie w chwili odpowiadającej maksimum krzywej prędkości w funkcji czasu. Przyspieszenie, będące współczynnikiem nachylenia stycznej do krzywej, jest w tym punkcie równe zero. W każdym innym punkcie nachylenie stycznej byłoby różne od zera, zatem i przyspieszenie byłoby niezerowe. To samo przedstawiono na rysunku (b), ale dla punktu, w którym krzywa ma minimum.

By lepiej zrozumieć graficzną interpretację przyspieszenia, rozważmy dwa przykłady. W pierwszym odwołamy się do znanej z wcześniejszych przykładów zależności prędkości od czasu (Przykład 3.3), by znaleźć zależność przyspieszenia od czasu. Liniowa zależność prędkości od czasu jest pokazana na Rysunku 3.15(a). Odpowiednia zależność przyspieszenia od czasu została pokazana na Rysunku 3.15(b). W tym prostym przykładzie prędkość w funkcji czasu jest linią prostą o stałym nachyleniu, dlatego przyspieszenie jest stałe. W następnym przykładzie zależność ta będzie bardziej złożona.



Rysunek 3.15 (a, b) Zależność prędkości od czasu jest liniowa i ma stałe, ujemne nachylenie (a), które jest równe przyspieszeniu pokazanemu na rysunku (b).

W przypadku gdy znamy funkcję opisującą zależność prędkości od czasu $v(t)$, możemy obliczyć przyspieszenie chwilowe $a(t)$ w dowolnym momencie ruchu ciała, używając definicji (Równanie 3.9).

Przykład 3.6

Obliczanie przyspieszenia chwilowego

Cząstka przyspiesza w swoim ruchu po prostej. Zależność funkcyjna prędkości od czasu jest następująca $v(t) = \left(20t - 5t^2\right)\ \text{m/s}$.

a. Znajdź ogólny wzór zależności przyspieszenia od czasu.
b. Znajdź prędkości chwilowe w momentach 1, 2, 3 oraz 5 s.
c. Znajdź przyspieszenia chwilowe w momentach 1, 2, 3 oraz 5 s.
d. Zinterpretuj wyniki z punktu (c) w kontekście wzajemnego kierunku wektorów prędkości i przyspieszenia.

Strategia rozwiązania

Zależność funkcyjną przyspieszenia od czasu znajdziemy poprzez różniczkowanie prędkości po czasie. Następnie obliczymy prędkości i przyspieszenia chwilowe w zadanych momentach. W części (d) musimy porównać znaki przyspieszeń i prędkości w kolejnych chwilach.

Rozwiązanie

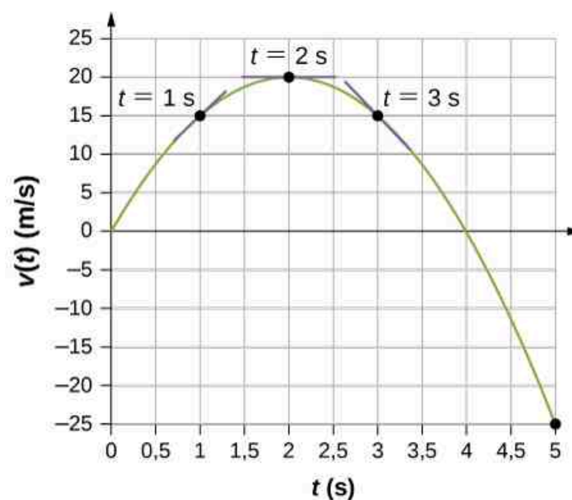
a. $a(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = (20 - 10t)\ \text{m/s}^2$;
b. $v(1\ \text{s}) = 15\ \text{m/s}$, $v(2\ \text{s}) = 20\ \text{m/s}$, $v(3\ \text{s}) = 15\ \text{m/s}$, $v(5\ \text{s}) = -25\ \text{m/s}$;
c. $a(1\ \text{s}) = 10\ \text{m/s}^2$, $a(2\ \text{s}) = 0\ \text{m/s}^2$, $a(3\ \text{s}) = -10\ \text{m/s}^2$, $a(5\ \text{s}) = -30\ \text{m/s}^2$;
d. W chwili $t = 1\ \text{s}$, prędkość $v(1\ \text{s}) = 15\ \text{m/s}$ jest dodatnia i przyspieszenie jest także dodatnie, więc oba wektory są skierowane w tę samą stronę. Cząstka przyspiesza.

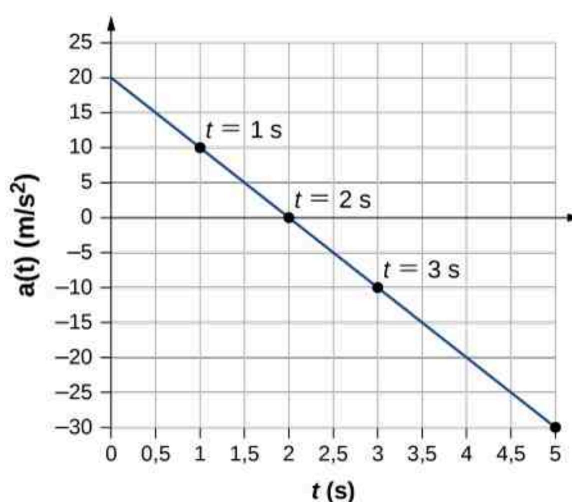
W chwili $t = 2\ \text{s}$ prędkość wzrosła do $v(2\ \text{s}) = 20\ \text{m/s}$, co odpowiada maksimum funkcji prędkości. W tym momencie przyspieszenie jest zerowe. Cząstka przez ten moment nie przyspiesza oraz nie zwalnia.

W chwili $t = 3\ \text{s}$ prędkość wynosi $v(3\ \text{s}) = 15\ \text{m/s}$ oraz przyspieszenie jest ujemne. Prędkość cząstki spadła przy ujemnym przyspieszeniu. Oznacza to, że cząstka zwalnia (hamuje).

W chwili $t = 5\ \text{s}$ prędkość jest równa $v(5\ \text{s}) = -25\ \text{m/s}$, przyspieszenie jest dalej ujemne, ale bardziej niż poprzednio. Pomiędzy chwilami $t = 3\ \text{s}$ oraz $t = 5\ \text{s}$ cząstka zwolniła do zera, a potem zaczęła poruszać się w przeciwną stronę z ujemną prędkością. Teraz cząstka z powrotem przyspiesza, ale w przeciwnym kierunku.

Możemy te wyniki zilustrować na wykresie ukazanym na Rysunek 3.16 i w oparciu o metodę graficzną potwierdzić poprawność naszej analizy w punkcie (d).





Rysunek 3.16 (a) Prędkość w funkcji czasu. Zaznaczono styczne w punktach odpowiadających chwilom 1, 2 i 3 s. Nachylenia prostych stycznych odpowiadają wielkościom przyspieszenia. W chwili $t = 3$ s prędkość jest dodatnia. W $t = 5$ s prędkość jest ujemna, co oznacza, że cząstka zmieniła kierunek ruchu. (b) Przyspieszenie w funkcji czasu. Porównując wartości przyspieszeń w punktach oznaczonych czarnymi kropkami z kątami nachylenia stycznych przechodzących przez odpowiadające punkty na wykresie prędkości widzimy pełną zgodność wyników.

Znaczenie

Dzięki jednoczesnym obliczeniom numerycznym oraz analizom graficznym prędkości i przyspieszenia możemy dowiedzieć się wiele o ruchu cząstki. Analiza numeryczna daje szczegółowe informacje o ruchu, przez co jest dobrym uzupełnieniem analizy graficznej. Miejsce zerowe funkcji przyspieszenia od czasu odpowiada maksimum (w przykładzie powyżej) zależności prędkości od czasu. Gdy przyspieszenie i prędkość mają zgodny zwrot, to cząstka przyspiesza. Gdy przyspieszenie maleje w czasie, zmierza do zera i w końcu zmienia znak, to prędkość osiąga swoje maksimum, po czym zaczyna maleć. Jeśli zaczekamy wystarczająco długo, także i prędkość zmieni znak, co oznacza, że cząstka zmienia kierunek swojego ruchu. Dobrym przykładem z życia sytuacji fizycznej, którą przed chwilą dyskutowaliśmy, mógłby być ruch samochodu, który rozpędza się do swojej prędkości maksymalnej, po czym zwalnia, zatrzymuje się i w końcu zawraca.



3.4 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Samolot ląduje od wschodu na pasie lotniska położonym równoleżnikowo. Scharakteryzuj przyspieszenie samolotu.

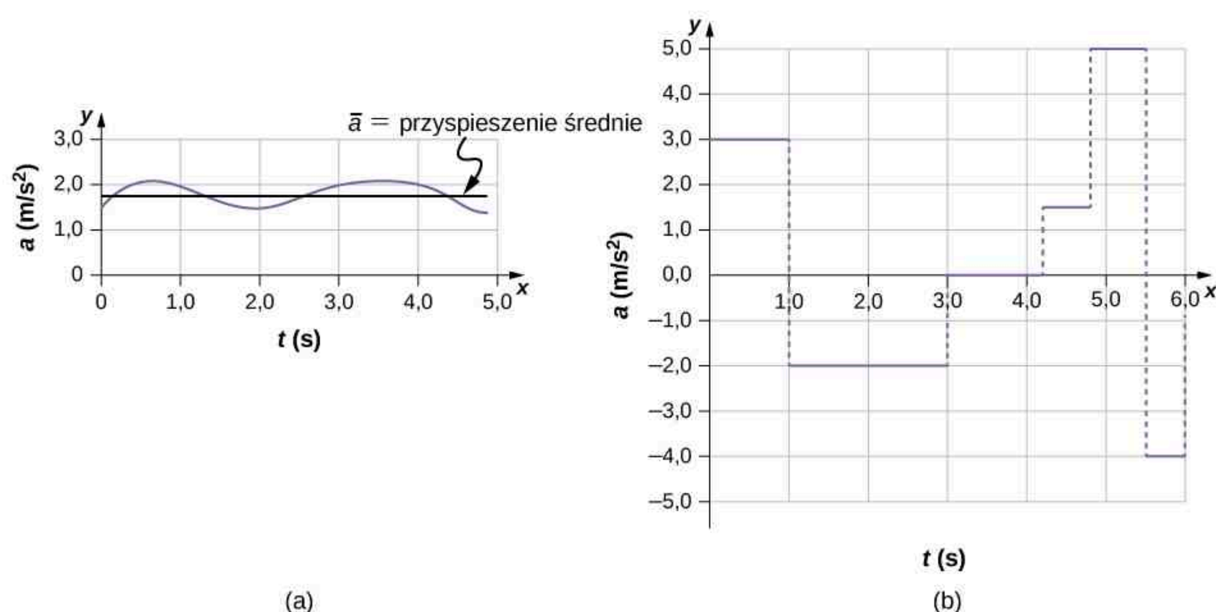
Przyspieszenie wokół ciebie

Prawdopodobnie jest ci bliskie doświadczenie przyspieszenia podczas jazdy samochodem, gdy np. wciskasz pedał hamulca przed światłami, albo w ruszającej do góry windzie. Jednak przyspieszeń doznają także takie obiekty wokół ciebie, z którymi nigdy nie masz bezpośredniego kontaktu. W Tabeli 3.2 zebraliśmy przykładowe wartości przyspieszeń różnych obiektów we Wszechświecie.

Ciało doznające przyspieszenia	Wartość przyspieszenia (m/s^2)
Szybki pociąg	0,25
Winda	2
Gepard	5
Ciało w spadku swobodnym przy powierzchni Ziemi, bez oporów powietrza	9,81
Statek kosmiczny podczas startu	29
Spadochroniarz w momencie otwarcia spadochronu	59
Odrzutowiec F16 wychodzący z nurkowania	79
Katapulta w samolocie myśliwskim	147
Szybki pocisk	982
Największe przyspieszenia wystrzeliwanych pocisków rakietowych	1 540
Skok pchły	3 200
Piłka baseballowa uderzona kijem	30 000
Zamykanie szczęk mrówki *Odontomachus bauri*	1 000 000
Proton w LHC	$1{,}9 \cdot 10^9$

Tabela 3.2 Przykładowe wartości przyspieszenia różnych ciał (Źródło: Wikipedia: Rzędy wielkości przyspieszeń)

W powyższej tabeli widzimy, jak bardzo różnią się wartości przyspieszeń różnych ciał, zupełnie niezależnie od ich wielkości czy masy. Przyspieszenie może też bardzo zmieniać się w trakcie ruchu ciała. Dragster (samochód wyścigowy o olbrzymim przyspieszeniu) osiąga gigantyczne przyspieszenia, ale tylko przez krótką chwilę tuż po starcie, dalej porusza się prawie ze stałą prędkością. Średnie przyspieszenie dragstera może kompletnie różnić się od przyspieszenia chwilowego w różnych momentach wyścigu. Na Rysunku 3.17 porównujemy graficznie przyspieszenie średnie i chwilowe dla dwóch zupełnie odmiennych przypadków fizycznych.



Rysunek 3.17 Wykres zależności przyspieszenia chwilowego od czasu dla dwóch ruchów prostoliniowych. (a) Przyspieszenie tylko nieznacznie zmienia się w czasie, ale zawsze pozostaje dodatnie. Średnie przyspieszenie obliczone dla całego czasu trwania ruchu jest niemal takie samo jak przyspieszenie chwilowe w dowolnym punkcie. (b) Przyspieszenie bardzo zmienia się w czasie. W tej sytuacji konieczne jest rozważanie małych przedziałów czasu (np. 0–1,0 s) o stałym lub niemal stałym przyspieszeniu, aby przyspieszenie średnie odpowiadało przyspieszeniu chwilowemu. Obliczone dla całego przedziału czasu przyspieszenie średnie byłoby niemal równe zero, podczas gdy przyspieszenie chwilowe jest całkiem duże w poszczególnych momentach.


Dowiedz się więcej o wykresach położenia, prędkości i przyspieszenia dzięki zabawie ludzikiem sterowanym za pomocą myszki. Poruszaj ludzikiem do przodu lub do tyłu i obserwuj jak zmienia się jego położenie, prędkość i przyspieszenie na wykresie w funkcji czasu albo zadaj położenie, prędkość i przyspieszenie ludzika, a program wykona dla ciebie symulację ruchu ludzika. Odwiedź stronę (https://openstaxcollege.org/l/21movmansimul) i ucz się dzięki zabawie poruszającym się ludzikiem.

3.4 | Ruch ze stałym przyspieszeniem

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- wybierać odpowiednie równania ruchu do wyznaczenia niewiadomych w danym zagadnieniu;
- używać odpowiednich równań ruchu do analizy zagadnienia pogoni i ucieczki dwóch ciał.

Zapewne odgadłeś, że im większe jest przyspieszenie ciała (np. samochodu ruszającego ze skrzyżowania), tym większe jest jego przemieszczenie w czasie. Jak na razie jednak nie otrzymaliśmy żadnych równań, które wiązałyby ze sobą przemieszczenie czy położenie z przyspieszeniem. W tym podrozdziale wprowadzimy zestaw wygodnych równań do opisu położenia i prędkości ciała poruszającego się ze stałym przyspieszeniem. Nazwiemy je **równaniami ruchu**. Ruch ze stałym przyspieszeniem nazywa się też **ruchem jednostajnie zmiennym** (przyspieszonym lub opóźnionym). Zaczniemy jednak od definicji przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia. Na początku rozważymy prosty przypadek ruchu pojedynczego ciała (zagadnienie jednociałowe), aby na końcu sekcji zająć się także bardziej złożonym ruchem dwóch ciał, nazywanym zagadnieniem **pogoni (pościgu) i ucieczki dwóch ciał.**

Notacja

Zacznijmy od pewnych uproszczeń z zapisie i oznaczeniach. Dużym ułatwieniem będzie, jeśli przyjmiemy czas początkowy równy zero – tak jakbyśmy włączali stoper dopiero w momencie rozpoczęcia obserwacji ruchu. W takim

razie całkowity czas ruchu $\Delta t = t_k - t_0$ jest, wobec przyjętego warunku początkowego $t_0 = 0$, równy $\Delta t = t_k$, czyli końcowemu wskazaniu stopera. Aby oznaczyć początkowe położenie i początkową prędkość, także użyjemy indeksu dolnego 0. W takim razie x_0 będzie *początkowym położeniem*, natomiast v_0 *prędkością początkową*. Do końcowych prędkości i położenia nie będziemy przypisywać żadnego indeksu. Wobec tego t będzie oznaczać *czas końcowy*, x będzie *położeniem końcowym*, a v będzie *prędkością końcową*. Taki wybór dodatkowo uprości oznaczenie całkowitego czasu ruchu $\Delta t = t$, przemieszczenia $\Delta x = x - x_0$ oraz zmiany prędkości $\Delta v = v - v_0$. Podsumowując, jeśli zastosujemy tę uproszczoną notację oraz przyjmiemy czas początkowy równy zero, otrzymamy

$$\Delta t = t,$$
$$\Delta x = x - x_0,$$
$$\Delta v = v - v_0,$$

gdzie indeks dolny 0 oznacza wielkości początkowe (w chwili rozpoczęcia obserwacji), a brak indeksu dolnego oznacza wielkości końcowe (w chwili, gdy chcemy je obliczyć).

Kolejnym ważnym uproszczeniem będzie przyjęcie, że *przyspieszenie jest stałe*. To założenie pozwoli uniknąć nam potrzeby używania rachunku różniczkowego do obliczania przyspieszenia chwilowego. Skoro przyspieszenie jest stałe w czasie, to przyspieszenie średnie jest zawsze równe przyspieszeniu chwilowemu, czyli

$$\bar{a} = a = \text{const}.$$

W takim razie dla oznaczenia przyspieszenia w dowolnej chwili czasu użyjemy po prostu symbolu a. Założenie, że przyspieszenie jest stałe w trakcie ruchu, wcale nie ogranicza spektrum sytuacji fizycznych, które będziemy w stanie opisywać, ani też nie wpłynie na precyzję naszych rachunków. Po pierwsze, w ogromnej ilości przypadków przyspieszenie jest rzeczywiście stałe i nie zmienia się w trakcie ruchu. Po drugie, w wielu pozostałych przypadkach możemy poprawnie opisać ruch, przyjmując, że (stałe) przyspieszenie w danym ruchu jest po prostu równe przyspieszeniu średniemu. Wreszcie w przypadku, gdy przyspieszenie gwałtownie zmienia się w czasie, jak np. podczas przyspieszania i hamowania w celu zatrzymania samochodu, możemy taki ruch traktować jako kilka niezależnych od siebie ruchów, z których każdy zachodzi ze stałym przyspieszeniem.

Przemieszczenie i położenie na podstawie prędkości

Pierwsze dwa równania ruchu otrzymamy, wychodząc od definicji prędkości średniej:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Podstawiając nasze uproszczone definicje Δx oraz Δt, otrzymamy

$$\bar{v} = \frac{x - x_0}{t}.$$

Wyliczamy stąd położenie x w dowolnej chwili czasu

$$x = x_0 + \bar{v}t, \tag{3.10}$$

gdzie prędkość średnia wynosi

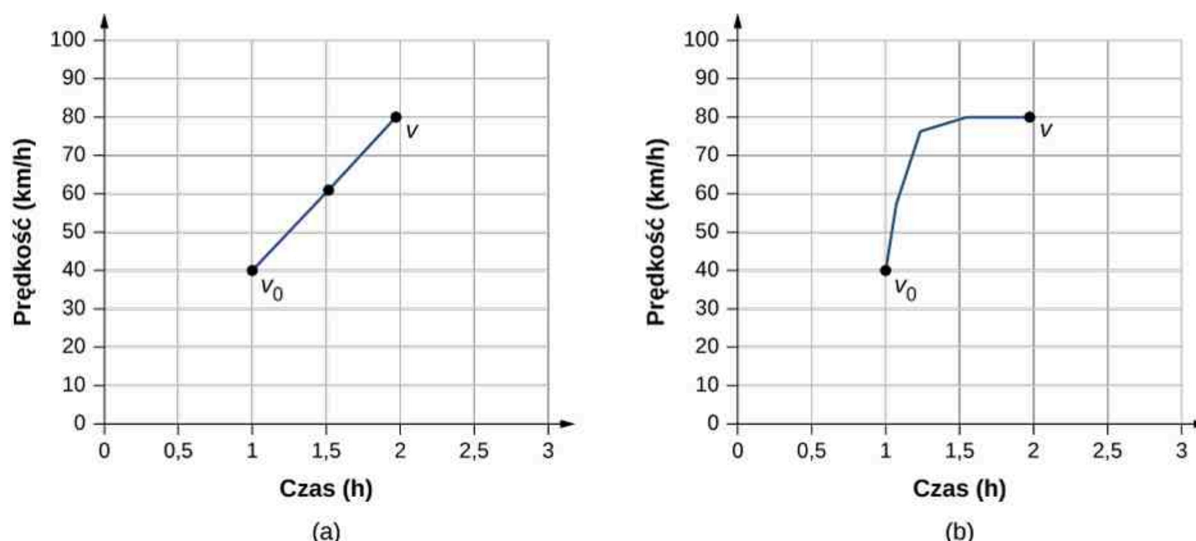
$$\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2}. \tag{3.11}$$

Powyższe dwa równania składają się na pierwsze równanie ruchu jednostajnie zmiennego. Równanie $\bar{v} = (v_0 + v)/2$ wyraża fakt, że skoro przyspieszenie jest stałe, to prędkość średnia jest po prostu średnią arytme-

tyczną prędkości początkowej i końcowej. Fakt ten zilustrowano na Rysunku 3.18. Na wykresie (a) przyspieszenie jest stałe, a więc prędkość rośnie jednostajnie (liniowo) w czasie. Prędkość średnia w 1-godzinnym przedziale czasu, od wartości 40 km/h do 80 km/h, wynosi 60 km/h, co jest średnią arytmetyczną:

$$\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2} = \frac{40\,\text{km/h} + 80\,\text{km/h}}{2} = 60\,\text{km/h}.$$

Na wykresie (b) przyspieszenie nie jest stałe. Przez większość czasu, w trakcie 1-godzinnego ruchu, prędkość ma wartość bliższą 80 km/h niż 40 km/h. Prędkość średnia jest więc większa niż w przypadku przedstawionym na wykresie (a).



Rysunek 3.18 (a) Wykres prędkości w funkcji czasu w przypadku ruchu ze stałym przyspieszeniem od wartości początkowej v_0 do końcowej v. Prędkość średnia wynosi $(v_0 + v)/2 = 60$ km/h . (b) Wykres prędkości w funkcji czasu ze zmiennym przyspieszeniem. Prędkość średnia nie jest równa $(v_0 + v)/2$, lecz jest większa od $60\,\text{km/h}$.

Obliczanie prędkości na podstawie przyspieszenia i czasu

Wzór na prędkość w dowolnej chwili czasu (kolejne równanie ruchu) otrzymamy na podstawie definicji przyspieszenia średniego:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Pominęliśmy oznaczenie **średniej**, bo wciąż zakładamy stałe przyspieszenie. Podstawiając za Δv i Δt, otrzymamy

$$a = \frac{v - v_0}{t}, \quad a = \text{const.}$$

Wyznaczamy stąd równanie prędkości v w dowolnej chwili czasu

$$v = v_0 + at, \quad a = \text{const.} \tag{3.12}$$

Przykład 3.7

Obliczanie prędkości końcowej

Samolot podchodzi do lądowania z prędkością 70,00 m/s i w momencie zetknięcia z płytą lotniska hamuje z przyspieszeniem $1{,}50\,\text{m/s}^2$ przez 40,0 s. Jaka jest prędkość końcowa samolotu?

Strategia rozwiązania

Ustalmy najpierw, jakie mamy dane: $v_0 = 70\,\mathrm{m/s}$, $a = -1{,}50\,\mathrm{m/s^2}$, $t = 40\,\mathrm{s}$.

Następnie zastanówmy się, co jest niewiadomą. W tym przypadku jest to prędkość końcowa v_k .

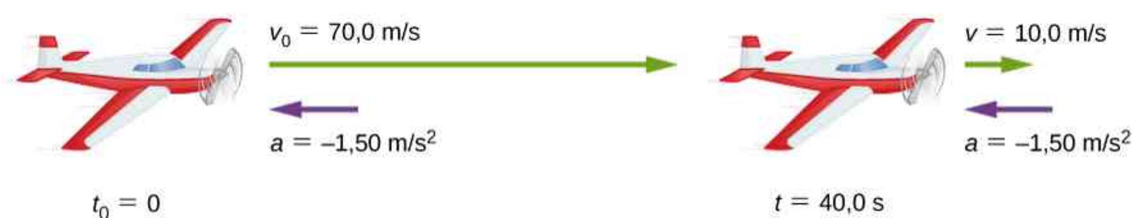
Na końcu wybierzmy odpowiednie równanie ruchu. W tym celu zastanówmy się, które równanie wiąże naszą niewiadomą ze wszystkimi danymi. Jest to Równanie 3.12, czyli $v = v_0 + at$.

Rozwiązanie

Podstawiamy dane do równania i otrzymujemy wynik:

$$v = v_0 + at = 70{,}0\,\mathrm{m/s} + \left(-1{,}50\,\mathrm{m/s^2}\right) \cdot 40{,}0\,\mathrm{s} = 10{,}0\,\mathrm{m/s}.$$

Rysunek 3.19 w schematyczny sposób pokazuje wektory prędkości i przyspieszenia w trakcie hamowania samolotu.



Rysunek 3.19 Samolot ląduje z prędkością 70,0 m/s i hamuje do końcowej prędkości 10,0 m/s, z którą kołuje do terminala. Zauważ, że przyspieszenie jest ujemne, bo jego zwrot jest przeciwny do zwrotu prędkości (prędkość ma dodatnią wartość).

Znaczenie

Prędkość końcowa jest oczywiście o wiele niższa niż prędkość początkowa, czego oczekujemy podczas hamowania. Jest jednak ciągle dodatnia (spójrz na rysunek). Silniki odrzutowe samolotu są w stanie wytworzyć ciąg wsteczny, dzięki czemu samolot może się zatrzymać w miejscu, a nawet zacząć cofać. Wtedy prędkość byłaby ujemna, co jednak w naszym przypadku nie zachodzi.

Oprócz tego, że równanie $v = v_0 + at$ jest bardzo użyteczne przy opisie parametrów ruchu ciał, pokazuje ono także relację między prędkością, przyspieszeniem i czasem. Na jego podstawie możemy np. stwierdzić, że:

- Wartość prędkości końcowej zależy od tego, jak duże jest przyspieszenie oraz przez jaki czas ciało go doznaje.
- Jeśli przyspieszenie ciała jest zero, to prędkość końcowa ciała jest równa prędkości początkowej ($v = v_0$), czego się spodziewamy. Innymi słowy: jeśli przyspieszenie jest zerowe, to prędkość jest stała w czasie, i mamy do czynienia z ruchem jednostajnym.
- Jeśli a jest ujemne, to prędkość końcowa jest mniejsza od prędkości początkowej (ruch jest opóźniony).

Wszystkie powyższe komentarze zgadzają się z naszą intuicją. Pamiętaj, że zawsze warto skonfrontować równania fizyczne (nie tylko kinematyczne) z naszą intuicją i doświadczeniami z życia, przez co możemy się przekonać, czy rzeczywiście poprawnie opisują one rzeczywistość.

Obliczanie położenia końcowego w ruchu jednostajnie zmiennym

Na podstawie dwóch wyprowadzonych powyżej równań ruchu otrzymamy teraz trzecie równanie, wiążące położenie ciała z przyspieszeniem w ruchu jednostajnie zmiennym. W przypadku ruchu po linii prostej będzie to też wzór na drogę w ruchu jednostajnie zmiennym, o ile nie będziemy rozważać zmiany kierunku ruchu ciała. Wyjdźmy od równania

$$v = v_0 + at.$$

Dodajmy teraz v_0 do obu stron równania i podzielmy je przez 2:

$$\frac{v_0 + v}{2} = v_0 + \frac{1}{2}at.$$

Lewa strona jest średnią prędkością, $\frac{v_0+v}{2} = \bar{v}$, przy założeniu stałego przyspieszenia. W takim razie

$$\bar{v} = v_0 + \frac{1}{2}at.$$

To wyrażenie na $\bar{v}$ podstawimy teraz do równania na przemieszczenie, które wyprowadziliśmy w tej sekcji jako pierwsze, mianowicie $x = x_0 + \bar{v}t$. Doprowadzi nas to do równania opisującego położenie końcowe ciała w dowolnej chwili w ruchu jednostajnie zmiennym

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2, \quad a = \text{const.} \tag{3.13}$$

Przykład 3.8

Obliczanie przemieszczenia przyspieszającego ciała

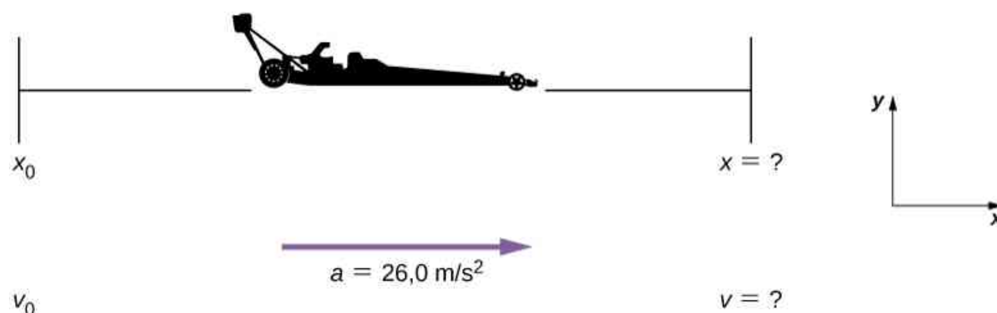
Wyścigowe dragstery mogą osiągać średnie przyspieszenie $26{,}0\ \mathrm{m/s^2}$. Załóżmy, że dragster z takim przyspieszeniem rusza ze startu i przyspiesza przez 5,56 s (Rysunek 3.20). Jaki dystans pokona w tym czasie?



Rysunek 3.20 Pilot amerykańskiej armii Tony Schumacher rozpoczyna wyścig dragsterów kontrolowanym „paleniem gumy”. (Źródło: Lt. Col. William Thurmond, dzięki uprzejmości U.S. Army.)

Strategia rozwiązania

Zacznijmy od schematycznego rysunku sytuacji fizycznej, Rysunek 3.21. Naszym zadaniem jest znalezienie przemieszczenia, które jest w tym przypadku równe końcowemu położeniu x, jeśli przyjmiemy położenie początkowe x_0 równe zero. Położenie x_0 możemy rozumieć jako linię startową wyścigu. Możemy je przyjąć w dowolnym innym punkcie, ale najwygodniej będzie przypisać mu zerową wartość i każde położenie w dowolnym momencie liczyć względem niego. Gdy prawidłowo zdefiniujemy v_0, a i t na podstawie treści zadania, będziemy mogli użyć równania $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ do obliczenia końcowego położenia dragstera.



Rysunek 3.21 Schemat przyspieszającego dragstera.

Rozwiązanie

Sprawdźmy najpierw, czy mamy wszystkie potrzebne dane. Ponieważ dragster rusza z miejsca startu, to $v_0 = 0$, natomiast przyspieszenie a równe $26{,}0\ \mathrm{m/s^2}$ oraz czas ruchu $t = 5{,}56\ \mathrm{s}$ są podane.

Teraz możemy wstawić dane do wzoru na nieznane położenie:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2.$$

Skoro i położenie, i prędkość początkowe są równe zeru, równanie upraszcza się do

$$x = \frac{1}{2} a t^2.$$

Wstawiamy wartości liczbowe za a i t, i otrzymujemy wynik

$$x = \frac{1}{2} \cdot 26{,}0\ \mathrm{m/s^2} \cdot (5{,}56\ \mathrm{s})^2 = 402\ \mathrm{m}.$$

Znaczenie

Jeśli przeliczymy wynik 402 m na mile (1 mila = 1609,344 m), to okaże się, że jest on równy ok. 1/4 mili, a więc odpowiada typowemu dystansowi, na jakim rozgrywa się wyścigi dragsterów. Zatem nasz wynik jest realny. Pokonanie 402 m w czasie tylko ok. 5,5 s jest imponującym wynikiem, jednak najmocniejsze dragstery potrafią osiągać nawet krótsze czasy. Gdyby dragster miał już na starcie niezerową prędkość początkową, musielibyśmy uwzględnić w równaniu opisującym położenie końcowe dodatkowy wyraz. Wtedy położenie końcowe (równe w tym przypadku drodze) byłoby znacznie większe.

Czego więcej o ruchu możemy się dowiedzieć dzięki analizie równania $x = x_0 + v_0 t + at^2/2$? Możemy wyciągnąć następujące wnioski:

- W ruchu z niezerowym przyspieszeniem położenie końcowe zależy od kwadratu całkowitego czasu ruchu. W Przykładzie 3.8 dragster pokonuje tylko jedną czwartą całkowitej drogi w czasie równym połowie całkowitego czasu ruchu.
- Jeśli przyspieszenie jest zerowe, to prędkość średnia jest równa prędkości początkowej (prędkość się nie zmienia, $v_0 = \overline{v}$), a równanie $x = x_0 + v_0 t + at^2/2$ upraszcza się do postaci $x = x_0 + v_0 t$ znanej dla ruchu jednostajnego prostoliniowego.

Obliczanie prędkości końcowej na podstawie drogi i przyspieszenia

Wyprowadzimy teraz czwarte równanie kinematyczne, użyteczne w analizie ruchu ciała ze stałym przyspieszeniem. Będzie to równanie na prędkość końcową wyrażoną przez całkowite przemieszczenie i przyspieszenie, a otrzymamy je na podstawie trzech poprzednich. Wyliczmy zmienną t z równania na prędkość $v = v_0 + at$:

$$t = \frac{v - v_0}{a}.$$

Podstawiając za czas oraz prędkość średnią $\bar{v} = (v_0 + v)/2$ do $x = x_0 + \bar{v}t$, otrzymujemy

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0), \quad a = \text{const}. \tag{3.14}$$

Przykład 3.9

Obliczanie prędkości końcowej

Oblicz prędkość końcową dragstera z Przykładu 3.8, nie korzystając z informacji o czasie ruchu.

Strategia rozwiązania

Równanie $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$ jest idealne do zastosowania w tym zadaniu, bo wiąże prędkość końcową z przyspieszeniem i przemieszczeniem, a nie zawiera czasu.

Rozwiązanie

Wypiszmy dane. Wiemy, że $v_0 = 0$, bo dragster rusza z miejsca. Znamy też przemieszczenie $x - x_0 = 402\text{ m}$ (jest to wynik otrzymany w Przykładzie 3.8). Przyspieszenie dragstera zostało podane w treści zadania, $a = 26{,}0\text{ m/s}^2$.

Podstawiamy dane do równania $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$ i wyliczamy v:

$$v^2 = 0\text{ m/s} + 2 \cdot 26{,}0\text{ m/s}^2 \cdot 402\text{ m}.$$

Zatem

$$v^2 = 2{,}09 \cdot 10^4\text{ m}^2/\text{s}^2,$$
$$v = \sqrt{2{,}09 \cdot 10^4\text{ m}^2/\text{s}^2} = 145\text{ m/s}.$$

Znaczenie

Prędkość 145 m/s (czyli 522 km/h) jest ogromna, ale i tak jeszcze daleka od rekordowych wyników dragsterów na torze o długości 1/4 mili. Zauważ, że po spierwiastkowaniu uwzględniliśmy tylko jedno rozwiązanie – dodatnie, odrzucając rozwiązanie ujemne. W ten sposób wyraziliśmy, że prędkość ma ten sam kierunek co wektor przyspieszenia w ruchu dragstera.

Wnikliwa analiza równania $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$ pomoże nam pogłębić nasze rozumienie zależności między wielkościami fizycznymi:

- Prędkość końcowa zależy od tego, jak duże jest przyspieszenie i na jakim dystansie ciało go doznaje.
- Przy takim samym przyspieszeniu samochód o dwukrotnie większej prędkości początkowej nie zatrzyma się po przejechaniu dwukrotnie dłuższej drogi. Droga hamowania będzie o wiele większa (dlatego właśnie wprowadza się strefy dodatkowego ograniczenia prędkości przy szkołach, przejściach dla pieszych itd.).

Równania ruchu: zastosowanie

W dalszej części nadal będziemy analizować ruch ciał w jednym wymiarze ze stałym przyspieszeniem, ale w nieco bardziej złożonych przykładach, wymagających większego żonglowania równaniami ruchu. Na przykładach tych poznamy także przydatne metody rozwiązywania zadań. Poniższe zestawienie zawiera wszystkie równania ruchu przydatne do rozwiązywania zadań z kinematyki ruchu prostoliniowego. Pamiętaj, że te równania nie są od siebie niezależne – jedne wyprowadzaliśmy na podstawie innych. W wielu przypadkach będziemy mieli dwie niewiadome w zadaniu, do znalezienia których będziemy musieli zapisać odpowiednie dwa równania. Generalnie do rozwiązania problemu o wielu niewiadomych potrzebujemy tylu równań, ile jest niewiadomych.

Zestawienie kinematycznych równań ruchu (stałe a)

$$x = x_0 + \bar{v}t$$

$$\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2}$$

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Zanim zajmiemy się rozwiązywaniem zadań w przykładach, przyjrzyjmy się bliżej, jak zachowuje się wartość przyspieszenia w skrajnych przypadkach wartości położenia i prędkości. Przekształcając Równanie 3.12, mamy

$$a = \frac{v - v_0}{t}.$$

Widzimy, że jeśli różnica prędkości końcowej i początkowej jest niewielka, to dla skończonego czasu przyspieszenie jest małe. W granicy prędkości końcowej równej prędkości początkowej przyspieszenie zdąża do zera. Przeciwnie, jeśli $t \to 0$ przy skończonej różnicy prędkości, przyspieszenie rozbiega się do nieskończoności.

Analogicznie przekształćmy Równanie 3.14, aby wyrazić zależność przyspieszenia od różnicy prędkości i położeń:

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2(x - x_0)}.$$

Dla skończonej różnicy prędkości przyspieszenie staje się nieskończone, jeśli przemieszczenie zdąża do zera. Podobnie, przy skończonej różnicy położeń: końcowego i początkowego, przyspieszenie spada do zera, jeśli prędkość się nie zmienia.

Przykład 3.10

Droga hamowania samochodu

Samochód może hamować na suchym asfalcie z przyspieszeniem o wartości $7{,}00\ \mathrm{m/s^2}$, natomiast na mokrym asfalcie jego przyspieszenie ma wartość tylko $5{,}00\ \mathrm{m/s^2}$. Znajdź drogę, po jakiej samochód się zatrzyma (drogę hamowania), na

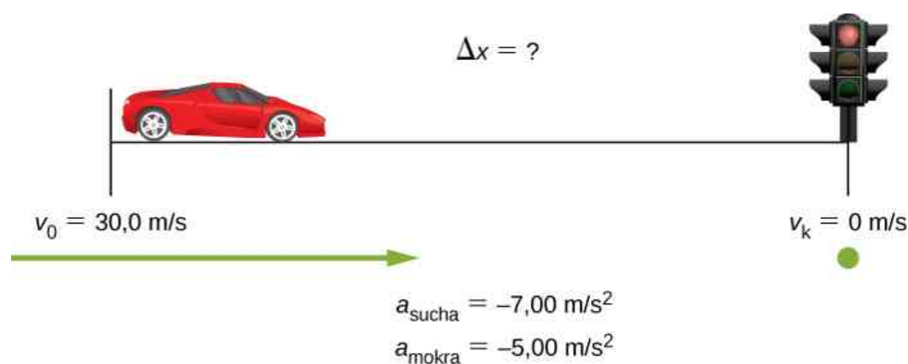
a. suchej oraz

b. mokrej nawierzchni, jeśli zaczyna hamować przy prędkości 30,0 m/s (110 km/h).

c. Powtórz obliczenia w sytuacji uwzględniającej czas reakcji kierowcy równy 0,500 s.

Strategia rozwiązania

Rysujemy schemat sytuacji fizycznej, Rysunek 3.22. Aby wybrać odpowiednie do naszego zadania równania ruchu, wypiszemy dane i zidentyfikujemy szukane.



Rysunek 3.22 Schemat ilustrujący ruch hamującego samochodu i drogę do zatrzymania.

Rozwiązanie

a. Mamy następujące dane: $v_0 = 30{,}0\,\mathrm{m/s}$, $v = 0$, $a = -7{,}00\,\mathrm{m/s^2}$ (a jest ujemne, bo ma kierunek przeciwny do prędkości). Przyjmijmy położenie początkowe x_0 równe zero. Chcemy obliczyć przemieszczenie Δx, czyli różnicę $x - x_0$.
Równaniem, którego użyjemy, jest

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0).$$

To równanie jest najwygodniejsze, bo zawiera tylko jedną niewiadomą – właśnie tę, którą chcemy obliczyć, x. Wszystkie pozostałe wielkości znamy. Moglibyśmy użyć także innych równań ruchu do obliczenia x, ale zawierają one czas t, którego nie znamy. Musielibyśmy więc rozwiązywać układ dwóch równań na dwie niewiadome, co pociągałoby za sobą dodatkowe obliczenia.
Przekształcamy równanie tak, aby wyliczyć x:

$$x = x_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

i podstawiamy dane:

$$x = 0\,\mathrm{m} + \frac{(0\,\mathrm{m/s})^2 - (30{,}0\,\mathrm{m/s})^2}{2 \cdot \left(-7{,}00\,\mathrm{m/s^2}\right)}.$$

Zatem droga, jaką pokona samochód na suchej nawierzchni, wynosi

$$x_{\mathrm{a}} = 64{,}3\,\mathrm{m}.$$

b. Rozwiązanie tej części znajdziemy dokładnie tak samo, jak w przypadku części (a), z tym że przyspieszenie wynosi teraz $-5{,}00\,\mathrm{m/s^2}$. Wynik wynosi

$$x_{\mathrm{b}} = 90{,}0\,\mathrm{m}.$$

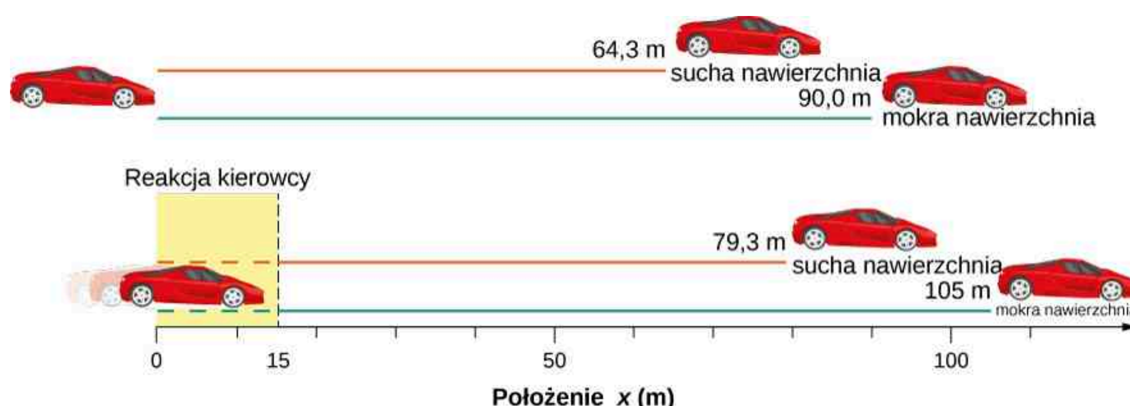
c. Droga hamowania na suchej i mokrej nawierzchni, liczona od momentu wciśnięcia hamulca przez kierowcę (a więc po upływie jego czasu reakcji), będzie taka jak obliczona w częściach (a) i (b). Aby obliczyć całkowitą drogę do zatrzymania, musimy obliczyć, jaki dystans samochód pokona w czasie reakcji kierowcy, a następnie dodać go do wyników z części (a) i (b). Zakładamy, że w czasie reakcji kierowcy samochód porusza się ze stałą szybkością 30,0 m/s.
Parametry, jakie znamy w czasie trwania reakcji kierowcy, to: $\bar{v} = 30{,}0\,\mathrm{m/s}$, $t_{\mathrm{reakcji}} = 0{,}500\,\mathrm{s}$, $a_{\mathrm{reakcji}} = 0$. Znowu przyjmijmy $x_0 = 0$. Poszukujemy położenia x_{reakcji} po czasie reakcji kierowcy. Użyjemy w tym celu równania $x = x_0 + \bar{v}t$, w którym jedyną niewiadomą jest x. Wstawiając dane do tego równania, otrzymujemy:

$$x = 0\,\text{m} + 30{,}0\,\text{m/s} \cdot 0{,}500\,\text{s} = 15{,}0\,\text{m}.$$

W takim razie całkowita droga hamowania, zarówno na suchej, jak i na mokrej nawierzchni, jest powiększona o drogę przebytą przez auto ze stałą prędkością w czasie reakcji kierowcy. Zakładamy tutaj, że po upływie 0,500 s kierowca natychmiastowo wciska hamulec i samochód od razu doznaje odpowiedniego przyspieszenia. Całkowita droga hamowania, obliczona jako

$$x_{\text{hamowania}} + x_{\text{reakcji}} = x_{\text{całkowita}},$$

wynosi w przypadku suchej nawierzchni: $64{,}3\,\text{m} + 15{,}0\,\text{m} = 79{,}3\,\text{m}$ oraz w przypadku mokrej nawierzchni: $90{,}0\,\text{m} + 15{,}0\,\text{m} = 105\,\text{m}$ (Rysunek 3.23).



Rysunek 3.23 Droga potrzebna do zahamowania samochodu znacząco różni się w zależności od stanu nawierzchni i czasu reakcji kierowcy. Na wykresie przedstawiono schemat hamowania samochodu od prędkości 30,0 m/s do zatrzymania, na suchej i mokrej nawierzchni, bez uwzględnienia oraz z uwzględnieniem czasu reakcji kierowcy równego 0,500 s.

Znaczenie

Otrzymane przez nas wartości liczbowe drogi hamowania wydają się być sensowne w przypadku samochodu rozpędzonego do dużej szybkości. Trudniej jest zatrzymać samochód na nawierzchni mokrej niż na suchej. Pouczającym wnioskiem jest to, że czas reakcji człowieka dość znacznie powiększa całkowitą drogę hamowania samochodu. Przyjęliśmy tutaj czas reakcji równy 0,500 s. Jest to całkiem sensowne założenie. Jeśli spróbujesz jak najszybciej kliknąć dwukrotnie na klawisz stopera, to zobaczysz, że w tym ekstremalnym przypadku twój czas reakcji raczej nie spada poniżej 0,100 s. Ważniejszym jednak wnioskiem jest to, że przećwiczyliśmy na tym przykładzie metodologię rozwiązywania zadań: od poprawnego zdefiniowania danych i szukanych do wyboru równania ruchu najbardziej odpowiedniego do naszego zadania. Pamiętaj, że potrzebujesz tylu równań, ile masz niewiadomych w zadaniu. Często istnieje kilka różnych sposobów rozwiązania. Także w tym przykładzie mogliśmy użyć innych równań, aby otrzymać prawidłowe wyniki. Rozwiązanie przedstawione tutaj jest jednak najszybsze.

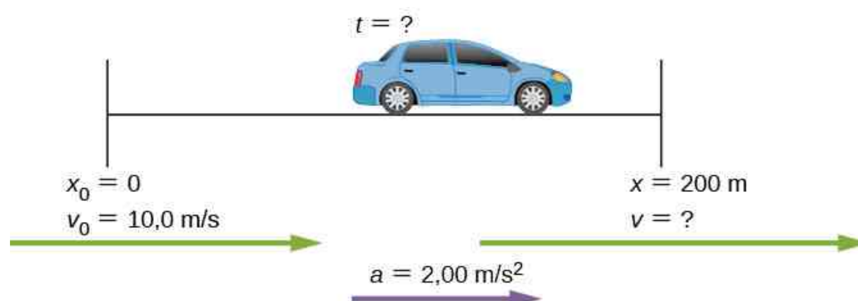
Przykład 3.11

Obliczanie czasu ruchu

Rozważmy sytuację, w której samochód, włączając się do ruchu na autostradzie, musi rozpędzić się na pasie rozbiegowym o długości 200,0 m. Jeżeli jego prędkość początkowa wynosi 10,0 m/s, a przyspieszenie to $2{,}00\,\text{m/s}^2$, jak długo zajmie kierowcy włączanie się do ruchu? (Taka informacja mogłaby być użyteczna przy projektowaniu infrastruktury autostradowej przez inżynierów.)

Strategia rozwiązania

Najpierw zróbmy schematyczny rysunek sytuacji, Rysunek 3.24. Mamy obliczyć czas t rozpędzania się samochodu. Tak jak poprzednio, zidentyfikujemy niewiadome i wybierzemy odpowiednie równanie ruchu, które pozwoli nam znaleźć czas t.



Rysunek 3.24 Schemat rozpędzania samochodu na autostradowym pasie rozbiegowym.

Rozwiązanie

Samochód porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym z prędkością początkową i na znanej drodze. Wypiszmy wszystkie dane, które znamy z treści zadania: $x_0 = 0$, $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$, $a = 2{,}00\,\mathrm{m/s^2}$ oraz $x = 200{,}0\,\mathrm{m}$.

Potrzebujemy obliczyć czas t. Tym razem równanie $x = x_0 + v_0 t + at^2/2$ będzie najbardziej odpowiednie, bo zawiera tylko jedną niewiadomą t, której właśnie szukamy. Zauważmy, że podstawiając dane do tego wzoru, otrzymamy równanie kwadratowe ze względu na niewiadomą.

Wstawiamy dane do równania:

$$200\,\mathrm{m} = 0\,\mathrm{m} + 10{,}0\,\mathrm{m/s} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 2{,}00\,\mathrm{m/s^2} \cdot t^2,$$

i upraszczamy je. Jednostki długości (metry) znikają, bo wystepują w tej samej potędze po obu stronach równania. Przyjmijmy, że czas mierzymy w sekundach, przez co możemy podstawić: $t = t\,\mathrm{s}$, gdzie t jest bezwymiarową zmienną, a s jest jednostką czasu. Otrzymujemy:

$$200 = 10t + t^2.$$

Po uporządkowaniu równania identyfikujemy odpowiednie parametry równania kwadratowego i korzystamy ze wzoru na jego pierwiastki, aby wyliczyć t:

$$t^2 + 10t - 200 = 0,$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

co prowadzi nas do dwóch rozwiązań $t = 10{,}0\,\mathrm{s}$ oraz $t = -20{,}0\,\mathrm{s}$. Ujemny wynik jest niefizyczny, dlatego go odrzucamy (oznaczałby on, że zdarzenie miało miejsce 20 s, zanim rozpoczął się ruch). W takim razie rozwiązaniem jest

$$t = 10{,}0\,\mathrm{s}.$$

Znaczenie

Zazwyczaj, gdy rozwiązujemy równanie kwadratowe, otrzymamy dwa rozwiązania. W niektórych przypadkach oba rozwiązania mogą mieć sens, wybór poprawnego zależy wtedy od prawidłowej interpretacji. W innych przypadkach (takich jak nasz w tym przykładzie) tylko jedno rozwiązanie ma sens fizyczny. Otrzymany przez nas wynik 10,0 s wydaje się być rozsądnym czasem rozpędzania samochodu włączającego się do ruchu na autostradzie.



3.5 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Rakieta kosmiczna startuje w przyspieszeniem 20 m/s^2. Ile czasu zajmie rakiecie osiągnięcie prędkości 400 m/s?

Przykład 3.12

Przyspieszenie statku kosmicznego

Statek kosmiczny opuszcza orbitę ziemską i kieruje się w stronę Księżyca. Przyspiesza w tempie $20\,m/s^2$ w ciągu 2 min, kiedy to pokonuje dystans 1000 km. Jakie są początkowa i końcowa prędkość statku podczas tego manewru?

Strategia rozwiązania

Mamy obliczyć dwie niewiadome: prędkość początkową oraz prędkość końcową. Patrząc na naszą listę kinematycznych równań ruchu, widzimy, że żadne nie da nam jednocześnie obu tych rozwiązań. Musimy więc najpierw wyliczyć jedną niewiadomą, przy użyciu jednego z równań, a następnie podstawić ją do kolejnego równania, by znaleźć tę drugą niewiadomą. Mamy więc do rozwiązania układ dwóch równań zawierających dwie niewiadome.

Rozwiązanie

Najpierw obliczymy v_0, korzystając z równania $x = x_0 + v_0 t + at^2/2$

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$10^6\ m = v_0 \cdot 120{,}0\ s + \frac{1}{2} \cdot 20{,}0\ m/s^2 \cdot (120{,}0\ s)^2$$

$$v_0 = 7\,133{,}3\ m/s.$$

Tak obliczone v_0 wstawimy teraz do równania $v = v_0 + at$ na nieznaną prędkość końcową:

$$v = v_0 + at = 7\,133{,}3\ m/s + 20{,}0\ m/s^2 \cdot 120{,}0\ s = 9\,533{,}3\ m/s.$$

Znaczenie

Do opisu ruchu w jednym wymiarze używamy sześciu niezależnych wielkości, którymi są: przemieszczenie (równe położeniu końcowemu minus położenie początkowe), czas, prędkość (początkowa i końcowa) i przyspieszenie. W zadaniach mogą być podane dowolne ich kombinacje, dlatego nie zawsze możemy znaleźć rozwiązanie, po prostu wstawiając dane do równania i wyliczając niewiadomą. Czasem, jak w przykładzie, którym teraz się zajmowaliśmy, trzeba rozwiązać układ kilku równań ruchu jednocześnie.

Dzięki podstawom, które dotąd poznaliśmy, możemy przejść do bardziej złożonych i ciekawych zagadnień kinematyki. W procesie dochodzenia do kinematycznych równań ruchu i stosowania ich do problemów fizycznych wypracowaliśmy także ogólne metody rozwiązywania zadań, które dają poprawne wyniki i możliwość interpretacji związków między wielkościami fizycznymi. Następnym stopniem zaawansowania problemów fizycznych z dziedziny kinematyki będzie zagadnienie ruchu wzajemnego dwóch ciał, które można nazwać *zagadnieniem pogoni i ucieczki*.

Zagadnienie pogoni i ucieczki dwóch ciał

Do tej pory zajmowaliśmy się ruchem tylko pojedynczych ciał. Nawet w przykładzie o dwóch samochodach zmniejszających prędkość aż do momentu zatrzymania na mokrym i suchym asfalcie zagadnienie traktowaliśmy jako odrębne ruchy poszczególnych samochodów. W zagadnieniu **pogoni i ucieczki dwóch ciał**, ruch obu ciał jest sprzężony – oznacza to, że niewiadome, których będziemy szukać, zależą od ruchu obu ciał jednocześnie. Aby rozwiązać taki problem, napiszemy równania ruchu dla każdego z ciał i rozwiążemy taki układ równań (sprzężonych) ze względu na niewiadomą. Zagadnienie w schematyczny sposób przedstawia Rysunek 3.25.



Rysunek 3.25 Przykładowa realizacja zagadnienia pogoni, gdzie samochód 2, jadący ze stałą prędkością, jest ścigany przez samochód 1, który porusza się ze stałym przyspieszeniem. Samochód 1 dogania samochód 2 po pewnym czasie.

Czas i droga, po jakich samochód 1 dogoni samochód 2, zależą od początkowej odległości między samochodami oraz od prędkości początkowych obu samochodów i przyspieszenia samochodu 1. Oczywiście samochód 2 też może mieć swoje przyspieszenie, dzięki któremu może nawet zdołać uciec przed samochodem goniącym. Aby znaleźć drogę i czas, musimy zapisać kinematyczne równania ruchu dla obu ciał i je rozwiązać.

Rozważmy następujący przykład.

Przykład 3.13

Gepard ścigający gazelę

Gepard czeka przyczajony w zaroślach. W pewnej chwili dostrzega gazelę, nadbiegającą z szybkością 10m/s, i w momencie, gdy ta mija geparda, gepard rzuca się za nią w pogoń, przyspieszając od zerowej prędkości początkowej w tempie 4 m/s^2.

a. Ile czasu zajmie gepardowi złapanie gazeli?
b. Jakie jest całkowite przemieszczenie geparda i gazeli? Załóż, że gazela biegnie ciągle ze stałą szybkością (np. nie zauważyła pościgu geparda) oraz że zwierzęta biegną po prostej.

Strategia rozwiązania

Do rozwiązania zadania użyjemy zestawu równań ruchu ze stałym przyspieszeniem, które poznaliśmy wcześniej. Ponieważ mamy do czynienia z ruchem dwóch ciał, zapiszemy równania osobno dla każdego zwierzęcia. Równania te jednak będą ze sobą powiązane (mówimy: sprzężone) poprzez wspólny parametr, którym jest położenie końcowe obu zwierząt x (czyli droga, po jakiej gepard złapie gazelę) i czas pościgu t. Zakładamy dla obu zwierząt $x_0 = 0$, zatem po czasie pościgu t rzeczywiście oba zwierzęta będą miały to samo położenie końcowe. Pomysł jest taki, że zapiszemy równania na położenia geparda i gazeli i przyrównamy je do siebie, aby obliczyć czas. Następnie do któregokolwiek z nich podstawiamy obliczoną wartość czasu i otrzymamy drogę.

Rozwiązanie

a. Równanie ruchu gazeli. Gazela porusza się ze stałą prędkością, która jest jej prędkością średnią w tym ruchu, bo nie występuje przyspieszenie. Użyjemy więc Równania 3.10 z położeniem początkowym $x_0 = 0$:

$$x = x_0 + \overline{v}t = \overline{v}t.$$

Równanie ruchu geparda. Gepard przyspiesza ze spoczynku, więc jego ruch jest ruchem jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej. Dla niego zapiszemy więc Równanie 3.13, kładąc $x_0 = 0$ oraz $v_0 = 0$:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}at^2.$$

Otrzymaliśmy układ dwóch równań ruchu dla każdego zwierzęcia osobno ze wspólnym parametrem, którym jest czas t. Porównujemy ze sobą oba położenia końcowe i obliczamy czas:

$$\bar{v}t = \frac{1}{2}at^2,$$
$$t = \frac{2\bar{v}}{a}.$$

Podstawiamy za średnią prędkość gazeli 10 m/s, a za przyspieszenie geparda $4\,\mathrm{m/s^2}$ i wyliczamy czas t, po którym gepard dogoni gazelę:

$$t = \frac{2\bar{v}}{a} = \frac{2 \cdot 10\,\mathrm{m/s}}{4\,\mathrm{m/s^2}} = 5\,\mathrm{s}.$$

b. Aby teraz obliczyć całkowite przemieszczenie (równe dla gazeli i geparda), podstawimy obliczony czas do któregokolwiek z równań opisujących położenie. Oba powinny dać ten sam wynik.
Przemieszczenie geparda:

$$x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot 4\,\mathrm{m/s^2} \cdot (5\,\mathrm{s})^2 = 50\,\mathrm{m}.$$

Przemieszczenie gazeli:

$$x = \bar{v}t = 10\,\mathrm{m/s} \cdot 5\,\mathrm{s} = 50\,\mathrm{m}.$$

Tak jak się spodziewaliśmy, przemieszczenia są takie same.

Znaczenie

W tego typu zagadnieniach pogoni i ucieczki ważne jest, aby dokonać odpowiedniej analizy indywidualnego ruchu każdego z ciał i poprawnie zapisać jego kinematyczne równania ruchu. Trzeba też dobrze przemyśleć, jakie są parametry ruchu wspólne dla obu ciał.



3.6 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Rower porusza się ze stałą prędkością 10 m/s. Biegacz startuje ze spoczynku w momencie, gdy rower go mija, i po 30 s dogania rower. Z jakim przyspieszeniem poruszał się biegacz?

3.5 | Spadek swobodny i rzut pionowy

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

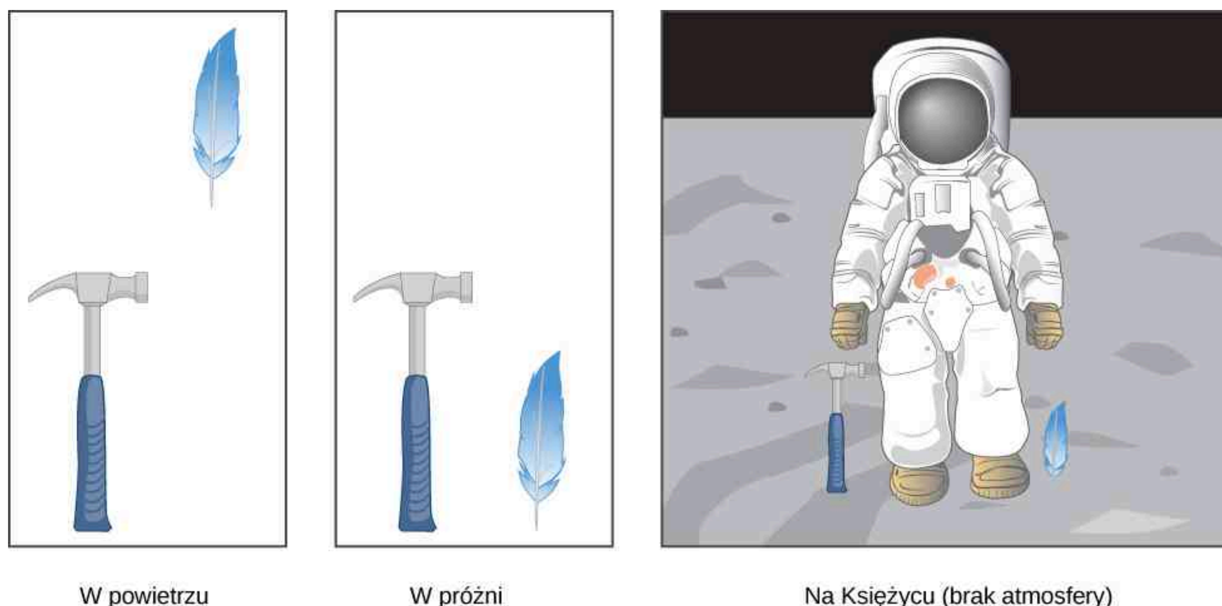
- używać kinematycznych równań ruchu ze stałym przyspieszeniem ziemskim do analizy spadku swobodnego i rzutu pionowego;
- opisywać zmiany położenia, prędkości i przyspieszania w czasie dla spadku swobodnego i rzutu pionowego;
- obliczać położenie, wysokość, prędkość i przyspieszenie w dowolnej chwili spadku swobodnego i rzutu pionowego.

W tej sekcji zajmiemy się zastosowaniem równań Równanie 3.4–Równanie 3.14 do opisu ruchu zwanego *spadkiem swobodnym*, w którym ciało porusza się w polu grawitacyjnym wytwarzanym w pobliżu powierzchni Ziemi albo innego ciała niebieskiego o rozmiarze planet. Zakładamy, że ciało porusza się po linii prostej, zatem jego ruch jest jednowymiarowy. Jako przykład spadku swobodnego możemy rozważyć ruch kamienia upuszczonego do głębokiego szybu kopalnianego, gdy nasłuchujemy odgłosu upadku kamienia na dno. W tej sekcji zajmiemy się nie tylko spadaniem, kiedy ciało przemieszcza się od większej wysokości do mniejszej, ale też *rzutami pionowymi*, np. ruchem piłki rzuconej w górę. Mianem spadku swobodnego czasem określa się każdy ruch pionowy w polu grawitacyjnym, czyli zarówno ruch bez prędkości początkowej (spadek), jak i z prędkością początkową (rzut pionowy). My jednak będziemy rozdzielać te dwa przypadki i spadkiem swobodnym nazywać tylko ruch w polu grawitacyjnym bez prędkości początkowej.

Ogólne równania ruchu w spadku są niemal takie same jak w rzucie pionowym w dół, różnią się jedynie wartością prędkości początkowej. W rzucie pionowym do góry dodatkowo zwrot prędkości początkowej jest przeciwny do zwrotu wektora przyspieszenia grawitacyjnego.

Przyspieszenie grawitacyjne

Charakterystycznym i nieoczywistym faktem dotyczącym spadających obiektów, przy pominięciu oporu powietrza i tarcia, jest to, że wszystkie spadają z danej wysokości w kierunku środka Ziemi z *jednakowym stałym przyspieszeniem, niezależnie od masy i rozmiarów*. Ten doświadczalny fakt jest na pierwszy rzut oka dla nas nieoczywisty, bo na co dzień doświadczamy oporów powietrza nieuchronnie, przez co wydaje się nam, że lekkie ciała muszą spadać wolniej niż ciężkie. Aż do czasów **Galileusza** (1564–1642) ludzie wierzyli, że ciała o większej masie mają większe przyspieszenie w spadku swobodnym. Dziś wiemy, że nie jest to prawdą. W warunkach próżni (bez oporu powietrza) wszystkie ciała spadają z tej samej wysokości na powierzchnię dokładnie w tym samym czasie – spójrz na Rysunek 3.26.



Rysunek 3.26 Młotek i piórko rzucone w próżni (bez oporu powietrza) doznają tego samego przyspieszenia. Jest to cecha spadku swobodnego nie tylko na Ziemi, czego astronauta David Scott dowiódł w 1971 roku na Księżycu, gdzie przyspieszenie grawitacyjne wynosi tylko $1{,}67 \mathrm{m/s}^2$ i nie ma atmosfery.

W rzeczywistym świecie **opory powietrza** powodują, że lżejsze obiekty spadają wolniej niż obiekty o tych samych rozmiarach, ale cięższe. Siła oporu zależy m. in. od przekroju poprzecznego danego ciała. Na przykład futbolówka upadnie pierwsza przed piłką gumową o tym samym rozmiarze, ale mniejszym ciężarze, mimo że zostały upuszczone z tej samej wysokości (to może być trudne do dostrzeżenia, jeśli wysokość jest niewielka). Opory powietrza zawsze przeciwdziałają ruchowi ciała w powietrzu. Podobnie tarcie między powierzchniami styku dwóch ciał – np. kamienia i wody w jeziorze czy opony i asfaltu – przeciwdziała ruchowi ciał.

W wyidealizowanych przypadkach rozpatrywanych w początkowych rozdziałach podręcznika, gdy pomijamy opory i tarcie, *spadek ciała w polu grawitacyjnym* nazywamy **spadkiem swobodnym**. Przyczyną ruchu ciał spadających w kierunku środka Ziemi jest siła grawitacji. Przyspieszenie, które jest rezultatem występowania tej siły, nazywamy **przyspieszeniem grawitacyjnym**. Przyspieszenie grawitacyjne jest zawsze stałe i równe dla wszystkich ciał, o ile spadek odbywa się w pobliżu powierzchni Ziemi, dlatego możemy go użyć w kinematycznych równaniach ruchu wszystkich ciał poruszających się w polu grawitacyjnym Ziemi. Dzięki tej własności potrafimy analizować całą gamę ciekawych przypadków ruchu.

Przyspieszenie grawitacyjne jest na tyle ważną wielkością fizyczną, że przypisujemy jej własny symbol g. Jego wartość jest stała (niezmienna w czasie) w każdym punkcie na Ziemi i dla całej kuli ziemskiej wynosi średnio

$$g = 9{,}81 \mathrm{~m/s^2}.$$

Tak naprawdę g zmienia się od $9{,}78 \mathrm{~m/s^2}$ do $9{,}83 \mathrm{~m/s^2}$ w zależności od szerokości geograficznej, wysokości nad powierzchnią Ziemi, struktury geologicznej Ziemi w danym obszarze, lokalnej topografii terenu itp. Mimo to, dla potrzeb tego podręcznika przyjmiemy średnią wartość typową dla obszaru Polski równą $9{,}81 \mathrm{~m/s^2}$, której będziemy używać we wszystkich zadaniach, o ile nie zasygnalizujemy, że jest inaczej. Jeśli pominiemy wszystkie te wymienione

powyżej efekty, a także wpływ ruchu obrotowego Ziemi na wielkość przyspieszenia ciał, możemy dodatkowo przyjąć za kierunek wektora przyspieszenia grawitacyjnego – kierunek „w dół” (czyli do środka Ziemi). W istocie, sformułowanie *kierunek pionowy* jest zdefiniowane przez kierunek g. Pamiętaj, że przyspieszenie a, które będziemy wstawiać do równań ruchu, może mieć wartość $+g$ lub $-g$, w zależności od przyjętego układu współrzędnych. Jeśli przyjmiemy kierunek „do góry” jako dodatni, to $a = -g = -9{,}81 \text{ m/s}^2$, natomiast jeśli dodatni będzie kierunek „w dół”, to $a = g = 9{,}81 \text{ m/s}^2$.

Ruch jednowymiarowy w polu grawitacyjnym

W ruchu pionowym ciał pod wpływem przyspieszenia grawitacyjnego będziemy konsekwentnie pomijać wpływ oporu powietrza i tarcia. Oznacza to, że wektor prędkości będzie zawsze skierowany pionowo (do góry lub w dół). Jeżeli ciało zostało upuszczone z pewnej wysokości, to jego prędkość początkowa wynosi zero (dotyczy spadku swobodnego). Jeśli ciało zostało rzucone (w górę lub w dół), to ma prędkość początkową, której wartość i kierunek musimy uwzględnić w równaniach ruchu. Zakładamy, że prędkość początkowa, jaką nadano rzuconemu ciału, jest taka sama w momencie tuż po wyrzuceniu ciała w powietrze (np. tuż po opuszczeniu ręki rzucającego lub lufy karabinu). Innymi słowy, jest to ta sama prędkość, jaką ma ciało już w ruchu, bez kontaktu z jakimkolwiek innym ciałem. Położenie ciała jest tym razem mierzone w pionie, a nie tak jak zazwyczaj dotąd – w poziomie, dlatego oznaczymy je przez y.

Równania ruchu w spadku swobodnym i rzucie pionowym

Przyjmujemy, że przyspieszenie wynosi $-g$ (dodatni kierunek jest zdefiniowany w górę).

$$v = v_0 - gt, \tag{3.15}$$

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \tag{3.16}$$

$$v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0). \tag{3.17}$$

Strategia rozwiązywania zadań: spadek swobodny i rzut pionowy

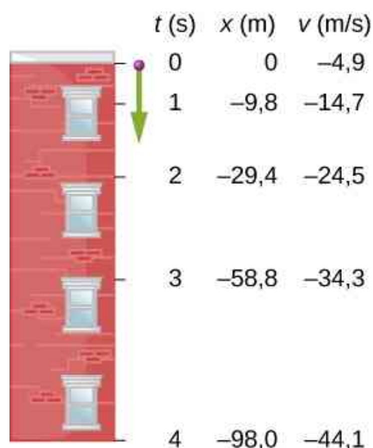
1. Wybierz znak przyspieszenia grawitacyjnego. W równaniach Równanie 3.15 - Równanie 3.17 znak g jest ujemny, co oznacza, że dodatni kierunek wybrano do góry, podczas gdy grawitacja działa w dół. W niektórych przypadkach warto jednak zdefiniować kierunek w dół jako dodatni, wtedy g ma znak +.
2. Naszkicuj sytuację fizyczną.
3. Z treści zadania wynotuj dane i szukane. To może pomóc w wyborze równania ruchu odpowiedniego do obliczenia konkretnej niewiadomej.
4. Wybierz prawidłowe równanie spośród Równanie 3.15 - Równanie 3.17 do wyliczenia niewiadomych.

Przykład 3.14

Rzut pionowy piłki

Rysunek 3.27 pokazuje położenia piłki w 1-sekundowych odstępach czasu, rzuconej z prędkością początkową 4,9 m/s pionowo w dół z dachu budynku o wysokości 98 m.

a. Po jakim czasie piłka dotrze do ziemi?
b. Z jaką prędkością upadnie na ziemię?



Rysunek 3.27 Położenia i prędkości piłki rzuconej pionowo w dół z szybkością 4,9 m/s, mierzone w odstępach 1-sekundowych.

Strategia rozwiązania

Obieramy układ współrzędnych, w taki sposób, że jego początek znajduje się w dowolnym punkcie dachu, natomiast dodatnia półoś y skierowana jest w górę, a ujemna – w dół. Do obliczenia czasu, po którym położenie piłki wyniesie –98 m, użyjemy Równania 3.16, kładąc $y_0 = 0$, $v_0 = -4{,}9 \text{ m/s}$ oraz $g = 9{,}81 \text{ m/s}^2$.

Rozwiązanie

a. Wstawiamy dane do równania:

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

$$-98{,}0 \text{ m} = 0 \text{ m} - 4{,}9 \text{ m/s} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot t^2.$$

Po uproszczeniach otrzymujemy:

$$t^2 + t - 20 = 0.$$

To równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki: $t = -5{,}0 \text{ s}$ oraz $t = 4{,}0 \text{ s}$. Interesuje nas tylko dodatnie rozwiązanie, bo przyjęliśmy $t = 0$ jako czas, gdy piłka została rzucona z dachu. (Rozwiązanie $t = -5{,}0 \text{ s}$ jest w istocie czasem, po którym piłka rzucona z ziemi pionowo do góry z odpowiednią prędkością przeleci na wysokości dachu z szybkością 4,9 m/s już w swoim locie w dół – po osiągnięciu wysokości maksymalnej i zawróceniu).

b. Korzystając z Równania 3.15, łatwo znajdziemy prędkość końcową

$$v = v_0 - gt = -4{,}9 \text{ m/s} - 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 4{,}0 \text{ s} = -44{,}1 \text{ m/s}.$$

Znaczenie

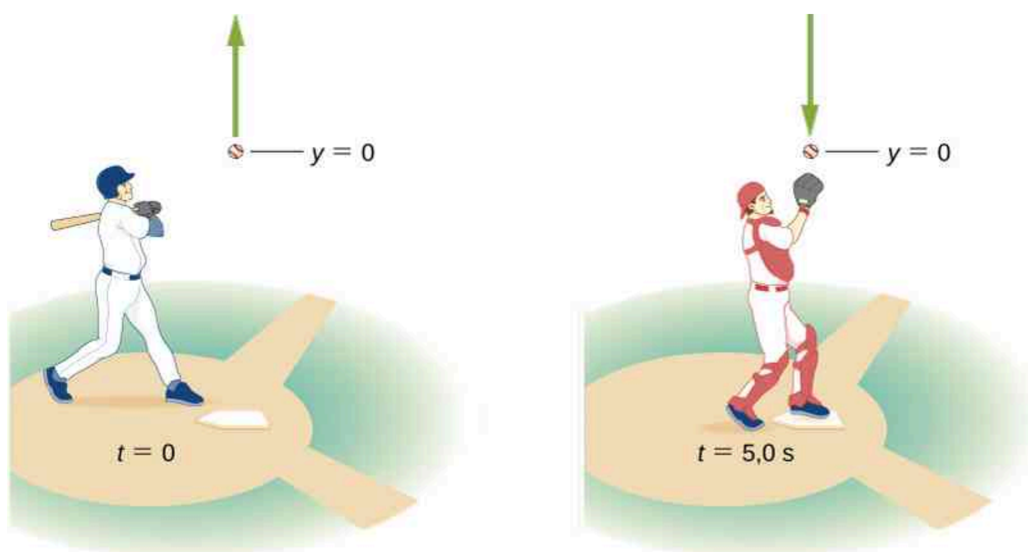
W przypadkach, gdy równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania, aby wybrać poprawne, musimy zastanowić się nad fizycznym sensem każdego z nich. Skoro wybraliśmy $t = 0$ jako czas, w którym piłka rozpoczęła swój ruch, rozwiązanie ujemne oznacza czas przed wyrzuceniem piłki, który nie ma dla nas fizycznego znaczenia. Zwróć uwagę, że w rzeczywistości gdy piłka uderza w ziemię, jej prędkość nie spada natychmiastowo do zera. Od momentu kontaktu piłki z podłożem przez chwilę do całkowitego zatrzymania piłki działa na nią przyspieszenie inne niż g. Zauważ też, jak ważny jest prawidłowy wybór początku i kierunku osi układu współrzędnych oraz konsekwentny wybór znaków g w równaniach ruchu.

Przykład 3.15

Ruch piłki baseballowej w pionie

Pałkarz uderza piłkę tak, że leci ona pionowo w górę i po 5,0 s zostaje złapana przez łapacza, który szybko zastąpił na stanowisku pałkarza (Rysunek 3.28).

a. Jaką prędkość początkową pałkarz nadał piłce?
b. Na jaką maksymalną wysokość wzniosła się piłka?
c. Jak długo piłka wznosiła się do momentu osiągnięcia wysokości maksymalnej?
d. Jakie przyspieszenie miała piłka na wysokości maksymalnej?
e. Jaką prędkość miała piłka w momencie złapania jej przez drugiego zawodnika? Załóż, że wysokość, na jakiej złapano piłkę, jest równa wysokości wyrzucenia jej do góry.



Rysunek 3.28 Piłka baseballowa uderzona pionowo do góry zostaje złapana przez łapacza po 5,0 s.

Strategia rozwiązania

Wybierz układ współrzędnych z osią y skierowaną do góry i początkiem w punkcie wyrzutu i złapania piłki.

Rozwiązanie

a. Wykorzystujemy Równanie 3.16:

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 ,$$

$$0\,\text{m} = 0\,\text{m} + v_0 \cdot 5{,}0\,\text{s} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot (5{,}0\,\text{s})^2 ,$$

co pozwala obliczyć prędkość początkową $v_0 = 24{,}5\,\text{m/s}$.

b. Na wysokości maksymalnej $v = 0$, po podstawieniu $v_0 = 24{,}5\,\text{m/s}$ do Równania 3.17 otrzymujemy

$$v^2 = v_0^2 - 2g\,(y - y_0) ,$$

$$0 = (24{,}5\ \mathrm{m/s})^2 - 2 \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot (y - 0)\,,$$

oraz

$$y = 30{,}6\ \mathrm{m}.$$

c. Do obliczenia czasu, po którym $v = 0$, użyjemy Równania 3.15:

$$v = v_0 - gt,$$

$$0\ \mathrm{m/s} = 24{,}5\ \mathrm{m/s} - 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot t.$$

To daje nam $t = 2{,}5\ \mathrm{s}$. Skoro piłka wznosi się do góry przez 2,5 s, także czas jej spadku na ziemię wynosi 2,5 s.

d. Przyspieszenie wynosi $9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ w każdym punkcie toru lotu piłki, także na wysokości maksymalnej. W momencie osiągnięcia wysokości maksymalnej wartość prędkości wynosi co prawda zero, ale następuje zmiana zwrotu prędkości na przeciwny. Po osiągnięciu wysokości maksymalnej, kierunek i zwrot wektora prędkości jest zgodny z kierunkiem i zwrotem przyspieszenia.

e. Prędkość po czasie $t = 5{,}0\ \mathrm{s}$ w ruchu w dół może być wyznaczona dzięki Równaniu 3.15:

$$\begin{aligned} v &= v_0 - gt \\ &= 24{,}5\ \mathrm{m/s} - 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 5{,}0\ \mathrm{s} \\ &= -24{,}5\ \mathrm{s}. \end{aligned}$$

Znaczenie

Piłka powraca z prędkością o takiej samej wartości, z jaką została wyrzucona do góry. Jest to ogólna cecha każdego rzutu pionowego do góry z dowolną prędkością początkową. Zauważ, że mimo iż ruch piłki ma dwa etapy (wznoszenie i opadanie), to w kontekście równań ruchu potraktowaliśmy go w jednolity sposób. Użyliśmy tylko jednego ogólnego równania ruchu, bez dzielenia ruchu na etap w górę i etap w dół. Ponieważ tak zrobiliśmy, prędkość w ruchu w dół jest ujemna, co jest zgodne z założonym kierunkiem osi. Pamiętaj, że ruch ciała w górę (oddalanie od powierzchni) możemy traktować tak samo jak spadek swobodny (ruch w stronę powierzchni) w kontekście równań ruchu.



3.7 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Bryła lodu odrywa się od lodowca w Arktyce i spada pionowo w dół, pokonując dystans 30,0 m, zanim uderzy w taflę wody. Zakładając, że spadek jest swobodny (pomijamy opory), odpowiedz, po jakim czasie bryła wpadnie do wody? W jaki sposób szybkość i droga rosną z czasem?

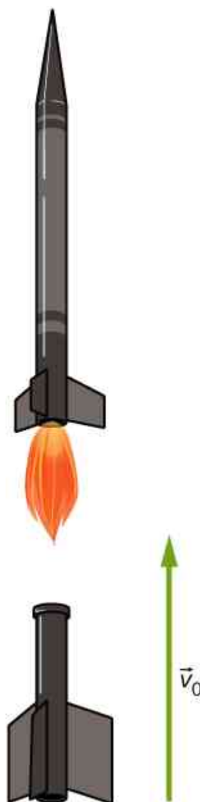
Przykład 3.16

Rakieta z boosterem

Mała rakieta do celów eksperymentalnych wyposażona jest w dodatkową rakietę wzmacniającą (ang. *booster*). Na wysokości 5,0 km i po osiągnięciu prędkości 200,0 m/s booster zostaje odrzucony i rakieta w dalszym locie już nie przyspiesza.

a. Na jaką maksymalną wysokość wzniesie się odrzucony booster?

b. Jaką prędkość ma booster na wysokości 6,0 km? Pomiń opory powietrza.



Rysunek 3.29 Po osiągnięciu pewnej wysokości i prędkości rakieta odrzuca dodatkowy człon przyspieszający. Jaką wysokość i prędkość on osiągnie?

Strategia rozwiązania

Wybieramy układ współrzędnych tak, aby przyspieszenie grawitacyjne skierowane w dół było ujemne. Znamy początkowe położenie i prędkość boostera, odpowiednio 5,0 km i 200,0 m/s w górę (booster porusza się ruchem jednostajnie opóźnionym z prędkością początkową). W punkcie odpalenia boostera zaczepiamy początek układu. Wiemy, że po osiągnięciu maksymalnej wysokości prędkość boostera spada do zera. Wykorzystując te dane, decydujemy się na wybór Równania 3.17, które pozwoli nam bezpośrednio obliczyć wysokość maksymalną. Z kolei Równanie 3.17 pozwoli nam znaleźć prędkość na wysokości 6,0 km.

Rozwiązanie

a. Do równania $v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0)$ w Równaniu 3.17 podstawiamy $v = 0, y_0 = 0$ i obliczamy y:

$$y = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{(200{,}0\,\mathrm{m/s})^2}{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} = 2\,038{,}7\,\mathrm{m}.$$

Ten wynik to wysokosć maksymalna boostera w wybranym przez nas układzie współrzędnych, którego początek przyjęliśmy w punkcie odrzucenia boostera. Całkowita wysokość maksymalna (liczona względem ziemi) wynosi ok. 7,0 km.

b. Wysokość całkowita 6,0 km nad ziemią oznacza $y = 1000\,\mathrm{m}$ w naszym układzie współrzędnych. Ponadto wiemy, że $y_0 = 0, v_0 = 200{,}0\,\mathrm{m/s}$.
Na podstawie Równania 3.17 mamy

$$v^2 = (200{,}0\,\mathrm{m/s})^2 - 2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 1000\,\mathrm{m} \implies v = \pm 142{,}8\,\mathrm{m/s}.$$

Znaczenie

Otrzymaliśmy dodatnie i ujemne rozwiązanie części (b). Ponieważ przyjęliśmy kierunek w górę jako dodatni kierunek osi układu współrzędnych, to wynik +142,8 m/s odpowiada prędkości boostera na wyso-

kości 6 000 m w ruchu w górę, natomiast wynik ujemny dotyczy sytuacji, gdy booster już spada po osiągnięciu wysokości maksymalnej. Oczywiście znajduje się on na wysokości 6 000 m dwukrotnie. Ten przykład jest ważny, bo pokazuje, że początek naszego układu współrzędnych możemy umieścić na dowolnej wysokości nad Ziemią, niekoniecznie na jej powierzchni. Musimy jednak być ostrożni i uwzględniać tę dodatkową wysokość w naszych obliczeniach. Moglibyśmy postąpić inaczej i przyjąć początek układu na powierzchni Ziemi (standardowo), ale wtedy do równań musielibyśmy dopisać wysokość początkową równą 5 000 m.

3.6 | Wyznaczanie równań ruchu metodą całkowania

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- wyprowadzać równania ruchu na podstawie stałego przyspieszenia z użyciem rachunku całkowego;
- używać całkowych równań ruchu w analizie ruchu ciał w jednym wymiarze;
- obliczać zależność prędkości od czasu na podstawie funkcji przyspieszenia od czasu;
- obliczać zależność położenia od czasu na podstawie funkcji prędkości od czasu.

Materiał zawarty w tej sekcji wymaga od ciebie znajomości podstaw rachunku całkowego. Przed przystąpieniem do lektury powinieneś nadrobić ewentualne braki. W rozdziałach Prędkość chwilowa i szybkość średnia oraz Przyspieszenie średnie i chwilowe wprowadziliśmy definicje prędkości i przyspieszenia, używając rachunku różniczkowego. Różniczkując funkcję położenia od czasu, otrzymaliśmy zależność prędkości od czasu. Podobnie, obliczając pochodną prędkości po czasie, dostaliśmy funkcję przyspieszenia od czasu. W tej sekcji, dzięki całkowaniu, przejdziemy drogę odwrotną. Znając przyspieszenie, obliczymy prędkość, a całkując po czasie jeszcze raz – położenie w funkcji czasu.

Obliczanie prędkości i położenia na podstawie przyspieszenia

Załóżmy, że znamy funkcję przyspieszenia od czasu $a(t)$. Wiemy, że przyspieszenie jest pochodną prędkości po czasie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v(t) = a(t).$$

Tę równość scałkujmy obustronnie po czasie. Otrzymujemy

$$\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v(t) \mathrm{d}t = \int a(t) \mathrm{d}t + C_1,$$

gdzie C_1 jest stałą całkowania (obliczamy całkę nieoznaczoną!). Ponieważ $\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v(t) \mathrm{d}t = v(t)$, na podstawie definicji całki, to prędkość jako funkcja czasu może być zdefiniowana przez

$$v(t) = \int a(t) \mathrm{d}t + C_1. \quad (3.18)$$

Podobnie prędkość jest pochodną położenia po czasie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = v(t).$$

Zatem, całkując to równanie, znajdziemy położenie w funkcji czasu

$$x(t) = \int v(t)\mathrm{d}t + C_2, \tag{3.19}$$

gdzie C_2 jest kolejną stałą całkowania.

Wykorzystamy teraz dwie powyższe całki do otrzymania kinematycznych równań ruchu ze stałym przyspieszeniem, które poznaliśmy w poprzednich sekcjach. Przyjmując, że $a(t) = a$ ma stałą w czasie wartość i obliczając całkę z Równania 3.18, otrzymujemy

$$v(t) = \int a\mathrm{d}t + C_1 = at + C_1.$$

Wartość stałej całkowania znajdziemy z tzw. warunków początkowych. Przyjmijmy, że prędkość początkowa $v(0) = v_0$. Wówczas

$$v_0 = 0 + C_1.$$

Zatem $C_1 = v_0$, a równanie prędkości jest następujące

$$v(t) = v_0 + at,$$

co odpowiada Równaniu 3.12. Podstawiając to wyrażenie do całki z Równania 3.19, otrzymujemy

$$x(t) = \int (v_0 + at)\mathrm{d}t + C_2.$$

Całka ta jest łatwa do obliczenia. Po obliczeniu całki otrzymujemy:

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 + C_2.$$

Stałą całkowania znów znajdziemy dzięki warunkowi początkowemu $x(0) = x_0$:

$$x_0 = 0 + 0 + C_2,$$

a więc $C_2 = x_0$. Podsumowując, kinematyczne równanie położenia $x(t)$ ma następującą postać

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2,$$

co jest z kolei zgodne z Równaniem 3.13.

Przykład 3.17

Ruch motorówki

Motorówka płynie ze stałą prędkością 5,0 m/s, kiedy zaczyna hamować, doznając przyspieszenia zależnego od czasu $a(t) = -\frac{1}{4}\mathrm{m}/\mathrm{s}^3 \cdot t$.

a. Jaką funkcją czasu jest prędkość motorówki?
b. W jakim momencie prędkość motorówki spada do zera?
c. Jaką funkcją czasu jest położenie motorówki?
d. O ile przemieszcza się motorówka od momentu rozpoczęcia hamowania (chwila początkowa równa 0) do chwili, w której prędkość motorówki spada do zera?
e. Narysuj zależności prędkości i położenia motorówki od czasu.

Strategia rozwiązania

a. Aby dostać funkcję prędkości, musimy scałkować przyspieszenie i wykorzystać warunki początkowe do znalezienia stałej.
b. Podstawimy prędkość końcową równą zero i obliczymy czas.
c. Podobnie do (a), scałkujemy prędkość po czasie i ustalimy stałą całkowania.
d. Ponieważ położenie początkowe przyjmujemy jako równe zero, wystarczy znaleźć położenie po czasie, po którym prędkość spada do zera.

Rozwiązanie

Przyjmujemy czas $t = 0$ jako chwilę początkową, w której motorówka zaczyna hamować.

a. Znaną zależność przyspieszenia od czasu wstawiamy do całki w Równaniu 3.18 i otrzymujemy $v(t)$:

$$v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t = \int -\frac{1}{4}\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}^3 \cdot t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{8}\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}^3 \cdot t^2 + C_1.$$

Dla $t = 0$ mamy $v(0) = 5\,\mathrm{m/s} = 0 + C_1$, więc $C_1 = 5\,\mathrm{m/s}$ oraz $v(t) = -\frac{1}{8}\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}^3 \cdot t^2 + 5{,}0\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}$.

b. $v(t) = -\frac{1}{8}\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}^3 \cdot t^2 + 5{,}0\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s} = 0 \Rightarrow t = 6{,}3\,\mathrm{s}$.

c. Rozwiązujemy Równanie 3.19:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int v(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int \left(-\frac{1}{8}\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}^3 \cdot t^2 + 5{,}0\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}\right)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{24}\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}^3 \cdot t^3 + 5{,}0\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s} \cdot t + C_2. \end{aligned}$$

Dla $t = 0$ możemy przyjąć $x(0) = x_0 = 0$, bo interesuje nas tylko przemieszczenie od miejsca, gdzie łódka zaczyna zwalniać. Mamy

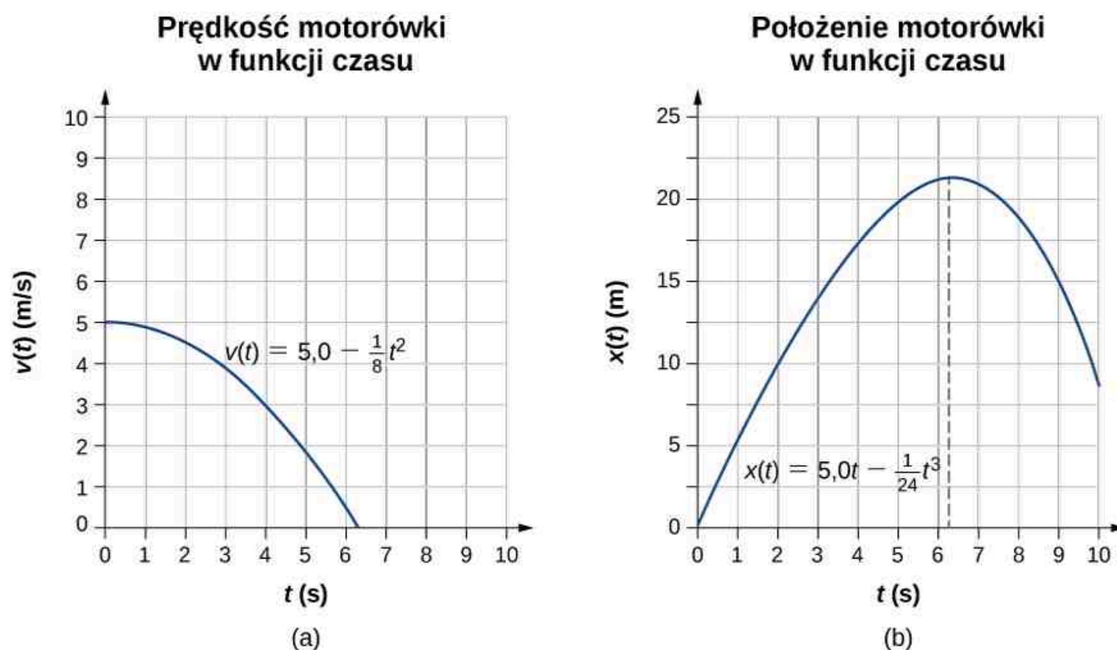
$$x(0) = 0 = C_2.$$

Dlatego równanie położenia jest następujące

$$x(t) = -\frac{1}{24}\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}^3 \cdot t^3 + 5{,}0\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s} \cdot t.$$

d. Ponieważ położenie początkowe jest zero, musimy tylko obliczyć wartość $x(t)$ dla czasu, gdy prędkość motorówki spada do zera. Ten czas wynosi $t = 6{,}3\,\mathrm{s}$. Zatem całkowite przemieszczenie motorówki do zatrzymania wynosi

$$x(6{,}3\,\mathrm{s}) = -\frac{1}{24}\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}^3 \cdot (6{,}3\,\mathrm{s})^3 + 5{,}0\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s} \cdot 6{,}3\,\mathrm{s} = 21{,}1\,\mathrm{m}.$$



Rysunek 3.30 (a) Prędkość motorówki jako funkcja czasu. Motorówka traci prędkość aż do zera po upływie 6,3 s. Po tym czasie prędkość motorówki zaczęłaby być ujemna, co oznacza, że motorówka zmieniłaby kierunek ruchu. (b) Położenie motorówki jako funkcja czasu. W $t = 6{,}3\text{ s}$ prędkość spada do zera i motorówka zatrzymuje się. Po tym czasie położenie zaczyna maleć w czasie, co oznacza, że motorówka cofałaby się w kierunku, z którego nadpłynęła.

Znaczenie

Przyspieszenie w tym przykładzie jest liniową funkcją czasu, dlatego całkowanie było proste. Na wykresach przedstawionych na Rysunku 3.30 widzimy, że po czasie, w którym motorówka zatrzymuje się, jej prędkość stałaby się ujemna, a położenie zaczęłoby maleć. To rozwiązanie jest poza naszym zainteresowaniem, ale matematycznie jest poprawne. Pamiętaj, aby zwracać uwagę na poprawną interpretację fizyczną wyników.



3.8 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Cząstka rusza z miejsca z przyspieszeniem zależnym od czasu jak $(5 - 10t)\ \text{m/s}^2$.

a. Jaka jest funkcja prędkości cząstki?

b. Jaka jest jej funkcja położenia?

c. Kiedy prędkość cząstki jest równa zeru?

PODSUMOWANIE ROZDZIAŁU 3

KLUCZOWE POJĘCIA

całkowite przemieszczenie (ang. total displacement) suma poszczególnych przemieszczeń, które zaszły w kolejnych chwilach czasu

całkowity czas ruchu (ang. elapsed time) różnica między czasem zakończenia ruchu i czasem początkowym

droga (ang. distance traveled) długość ścieżki (toru krzywo- lub prostoliniowego), po której ciało się przemieszczało

położenie (ang. position) miejsce w przestrzeni, gdzie w danej chwili znajduje się ciało

przemieszczenie (ang. displacement) zmiana położenia ciała

przyspieszenie chwilowe (ang. instantaneous acceleration) przyspieszenie w danej chwili czasu

przyspieszenie grawitacyjne (ang. acceleration due to gravity) przyspieszenie ciała w wyniku oddziaływania grawitacyjnego

przyspieszenie średnie (ang. average acceleration) szybkość zmian prędkości w czasie

prędkość chwilowa (ang. instantaneous velocity) prędkość cząstki w danej chwili czasu

prędkość średnia (ang. average velocity) przemieszczenie podzielone przez czas, w jakim ciało doznało przemieszczenia

spadek swobodny i rzut pionowy (ang. free fall) ruch ciała w powietrzu pod wpływem tylko przyspieszenia grawitacyjnego, z pominięciem oporu powietrza

szybkość chwilowa (ang. instantaneous speed) wartość bezwzględna prędkości chwilowej

szybkość średnia (ang. average speed) całkowita droga podzielona przez całkowity czas

zagadnienie kinematyki (ang. kinematics) opis ruchu przez analizę takich wielkości fizycznych jak położenie, czas, prędkość i przyspieszenie

zagadnienie pogoni i ucieczki dwóch ciał (ang. two-body pursuit problem) zagadnienie kinematyczne, w którym wspólną dla ruchu obu ciał niewiadomą obliczamy, rozwiązując układ dwóch sprzężonych równań ruchu, zapisanych dla każdego z ciał oddzielnie.

NAJWAŻNIEJSZE WZORY

Przemieszczenie	$\Delta x = x_k - x_0$
Całkowite przemieszczenie	$\Delta x_{\text{całk}} = \sum_i \Delta x_i$
Prędkość średnia	$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$
Prędkość chwilowa	$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$
Szybkość średnia	$v_{śr} = \frac{\text{Całkowita droga}}{\text{Całkowity czas}}$
Szybkość (wartość prędkości chwilowej)	$\lvert v(t) \rvert$
Przyspieszenie średnie	$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_k - v_0}{t_k - t_0}$
Przyspieszenie chwilowe	$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$
Równanie położenia	$x = x_0 + \overline{v} t$
Prędkość średnia	$\overline{v} = \frac{v_0 + v}{2} \quad (a = \text{const})$
Równanie prędkości	$v = v_0 + at \quad (a = \text{const})$
Równanie położenia	$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (a = \text{const})$
Zależność prędkości od położenia	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \quad (a = \text{const})$

Prędkość w rzucie pionowym	$v = v_0 - gt$ (oś do góry)
Wysokość w rzucie pionowym	$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$
Zależność prędkości od wysokości w rzucie pionowym	$v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0)$
Równanie całkowe prędkości	$v(t) = \int a(t)\mathrm{d}t + C_1$
Równanie całkowe położenia	$x(t) = \int v(t)\mathrm{d}t + C_2$

PODSUMOWANIE

3.1 Położenie, przemieszczenie, prędkość średnia

- Kinematyka zajmuje się opisem ruchu bez rozważania na temat jego przyczyn. W tym rozdziale ograniczamy się do opisu ruchu po linii prostej w jednym wymiarze, który nazywamy także ruchem prostoliniowym.
- Przemieszczenie jest zmianą położenia ciała. Jednostką przemieszczenia oraz położenia w układzie SI jest metr. Przemieszczenie jest wektorem – ma kierunek i zwrot oraz wartość.
- Droga jest długością toru, czyli krzywej, po której ciało porusza się między dwoma położeniami. W ruchu prostoliniowym jest to długość odcinka i może być obliczona jako suma długości przemieszczeń składowych ruchu.
- Czas trwania ruchu ciała jest różnicą chwil, w których ciało znajdowało się w dwóch położeniach x_1 i x_2, co określamy jako zmianę $\Delta t = t_2 - t_1$. Całkowity czas ruchu to różnica $\Delta t = t_k - t_0$, gdzie t_k jest chwilą końcową, a t_0 jest chwilą początkową. Chwilę początkową często przyjmujemy równą zero. Oznacza to, że zaczynamy nasz pomiar czasu w chwili rozpoczęcia ruchu.
- Prędkość średnia $\bar{v}$ jest zdefiniowana jako całkowite przemieszczenie podzielone przez całkowity czas. Jeśli położenie i czas w dwóch punktach wynoszą x_1, t_1 oraz x_2, t_2, to prędkość średnia między tymi punktami wynosi

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

3.2 Prędkość chwilowa i szybkość średnia

- Prędkość chwilowa jest ciągłą funkcją czasu i daje informację o wektorze prędkości cząstki w dowolnym punkcie i dowolnej chwili w jej ruchu. Możemy obliczyć prędkość chwilową jako pochodną po czasie zależności położenia od czasu. W efekcie otrzymujemy ogólną zależność funkcyjną $v(t)$, która w dalszej kolejności pozwala znaleźć prędkość w danej chwili czasu.
- Prędkość chwilowa jest wektorem i może być ujemna w zależności od przyjętego układu współrzędnych.
- Szybkość chwilowa (po prostu: szybkość) jest wartością prędkości chwilowej i jest zawsze nieujemna. W ruchu prostoliniowym jest to po prostu wartość bezwzględna prędkości.
- Szybkość średnia jest dana przez stosunek całkowitej drogi i całkowitego czasu potrzebnego do pokonania tej drogi.
- Nachylenie stycznej do krzywej zależności położenia od czasu w danym punkcie daje prędkość chwilową w tej chwili czasu.

3.3 Przyspieszenie średnie i chwilowe

- Przyspieszenie wyraża to, jak szybko zmienia się w czasie prędkość ciała. Przyspieszenie jest wektorem – ma kierunek, zwrot i wartość. Jednostką przyspieszenia w układzie SI jest metr na sekundę do kwadratu.
- Przyspieszenie może być wywołane zmianą wartości prędkości, ale też kierunku lub zwrotu albo wszystkich tych cech jednocześnie.
- Przyspieszenie chwilowe $a(t)$ jest ciągłą funkcją czasu i podaje wielkość przyspieszenia w dowolnej chwili czasu w trakcie ruchu. Obliczamy je jako pochodną prędkości po czasie. Przyspieszenie chwilowe może też być zdefiniowane graficznie jako nachylenie stycznej do funkcji prędkości od czasu.
- Ujemne przyspieszenie (nazywane też opóźnieniem) jest przyspieszeniem w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu ciała.

3.4 Ruch ze stałym przyspieszeniem

- Gdy analizujesz prostoliniowy ruch ciała ze stałym przyspieszeniem, określ dobrze, jakie są dane i co masz obliczyć, następnie wybierz odpowiednie równanie ruchu i je rozwiąż ze względu na niewiadomą. W zależności od liczby niewiadomych musisz użyć jednego lub dwóch równań ruchu.
- W zagadnieniu pogoni i ucieczki dwóch ciał zawsze musisz zapisać dwa zestawy równań ruchu – dla każdego z ciał osobno – i zidentyfikować wspólne parametry.

3.5 Spadek swobodny i rzut pionowy

- Ciało w spadku swobodnym i rzucie pionowym doznaje przyspieszenia o stałej wartości i pionowym kierunku, jeśli pomijamy opory powietrza.
- Na Ziemi ciała doznają przyspieszenia grawitacyjnego g o uśrednionej wartości $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$.
- Zazwyczaj przyjmujemy kierunek pionowy jako dodatni dla położenia, przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia ciała w ruchu w polu grawitacyjnym.

3.6 Wyznaczanie równań ruchu metodą całkowania

- Dzięki rachunkowi całkowemu otrzymujemy bardziej uniwersalne sformułowanie kinematyki.
- Jeśli funkcja przyspieszenia $a(t)$ jest znana, poprzez całkowanie możemy znaleźć także funkcje prędkości $v(t)$ i położenia $x(t)$.
- Jeśli przyspieszenie jest stałe w czasie, otrzymujemy Równanie 3.12 i Równanie 3.13 znane dla ruchu ze stałym przyspieszeniem.

PYTANIA

3.1 Położenie, przemieszczenie, prędkość średnia

1. Podaj przykład ruchu, w którym droga, przemieszczenie i jego długość są wyraźnie inne. Zdefiniuj i oblicz te wielkości w twoim przykładzie.

2. W jakich sytuacjach droga pokonana przez ciało jest równa długości jego przemieszczenia? Co jest jedynym możliwym przypadkiem, kiedy przemieszczenie i jego wartość są dokładnie takie same?

3. Bakterie mogą poruszać się tam i z powrotem, używając wici (są to małe struktury przypominające rzęski lub ogonki, przy pomocy których bakteria może się odpychać i przemieszczać). Zaobserwowano, że szybkość (wartość prędkości) bakterii może wynosić nawet $50\ \mu\mathrm{m/s}$ $(50 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m/s})$. Całkowita droga, jaką w swoim ruchu może pokonać jedna bakteria, jest olbrzymia, podczas gdy jej wypadkowe przemieszczenie jest niewielkie. Dlaczego tak jest?

4. Podaj przykład urządzenia, które może służyć do pomiaru czasu. Zidentyfikuj, która jego cecha podlega zmianom, co może być wykorzystane do pomiaru czasu.

5. Czy licznik samochodowy mierzy drogę, czy długość przemieszczenia?

6. W pewnym przedziale czasu średnia prędkość ciała wynosi zero. Co możesz powiedzieć o przemieszczeniu ciała w tym czasie?

3.2 Prędkość chwilowa i szybkość średnia

7. W fizyce wyraźnie rozróżniamy szybkość średnią od wartości prędkości średniej. Podaj przykład ilustrujący różnice między tymi wielkościami.

8. Czy prędkościomierz w twoim samochodzie mierzy szybkość czy prędkość?

9. Jeśli podzielisz wartość wskazywaną przez licznik twojego samochodu w podróży na wakacje przez całkowity czas jazdy, to obliczysz średnią szybkość czy wartość średniej prędkości? W jakiej sytuacji te dwie wielkości byłyby równe?

10. Jak są ze sobą związane prędkość chwilowa i szybkość chwilowa? Czym się różnią?

3.3 Przyspieszenie średnie i chwilowe

11. Czy jest możliwe, aby szybkość w ruchu po linii prostej była stała w chwili, gdy przyspieszenie jest różne od zera?

12. Czy jest możliwe, aby prędkość była stała, gdy przyspieszenie jest niezerowe? Wyjaśnij.

13. Podaj przykład ruchu, w którym prędkość jest zero, mimo że przyspieszenie jest różne od zera.

14. Jeżeli pociąg metra, zbliżając się do stacji, porusza się w lewo (ma ujemną prędkość, bo przyjmujemy

dodatni kierunek w prawo), to jaki jest kierunek jego przyspieszenia? Czy przyspieszenie jest dodatnie czy ujemne?

15. W ruchu prostoliniowym używamy sformułowań „dodatni, ujemny” do określenia kierunku (np. ruchu lub wektora). Jaki jest znak przyspieszenia, które powoduje zmniejszenie wartości ujemnej prędkości (w ruchu w lewo)? A w przypadku dodatniej prędkości (ruch w prawo)?

3.4 Ruch ze stałym przyspieszeniem

16. Jaka jest wymagana liczba znanych wielkości fizycznych, aby w ruchu jednowymiarowym móc obliczyć niewiadome na podstawie kinematycznych równań?

17. Podaj dwa scenariusze problemów kinematycznych pojedynczego ciała, w których, mając trzy dane, musisz użyć dwóch równań ruchu, aby obliczyć niewiadome.

3.5 Spadek swobodny i rzut pionowy

18. Jakiego przyspieszenia doznaje kamień rzucony pionowo do góry podczas wznoszenia się? Jakiego po osiągnięciu maksymalnej wysokości? Załóż brak oporów powietrza.

19. Ciało rzucone pionowo do góry spada z powrotem na ziemię.

a. Kiedy jego prędkość wynosi zero?
b. Czy prędkość zmienia kierunek?
c. Czy przyspieszenie ciała ma ten sam kierunek w jego ruchu do góry i w dół?

20. Załóżmy, że próbujesz strącić kamieniem owoc palmy kokosowej. Rzucasz niemal pionowo do góry tak, że kamień w locie wznoszącym tylko ociera się o kokos, ale trafia w niego podczas opadania. Pomiń opór powietrza i małe odchylenie od pionu kierunku lotu kamienia. Jak porównasz wartości prędkości kamienia w locie w dół, gdy trafia on kokos, oraz w locie wznoszącym, gdy tylko mija owoc? Wyjaśnij, czy łatwiej strącić owoc z palmy kamieniem wznoszącym się czy opadającym?

21. Dotkliwość skutków spadku swobodnego zależy od tego, z jaką prędkością końcową ciało upada na ziemię. Z o ile większej wysokości można upuścić ciało na Księżycu niż na Ziemi, aby było tak samo bezpieczne podczas upadku? Załóż, że tylko przyspieszenie grawitacyjne na Księżycu jest inne niż na Ziemi (jest sześciokrotnie mniejsze).

22. Ile razy wyżej może skoczyć astronauta na Księżycu, gdzie panuje 6 razy mniejsze przyspieszenie grawitacyjne niż na Ziemi, przy tej samej prędkości początkowej?

3.6 Wyznaczanie równań ruchu metodą całkowania

23. Gdy znasz zależność przyspieszenia od czasu i chcesz obliczyć funkcję prędkości i położenia w czasie to jakich dodatkowych informacji potrzebujesz?

ZADANIA

3.1 Położenie, przemieszczenie, prędkość średnia

24. Rozważ układ współrzędnych, którego dodatni kierunek osi x jest pionowo do góry. Jakie jest położenie cząstki w miejscu (a) 5,0 m dokładnie ponad początkiem układu, oraz (b) 2,0 m poniżej początku układu?

25. W chwili $t = 0$ samochód znajduje się 2,0 km na wschód od świateł, a w późniejszej chwili $t = 6$ min jest już 5,0 km za światłami, na zachód od skrzyżowania. Przyjmij, że początek układu współrzędnych znajduje się w miejscu ustawienia świateł oraz że dodatni kierunek osi x jest na wschód.

a. Jakie są wektory położenia samochodu w tych dwóch sytuacjach?
b. Jakie jest przemieszczenie samochodu pomiędzy chwilą początkową a końcową?

26. Połączenie Kraków Główny – Warszawa Centralna obsługiwane jest przez pociąg Pendolino. Odległość 293 km między stacjami pokonuje on w 2 godz. i 18 min. Z jaką średnią szybkością jedzie Pendolino na tej trasie? (Szybkość średnia jest stosunkiem całkowitej drogi i całkowitego czasu ruchu.)

27. Położenie cząstki, poruszającej się wzdłuż osi x, zmienia się w czasie zgodnie z funkcją $x(t) = (4{,}0 - 2{,}0\,t)\text{m}$.

a. W jakiej chwili czasu cząstka przecina początek układu współrzędnych?
b. Jakiego przemieszczenia doznaje cząstka pomiędzy chwilami $t = 3{,}0$ s oraz $t = 6{,}0$ s?

28. Rowerzysta przez 20 min jedzie na wschód i przebywa drogę 8,0 km, po czym zawraca na zachód i przez 8 min pokonuje dystans 3,2 km. W końcu znowu jedzie na wschód na odległość 16 km, co zajmuje mu 40 min.

a. Jakie jest całkowite przemieszczenie rowerzysty?
b. Jaka jest jego prędkość średnia?

29. 15 lutego 2013 roku nad Czelabińskiem w Rosji meteor (o jasności większej niż Słońce) wszedł w atmosferę ziemską i na wysokości ok. 23,5 km eksplodował. Świadkowe zdarzenia odczuli wyraźny podmuch gorąca,

a fala uderzeniowa wybiła szyby w oknach wielu budynków. Fala uderzeniowa dotarła do powierzchni Ziemi po ok. 2 min 30 s.

a. Oszacuj szybkość średnią fali.

b. Porównaj wynik z szybkością dźwięku, która wynosi 343 m/s.

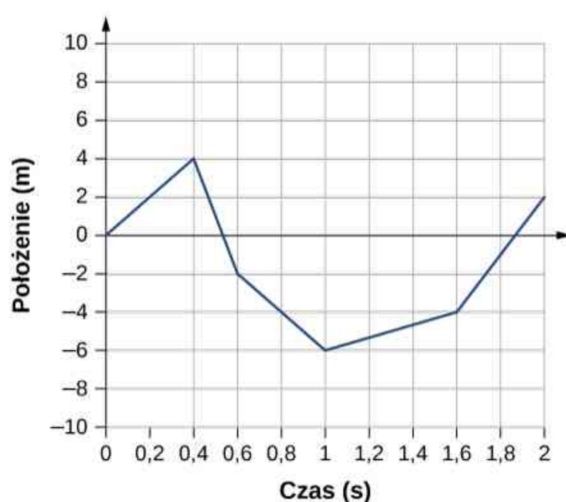
3.2 Prędkość chwilowa i szybkość średnia

30. Sarna nadbiega w stronę ulicy i dystans 20 m pokonuje w 5 s. Następnie zawraca tuż przez samochodem i odskakuje na 10 m w ciągu 3 s.

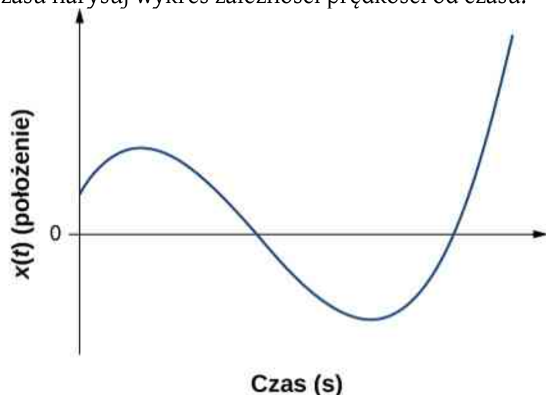
a. Jaka jest średnia szybkość sarny?

b. Jaka jest jej średnia prędkość?

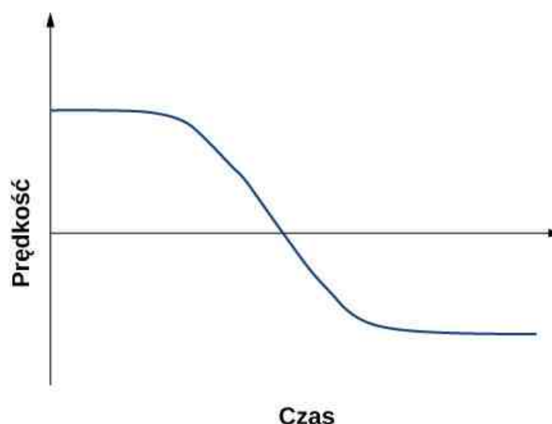
31. Na podstawie poniższego wykresu położenia od czasu narysuj wykres zależności prędkości od czasu.



32. Na podstawie poniższego wykresu położenia od czasu narysuj wykres zależności prędkości od czasu.



33. Mając do dyspozycji wykres zależności prędkości od czasu, narysuj zależność położenia od czasu.



34. Położenie cząstki w czasie zmienia się jak $x(t) = 5t\text{ m}$.

a. Jaką funkcją czasu jest prędkość cząstki?

b. Narysuj wykresy zależności prędkości oraz położenia od czasu.

35. Cząstka porusza się wzdłuż osi x zgodnie z równaniem $x(t) = \left(10t - 2t^2\right)\text{ m}$.

a. Jaka jest prędkość chwilowa cząstki w $t = 2\text{ s}$ oraz $t = 3\text{ s}$?

b. Jaką szybkość ma cząstka w tych momentach?

c. Jaką średnią prędkość ma cząstka pomiędzy $t = 2\text{ s}$ i $t = 3\text{ s}$?

36. **Niefizyczne rozwiązanie.** Cząstka porusza się wzdłuż osi x zgodnie z równaniem położenia $x(t) = \left(3t^3 + 5t\right)\text{ m}$. W jakiej chwili czasu prędkość cząstki spada do zera? Czy ten wynik ma sens fizyczny?

3.3 Przyspieszenie średnie i chwilowe

37. Gepard potrafi się rozpędzić do prędkości 30,0 m/s w czasie 7 s. Jakie jest jego przyspieszenie? Czy jest to przyspieszenie chwilowe czy średnie?

38. Dr ppłk John Stapp był oficerem armii USA, który studiował wpływ ekstremalnych przyspieszeń na ludzkie ciało. 10 grudnia 1954 roku przeprowadził eksperyment, w którym zasiadając w saniach rakietowych, doznał przyspieszenia od spoczynku do prędkości 282 m/s (1015 km/h) w czasie 5,00 s, a następnie gwałtownie zahamował do zatrzymania tylko w 1,40 s. Oblicz jego

a. przyspieszenie w kierunku ruchu,

b. przyspieszenie przeciwne do kierunku ruchu. Wyraź wyniki poprzez wielokrotność g ($9{,}81\text{ m/s}^2$).

39. Na podstawie poniższego wykresu zależności prędkości od czasu narysuj zależność przyspieszenia od czasu.



40. Kierowca wyjeżdża z garażu z przyspieszeniem $1{,}40\ \mathrm{m/s^2}$.
a. Po jakim czasie uzyska prędkość o wartości 2,00 m/s?
b. Jeśli teraz wciśnie hamulec i po czasie 0,800 s zatrzyma się, to jakie będzie jego przyspieszenie?

41. Rozważ rakietę balistyczną o zasięgu międzykontynentalnym, która może od stanu spoczynku osiągnąć prędkość suborbitalną 6,50 km/s w czasie 60,0 s (autentyczne dane techniczne rakiet są tajne). Jakie jest średnie przyspieszenie rakiety wyrażone w metrach na sekundę kwadratową oraz w jednostkach g ($9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$)?

42. Samolot rozpędza się na pasie startowym przez 18 s ze stałym przyspieszeniem, a przy prędkości o wartości 60 m/s odrywa się od pasa. Jakie jest średnie przyspieszenie samolotu?

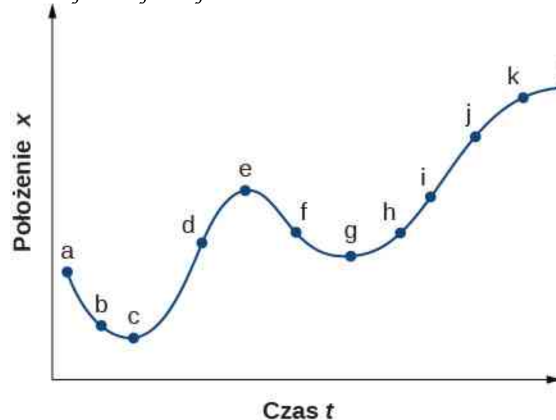
3.4 Ruch ze stałym przyspieszeniem

43. Cząstka porusza się po linii prostej ze stałą prędkością 30,0 m/s. Jakiego przemieszczenia doznaje ona do piątej sekundy ruchu?

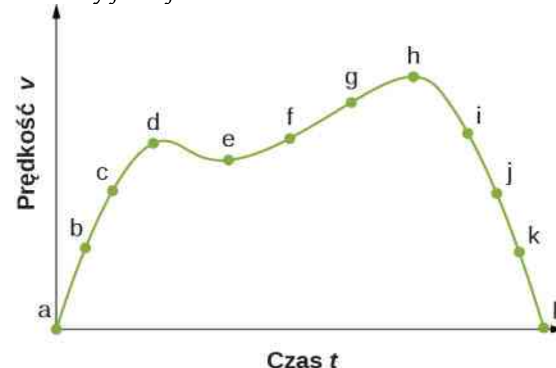
44. Cząstka porusza się ruchem prostoliniowym ze stałym przyspieszeniem $30\ \mathrm{m/s^2}$. Jeżeli w czasie $t = 0$, $x = 0$ i $v = 0$, to jakie jest położenie cząstki w chwili $t = 5\ \mathrm{s}$?

45. Cząstka porusza się ruchem prostoliniowym z prędkością początkową 30 m/s i stałym przyspieszeniem $30\ \mathrm{m/s^2}$.
a. Jakie jest jej przemieszczenie do chwili $t = 5\ \mathrm{s}$?
b. Jaka jest wtedy jej prędkość?

46. a. Na podstawie wykresu położenia od czasu naszkicuj zależność prędkości od czasu.
b. Podaj czas (lub czasy, np. t_a, t_b, t_c itd.), gdy prędkość chwilowa ma największą wartość dodatnią.
c. W jakich chwilach prędkość jest zero?
d. W jakich jest ujemna?



47. a. Narysuj zależność przyspieszenia od czasu, znając przebieg zależności prędkości od czasu.
b. Określ czasy (np. t_a, t_b, t_c itd.), dla których przyspieszenie ma największą dodatnią wartość.
c. Kiedy przyspieszenie jest zero?
d. Kiedy jest ujemne?



48. Cząstka ma stałe przyspieszenie $6{,}0\ \mathrm{m/s^2}$.
a. Jeśli jej prędkość początkowa ma wartość 2,0 m/s, to po jakim czasie przemieści się ona o 5,0 m?
b. Jaką wtedy ma prędkość?

49. W chwili $t = 10{,}0\ \mathrm{s}$ cząstka porusza się w prawo z szybkością 5,0 m/s. Z kolei w chwili $t = 20{,}0\ \mathrm{s}$ cząstka porusza się w lewo z szybkością 8,0 m/s. Zakładając stałą wartość przyspieszenia, określ
a. przyspieszenie cząstki,
b. prędkość początkową cząstki oraz
c. moment czasu, kiedy cząstka zatrzymuje się i zawraca.

50. Zawodnik łapie piłkę baseballową w rękawicę. Jeżeli opóźnienie piłki hamowanej w rękawicy wynosi $2{,}10 \cdot 10^4\ \mathrm{m/s^2}$, a od chwili zetknięcia piłki z rękawicą do całkowitego jej zatrzymania upływa 1,85 ms ($1\ \mathrm{ms} = 10^{-3}\ \mathrm{s}$), to z jaką prędkością piłka wpadała do rękawicy?

51. Kulka jest przyspieszana w lufie pistoletu w tempie $6{,}20 \cdot 10^5\ \mathrm{m/s^2}$ w czasie $8{,}10 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{s}$. Jaka jest prędkość wylotowa kulki (tzn. prędkość końcowa w ruchu przyspieszonym wewnątrz lufy)?

52. a. Niewielka kolejka podmiejska przyspiesza w tempie 1,35 m/s^2. Jak długo zajmuje jej rozpędzenie się do swojej maksymalnej prędkości 80 km/h?
b. Ta sama kolejka może hamować z przyspieszeniem o wartości 1,65 m/s^2. Jak długo trwa zatrzymywanie kolejki rozpędzonej do prędkości maksymalnej?
c. W sytuacjach awaryjnych motorniczy może użyć hamulca bezpieczeństwa, dzięki czemu kolejka od prędkości maksymalnej zatrzymuje się w 8,30 s. Jakie opóźnienie daje hamulec bezpieczeństwa?

53. Podczas włączania się do ruchu na autostradzie samochód przyspiesza w tempie $2{,}04\ \mathrm{m/s^2}$ przez 12,0 s od spoczynku.
a. Naszkicuj tę sytuację.
b. Wypisz wszystkie dane.
c. Jaki dystans pokona samochód w czasie 12,0 s? Przy rozwiązywaniu, najpierw zdefiniuj niewiadomą, potem wybierz równanie ruchu, którego użyjesz, a następnie zapisz wszystkie kroki rozwiązania. Na końcu sprawdź zgodność jednostek i przeprowadź dyskusję fizycznej poprawności wyniku.
d. Jaka jest prędkość końcowa samochodu? Rozwiąż to zadanie, wykonując te same kroki co w punkcie (c).

54. **Niefizyczny wynik** Po minięciu linii mety biegaczka zwalnia od prędkości 9,00 m/s w tempie $2{,}00\ \mathrm{m/s^2}$.
a. Jaki dystans pokona ona po czasie 5,00 s?
b. Jaka jest wtedy jej prędkość końcowa?
c. Oceń wyniki. Czy mają one sens fizyczny?

55. Lewa komora serca wyrzuca krew do aorty, nadając jej prędkość 30,0 cm/s na dystansie 1,80 cm.
a. Naszkicuj tę sytuację.
b. Wypisz dane.
c. Ile czasu trwa wyrzut krwi? Dokonaj rozwiązania z uwzględnieniem wszystkich kroków, tak jak w rozwiązanych w sekcji przykładach.
d. Czy wynik jest sensowny w porównaniu z czasem skurczu serca, wyliczonym na podstawie typowego pulsu człowieka?

56. W trakcie uderzenia krążka kijem do hokeja krążek przyspiesza od prędkości 8,00 m/s do 40,0 m/s wzdłuż tej samej prostej. Jeżeli uderzenie trwa $3{,}33 \cdot 10^{-2}$ s (jest to czas trwania kontaktu kija z krążkiem), to na jakim dystansie krążek jest rozpędzany przy pomocy kija?

57. Supersportowy motocykl (ścigacz) może przyspieszać od 0 do 100 km/h (26,8 m/s) w czasie tylko 3,90 s.
a. Jakie jest średnie przyspieszenie motocykla?
b. Jaką drogę pokonuje motocykl w tym czasie?

58. Pociąg towarowy ma stosunkowo małe przyspieszenie.
a. Jaką prędkość końcową osiąga pociąg, który przyspiesza od prędkości początkowej 4,00 m/s w czasie 8,00 min z przyspieszeniem $0{,}0500\ \mathrm{m/s^2}$?
b. Jeśli pociąg hamuje z przyspieszeniem $0{,}550\ \mathrm{m/s^2}$, to ile czasu zajmie mu zatrzymanie się?
c. Jaką drogę pokona w tym czasie?

59. Rakieta z ładunkiem sztucznych ogni jest wystrzelona z ziemi i po pokonaniu 0,250 m ma już prędkość maksymalną o wartości 65,0 m/s, z którą wznosi się dalej.
a. Oblicz przyspieszenie rakiety
b. i czas jej lotu do uzyskania prędkości końcowej.

60. Łabędź energicznie macha skrzydłami i „biegnie” po wodzie, aby wzbić się z powietrze z tafli jeziora.
a. Jeżeli poruszając się z przyspieszeniem $0{,}35\ \mathrm{m/s^2}$, musi on osiągnąć prędkość 6,00 m/s, aby unieść się w powietrze, to jaki dystans w poziomie pokona, zanim się wzbije do lotu?
b. Ile czasu to trwa?

61. Czaszka dzięcioła jest specjalnie skonstruowana tak, by chronić mózg ptaka przed dużymi przeciążeniami w trakcie energicznego uderzania w drzewo. Podczas pojedynczego uderzenia głowa dzięcioła zatrzymuje się od prędkości początkowej 0,600 m/s na dystansie tylko 2,00 mm.
a. Znajdź wielkość przyspieszenia, jakiego doznaje głowa dzięcioła, i wyraź ją w metrach na sekundę kwadratową oraz w jednostkach $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$.
b. Oblicz czas do zatrzymania.
c. Ścięgna utrzymujące mózg w czaszce dzięcioła mogą się rozciągnąć tak, że droga hamowania głowy dzięcioła podczas jego pracy wydłuża się do 4,50 mm (mózg doznaje wtedy mniejszego przeciążenia). Jakie wtedy jest przyspieszenie wyrażone w jednostkach g?

62. Nieuważny napastnik wpada z szybkością 7,50 m/s na bramkarza drużyny przeciwnej i zatrzymuje się, odpychając go o 0,350 m.
a. Jakiego doznaje wtedy przyspieszenia?
b. Jaki czas trwa zderzenie?

63. Podczas zrzutu samolotowego ładunek ląduje w lesie i zatrzymuje się na gałęziach drzew. Jeśli założyć, że szybkość ładunku w momencie zetknięcia z drzewami wynosi 54 m/s (194,4 km/h), a gałęzie hamują ładunek na drodze 3,0 m, to jakiego przyspieszenia on doznaje?

64. Pociąg ekspresowy mija stację, na której się nie zatrzymuje. Wjeżdża na peron z prędkością 22,0 m/s i zwalnia ze stałym opóźnieniem $0{,}150\ \mathrm{m/s^2}$. Długość stacji to 210,0 m.
a. Jaką szybkość ma pociąg, gdy opuszcza stację?
b. Jak długo przód pociągu przejeżdża przez stację?
c. Jeżeli długość pociągu wynosi 130,0 m, z jaką szybkością opuszcza stację ostatni wagon?
d. Po jakim czasie koniec pociągu opuści stację?

65. **Niefizyczne rozwiązanie** Dragster może rozpędzić się do swojej maksymalnej prędkości 145,0 m/s w czasie tylko 4,45 s.

a. Oblicz średnie przyspieszenie dragstera.
b. Oblicz prędkość końcową dragstera ruszającego od startu z obliczonym w (a) przyspieszeniem w wyścigu na 1/4 mili (402,0 m), nie korzystając z informacji o czasie.
c. Dlaczego obliczona prędkość końcowa jest większa niż prędkość maksymalna dragstera? *Wskazówka*: Zastanów się, czy założenie stałego przyspieszenia na całej długości toru jest prawidłowe. Jeśli nie, to odpowiedz sobie na pytanie, czy przyspieszenie jest większe na początku czy na końcu i jak to wpływa na prędkość końcową.

3.5 Spadek swobodny i rzut pionowy

66. Oblicz położenia i prędkości piłki rzuconej pionowo z prędkością 15,0 m/s w chwilach
a. 0,500 s,
b. 1,00 s,
c. 1,50 s,
d. oraz 2,00 s.

Za wysokość początkową przyjmij $y_0 = 0$.

67. Most Verrazano-Narrows w Nowym Jorku jest jednym z największych mostów drogowych na świecie. Wysokość pasa drogowego nad lustrem wód zatoki Hudsona wynosi 70 m. Oblicz położenia i prędkości kamienia rzuconego pionowo w dół z mostu z prędkością 14,0 m/s, liczone od miejsca wyrzutu, po
a. 0,500 s,
b. 1,00 s,
c. 1,50 s,
d. 2,00 s,
e. i 2,50 s.

68. Sędzia meczu koszykówki rozpoczyna akcję po faulu rzutem sędziowskim. Z jaką szybkością koszykarz musi wybić się z parkietu, jeśli chce złapać piłkę, będąc na wysokości 1,25 m nad parkietem?

69. Śmigłowiec ratunkowy wisi nad wywróconym na morzu jachtem. Jeden z ratowników zrzuca w kierunku ofiary pływającej w wodzie kosz ratowniczy, nadając mu prędkość 1,40 m/s, i zauważa, że dociera on do powierzchni wody po 1,8 s.
a. Wypisz wszystkie znane wielkości.
b. Na jakiej wysokości nad wodą wisi śmigłowiec?

70. **Niefizyczny wynik** Podczas pokazu w oceanarium delfin wyskakuje z wody z szybkością 15,0 m/s.
a. Jak wysoko nad powierzchnię wody uniesie się delfin?
b. Jak długo delfin przebywa w powietrzu? Zaniedbaj opór powietrza. Na każdym etapie rozwiązywania zadania określ dane i szukane, wybierz odpowiednie równanie ruchu, a po obliczeniu wartości niewiadomych dokonaj analizy wymiarowej i oceń sensowność wyniku.

71. Zawodnik skoków do wody wybija się z rampy pionowo do góry i w pozycji pionowej nogami w dół wpada do basenu. Rampa znajduje się 1,80 m nad wodą, a prędkość wybicia skoczka to 4,00 m/s.
a. Jaka jest maksymalna wysokość w locie skoczka (jego stóp) do góry?
b. Przez jaki całkowity czas jego stopy znajdują się w powietrzu?
c. Z jaką prędkością jego stopy przebijają lustro wody?

72. a. Oblicz wysokość klifu, z którego kamień rzucony pionowo w górę z prędkością 8,00 m/s osiąga dno klifu po 2,35 s.
b. Po jakim czasie kamień by spadł, gdyby był rzucony w dół z tą samą prędkością?

73. Silny, ale dość nierozważny kulomiot rzuca kulą pionowo do góry z szybkością 11,0 m/s. Ile czasu ma kulomiot na ucieczkę z koła, jeśli punkt wyrzutu kuli znajduje się na wysokości 2,20 m, a sam zawodnik ma 1,80 m wysokości?

74. Rzucasz piłką pionowo do góry z prędkością 15,0 m/s. Piłka w locie w górę mija gałąź na wysokości 7,0 m. Ile czasu upłynie, zanim piłka kolejny raz minie tę samą gałąź w locie w dół?

75. Kangur potrafi przeskoczyć przeszkodę o wysokości nawet 2,50 m.
a. Zakładając tylko ruch w pionie kangura, oblicz jego prędkość początkową w chwili odbicia od ziemi.
b. Jak długo kangur przebywa w powietrzu?

76. W drodze od Czarnego Stawu na Rysy turysta słyszy, że z grani położonej 105,0 m powyżej odrywa się kamień. Dostrzega go jednak dopiero 1,50 s później.
a. Na jakiej wysokości nad turystą jest jeszcze kamień w chwili, gdy turysta go dostrzega?
b. Ile czasu zostaje jeszcze turyście, aby się uchylić od uderzenia kamieniem w głowę?

77. Ze ściany skalnej w dolinie Dunajca na wysokości 250,0 m odrywa się kamień.
a. Z jaką szybkością kamień przetnie wody Dunajca?
b. Przyjmując czas reakcji turystów uczestniczących w spływie tratwą równy 0,300 s, oblicz, ile czasu turyści mają na uniknięcie uderzenia od momentu, gdy usłyszą trzask odrywanego kamienia. Szybkość dźwięku tego dnia wynosiła 335,0 m/s. Zaniedbaj różnicę wysokości wynikającą ze wzrostu turystów, która jednak z powodzeniem i tak mogłaby być pominięta.

3.6 Wyznaczanie równań ruchu metodą całkowania

78. Przyspieszenie cząstki zmienia się w czasie jak funkcja $a(t) = pt^2 - qt^3$, gdzie p i q są stałymi. W chwili początkowej położenie i prędkość są równe zero.
a. Jaką funkcją czasu jest prędkość?
b. Jaką funkcją czasu jest położenie?

79. W przedziale czasu między $t = 0$ i $t = t_1$ rakieta wznosi się do góry z przyspieszeniem $a(t) = A - Bt^{1/2}$, gdzie A i B są stałymi.

a. Jeżeli x mierzymy w metrach, a t w sekundach, jakie jednostki mają A i B ?
b. Jeśli prędkość początkowa rakiety była zerowa, to jak zmienia się ona pomiędzy $t = 0$ i $t = t_1$?
c. Jeśli początkowe położenie rakiety wynosi zero, to jaką funkcją jest w tym samym przedziale czasu położenie?

80. Prędkość cząstki poruszającej się wzdłuż osi x zmienia się w przedziale czasu $1{,}0\,\mathrm{s} \leqslant t \leqslant 8{,}0\,\mathrm{s}$ jak $v(t) = A + Bt^{-1}$, gdzie $A = 2\,\mathrm{m/s}$, $B = 0{,}25\,\mathrm{m}$. Znajdź przyspieszenie i położenie cząstki w chwilach $t = 2{,}0\,\mathrm{s}$ i $t = 5{,}0\,\mathrm{s}$. Załóż, że $x(t = 1\,\mathrm{s}) = 0$.

81. Cząstka, która w chwili początkowej spoczywa w początku układu współrzędnych, nagle rusza z prędkością zależną od czasu jak $v(t) = 3{,}2t$. W piątej sekundzie ruchu zależność prędkości cząstki od czasu zmienia się na funkcję $v(t) = 16{,}0 - 1{,}5\,(t - 5{,}0)$. Ten spadek prędkości zachodzi aż do jedenastej sekundy ruchu, od której prędkość ustala się na poziomie 7,0 m/s.
a. Jak przyspieszenie cząstki zależy od czasu?
b. Jakie jest położenie cząstki w chwilach $t = 2{,}0\,\mathrm{s}$, $t = 7{,}0\,\mathrm{s}$ i $t = 12{,}0\,\mathrm{s}$?

ZADANIA DODATKOWE

82. Zawodowy łapacz drużyny baseballowej może przyjąć piłkę pędzącą z prędkością 160,0 km/h. Jak długo leci piłka rzucona z taką prędkością z bazy odległej o 18,4 m? Porównaj ten czas ze średnim czasem reakcji człowieka na bodziec wzrokowy, który wynosi ok. 0,25 s. Załóż, że ruch piłki jest prostoliniowy.

83. Pierwszy samolot pokonuje dystans 3000 km z Chicago do Los Angeles w 5,0 h. O pół godziny krócej trwa lot drugiego samolotu. Porównaj szybkości średnie obu samolotów. Zaniedbaj ew. wpływ krzywizny Ziemi i różnice w szerokości geograficznej miast.

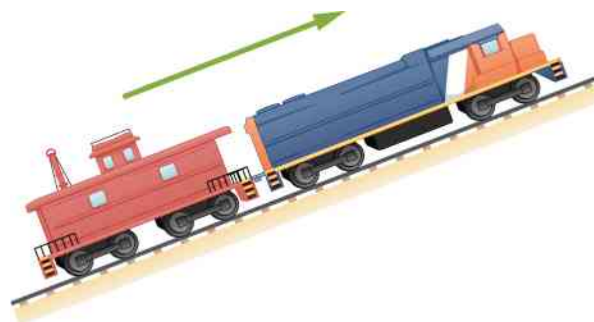
84. **Niefizyczny wynik** Rowerzysta jedzie 16 km na wschód, potem 8 km na zachód, 8 km znowu na wschód, po czym 32 km na zachód i w końcu 11,2 km na wschód. Jego wektor prędkości średniej ma wartość 24 km/h. Po jakim czasie pokonał całą drogę? Czy ten wynik ma sens?

85. Ciało ma przyspieszenie $+1{,}2\,\mathrm{cm/s^2}$. W chwili $t = 4{,}0\,\mathrm{s}$ jego prędkość wynosi $-3{,}4\,\mathrm{cm/s}$. Znajdź prędkości ciała w chwilach $t = 1{,}0\,\mathrm{s}$ i $t = 6{,}0\,\mathrm{s}$.

86. Cząstka porusza się wzdłuż osi x zgodnie z równaniem położenia $x(t) = \left(2{,}0 - 4{,}0t^2\right)\,\mathrm{m}$. Jakie są prędkości i położenia cząstki w chwilach $t = 2{,}0\,\mathrm{s}$ i $t = 5{,}0\,\mathrm{s}$?

87. Wiemy, że cząstka poruszająca się ze stałym przyspieszeniem, ma prędkości $2{,}0\,\mathrm{m/s}$ w chwili $t = 2{,}0\,\mathrm{s}$ oraz $-7{,}6\,\mathrm{m/s}$ w chwili $t = 5{,}2\,\mathrm{s}$. Jakie jest przyspieszenie cząstki?

88. Pociąg wjeżdża na strome wzniesienie ze stałą prędkością (zobacz rysunek poniżej). W pewnej chwili ostatni wagon odpina się i zaczyna staczać się w dół. Po 5,0 s pokonuje drogę 30 m. Jakie jest przyspieszenie odczepionego wagonu?



89. Elektron pędzi ruchem prostoliniowym z szybkością $4{,}0 \cdot 10^5\,\mathrm{m/s}$. Nagle wpada w obszar o długości 5,0 cm, w którym doznaje przyspieszenia o tym samym kierunku oraz wartości równej $6{,}0 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m/s^2}$.
a. Z jaką prędkością elektron opuści ten obszar?
b. Ile czasu elektron spędzi w tym obszarze?

90. Kierowca ambulansu musi jak najszybciej dowieźć pacjenta do szpitala. Jadąc z szybkością 72 km/h zauważa, że światła na najbliższym skrzyżowaniu zmieniają się na żółte. Aby zdążyć przejechać przed światłem czerwonym, musi pokonać 50 m w 2,0 s.
a. Jakim co najmniej przyspieszeniem musi dysponować ambulans, aby kierowca zdołał przejechać skrzyżowanie, zanim zapali się czerwone światło?
b. Z jaką szybkością ambulans opuści wtedy skrzyżowanie?

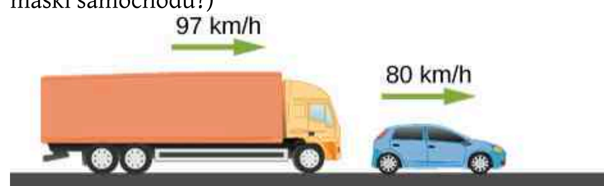
91. Dojeżdżający do bramek autostradowych motocykl hamuje jednostajnie, pokonując pierwszy kilometr w czasie 80 s, a drugi kilometr w czasie 120 s. Oblicz
a. przyspieszenie
b. i prędkość początkową motocykla.

92. Rowerzystka pokonuje dystans między punktem A i punktem B w 10 min. Przez pierwsze 2 min jedzie ze stałym przyspieszeniem $0{,}090\,\mathrm{m/s^2}$. Przez kolejne 5 min jedzie ze stałą prędkością. Następnie, przez ostatnie 3 min jej podróży zwalnia ze stałym przyspieszeniem tak, że w punkcie B zatrzymuje się.

a. Naszkicuj zależność jej prędkości od czasu w trakcie całej podróży.
b. Z jakim przyspieszeniem porusza się rowerzystka przez ostanie 3 min?
c. Jaką całkowitą drogę pokonała rowerzystka?

93. Dwa pociągi pędzą tym samym torem z szybkością 30 m/s naprzeciw siebie. Maszyniści obu pociągów jednocześnie zauważają, że są na kursie kolizyjnym i uruchamiają hamulce bezpieczeństwa w momencie, gdy odległość między pociągami wynosi 1000 m. Jakie muszą być przyspieszenia obu pociągów (załóż, że mają takie same wartości), aby pociągi zatrzymały się tuż przed momentem zderzenia.

94. Ciężarówka o długości 10 m wyprzedza na autostradzie samochód osobowy o długości 3 m. Prędkość ciężarówki to 97 km/h, a samochodu 80 km/h. Jak długo trwa wyprzedzanie? (Ile czasu upłynie od chwili, gdy przód ciężarówki znajdzie się na wysokości tylnego zderzaka samochodu, do chwili, gdy tył ciężarówki minie czubek maski samochodu?)



Początek wyprzedzania





Koniec wyprzedzania

95. Patrol policji namierza pirata pędzącego z szybkością 40 m/s. W chwili, gdy pirat mija patrol, policjanci ruszają w pościg. Radiowóz ma przyspieszenie 4 m/s^2. Po jakim czasie dogonią pirata?

96. Bartek biegnie w półmaratonie ze stałą prędkością o wartości 3 m/s. Maciek biegnie z tą samą prędkością, ale 50 m za plecami Bartka. Aby nadrobić stratę, Maciek przyspiesza w tempie $0{,}05 \text{ m/s}^2$.
a. Ile czasu zajmie Maćkowi dogonienie Bartka?
b. Jaką drogę pokona w tym czasie Maciek?
c. Z jaką prędkością końcową Maciek minie Bartka?

97. Niefizyczny wynik Biegaczka na 75 m przed linią mety zaczyna zwalniać od prędkości 8 m/s ze stałym opóźnieniem $0{,}5 \text{ m/s}^2$. Ile czasu upłynie, zanim biegaczka przetnie linię mety? Czy ten wynik ma sens?

98. Samolot zwiększa prędkość w poziomym locie w tempie $5{,}0 \text{ m/s}^2$. Przyspieszając, pokonuje 10,0 km w czasie 30,0 s. Oblicz prędkość początkową i końcową samolotu.

99. Porównaj drogi przebyte przez dwa ciała, które poruszając się z tą samą prędkością początkową, w tym samym czasie zwiększają prędkość: dwukrotnie – ciało pierwsze, i czterokrotnie – ciało drugie. Załóż, że oba ciała mają (różne) stałe przyspieszenia.

100. Cząstka porusza się w lewo osi ze stałą prędkością. W chwili początkowej $t_0 = 0$ znajduje się w położeniu x_0.
a. Jakiego przyspieszenia musi doznać cząstka, aby po pewnym czasie t jej całkowite przemieszczenie wyniosło 0?
b. Jaka jest fizyczna interpretacja rozwiązania, jeśli zażądamy, aby $t \to \infty$?

101. Piłkę rzucono pionowo do góry z nieznaną prędkością początkową. W swoim locie w górę piłka mija okno o wysokości 2 m, które znajduje się na wysokości 7,50 m nad miejscem wyrzucenia. Czas mijania okna wynosi 1,30 s.
a. Z jaką prędkością początkową wyrzucono piłkę?
b. Na jaką wysokość nad oknem wzniesie się jeszcze piłka? Po jakim czasie piłka drugi raz minie parapet?

102. Pasażer lotu balonem upuścił monetę, gdy balon na wysokości 300 m nad ziemią wznosił się w górę ze stałą prędkością 10 m/s. Oblicz
a. maksymalną wysokość monety
b. oraz położenie i prędkość monety po upływie 4,00 s,
c. a także czas, po którym moneta upadnie na ziemię.

103. Piłka tenisowa zostaje upuszczona z wysokości 1,50 m na twardy kort i po odbiciu wznosi się na wysokość 1,10 m.
a. Oblicz prędkość piłki tuż przed upadkiem na podłoże.
b. Oblicz prędkość piłki w ruchu w górę tuż po odbiciu od kortu.
c. Oblicz przyspieszenie, jakiego doznaje piłka w trakcie kontaktu z kortem, trwającego $3{,}50 \cdot 10^{-3}$ s.
d. O ile milimetrów piłka wgniotła się (na chwilę) w trakcie odbicia od kortu? Załóż, że podłoże jest idealnie twarde i nie odkształca się.

104. Niefizyczny wynik. Kropla deszczu upada z chmury wiszącej 300 m nad ziemią. Zakładając brak oporów powietrza, oblicz prędkość końcową kropli w chwili upadku na ziemię. Czy ten wynik ma sens?

105. Porównaj czasy przebywania w powietrzu dwóch siatkarzy, z których pierwszy wybija się na wysokość 1,0

m, a drugi na wysokość 0,3 m. Obaj poruszają się po pionowej prostej.

106. Załóżmy, że chłopiec upuścił z pewnej wysokości kulkę, ale dzięki swojemu refleksowi, po 0,5 s zdołał ją złapać, zanim upadła na podłoże.
a. Jaki dystans pokonała kulka na Ziemi ($g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$)
b. Jaki dystans pokonałaby kulka na Księżycu, na którym panuje 6 razy mniejsze przyspieszenie grawitacyjne?

107. Balon na gorące powietrze unosi się z ziemi ze stałą szybkością 3,0 m/s. Po jednej minucie wznoszenia ktoś przypadkowo zrzuca balast (odwiązuje worek z piaskiem), który spada na ziemię. Oblicz
a. całkowity czas ruchu
b. i prędkość końcową balastu w momencie upadku na ziemię.

108. a. Podczas igrzysk olimpijskich w Pekinie Usain Bolt ustanowił rekord świata w biegu na 100 m wynikiem 9,69 s. Zakładając, że Bolt przyspiesza do swojej maksymalnej prędkości w 3,00 s i potem utrzymuje ją do końca biegu, oblicz przyspieszenie Bolta w pierwszej fazie biegu i jego prędkość maksymalną.
b. W tej samej imprezie Jamajczyk popisał się także rekordowym biegiem na 200 m, uzyskując czas 19,30 s. Używając tych samych założeń, co w punkcie (a), oblicz maksymalną prędkość Bolta w tym biegu.

109. Ciało spada z wysokości 75,0 m nad ziemią.
a. Oblicz drogę przebytą przez nie w pierwszej sekundzie ruchu.
b. Oblicz prędkość, z jaką ciało uderzy w ziemię.
c. Oblicz drogę pokonaną przez ciało w ostatniej sekundzie ruchu przed zderzeniem.

110. Twarda metalowa kulka upada na sztywne podłoże z wysokości 1,50 m i odbija się na wysokość 1,45 m. Oblicz jej prędkość
a. tuż przed upadkiem na ziemię
b. i tuż po odbiciu.
c. Oblicz przyspieszenie, jakiego doznaje kulka w trakcie odbicia, które trwa 0,080 ms ($8{,}00 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{s}$).
d. O ile milimetrów kulka metalowa odkształciła się w momencie kontaktu z podłożem?

111. Pewne ciało spadło z dachu budynku o wysokości h. Podczas ostatniej sekundy ruchu ciało pokonało drogę $h/3$. Oblicz wysokość budynku.

ZADANIA TRUDNIEJSZE

112. Zwycięzca biegu na 100 m przecina linię mety po 11,2 s. Zdobywca drugiego miejsca potrzebuje 11,6 s. W jakiej odległości za plecami mijającego linię mety zwycięzcy znajduje się zdobywca drugiego miejsca? Załóż, że biegacze cały dystans pokonują ze stałą prędkością.

113. Położenie cząstki poruszającej się po osi x zmienia się w czasie jak $x(t) = \left(5{,}0t^2 - 4{,}0t^3\right)\ \mathrm{m}$. Oblicz:
a. prędkość i przyspieszenie cząstki jako funkcje czasu;
b. prędkość i przyspieszenie w chwili $t = 2{,}0\ \mathrm{s}$;
c. czas, po którym cząstka osiąga największe położenie;
d. czas, po którym prędkość spada do zera;
e. największą odległość od początku układu odniesienia.

114. Dwójka kolarzy finiszuje w wyścigu. Jeden z nich porywa się na finisz sprinterski, rozpędzając się od początkowej prędkości 11,5 m/s z przyspieszeniem $0{,}500\ \mathrm{m/s^2}$ przez 7,00 s.
a. Jaką prędkość końcową osiąga kolarz?
b. Z tą prędkością kolarz pokonuje ostatni odcinek do mety. Jeśli zaczął on przyśpieszać 300 m przed metą to o ile szybciej dotarł do mety (w porównaniu do sytuacji, w której poruszałby się ze stałą prędkością 11,5 m/s)?
c. Zdobywca drugiego miejsca w tym wyścigu był 5,0 m przed zwycięzcą w chwili, gdy tamten rozpoczął finisz, jednak nie miał sił na sprint i ze stałą szybkością 11,8 m/s kontynuował wyścig. Jaka była różnica czasów kolarzy na mecie?
d. Jaki dystans w metrach dzielił na mecie zwycięzcę od zdobywcy drugiego miejsca?

115. W 1967 roku na wyschniętym słonym jeziorze w stanie Utah Nowozelandczyk Burt Munro ustanowił do dziś niepobity rekord prędkości na motocyklu amerykańskiej marki Indian o pojemności do 1000 $\mathrm{cm^3}$. Wynosi on 295,38 km/h. Długa prosta na jeziorze ma długość 8,00 km. Przyspieszenie motocykla można zdefiniować jako czas potrzebny do osiągnięcia prędkości 96 km/h (60 mil na godzinę). Indian z 1967 roku osiągał tę prędkość w 4,00 s. Jeżeli Burt Munro ruszył z miejsca i z takim przyspieszeniem uzyskał rekordową prędkość, to w jakim czasie pokonał 8-kilometrową prostą?

4 | RUCH W DWÓCH I TRZECH WYMIARACH



Rysunek 4.1 Zespół Akrobacyjny „Orlik” to pokazowa grupa akrobacji lotniczych Polskich Sił Powietrznych, która powstała w 1998 roku i stacjonuje w Radomiu. Piloci z tej formacji w trakcie pokazów wykazują się doskonałą precyzją lotu z dużą szybkością, co wymaga dokładnych pomiarów położenia, prędkości i przyspieszenia w trzech wymiarach przestrzeni.

Treść rozdziału

Wstęp

Aby nasz opis kinematyki był kompletny, musimy poznać zagadnienie ruchu w dwóch i trzech wymiarach. W rzeczywistości większość obiektów we Wszechświecie nie porusza się tylko po liniach prostych, ale właśnie po torach zakrzywionych na płaszczyźnie lub w przestrzeni trójwymiarowej. Od prostego kopnięcia piłki, poprzez tory lotu ptaków czy ruchy orbitalne ciał niebieskich, aż do przepływu ciałek krwi w naszych żyłach – w większości przypadków mamy do czynienia z ruchem po trajektoriach krzywoliniowych.

Na szczęście możemy wykorzystać wiedzę z poprzedniego rozdziału o ruchu w jednym wymiarze, gdzie poznaliśmy pojęcia położenia, przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia, które teraz łatwo uogólnimy do przypadku dwu- lub trójwymiarowego. Rozważmy ruch samolotów z Zespołu Akrobacyjnego „Orlik”. Każdy samolot porusza się w przestrzeni powietrznej po swojej własnej zakrzywionej trajektorii i ma określone prędkość i przyspieszenie. Zatem,

aby poprawnie opisać ruch dowolnego z samolotów, każdemu z nich musimy przyporządkować indywidualny wektor położenia, czyli jego składowe w trzech kierunkach przestrzeni, a także pełny wektor prędkości i przyspieszenia - także w trzech wymiarach. Możemy w tym celu skorzystać z definicji wprowadzonych w rozdziale Ruch prostoliniowy, dokonując pewnych modyfikacji – przede wszystkim włączając do opisu rachunek wektorowy.

W tym rozdziale zbadamy także dwa szczególne rodzaje ruchu w dwóch wymiarach: rzuty w ziemskim polu grawitacyjnym oraz ruch po okręgu. Na końcu rozdziału przedyskutujemy problem ruchu względnego. Ruch danego samolotu z rysunku zamieszczonego na początku możemy rozpatrywać względem każdego innego samolotu, a także względem widzów obserwujących pokaz z Ziemi (jest to ruch względny).

4.1 | Przemieszczenie i prędkość

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- definiować wektor położenia w problemach fizycznych na płaszczyźnie i w przestrzeni;
- obliczać wektor przemieszczenia w dwóch lub trzech wymiarach;
- obliczać wektor prędkości, znając wektor położenia w funkcji czasu;
- obliczać średnią prędkość w problemach wielowymiarowych.

Pojęcia przemieszczenia i prędkości w przypadku dwu- i trójwymiarowym są bezpośrednimi rozszerzeniami definicji jednowymiarowych. Są to jednak wielkości wektorowe, więc operacje na nich muszą podlegać zasadom rachunku wektorowego, a nie zwykłej algebrze.

Wektor przemieszczenia

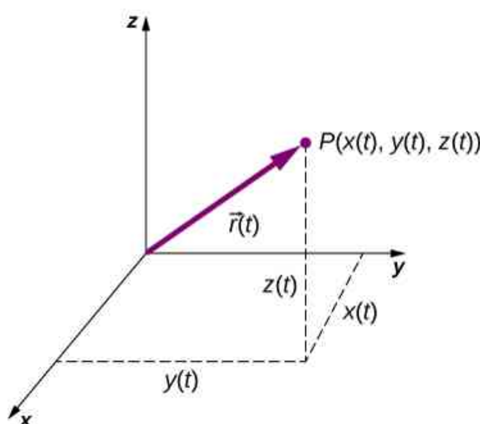
Do opisu ruchu w dwóch i trzech wymiarach musimy wprowadzić układ współrzędnych i konwencję dla osi układu. Do definicji położenia cząstki w punkcie $P(x,y,z)$ w przestrzeni trójwymiarowej najczęściej używamy zmiennych układu kartezjańskiego x, y oraz z. Dla cząstki w ruchu zmienne x, y oraz z są funkcjami czasu (t):

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \tag{4.1}$$

Wektor położenia (ang. **position vector**) punktu P względem początku układu współrzędnych nazwiemy $\vec{r}(t)$. Wektor ten nazywamy także wektorem wodzącym punktu P, który jest zaczepiony w początku układu współrzędnych i ma koniec w punkcie P. W zapisie z użyciem wersorów osi wprowadzonym w podrozdziale Układy współrzędnych i składowe wektora, wektor $\vec{r}(t)$ zapiszemy jako

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}. \tag{4.2}$$

Rysunek 4.2 prezentuje układ współrzędnych z zaznaczonym wektorem wodzącym punktu P, gdzie cząstka znajduje się w danej chwili czasu t. Zwróć uwagę na orientację osi x, y i z. Układ współrzędnych o takiej orientacji osi nazywamy prawoskrętnym (Układy współrzędnych i składowe wektora) i będzie on używany w całym rozdziale.

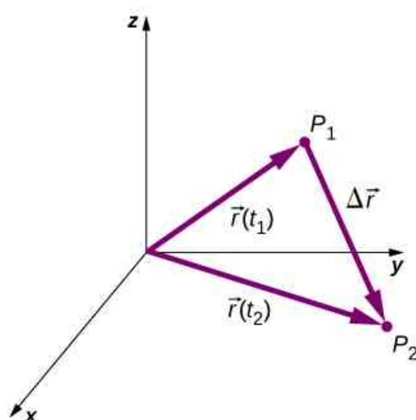


Rysunek 4.2 Układ współrzędnych w przestrzeni trójwymiarowej oraz cząstka umieszczona w punkcie $P(x(t),y(t),z(t))$.

Przy użyciu naszej definicji położenia cząstki w przestrzeni trójwymiarowej możemy zdefiniować trójwymiarowe przemieszczenie. Rysunek 4.3 prezentuje cząstkę znajdującą się w czasie t_1 w punkcie P_1 o wektorze położenia $\vec{r}\,(t_1)$. W późniejszej chwili t_2, cząstka znajduje się w punkcie P_2 o wektorze położenia $\vec{r}\,(t_2)$. **Wektor przemieszczenia** (ang. **displacement vector**) $\Delta\vec{r}$ znajdziemy odejmując $\vec{r}\,(t_1)$ od $\vec{r}\,(t_2)$:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}\,(t_2) - \vec{r}\,(t_1). \quad (4.3)$$

Dodawanie wektorów jest omawiane w rozdziale Wektory. Zwróćmy uwagę, że jest to ta sama operacja, którą wykonywaliśmy w jednym wymiarze, jednak teraz wektory są zdefiniowane w przestrzeni trójwymiarowej.



Rysunek 4.3 Przemieszczenie $\Delta\vec{r} = \vec{r}\,(t_2) - \vec{r}\,(t_1)$ jest wektorem skierowanym od P_1 do P_2 .

Następujące przykłady ilustrują pojęcie przemieszczenia w dwóch lub trzech wymiarach.

Przykład 4.1

Satelita na orbicie okołobiegunowej

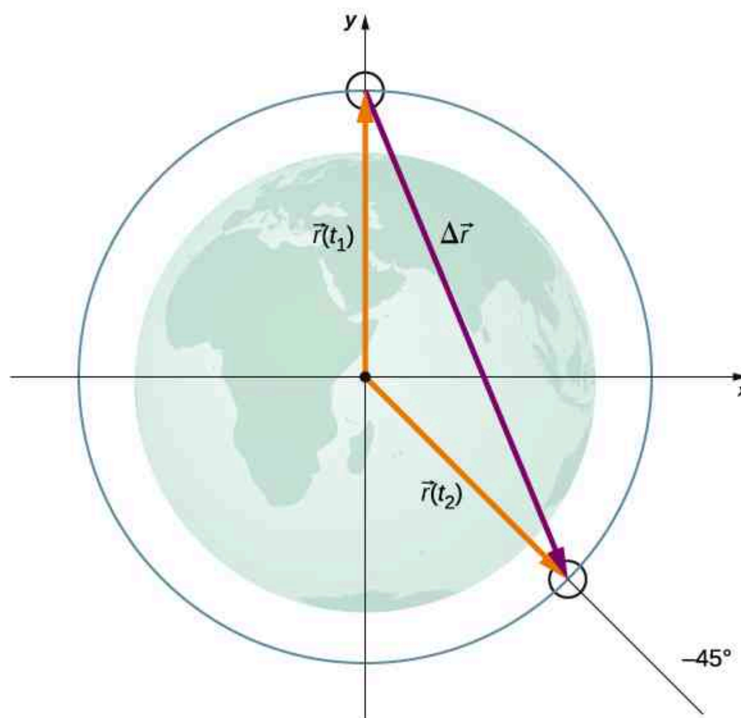
Satelita znajduje się na wysokości 400 km na orbicie okołobiegunowej Ziemi, co oznacza, że w swoim ruchu przechodzi nad biegunem północnym i południowym. Jakie są wartość i kierunek wektora przemieszczenia od punktu dokładnie nad biegunem północnym do punktu o szerokości geograficznej 45° S?

Strategia

Zróbmy rysunek ilustrujący graficznie rozwiązanie problemu. To pomoże nam lepiej zrozumieć pojęcie przemieszczenia. Następnie użyjmy wektorów jednostkowych do określenia przemieszczenia.

Rozwiązanie

Rysunek 4.4 pokazuje powierzchnię Ziemi oraz okrąg reprezentujący orbitę satelity. Mimo że satelity poruszają się w przestrzeni trójwymiarowej, ich trajektorie są okręgami, które możemy narysować na płaszczyźnie. Wektory położenia zaczepiamy w środku Ziemi, który przyjmujemy za początek naszego układu współrzędnych, przy czym oś y wybieramy w kierunku bieguna północnego, a oś x – prostopadle do niej w płaszczyźnie równika. Wektor pomiędzy końcami wektorów położenia jest przemieszczeniem satelity. Przyjmijmy za promień Ziemi wartość 6370 km. Długość wektorów położenia satelity jest więc równa 6770 km.



Rysunek 4.4 Dwa wektory położenia są zaczepione w środku Ziemi, który przyjmujemy za początek układu współrzędnych na płaszczyźnie z osią y zwróconą na północ oraz osią x zwróconą na wschód. Wektor pomiędzy nimi jest wektorem przemieszczenia.

W notacji z użyciem wektorów jednostkowych wektory położenia wyrażamy jako

$$\vec{r}(t_1) = 6770\text{km} \cdot \hat{j},$$
$$\vec{r}(t_2) = 6770\text{km} \cdot \cos(-45°) \cdot \hat{i} + 6770\text{km} \cdot \sin(-45°) \cdot \hat{j}.$$

Obliczając sinus i cosinus kąta 45°, otrzymujemy

$$\vec{r}(t_1) = 6770\text{km} \cdot \hat{j},$$
$$\vec{r}(t_2) = 4787\text{km} \cdot \hat{i} - 4787\text{km} \cdot \hat{j}.$$

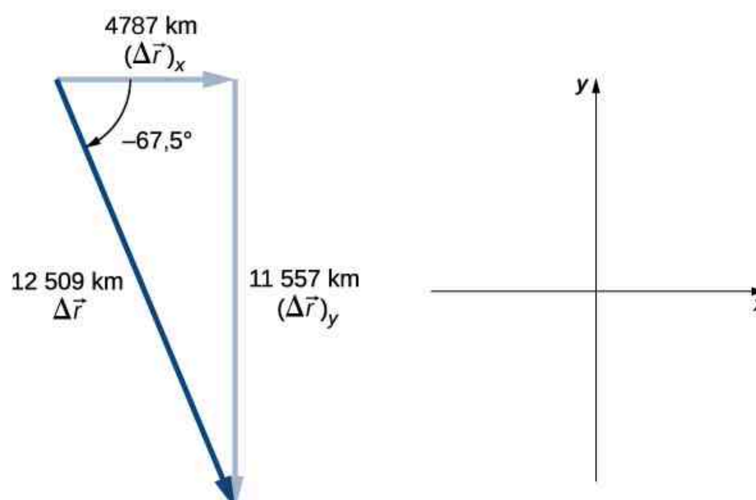
Możemy teraz znaleźć wektor $\Delta\vec{r}$ przemieszczenia satelity:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = 4787\text{km} \cdot \hat{i} - 11\,557\text{km} \cdot \hat{j}.$$

Wartość przemieszczenia jest długością wektora $\left|\Delta \vec{r}\right| = \sqrt{(4787\text{ km})^2 + (-11\,557\text{ km})^2} = 12\,509\text{ km}$ Kąt pomiędzy przemieszczeniem a osią x jest równy $\theta = \text{arctg}\left(\frac{-11\,557\text{ km}}{4787\text{ km}}\right) = -67{,}5°$.

Znaczenie

Zinterpretujmy teraz nasz wynik, rysując wektor przemieszczenia w przyjętym układzie współrzędnych. Do tego celu musimy znać składowe wektora przemieszczenia, ich długości i kąt pomiędzy nim a wybraną osią – w tym przypadku osią x (Rysunek 4.5).



Rysunek 4.5 Wektor przemieszczenia wraz z wektorami składowymi, ich długością i kątem.

Zauważmy, że w tym przykładzie satelita, aby dostać się z pozycji początkowej do końcowej, poruszał się po zakrzywionym torze wzdłuż kołowej orbity. 4 786 km w dodatnim kierunku osi x, a następnie 11 557 km w ujemnym kierunku osi y. Taki tor ruchu miałby jednak większą długość niż wektor przemieszczenia. W istocie, wektor przemieszczenia wyznacza najkrótszą możliwą trajektorię między dwoma punktami w przestrzeni jedno-, dwu- czy trójwymiarowej.

W wielu problemach fizycznych mamy do czynienia z serią przemieszczeń, takich jak wskazane wyżej. Całkowite przemieszczenie jest w takim przypadku sumą wszystkich pojedynczych przemieszczeń, jednak musimy pamiętać, że dodajemy wektory. Zilustrujmy ten problem na przykładzie zagadnienia ruchów Browna.

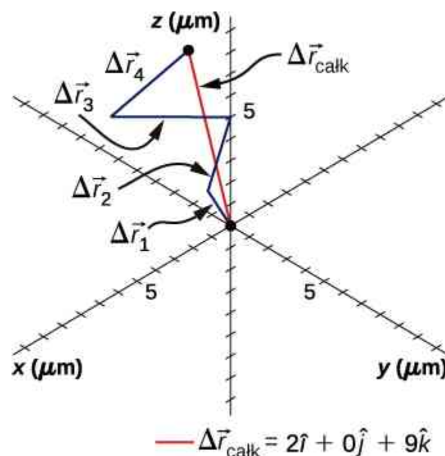
Przykład 4.2

Ruchy Browna

Ruchy Browna (ang. **Brownian motion**) to chaotyczny ruch drobin np. zawieszonych w cieczy, wywołany zderzeniami z molekułami cieczy. Jest to ruch w trzech wymiarach. Wyrażone w mikrometrach przemieszczenia pojedynczej drobiny między kolejnymi zderzeniami, mogą być następujące (Rysunek 4.6):

$$\Delta\vec{r}_1 = 2\mu\text{m}\cdot\hat{i} + 1\mu\text{m}\cdot\hat{j} + 2\mu\text{m}\cdot\hat{k},$$
$$\Delta\vec{r}_2 = -2\mu\text{m}\cdot\hat{i} - 1\mu\text{m}\cdot\hat{j} + 3\mu\text{m}\cdot\hat{k},$$
$$\Delta\vec{r}_3 = 4\mu\text{m}\cdot\hat{i} - 2\mu\text{m}\cdot\hat{j} + 1\mu\text{m}\cdot\hat{k},$$
$$\Delta\vec{r}_4 = -2\mu\text{m}\cdot\hat{i} + 2\mu\text{m}\cdot\hat{j} + 3\mu\text{m}\cdot\hat{k}.$$

Jakie jest całkowite przemieszczenie drobiny względem początku układu współrzędnych?



Rysunek 4.6 Przypadkowe przemieszczenia składają się na trajektorię pojedynczej drobiny wykonującej ruchy Browna. Całkowite przemieszczenie jest zaznaczone na czerwono.

Rozwiązanie

Sumujemy poszczególne przemieszczenia jak wektory:

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r}_{\text{całk}} &= \sum_{i=1}^{4}\Delta\vec{r}_i = \Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2 + \Delta\vec{r}_3 + \Delta\vec{r}_4 \\ &= (2{,}0 - 2{,}0 + 4{,}0 - 2{,}0)\hat{i} + (1{,}0 - 1{,}0 - 2{,}0 + 2{,}0)\hat{j} + (2{,}0 + 3{,}0 + 1{,}0 + 3{,}0)\hat{k} \\ &= \left(2{,}0\hat{i} + 9{,}0\hat{k}\right)\mu\text{m}.\end{aligned}$$

Pełne rozwiązanie otrzymamy, podając jeszcze długość i kierunek wektora całkowitego przemieszczenia:

$$\left|\Delta\vec{r}_{\text{całk}}\right| = \sqrt{(2{,}0\,\mu\text{m})^2 + (0{,}0\,\mu\text{m})^2 + (9{,}0\,\mu\text{m})^2} = 9{,}2\,\mu\text{m},$$

$$\theta = \text{arctg}\left(\frac{9}{2}\right) = 77^\circ,$$

gdzie kąt definiujemy względem osi x na płaszczyźnie xz.

Znaczenie

Z rysunku oraz z obliczeń możemy wnioskować, że długość wektora całkowitego przemieszczenia jest mniejsza niż suma długości poszczególnych przemieszczeń.

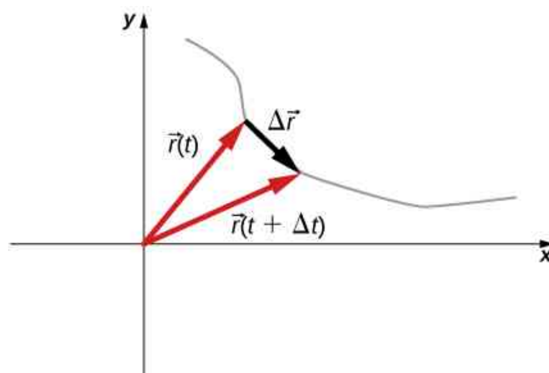
Wektor prędkości

W poprzednim rozdziale podaliśmy definicję prędkości chwilowej jako pochodną położenia po czasie. Tak samo znajdziemy prędkość w dwóch i trzech wymiarach, ale użyjemy wektora położenia. **Wektor prędkości** (ang. **velocity vector**)chwilowej jest zdefiniowany jako

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\text{d}\vec{r}}{\text{d}t}. \qquad (4.4)$$

Zastanówmy się teraz nad wzajemną orientacją wektorów położenia i prędkości. Na Rysunku 4.7 przedstawiamy gra-

ficznie wektory $\vec{r}(t)$ i $\vec{r}(t+\Delta t)$, które określają położenie cząstki poruszającej się wzdłuż toru oznaczonego szarą linią. W miarę jak Δt zdąża do zera, wektor prędkości, zdefiniowany przy pomocy Równania 4.4, staje się styczny do toru ruchu cząstki w danej chwili t.



Rysunek 4.7 Cząstka porusza się po torze danym szarą linią. W granicy Δt zdążającego do zera wektor prędkości staje się styczny do toru.

Równanie 4.4 możemy też zapisać dla każdej składowej wektora $\vec{v}(t)$ osobno. Ponieważ

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k},$$

możemy zapisać

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j} + v_z(t)\hat{k}, \tag{4.5}$$

gdzie

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}, \quad v_z = \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{4.6}$$

Jeśli interesuje nas tylko średnia prędkość, możemy zapisać odpowiednik wektorowy dla dwóch i trzech wymiarów prędkości średniej w jednym wymiarze:

$$\vec{v}_{\text{śr}} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}. \tag{4.7}$$

Przykład 4.3

Obliczanie wektora prędkości

Położenie cząstki dane jest wektorem $\vec{r}(t) = 2{,}0t^2\hat{i} + (2{,}0 + 3{,}0t)\hat{j} + 5{,}0t\hat{k}\ \text{m}$. (a) Jaki jest wektor prędkości chwilowej i szybkość cząstki w chwili $t = 2{,}0\ \text{s}$? (b) Jaka jest średnia prędkość między 1. a 3. sekundą?

Rozwiązanie

Jeśli skorzystamy z Równania 4.5 oraz Równania 4.6 i obliczymy pochodną położenia po czasie, otrzymamy:

(a) $\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = 4{,}0t\hat{i} + 3{,}0\hat{j} + 5{,}0\hat{k}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$\vec{v}(2{,}0\ \mathrm{s}) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = 8{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j} + 5{,}0\hat{k}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Szybkość $|\vec{v}(2{,}0\ \mathrm{s})| = \sqrt{8^2 + 3^2 + 5^2} = 9{,}9\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

(b) Na podstawie Równania 4.7,

$$\vec{v}_{\text{śr}} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{r}(3{,}0\ \mathrm{s}) - \vec{r}(1{,}0\ \mathrm{s})}{3{,}0\ \mathrm{s} - 1{,}0\ \mathrm{s}} = \frac{(18\hat{i} + 11\hat{j} + 15\hat{k})\ \mathrm{m} - (2\hat{i} + 5\hat{j} + 5\hat{k})\ \mathrm{m}}{2{,}0\ \mathrm{s}}$$

$$= \frac{(16\hat{i} + 6\hat{j} + 10\hat{k})\ \mathrm{m}}{2{,}0\ \mathrm{s}} = 8{,}0\hat{j} + 3{,}0\hat{j} + 5{,}0\hat{k}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Znaczenie

Zauważmy, że prędkość średnia między 1. a 3. sekundą ruchu i prędkość chwilowa w $t = 2{,}0\ \mathrm{s}$ są takie same, co w tym przypadku jest konsekwencją liniowej zależności prędkości od czasu. Nie jest to jednak zasadą i w ogólnym przypadku prędkość chwilowa i prędkość średnia się różnią.

Ostrzeżenie

Zwróć uwagę na różnicę pojęć: prędkość chwilowa, prędkość średnia, szybkość i szybkość średnia. Szybkość jest wartością (długością wektora) prędkości chwilowej, ale szybkość średnia nie jest długością prędkości średniej. Szybkość średnia jest zdefiniowana jako stosunek drogi do czasu, w którym tę drogę cząstka pokonała i w przypadku dwu- lub trójwymiarowym ma inną wartość niż prędkość średnia. Jedynie w przypadku jednowymiarowym, gdy długość przemieszczenia może być równa drodze cząstki, taka równość może zachodzić. Na długość wektora prędkości średniej mówimy po prostu wartość prędkości średniej.



4.1 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Położenie cząstki jest następującą funkcją czasu $\vec{r}(t) = 3{,}0t^3\hat{i} + 4{,}0\hat{j}$. (a) Jaka jest prędkość chwilowa cząstki w chwili $t = 3$ s? (b) Czy prędkość średnia pomiędzy 2. a 4. sekundą ruchu jest równa prędkości chwilowej w $t = 3$ s? Dlaczego?

Niezależność ruchu w kierunkach prostopadłych

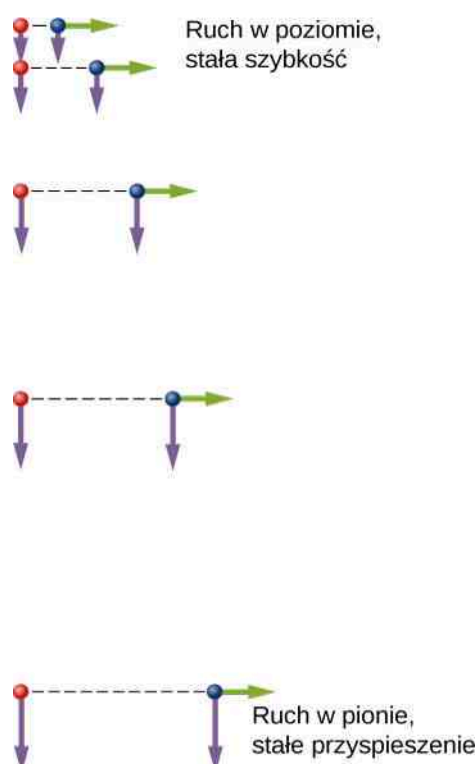
Gdy spojrzymy na definicje wektorów położenia i prędkości w przypadku trójwymiarowym (Równanie 4.2 i Równanie 4.5), to zauważymy, że składowe tych wektorów są osobnymi i niezależnymi od siebie funkcjami czasu. Ruch cząstki w kierunku osi x nie ma wpływu na ruch wzdłuż osi y i z, podobnie jest dla dwóch pozostałych współrzędnych. Wobec tego możemy rozdzielić ruch cząstki w dwóch lub trzech wymiarach na niezależne od siebie ruchy prostoliniowe wzdłuż prostopadłych osi układu współrzędnych, w którym ruch ten opisujemy.

W celu przedstawienia tej obserwacji w kontekście przemieszczenia, rozważmy spacer kobiety od punktu A do punktu B w mieście zabudowanym kwadratowymi blokami. Kobieta, wyruszywszy z punktu A, może maszerować na wschód, minąć kilka bloków, następnie kierując się na północ, dotrzeć do punktu B, znów przechodząc obok kilku budynków. Jak daleko dotrze na wschód zależy tylko od jej ruchu w kierunku wschodnim. Podobnie na dystans pokonany na północ (niezależny kierunek) wpływa jedynie jej ruch w kierunku północnym.

Niezależność ruchu

W opisie kinematycznym ruchu składowe poziome i pionowe ruchu możemy traktować niezależnie. W wielu przypadkach ruch w kierunku poziomym nie wpływa na ruch w kierunku pionowym i odwrotnie.

Zilustrujmy niezależność ruchu pionowego i poziomego, patrząc na przykładowy ruch dwóch piłek golfowych. Jedna z nich jest puszczona swobodnie (bez prędkości początkowej) z pewnej wysokości. Druga jest rzucona poziomo z tej samej wysokości i porusza się po zakrzywionym torze. Obserwacji ruchu piłek podczas spadania dokonujemy z użyciem lampy stroboskopowej, co daje nam możliwość notowania położenia piłek w tych samych chwilach czasu ze stałym krokiem czasowym (Rysunek 4.8).



Rysunek 4.8 Schemat ruchu dwóch identycznych piłek, z których jedna spada swobodnie, a druga ma poziomą prędkość początkową. Sekwencję kolejnych położeń zanotowano ze stałym krokiem czasowym. Strzałki reprezentują wektory prędkości poziomej i pionowej w danym położeniu, a ich długości odpowiadają zmianom wartości prędkości w czasie. Piłka po prawej ma początkową prędkość poziomą, natomiast piłka po lewej nie ma prędkości początkowej. Pomimo różnicy w wartościach prędkości poziomych, pionowe składowe prędkości i położeń są takie same dla obu piłek, co świadczy o niezależności ruchu piłek w kierunkach poziomym i pionowym.

Zadziwiające jest, że przy każdym błysku lampy stroboskopowej składowe pionowe położenia obu piłek są takie same. To podobieństwo sugeruje, że ruch pionowy jest niezależny od tego, czy piłki poruszają się w poziomie (zakładając brak oporów powietrza, ruch spadającego obiektu zachodzi jedynie pod wpływem siły grawitacji, a żadna siła pozioma nie występuje). Szczegółowa analiza ruchu piłki w rzucie poziomym pokazuje, że pomiędzy kolejnymi błyskami lampy przedmiot pokonuje tę samą drogę. Tak się dzieje, ponieważ na piłkę nie działa żadna dodatkowa siła w kierunku poziomym. To oznacza, że prędkość pozioma jest stała w czasie i nie zależy ani od ruchu pionowego, ani od siły grawitacji (która też jest pionowa). Zwróćmy uwagę, że ten przypadek jest prawdziwy w idealnych warunkach. W rzeczywistym świecie opór powietrza wpływa na ruch piłki w obu kierunkach.

Dwuwymiarowy ruch po zakrzywionym torze piłki rzuconej poziomo składa się z dwóch niezależnych jednowymiarowych ruchów (poziomego i pionowego). Kluczowym elementem analizy takiego ruchu jest to, aby rozdzielić go na ruchy względem prostopadłych kierunków. Innymi słowy, ruch dwuwymiarowy możemy traktować jak złożenie dwóch niezależnych ruchów prostoliniowych, wzdłuż prostopadłych kierunków. Taki rozdział jest możliwy dzięki temu, że składowe (położenia i prędkości) są od siebie niezależne.

4.2 | Przyspieszenie

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- obliczać wektor przyspieszenia, znając zależność prędkości od czasu;
- opisywać ruch cząstki poruszającej się w trzech wymiarach ze stałym przyspieszeniem;
- wykorzystywać jednowymiarowe równania ruchu wzdłuż kierunków prostopadłych do opisu problemu dwu- lub trójwymiarowego ze stałym przyspieszeniem;
- opisywać wektor przyspieszenia za pomocą wersorów osi w wybranym układzie odniesienia.

Przyspieszenie chwilowe

Oprócz znajomości przemieszczenia i prędkości ciała w ruchu często chcemy także wiedzieć, jaki jest **wektor przyspieszenia** (ang. **acceleration vector**) w dowolnym punkcie jego toru w danej chwili czasu. Taki wektor przyspieszenia nazwiemy przyspieszeniem chwilowym i obliczymy, co wiemy już z poprzedniego rozdziału, różniczkując po czasie. Jedyna różnica w przypadku ruchu na płaszczyźnie lub w przestrzeni jest taka, że mamy teraz do czynienia z wielkościami wektorowymi. Różniczkując po czasie $\vec{v}\,(t)$, otrzymujemy:

$$\vec{a}\,(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}\,(t+\Delta t) - \vec{v}\,(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}\,(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{4.8}$$

Wektor przyspieszenia w rozkładzie na składowe ma postać:

$$\vec{a}\,(t) = \frac{\mathrm{d}v_x\,(t)}{\mathrm{d}t}\hat{i} + \frac{\mathrm{d}v_y\,(t)}{\mathrm{d}t}\hat{j} + \frac{\mathrm{d}v_z\,(t)}{\mathrm{d}t}\hat{k}. \tag{4.9}$$

Ponieważ prędkość jest pochodną położenia po czasie, możemy przyspieszenie zdefiniować jako drugą pochodną funkcji położenia od czasu:

$$\vec{a}\,(t) = \frac{\mathrm{d}^2x\,(t)}{\mathrm{d}t^2}\hat{i} + \frac{\mathrm{d}^2y\,(t)}{\mathrm{d}t^2}\hat{j} + \frac{\mathrm{d}^2z\,(t)}{\mathrm{d}t^2}\hat{k}. \tag{4.10}$$

Przykład 4.4

Obliczanie wektora przyspieszenia

Cząstka ma prędkość $\vec{v}\,(t) = \left(5{,}0t\hat{i} + t^2\hat{j} - 2{,}0t^3\hat{k}\right)$ m/s.

a. Jaka jest zależność wektora przyspieszenia od czasu?
b. Jaki jest wektor przyspieszenia w chwili t = 2,0 s? Znajdź jego długość i kierunek w przestrzeni.

Rozwiązanie

(a) Aby znaleźć wektor przyspieszenia, obliczamy pierwszą pochodną prędkości po czasie. Różniczkujemy każdą składową wektora prędkości osobno:

$\vec{a}\,(t) = \left(5{,}0\hat{i} + 2{,}0t\hat{j} - 6{,}0t^2\hat{k}\right)$ m/s^2 .

(b) Podstawiając do powyższego wzoru za czas, otrzymujemy $\vec{a}\,(2{,}0\text{ s}) = \left(5{,}0\hat{i} + 4{,}0\hat{j} - 24{,}0\hat{k}\right)$ m/s^2 , co daje nam orientację wektora w układzie wersorów osi. Wartość przyspieszenia w tej chwili wynosi $|\vec{a}\,(2{,}0\text{s})| = \sqrt{5{,}0^2 + 4{,}0^2 + (-24{,}0)^2} = 24{,}8$ m/s^2.

Znaczenie

Jak pokazaliśmy, wektor przyspieszenia w tym przykładzie zależy od czasu, czyli przyspieszenie zmienia się w trakcie ruchu. Rozważmy teraz przypadek ruchu z innym wektorem prędkości.

Przykład 4.5

Obliczanie przyspieszenia cząstki

Ruch cząstki opisano wektorem położenia zależnym od czasu $\vec{r}\,(t) = \left[\left(10t - t^2\right)\hat{i} + 5t\hat{j} + 5t\hat{k}\right]$ m.

a. Jaki jest wektor prędkości cząstki?
b. Jaki jest jej wektor przyspieszenia?
c. Opisz ruch cząstki od chwili początkowej $t = 0$ s.

Strategia rozwiązania

Już na podstawie analizy samej tylko zależności położenia od czasu możemy wyciągnąć interesujące wnioski o ruchu cząstki. Składowe y i z są liniowo zależne od czasu, zatem przyspieszenie w tych kierunkach będzie zero, gdy weźmiemy drugą pochodną po czasie. Zauważmy też, że składowa x położenia zeruje się dla $t = 0$ s i $t = 10$ s.

Rozwiązanie

(a) Obliczając pierwszą pochodną położenia po czasie, otrzymujemy prędkość

$$\vec{v}\,(t) = \left[(10 - 2t)\,\hat{i} + 5\hat{j} + 5\hat{k}\right] \text{ m/s.}$$

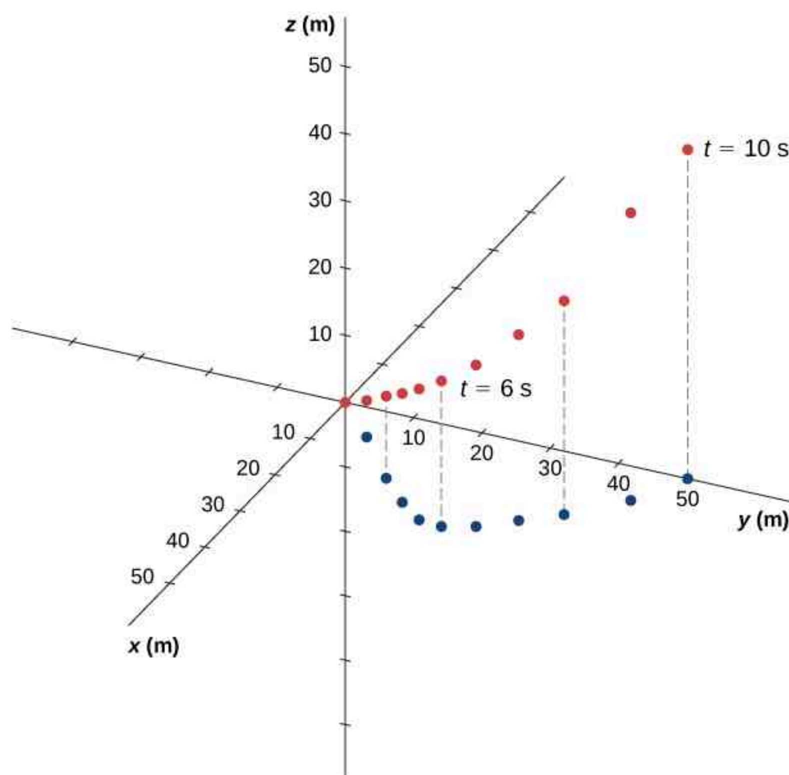
Wektor prędkości jest liniową funkcją czasu w kierunku x oraz jest stały wzdłuż kierunków y i z.

(b) Różniczkując prędkość, znajdujemy przyspieszenie

$$\vec{a}\,(t) = -2\hat{i} \text{ m/s}^2.$$

Wektor przyspieszenia ma tylko składową x, jest stały w czasie i skierowany przeciwnie do osi.

(c) Rysunek 4.9 prezentuje tor cząstki w kolejnych sekundach ruchu. Rozważmy najpierw ruch w płaszczyźnie yz. Położenie cząstki w tej płaszczyźnie zwiększa się w czasie jednostajnie ze stałą prędkością w kierunkach y i z. Inaczej jest w przypadku składowej x położenia. W tym kierunku cząstka przemieszcza się w dodatnim kierunku osi x aż do chwili $t = 5$ s, kiedy zmienia kierunek ruchu na przeciwny do osi x. Możemy to zauważyć, patrząc na wektor prędkości, którego składowa x zmienia znak w tej chwili. Widzimy to również na podstawie postaci wektora przyspieszenia. Przyspieszenie jest ujemne, co oznacza, że cząstka jest opóźniana w kierunku dodatnim osi x lub, równoważnie, przyspieszana w kierunku przeciwnym. Cząstka osiąga położenie 25 m, a następnie zawraca i zaczyna przyspieszać w kierunku przeciwnym do osi x. Wraca do położenia 0 po czasie $t = 10$ s.



Rysunek 4.9 Cząstka startuje z początku układu odniesienia $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, gdzie jej wektor położenia to $\vec{r} = 0$. Czerwonymi kropkami zaznaczono położenia w przestrzeni w kolejnych sekundach. Niebieskimi kropkami zaznaczono rzut toru na płaszczyznę xy. Wartości y i z rosną liniowo w czasie, natomiast x osiąga maksimum równe 25 m w chwili t = 5 s, po czym zaczyna maleć. W tym punkcie składowa x wektora prędkości zmienia znak na ujemny. Po czasie t = 10 s cząstka wraca do położenia x = 0 m.

Znaczenie

Rysując tor cząstki na podstawie wartości liczbowych wynikających z równań kinematycznych w kolejnych chwilach czasu, możemy lepiej zrozumieć jej ruch w przestrzeni.



4.2 Sprawdź, czy rozumiesz. Załóżmy, że znamy następującą postać wektora przyspieszenia $\vec{a}(t) = \left(a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}\right)$ m/s^2, gdzie a, b i c są pewnymi stałymi. Co możemy powiedzieć o zależności wektora prędkości od czasu?

Stałe przyspieszenie

Ruch w wielu wymiarach ze stałym przyspieszeniem może być traktowany tak jak w poprzednim rozdziale o ruchu po linii prostej. Taki ruch nazwiemy jednostajnie zmiennym (przyspieszonym lub opóźnionym), gdyż przyspieszenie jest stałe. Pokazaliśmy już, że ruch w przestrzeni jest złożeniem trzech niezależnych ruchów w jednym wymiarze wzdłuż kierunków prostopadłych. Chcemy teraz otrzymać kinematyczne równania ruchu wzdłuż niezależnych kierunków. Dla uproszczenia rozważmy przypadek dwuwymiarowy – cząstki poruszającej się na płaszczyźnie xy (pomińmy składową z). Wektor przyspieszenia jest więc równy

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j},$$

gdzie a_x i a_y są stałymi. Ruch wzdłuż każdej składowej może być opisany zestawem równań podobnych do Równania 3.10 – Równania 3.14 z poprzedniego rozdziału o ruchu po linii prostej. Zapiszmy tutaj tylko równania ruchu (na położenie i prędkość) w kierunku x oraz y. Podobny zestaw równań można zapisać dla ruchu wzdłuż kierunku z:

$$x(t) = x_0 + \bar{v}_x t, \tag{4.11}$$

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t \tag{4.12}$$

$$x(t) = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \tag{4.13}$$

$$v_x^2(t) = v_{0x}^2 + 2a_x (x - x_0) \tag{4.14}$$

$$y(t) = y_0 + \bar{v}_y t, \tag{4.15}$$

$$v_y(t) = v_{0y} + a_y t \tag{4.16}$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \tag{4.17}$$

$$v_y^2(t) = v_{0y}^2 + 2a_y (y - y_0). \tag{4.18}$$

Oznaczyliśmy tutaj przez indeks dolny 0 początkowe położenie lub prędkość. Zestaw równań (od Równania 4.11 do Równania 4.18 można zastąpić równaniami wektorowymi (Równanie 4.2 i Równanie 4.5), aby otrzymać wektor położenia i wektor prędkości jako funkcje czasu (znowu pomijamy składową z):

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} \quad \text{oraz} \quad \vec{v}(t) = v_x(t)\,\hat{i} + v_y(t)\,\hat{j}.$$

Omówiony przykład ilustruje praktyczne wykorzystanie kinematycznych równań ruchu w dwóch wymiarach.

Przykład 4.6

Narciarka

Rysunek 4.10 prezentuje narciarkę, która w chwili $t = 0$ rusza z przyspieszeniem $2{,}1\ \text{m/s}^2$ w dół stoku, którego nachylenie wynosi 15°. Względem początku układu współrzędnych ustalonego przy górnej stacji wyciągu początkowe położenie i prędkość kobiety wynoszą

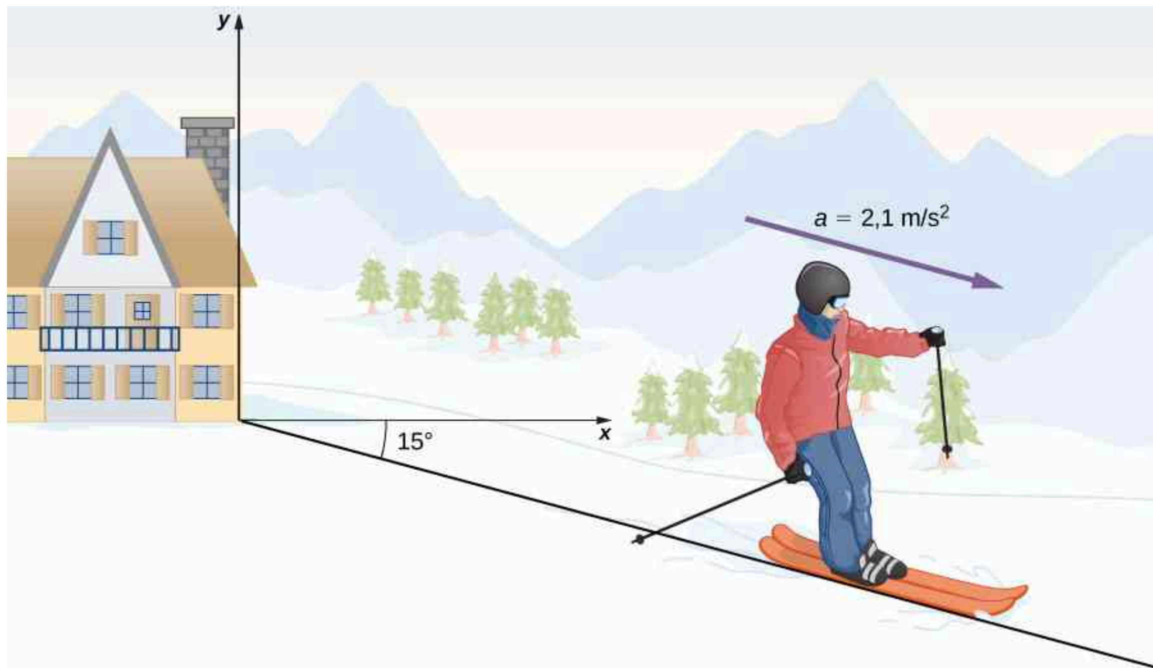
$\vec{r}(0) = \left(75{,}0\hat{i} - 50{,}0\hat{j}\right)\ \text{m}$

oraz

$\vec{v}(0) = \left(4{,}1\hat{i} - 1{,}1\hat{j}\right)\ \text{m/s}.$

a. Podaj zależność od czasu składowych x i y położenia i prędkości narciarki.

b. Jakie są jej położenie i prędkość w chwili $t = 10{,}0\ \text{s}$?



Rysunek 4.10 Narciarka rusza z przyspieszeniem 2,1 m/s^2 w dół stoku o nachyleniu 15° . Początek układu współrzędnych przyjmujemy przy górnej stacji wyciągu narciarskiego.

Strategia rozwiązania

Będziemy chcieli zapisać równania ruchu w kierunkach x oraz y, dlatego potrzebujemy znaleźć składowe wektora przyspieszenia, które wykorzystamy w równaniach ruchu. W tym celu rozłożymy wektor przyspieszenia na składowe w przyjętym na Rysunku 4.10 układzie współrzędnych. Następnie wstawimy składowe przyspieszenia do równań ruchu dla dowolnej chwili t.

Rozwiązanie

(a) Przyjmijmy układ odniesienia z początkiem na szczycie wzniesienia oraz osią y skierowaną do góry i osią x skierowaną poziomo. Obserwując tor ruchu narciarki zauważamy, że składowa x przyspieszenia jest dodatnia, natomiast składowa y jest ujemna. Znając kąt nachylenia stoku, który wynosi 15° , obliczamy

$$a_x = 2{,}1\mathrm{m/s}^2 \cdot \cos 15° = 2{,}0\mathrm{m/s}^2,$$
$$a_y = -2{,}1\mathrm{m/s}^2 \cdot \sin 15° = -0{,}54\mathrm{m/s}^2.$$

Jeśli wstawimy położenie początkowe i prędkość początkową do Równania 4.12 i Równania 4.13 dla ruchu wzdłuż osi x, otrzymamy

$$x(t) = 75{,}0\mathrm{m} + 4{,}1\mathrm{m/s} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 2{,}0\mathrm{m/s}^2 \cdot t^2,$$
$$v_x(t) = 4{,}1\mathrm{m/s} + 2{,}0\mathrm{m/s}^2 \cdot t.$$

Dla kierunku y mamy

$$y(t) = -50{,}0\mathrm{m} - 1{,}1\mathrm{m/s} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \left(-0{,}54\mathrm{m/s}^2\right) \cdot t^2,$$
$$v_y(t) = -1{,}1\mathrm{m/s} + \left(-0{,}54\mathrm{m/s}^2\right) \cdot t.$$

(b) Skoro mamy ogólne równania ruchu dla dowolnej chwili czasu, możemy znaleźć wartości składowych x i y położenia i prędkości po czasie $t = 10{,}0\mathrm{s}$:

$$x(10{,}0\mathrm{s}) = 75{,}0\mathrm{m} + 4{,}1\mathrm{m/s}^2 \cdot 10{,}0\mathrm{s} + \frac{1}{2} \cdot 2{,}0\mathrm{m/s}^2 \cdot (10{,}0\mathrm{s})^2 = 216{,}0\mathrm{m},$$
$$v_x(10{,}0\mathrm{s}) = 4{,}1\mathrm{m/s} + 2{,}0\mathrm{m/s}^2 \cdot 10{,}0\mathrm{s} = 24{,}1\mathrm{m/s},$$
$$y(10{,}0\mathrm{s}) = -50{,}0\mathrm{m} - 1{,}1\mathrm{m/s} \cdot 10{,}0\mathrm{s} + \frac{1}{2} \cdot \left(-0{,}54\mathrm{m/s}^2\right) \cdot (10{,}0\mathrm{s})^2 = -88{,}0\mathrm{m},$$
$$v_y(10{,}0\mathrm{s}) = -1{,}1\mathrm{m/s} - 0{,}54\mathrm{m/s}^2 \cdot 10{,}0\mathrm{s} = -6{,}5\mathrm{m/s}.$$

Podsumowując, wektory położenia i prędkości narciarki po czasie $t = 10{,}0\mathrm{s}$ są następujące:

$$\vec{r}\,(10{,}0\ \mathrm{s}) = \left(216{,}0\hat{i} - 88{,}0\hat{j}\right)\ \mathrm{m}$$
$$\vec{v}\,(10{,}0\ \mathrm{s}) = \left(24{,}1\hat{i} - 6{,}5\hat{j}\right)\ \mathrm{m/s}.$$

Wartość prędkości narciarki po 10,0 s ruchu wynosi 25 m/s, czyli 90 km/h.

Znaczenie

Dzięki równaniom kinematyki i znajomości warunków początkowych (położenie i prędkość początkową) oraz przyspieszenia ciała potrafimy znaleźć położenie, prędkość i przyspieszenie ciała w dowolnej chwili czasu. Jest to bardzo przydatna umiejętność.

W postaci równań od Równania 4.8 do Równania 4.10 otrzymaliśmy pełen zestaw wyrażeń na położenie, prędkość i przyspieszenie ciała w ruchu w dwóch lub trzech wymiarach. Jeżeli tory ruchu ciał wyglądałyby podobnie do torów samolotów „Orlika” z rysunku na początku rozdziału, to równania te byłyby dość skomplikowane. W następnych sekcjach omówimy dwa szczególne przypadki ruchów na płaszczyźnie i w przestrzeni, tzn. rzuty w ziemskim polu grawitacyjnym oraz ruch po okręgu.


Na tej stronie internetowej Uniwersytetu Kolorado (https://openstaxcollege.org/l/21phetmotladyb) dzięki aplikacji internetowej możesz obserwować jak zmienia się ruch biedronki w zależności od zadanych parametrów położenia i prędkości początkowej oraz przyspieszenia.

4.3 | Rzuty

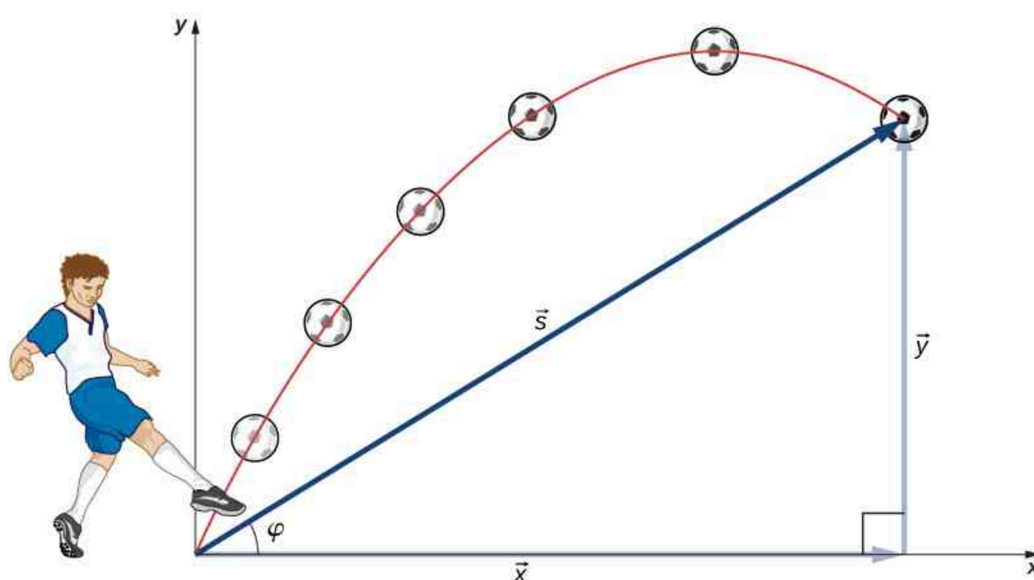
Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- stosować do opisu rzutów jednowymiarowe równania ruchu w kierunkach prostopadłych;
- obliczać zasięg, czas lotu oraz maksymalną wysokość ciała, które zostało rzucone i upada na płaską, poziomą powierzchnię;
- znajdować czas lotu i prędkość upadku pocisku, który trafia w punkt na innej wysokości niż początkowa;
- znajdować kształt toru ruchu ciała w rzucie.

Rzutem (ang. **projectile motion**) nazywamy ruch ciała wystrzelonego lub upuszczonego w powietrzu, który zachodzi jedynie z przyspieszeniem grawitacyjnym. W zagadnieniach fizycznych i inżynierskich bardzo często mamy do czynienia z rzutami. Przykładem takiego ruchu może być ruch meteoroidu wpadającego w atmosferę ziemską, fajerwerku wystrzelonego w powietrze, czy lot piłki w dowolnej dyscyplinie sportu. Takie obiekty nazywamy często *pociskami* a ich tor lotu **trajektorią** (ang. **trajectory**). Ruch obiektów spadających pionowo, który omówiliśmy w rozdziale Ruch prostoliniowy jest prostym rodzajem rzutu w jednym wymiarze, gdzie ruch w poziomie nie występował. W tym rozdziale zajmiemy się rzutami w płaszczyźnie pionowej – przypadek dwuwymiarowy – tj. rzutami poziomymi i ukośnymi, przy czym będziemy zawsze pomijać wpływ oporu powietrza.

Najważniejszym faktem do zapamiętania jest to, że *ruchy w kierunkach prostopadłych są niezależne* i dlatego mogą być rozpatrywane oddzielnie. Mówiliśmy o tym w sekcji Przemieszczenie i prędkość, gdzie pokazaliśmy, że ruch pionowy jest niezależny od ruchu w poziomie. Kluczem do rozwiązania problemu rzutów jest rozłożenie ruchu na ruch wzdłuż osi poziomej i niezależny ruch wzdłuż osi pionowej. Taki wybór osi jest najbardziej sensowny i praktyczny, ponieważ przyspieszenie grawitacyjne występuje wzdłuż kierunku pionowego, a więc w kierunku poziomym nie mamy żadnego przyspieszenia, jeśli pominiemy wpływ oporu powietrza. Dla ułatwienia nazwiemy oś poziomą osią x, natomiast oś pionową - osią y. Pamiętajmy, że taki wybór układu współrzędnych nie jest jedynym możliwym. Jest on po prostu wygodny w problemach z przyspieszeniem grawitacyjnym. W pozostałych przypadkach możemy oczywiście dokonać innego wyboru osi. Rysunek 4.11 ilustruje wybór osi oraz oznaczenia przyjęte w dalszych fragmentach rozdziału. Całkowite przemieszczenie nazwiemy $\vec{s}$, a jego składowe wzdłuż osi poziomej i pionowej $\vec{x}$ oraz $\vec{y}$. Długości wektorów przemieszczenia i jego składowych oznaczymy przez s, x i y.



Rysunek 4.11 Całkowite przemieszczenie $\vec{s}$ piłki do pewnego punktu na jej trajektorii. Wektor $\vec{s}$ ma dwa wektory składowe $\vec{x}$ i $\vec{y}$ wzdłuż poziomej i pionowej osi. Jego długość wynosi s, a kąt jaki tworzy z poziomem to φ.

Aby nasz opis **rzutów** był kompletny, powinniśmy uwzględnić wektor prędkości, przyspieszenia i przemieszczenia. Co więcej, musimy znaleźć ich składowe x oraz y. Załóżmy, że pomijamy wszystkie siły (z wyjątkiem siły grawitacji) takie jak opór powietrza czy tarcie. Jeśli przyjmiemy dodatni kierunek osi pionowej do góry, składowe wektora przyspieszenia mają bardzo prostą postać:

$$a_y = -g = -9{,}8\ \text{m/s}^2, \quad a_x = 0.$$

Ponieważ grawitacja działa tylko w pionie, $a_x = 0$. Jeżeli $a_x = 0$, to prędkość v_x w kierunku x w dowolnej chwili czasu nie zmienia się i jest równa prędkości początkowej v_{0x}. Z takimi warunkami na prędkość i przyspieszenie możemy zapisać kinematyczne równania (Równanie 4.11-Równanie 4.18) dla ruchu w jednorodnym polu grawitacyjnym, przyjmując postać równań odpowiednią dla ruchu ze stałym przyspieszeniem (z sekcji Ruch ze stałym przyspieszeniem). Jeśli przyjmiemy $a_y = -g, \quad a_x = 0$, nasze równania ruchu mają postać:

Ruch w poziomie

$$x = x_0 + v_x t \tag{4.19}$$

$$v_x = v_{0x} \tag{4.20}$$

Ruch w pionie

$$y = y_0 + \frac{1}{2}\left(v_{0y} + v_y\right) t \tag{4.21}$$

$$v_y = v_{0y} - gt \tag{4.22}$$

$$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{4.23}$$

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g\left(y - y_0\right) \tag{4.24}$$

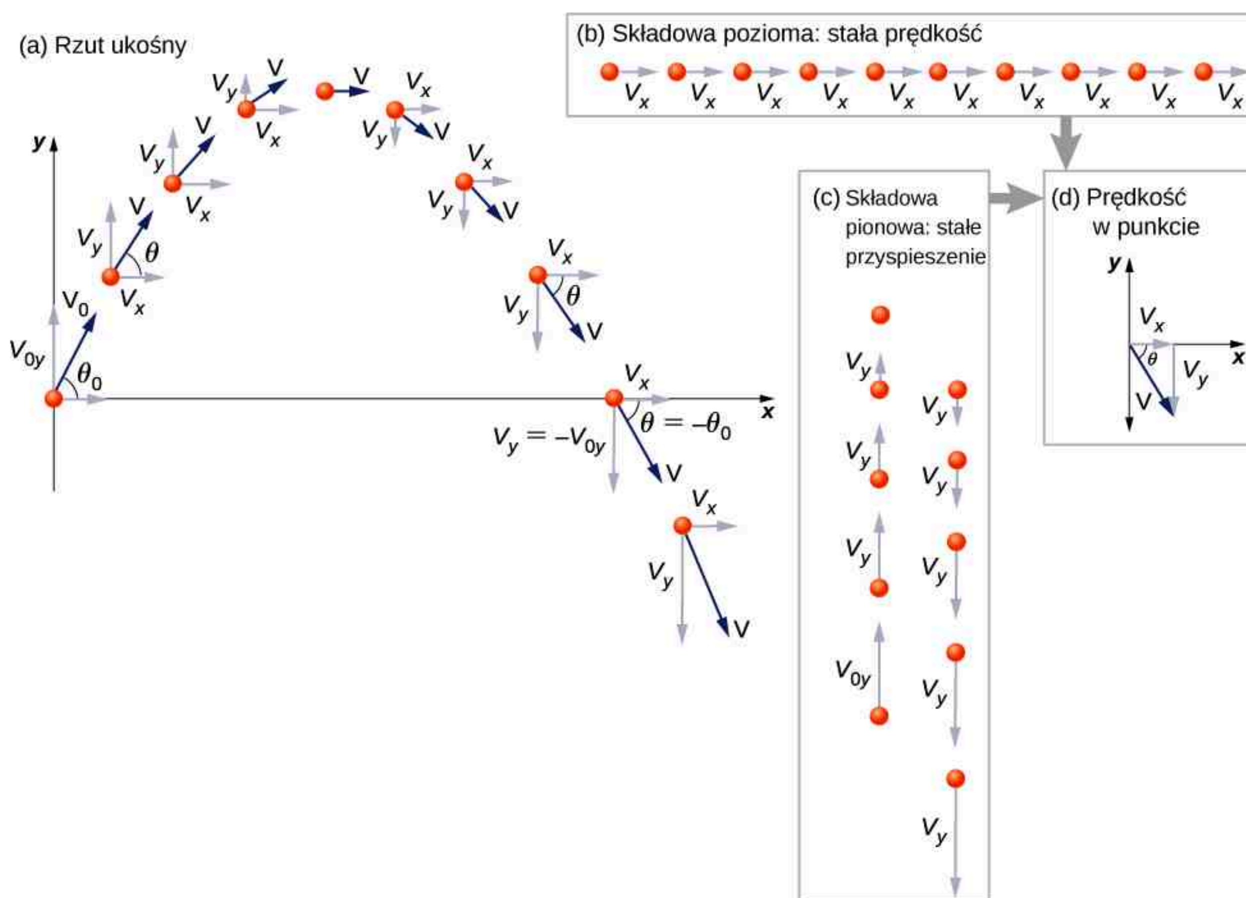
Używając tego zestawu równań, możemy dokonać analizy dowolnego rzutu. Musimy jednak pamiętać o kilku ważnych kwestiach.

Strategia rozwiązywania zadań: rzuty

1. Rozdziel ruch pocisku na składową poziomą i pionową wzdłuż osi x oraz y. Wartości składowych wektora przemieszczenia $\vec{s}$ wzdłuż tych osi to x i y. Wartości składowych wektora prędkości $\vec{v}$ są równe $v_x = v \cos \varphi$ oraz $v_y = v \sin \varphi$, gdzie v jest długością wektora prędkości, a φ jest kątem nachylenia wektora prędkości do osi poziomej (w dowolnej chwili czasu), jak pokazano na Rysunku 4.12.
2. Prędkość początkową v_0 również rozkładamy na składowe $v_{0x} = v_0 \cos \varphi_0$ oraz $v_{0y} = v_0 \sin \varphi_0$, gdzie φ_0 jest kątem początkowym, pod którym pocisk jest wystrzeliwany.
3. Traktuj rzut jako złożenie dwóch niezależnych ruchów w jednym kierunku: wzdłuż osi poziomej i pionowej. Używaj równań ruchu dla kierunku poziomego i pionowego w formie zapisanej powyżej.
4. Rozwiąż równania ze względu na niewiadome. Zauważ, że jedyną wspólną zmienną w równaniach dla kierunku poziomego i pionowego jest czas t. Metody rozwiązywania równań ruchu są takie same jak w przypadku jednowymiarowym. Szczegółowo omówiliśmy je podczas analizy przykładów poniżej.
5. Następnie użyj wielkości służących do opisu ruchu poziomego i pionowego, aby uzyskać informację o całkowitym przemieszczeniu $\vec{s}$ i prędkości $\vec{v}$. Oblicz wartość oraz kierunek wektorów przemieszczenia i prędkości używając wzorów

$$s = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}(y/x), \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

gdzie kątφ określa kierunek wektora przemieszczenia $\vec{s}$.



Rysunek 4.12 (a) Problem rzutu w dwóch wymiarach analizujemy, rozpatrując niezależne ruchy w jednym wymiarze: w kierunku poziomym i pionowym. (b) Ruch w poziomie jest bardzo prosty, ponieważ $a_x = 0$ oraz v_x jest stałe. (c) W trakcie wznoszenia się ciała prędkość w kierunku pionowym maleje i spada do zera, gdy ciało osiąga wysokość maksymalną. Gdy ciało z powrotem spada w kierunku Ziemi, prędkość pionowa rośnie, ale jej kierunek jest teraz przeciwny do kierunku składowej pionowej prędkości początkowej. (d) Złożenie niezależnych ruchów wzdłuż osi x i y daje całkowitą prędkość w dowolnym punkcie toru ruchu.

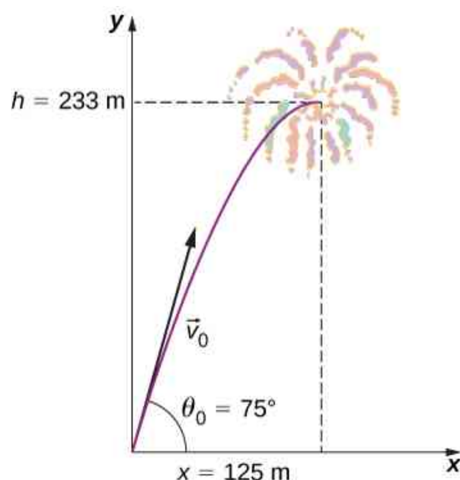
Rzut, w którym początkowy kąt θ_0 między wektorem prędkości początkowej a kierunkiem poziomym jest różny od zera stopni, nazywamy **rzutem ukośnym**. Gdy natomiast kąt ten jest równy zero stopni, to rzut taki nazywać będziemy **rzutem poziomym**. Możemy mieć do czynienia z rzutem ukośnym do góry, jak i w dół (np. rzucając kamieniem w dół klifu). Gdy z kolei kąt jest równy zeru stopni, to rzut nazywamy **rzutem pionowym**.

Przykład 4.7

Wybuch fajerwerku na dużej wysokości

Podczas pokazu sztucznych ogni rakietę z ładunkiem wybuchowym wystrzeliwuje się w powietrze z początkową prędkością o wartości 70,00 m/s pod kątem 75° nad horyzontem, jak pokazano na Rysunku 4.13. Lont ma taką długość, aby ładunek został odpalony w najwyższym punkcie toru lotu rakiety.

a. Oblicz wysokość, na jakiej ładunek wybuchnie.
b. Po jakim czasie od wystrzelenia rakiety dojdzie do wybuchu?
c. W jakiej odległości liczonej w poziomie od miejsca wystrzelenia dojdzie do wybuchu fajerwerku?
d. Jakie jest całkowite przemieszczenie rakiety od startu do momentu wybuchu ładunku?



Rysunek 4.13 Tor ruchu rakiety z fajerwerkami. Odpowiednia długość lontu pozwala na wybuch ładunku w najwyższym punkcie toru, czyli na wysokości 233 m i w odległości 125 m w poziomie od miejsca wystrzału.

Strategia rozwiązania

Ruch rakiety możemy rozłożyć na ruch poziomy i pionowy z przyspieszeniami $a_x = 0$ oraz $a_y = -g$. Przyjmijmy położenie początkowe x_0 i y_0 równe zero i przystąpmy do obliczania poszukiwanych niewiadomych.

Rozwiązanie

(a) Przez “wysokość” rozumiemy to, jak wysoko nad poziomem podłoża wzniesie się rakieta, czyli współrzędną y położenia względem punktu początkowego. Najwyższy punkt toru, zwany *wysokością maksymalną* albo *wierzchołkiem*, zostaje osiągnięty, gdy $v_y = 0$. Skoro znamy początkową i końcową prędkość oraz początkowe położenie rakiety, możemy skorzystać z następującego równania do znalezienia wysokości maksymalnej y:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g\left(y - y_0\right).$$

Ponieważ i y_0, i v_y są równe zero, równanie upraszcza się do postaci:

$$0 = v_{0y}^2 - 2gy.$$

Obliczamy y:

$$y = \frac{v_{0y}^2}{2g}.$$

Potrzebujemy jeszcze wyznaczyć v_{0y} – składową y wektora prędkości początkowej. Jest ona równa $v_{0y} = v_0 \sin\theta_0$, gdzie v_0 jest wartością prędkości początkowej równą 70,0 m/s, a $\theta_0 = 75^\circ$ jest kątem początkowym, pod którym wystrzelono rakietę. Zatem

$$v_{0y} = v_0 \sin\theta_0 = (70{,}0\ \mathrm{m/s}) \sin 75^\circ = 67{,}6\ \mathrm{m/s},$$

natomiast y wynosi:

$$y = \frac{(67{,}6\ \mathrm{m/s})^2}{2\left(9{,}81\ \mathrm{m/s^2}\right)}.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$y = 233\ \text{m}.$$

Zauważmy, że ponieważ jako dodatni przyjęliśmy kierunek w górę, to zarówno składowa pionowa prędkości początkowej, jak i maksymalna wysokość są dodatnie, mimo że przyspieszenie grawitacyjne jest ujemne. Zwróćmy także uwagę, że wysokość maksymalna zależy wyłącznie od pionowej składowej prędkości początkowej. Wobec tego każdy pocisk wystrzelony ukośnie z prędkością o składowej pionowej 67,6 m/s osiągnąłby dokładnie taką samą wysokość maksymalną równą 233 m (pomijając opory powietrza). Wynik otrzymany w tym przykładzie jest rozsądny w przypadku naprawdę dużych rakiet, które są w stanie wynieść ładunek na tak dużą wysokość. W rzeczywistości opory powietrza nie są całkowicie zaniedbywalne i do wyniesienia ładunku na tę samą wysokość potrzebna byłaby zapewne większa prędkość początkowa.

(b) Jak często bywa w problemach fizycznych, jest wiele sposobów obliczenia czasu lotu pocisku do wysokości maksymalnej. W tym przypadku najprościej będzie skorzystać z równania $v_y = v_{0y} - gt$. Ponieważ w wierzchołku $v_y = 0$, dlatego równanie upraszcza się do równości:

$$0 = v_{0y} - gt,$$

z której łatwo obliczymy czas:

$$t = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{67{,}6\ \text{m/s}}{9{,}81\ \text{m/s}^2} = 6{,}9\ \text{s}.$$

Znaleziony czas jest również prawdopodobny w przypadku dużych fajerwerków. Gdybyś miał okazję obserwować pokaz sztucznych ogni, zwróć uwagę, że zazwyczaj mija kilkanaście sekund zanim ładunek wybucha. Inną metodą wyznaczenia czasu wznoszenia pocisku jest użycie równania $y = y_0 + \frac{1}{2}\left(v_{0y} + v_y\right)t$. Obliczenie czasu przy pomocy tego równania zostawiamy ci jako ćwiczenie.

(c) Ze względu na to, że pomijamy opór powietrza, $a_x = 0$ oraz składowa pozioma prędkości jest stała. Przemieszczenie w poziomie obliczymy, mnożąc prędkość poziomą przez czas zgodnie ze wzorem $x = x_0 + v_x t$, gdzie x_0 jest zero. Zatem

$$x = v_x t,$$

przy czym v_x jest składową x wektora prędkości, która wynosi

$$v_x = v_0 \cos\theta_0 = 70{,}0\text{m/s} \cdot \cos 75^\circ = 18{,}1\text{m/s}.$$

Zauważmy, że pominięto tutaj indeks dolny '0', bo prędkość w kierunku poziomym się nie zmienia i jest zawsze równa składowej prędkości początkowej. Czas t jest dla ruchu w obu kierunkach taki sam, więc x jest równe

$$x = 18{,}1\text{m/s} \cdot 6{,}9\text{s} = 125\text{m}.$$

Ruch poziomy przy braku oporów powietrza zachodzi ze stałą prędkością. Tak duże obliczone przez nas poziome przemieszczenie może być użyteczne, aby utrzymać odłamki powstałe w wyniku wybuchu jak najdalej od widzów. Na ruch odłamków po wybuchu duży wpływ ma opór powietrza, dzięki czemu upadają one prawie dokładnie poniżej miejsca wybuchu i nie docierają do widzów.

(d) W podpunktach (a) i (c) obliczyliśmy składowe wektora położenia w najwyższym punkcie toru lotu rakiety, które są w tym przypadku także składowymi przemieszczenia. Pozostaje nam więc obliczenie długości i kierunku przemieszczenia do wierzchołka.

$$\vec{s} = \left(125\hat{i} + 233\hat{j}\right)\text{m}$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{125^2 + 233^2} = 264\ \text{m}$$

$$\theta = \text{arctg}\left(\frac{233}{125}\right) = 61{,}8^\circ.$$

Zauważmy, że kąt między przemieszczeniem a osią poziomą jest mniejszy niż początkowy kąt wystrzału rakiety. Aby zrozumieć dlaczego tak jest, spójrzmy jeszcze raz na Rysunek 4.11, który pokazuje krzywiznę trajektorii z perspektywy podłoża.

Rozwiązując Przykład 4.7(a), wyprowadziliśmy wyrażenie na y słuszne w przypadku, gdy pomijamy opór powietrza. Nazwijmy teraz wysokość maksymalną $y = h$. W takim razie

$$h = \frac{v_{0y}^2}{2g}.$$

Powyższe równanie podaje ogólny wzór na *wysokość maksymalną nad punktem początkowym ciała w rzucie ukośnym*, która zależy tylko od składowej pionowej prędkości początkowej.



4.3 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Kamień rzucono poziomo z klifu o wysokości 100,0 m z prędkością o wartości 15,0 m/s.

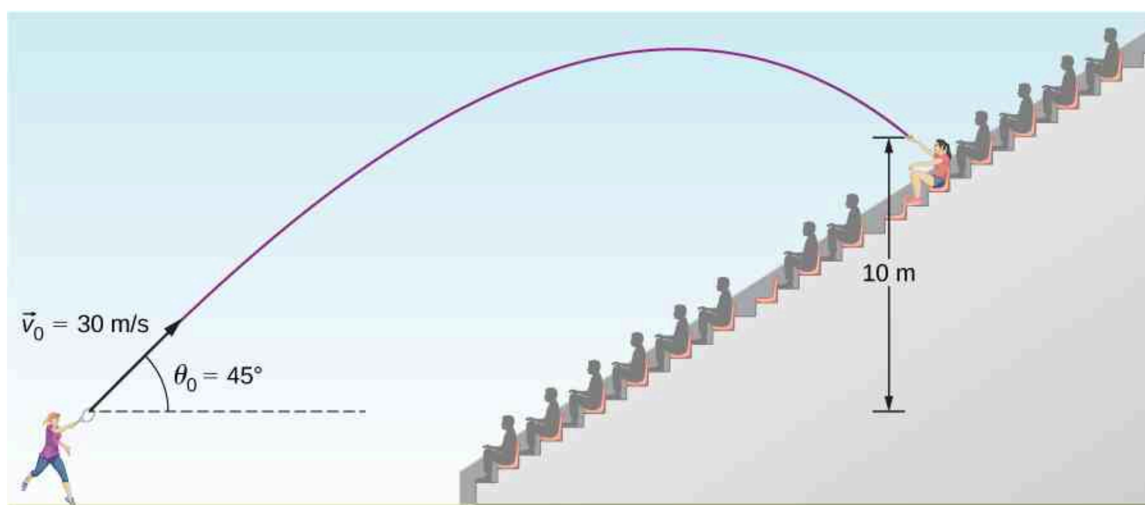
a. Przedyskutuj możliwy wybór początku układu współrzędnych.
b. Jakie równanie opisuje ruch w kierunku poziomym?
c. Które równania zastosujesz do opisu ruchu w pionie?
d. Jaki jest wektor prędkości i jego wartość w punkcie upadku kamienia na ziemię?

Przykład 4.8

Rzut ukośny: Tenisistka

Tenisistka po zwycięstwie w rozgrywanym na Arthur Ashe Stadium finale US Open uderza piłkę rakietą skierowaną 45° do poziomu, posyłając ją w trybuny z szybkością 30 m/s (Rysunek 4.14). Gdy piłka opadała złapał ją widz siedzący 10 m ponad poziomem, z którego piłka została wyrzucona.

a. Oblicz czas, po jakim piłka dociera do widza.
b. Jaka jest wartość i kierunek prędkości piłki w chwili upadku?



Rysunek 4.14 Tor lotu piłki tenisowej uderzonej w trybuny.

Strategia rozwiązania

Podobnie jak wcześniej, dzięki rozłożeniu ruchu w dwóch wymiarach na dwie niezależne składowe w jednym wymiarze, łatwo obliczymy poszukiwane wielkości. Czas przebywania piłki w powietrzu zależy jedynie od jej ruchu w pionie. Zaczniemy więc od wyznaczenia niewiadomej t. Podczas gdy w pionie piłka wznosi się i opada, w poziomie porusza się stale z jednakową prędkością. W tym przykładzie jesteśmy pytani o prędkość końcową w momencie upadku piłki. Żeby ją znaleźć, połączymy z powrotem informacje o ruchu poziomym i pionowym. Wyznaczymy wtedy wektor $\vec{v}$ po czasie t, który będziemy znali z rozwiązania pierwszej części zadania.

Rozwiązanie

(a) Podczas lotu w powietrzu piłka wznosi się, a następnie opada do wysokości końcowej 10,0 m ponad poziomem, z którego została wyrzucona. Czas lotu znajdziemy, korzystając z Równania 4.23:

$$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 .$$

Jeśli przyjmiemy położenie początkowe y_0 równe zero metrów, to w powyższym równaniu zmienna y będzie równa 10 m. Początkowa prędkość w pionie jest składową pionową wektora prędkości początkowej:

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta_0 = (30{,}0 \text{ m/s}) \sin 45^\circ = 21{,}2 \text{ m/s}.$$

Jeśli w miejsce y i v_{0y} w Równaniu 4.23 podstawimy obliczone wcześniej wartości, otrzymamy:

$$10{,}0 \text{ m} = (21{,}2 \text{ m/s})\, t - \left(4{,}90 \text{ m/s}^2\right) t^2 .$$

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe z niewiadomą t, które po uporządkowaniu ma postać:

$$\left(4{,}90 \text{ m/s}^2\right) t^2 - (21{,}2 \text{ m/s})\, t + 10{,}0 \text{ m} = 0.$$

Jeśli rozwiążemy równanie kwadratowe, otrzymamy dwa wyniki t = 3,79 s oraz t = 0,54 s. Wiemy, że piłka znajduje się na wysokości 10 m dwukrotnie - raz w jej locie do góry, a raz podczas opadania. Dlatego jako czas lotu piłki do widza wybierzemy rozwiązanie pierwsze, gdzie czas ten jest dłuższy:

$$t = 3{,}79 \text{ s}.$$

Czas ruchu pocisku jest determinowany jedynie jego ruchem w kierunku pionowym. Dlatego każdy pocisk wystrzelony ze składową pionową prędkości 21,2 m/s, który dociera do wysokości 10,0 m ponad poziomem początkowym, spędzi w powietrzu dokładnie 3,79 s.

(b) Składowe prędkości v_x i v_y w momencie upadku piłki na trybuny znajdziemy dzięki wynikom z punktu (a). Następnie wykorzystamy je do obliczenia wartości wektora prędkości $\vec{v}$ oraz kąta nachylenia wektora prędkości do poziomu θ. Oznaczymy go dodatkowo przez θ_k, aby podkreślić, że jest to kąt końcowy. Ze względu na to, że składowa v_x jest stała w czasie, możemy wyznaczyć jej wartość dla dowolnej chwili i dowolnego położenia piłki w trakcie lotu. Wybieramy punkt początkowy, bo znamy początkową prędkość i kąt wyrzucenia piłki. Dlatego

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 = (30 \text{ m/s}) \cos 45^\circ = 21{,}2 \text{ m/s}.$$

Składową pionową prędkości końcowej obliczymy dzięki Równaniu 4.22:

$$v_y = v_{0y} - gt.$$

W części (a) obliczyliśmy już wartość v_{0y}, równą 21,2 m/s, zatem

$$v_y = 21{,}2 \text{ m/s} - 9{,}81 \text{ m/s}^2 \, (3{,}79 \text{ s}) = -15{,}9 \text{ m/s}.$$

Wartość prędkości $\vec{v}$ wynosi

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(21{,}2 \text{ m/s})^2 + (-15{,}9 \text{ m/s})^2} = 26{,}5 \text{ m/s}.$$

Kąt upadku θ_k wyznaczymy jako arcus tangens stosunku składowych prędkości:

$$\theta_k = \operatorname{arctg}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{-15{,}9}{21{,}2}\right) = -36{,}9^\circ .$$

Znaczenie

a. Jak już mówiliśmy, czas ruchu w rzucie ukośnym zależy jedynie od składowej pionowej ruchu. Dlatego czas ruchu każdego pocisku, który startuje z pionową prędkością początkową 21,2 m/s i ląduje na wysokości 10,0 m ponad punktem początkowym, wynosi 3,79 s.

b. Ujemny kąt oznacza, że wektor prędkości w momencie upadku jest skierowany 36,9° poniżej horyzontu. Ten wynik jest spójny z obserwacją, że piłka upada na trybuny po drugiej stronie wierzchołka jej trajektorii i stąd ujemna składowa y prędkości. Zgodnie z naszymi oczekiwaniami, prędkość upadku piłki na wysokości 10,0 m jest mniejsza niż wartość prędkości początkowej, a kąt upadku jest co do wartości bezwzględnej mniejszy niż kąt początkowy.

Czas lotu, tor i zasięg

W tej sekcji chcemy wyprowadzić ogólne wzory na czas lotu, tor i zasięg w rzucie ukośnym, w którym miejsce wystrzelenia i upadku pocisku są na tej samej wysokości. Wykorzystamy poznane już równania kinematyczne, aby w kolejnych punktach otrzymać interesujące nas wzory.

Czas lotu

Przekształcając kinematyczne równania ruchu, możemy wyprowadzić wzór na czas lotu obiektu w rzucie ukośnym od miejsca wystrzelenia do miejsca upadku, które znajdują się na tym samym poziomie. Zauważmy, że składowa y położenia musi być równa zeru zarówno na początku, jak i na końcu ruchu. W takim razie przemieszczenie w kierunku pionowym musi być równe zeru, zatem

$$y - y_0 = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 = (v_0 \sin\theta_0)\, t - \frac{1}{2} g t^2 = 0.$$

Po przekształceniu do postaci iloczynowej mamy:

$$t\left(v_0 \sin\theta_0 - \frac{gt}{2}\right) = 0.$$

Rozwiązując to równanie ze względu na t, otrzymujemy:

$$T = \frac{2\,(v_0 \sin\theta_0)}{g}. \qquad (4.25)$$

Powyższe równanie daje nam wzór na **całkowity czas lotu** (ang. **time of flight**) w rzucie ukośnym, gdy pocisk jest wystrzelony i wraca na tę samą wysokość. Równanie 4.25 nie obowiązuje w przypadku, gdy poziom wystrzelenia jest inny niż poziom upadku pocisku, jak widzieliśmy w rozwiązanym wyżej Przykładzie 4.8 tenisisty uderzającego piłkę w kierunku trybun. Równanie 4.24 ma, dwa rozwiązania. Drugie rozwiązanie, $t = 0$, daje nam czas wystrzelenia pocisku. Czas lotu w rzucie ukośnym wzrasta wraz z prędkością początkową w kierunku pionowym i maleje ze wzrostem przyspieszenia grawitacyjnego g. Wobec tego na Księżycu, gdzie panuje 6 razy mniejsze przyspieszenie grawitacyjne niż na Ziemi, pocisk wystrzelony z taką samą prędkością będzie w locie przez 6 razy dłuższy czas. Zwróćmy też uwagę, że czas wznoszenia się pocisku (równy czasowi opadania pocisku) wynosi połowę czasu danego powyższym wzorem (bez dwójki w liczniku).

Tor lotu

Równanie toru lotu pocisku w rzucie ukośnym wyznaczymy, eliminując zmienną t z równań kinematycznych dla dowolnej chwili i wyprowadzając zależność $y(x)$. Przyjmijmy, że pocisk jest wystrzelony z początku układu współrzędnych, zatem $x_0 = y_0 = 0$. Z równania na zależność $x(t)$ wyznaczamy czas

$$x = v_{0x} t \Rightarrow t = \frac{x}{v_{0x}} = \frac{x}{v_0 \cos\theta_0}.$$

Podstawiając za t w równaniu na składową pionową położenia $y = (v_0 \sin\theta_0)\, t - \frac{1}{2} g t^2$, otrzymujemy:

$$y = (v_0 \sin\theta_0)\left(\frac{x}{v_0 \cos\theta_0}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta_0}\right)^2.$$

Upraszczając powyższe wyrażenie, otrzymujemy wzór na równanie toru

$$y = (\text{tg}\theta_0)\, x - \left[\frac{g}{2(v_0 \cos\theta_0)^2}\right] x^2. \tag{4.26}$$

Równanie toru w rzucie ukośnym ma ogólną postać $y = ax + bx^2$, co jest równaniem paraboli o współczynnikach

$$a = \text{tg}\theta_0, \quad b = -\frac{g}{2(v_0 \cos\theta_0)^2};$$

Zasięg

Wzór na **zasięg** (ang. **range**), czyli odległość w poziomie, jaką w rzucie ukośnym pokonuje pocisk, znajdziemy na podstawie równania toru ruchu. Równanie 4.26 w postaci iloczynowej ma postać:

$$y = x\left[\text{tg}\theta_0 - \frac{g}{2(v_0 \cos\theta_0)^2} x\right].$$

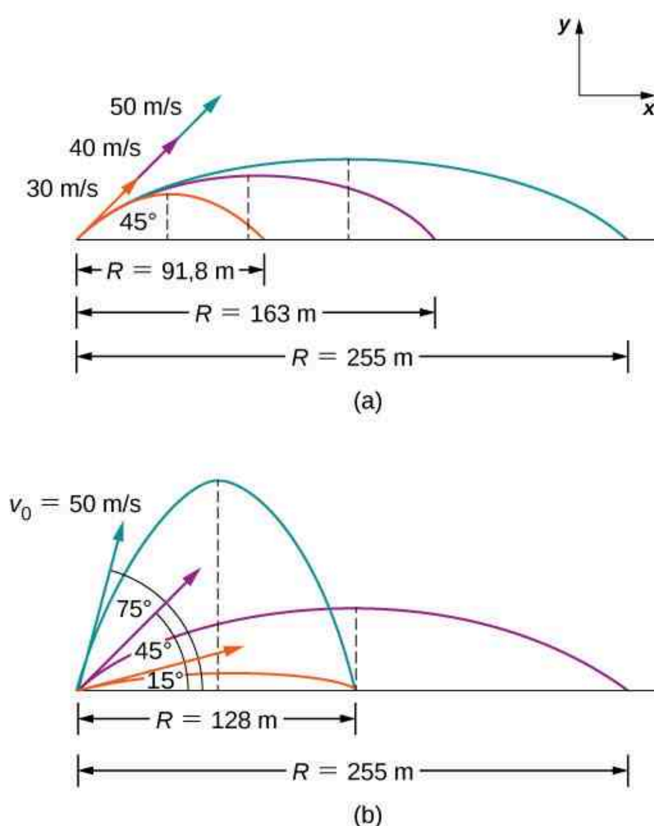
Położenie w pionie y jest równe zeru i dla punktu wystrzelenia, i dla miejsca upadku pocisku, bo nadal zakładamy start i metę pocisku na tej samej wysokości. Podstawiając $y = 0$ do równania, otrzymujemy dwa rozwiązania: $x = 0$, co odpowiada punktowi wystrzelenia pocisku, oraz

$$x = \frac{2v_0^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0}{g},$$

co odpowiada miejscu upadku. Korzystając z tożsamości trygonometrycznej $2 \sin\theta \cos\theta = \sin 2\theta$ oraz wprowadzając oznaczenie zasięgu $x = R$, otrzymujemy wzór końcowy na zasięg:

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}. \tag{4.27}$$

Oczywiście powyższy wzór na zasięg jest poprawny jedynie w przypadku rzutu ukośnego względem poziomej powierzchni. Możemy zauważyć, że zasięg wzrasta wraz z kwadratem prędkości początkowej v_0 oraz proporcjonalnie do $\sin 2\theta_0$, a maleje ze wzrostem przyspieszenia grawitacyjnego. W takim razie na Księżycu zasięg będzie 6 razy większy przy tej samej prędkości początkowej i przy tym samym kącie wystrzelenia. Co więcej, dzięki analizie czynnika $\sin 2\theta_0$ we wzorze możemy zauważyć, że zasięg ma maksimum dla kąta 45°. Wszystkie te wnioski ilustrujemy na Rysunku 4.15. Na rysunku (a) widzimy, że – przy ustalonym kącie – im większa prędkość początkowa, tym większy zasięg. Z kolei rysunek (b) dowodzi, że zasięg rzutu ukośnego z ustaloną prędkością jest największy dla kąta 45°. Jest to prawdą jedynie wtedy, gdy pomijamy opór powietrza. Gdybyśmy nie zaniedbali wpływu oporu powietrza, to zasięg maksymalny byłby dla kąta nieco mniejszego. Co ciekawe, z rysunku (b) wynika też, że ten sam zasięg mają dwa rzuty, których kąty początkowe dodają się do 90°. Co prawda wysokości maksymalne się różnią – mniejszemu kątowi odpowiada mniejsza wysokość maksymalna niż dla kąta większego – jednak zasięg jest ten sam.



Rysunek 4.15 Trajektorie pocisków wystrzelonych z tego samego poziomu. (a) Im większa prędkość początkowa v_0 tym większy zasięg przy danym kącie początkowym. (b) Wpływ kąta początkowego θ_0 na zasięg pocisku w rzucie ukośnym z ustaloną wartością prędkości początkowej. Zwróćmy uwagę, że zasięg jest taki sam dla kątów 15° i 75°, mimo że wysokości maksymalne są inne.

Przykład 4.9

Golfista

Golfista musi zmierzyć się z dwiema innymi sytuacjami przy różnych dołkach. Na pierwszym dołku ma do pokonania dystans 120 m, ale chce uderzyć piłkę na odległość tylko 90 m tak, aby dalej potoczyła się jak najbliżej dołka. Uderza piłkę nisko nad podłożem pod kątem 30° i umożliwia jej po upadku dalsze toczenie się po trawie. Na drugim dołku jest 90 m od celu i chce, aby piłka prawie wcale nie toczyła się po upadku na trawę, dlatego uderza ją pod kątem 70° do podłoża. W obu przypadkach punkt startowy piłki i miejsce upadku na trawę znajdują się na tej samej wysokości.

a. Jaka jest szybkość początkowa piłki na pierwszym dołku?
b. Jaka jest szybkość początkowa piłki na drugim dołku?
c. Jakie jest równanie toru piłki w obu przypadkach?
d. Narysuj tor w obu przypadkach.

Strategia rozwiązania

Wiemy, że wzór na zasięg wiąże i prędkość początkową, i kąt początkowy. Zatem, znając kąt i zasięg, możemy przy jego pomocy wyznaczyć prędkość dla obu przypadków (a) i (b). Następnie, mając prędkości początkowe w obu przypadkach, napiszemy równania toru.

Rozwiązanie

a. $$R = \frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{g} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{Rg}{\sin(2\theta_0)}} = \sqrt{\frac{90{,}0\text{m} \cdot 9{,}81\text{m/s}^2}{\sin(2 \cdot 30^\circ)}} = 31{,}9\text{m/s},$$

b. $R = \frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{g} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{Rg}{\sin(2\theta_0)}} = \sqrt{\frac{90{,}0\text{m} \cdot 9{,}81\text{m/s}^2}{\sin(2 \cdot 70°)}} = 37{,}1\text{m/s},$

c. $y = x\left[\operatorname{tg}\theta_0 - \frac{g}{2(v_0\cos\theta_0)^2}\right],$

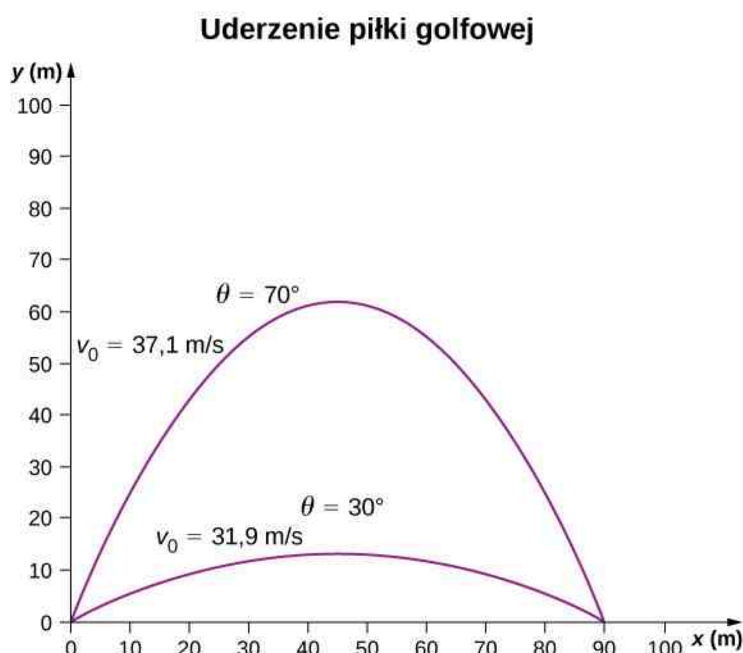
Pierwszy dołek

$$y = x\left[\operatorname{tg} 70° - \frac{9{,}81\text{m/s}^2}{2(37{,}1\text{m/s} \cdot \cos 70°)^2}x\right] = \left(2{,}75x - 0{,}0305x^2\right)\text{m}$$

Drugi dołek

$$y = x\left[\operatorname{tg} 30° - \frac{9{,}81\text{m/s}^2}{2(31{,}9\text{m/s}\cdot\cos 30°)^2}x\right] = \left(0,58x - 0,0064x^2\right)\text{m}$$

d. Rysując wykres zależności $y(x)$ na podstawie powyższych równań, możemy graficznie porównać tory piłki w obu przypadkach. Spójrz na Rysunek 4.16.



Rysunek 4.16 Tory lotu piłki golfowej uderzonej pod różnymi kątami, ale o takim samym zasięgu, równym 90 m. W obu przypadkach miejsce upadku i wystrzelenia znajdują się na tej samej wysokości.

Znaczenie

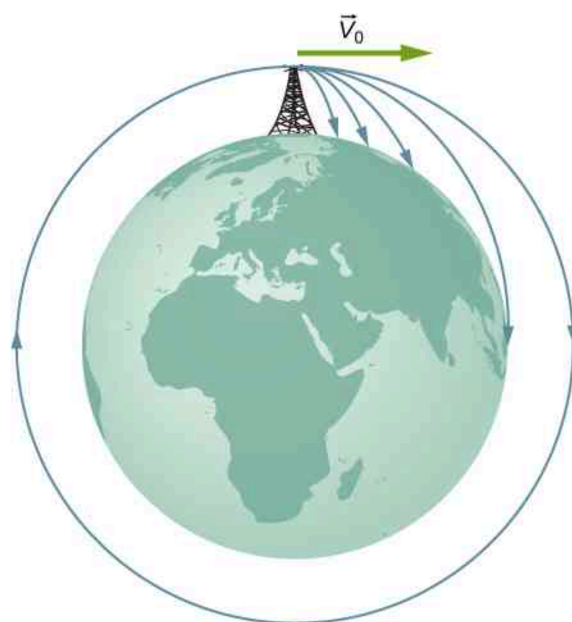
Prędkość początkowa w rzucie pod kątem 70° jest większa niż prędkość początkowa dla kąta 30°. Dwa pociski wystrzelone z takimi samymi prędkościami osiągają ten sam zasięg, gdy kąty początkowe sumują się do 90°. W naszym przykładzie na Rysunku 4.16 suma kątów jest większa niż 90°, dlatego też piłka w rzucie pod kątem 70° musi mieć większą prędkość, aby osiągnąć zasięg 90 m. Inaczej upadłaby po przebyciu mniejszej odległości.



4.4 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Jeżeli piłki golfowe z powyższego Przykładu 4.9 miałyby te same wartości prędkości początkowej, to zasięg lotu której z nich byłby większy?

W naszych rozważaniach o zasięgu rzutu względem płaskiej powierzchni zakładamy, że R jest bardzo małe w porównaniu z obwodem kuli ziemskiej. Jeżeli jednak zasięg jest duży, krzywizna Ziemi zaczyna być istotna. Powierzchnia

Ziemi obniża się w trakcie lotu pocisku i przyspieszenie grawitacyjne zmienia wartość wzdłuż toru lotu. Zasięg rzutu jest w efekcie większy niż przewidziany wyprowadzonym przez nas wzorem, bo miejsce upadku pocisku jest dalej niż w przypadku płaskiej powierzchni odniesienia. Obrazuje to Rysunek 4.17, inspirowany szkicem Newtona z jego dzieła *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Jeżeli prędkość początkowa jest odpowiednio duża, pocisk może wejść na orbitę Ziemi. Powierzchnia Ziemi obniża się o 5 m co każde 8000 m w poziomie. W spadku swobodnym (bez oporów powietrza) ciało spada o 5 m w ciągu 1 s. W takim razie, jeśli ciału nadamy prędkość poziomą o wartości 8000 m/s (czyli 28 800 km/h) tuż przy powierzchni Ziemi, to takie ciało zacznie ruch orbitalny wokół Ziemi – stanie się satelitą. Możemy to rozumieć w ten sposób, że w ruchu orbitalnym powierzchnia Ziemi stale opada względem toru satelity. Wymieniona wartość prędkości jest w przybliżeniu wartością typową dla statku kosmicznego lub satelitów na niskiej orbicie okołoziemskiej. Te i inne zagadnienia ruchu orbitalnego, jak np. ruch Ziemi w przestrzeni kosmicznej, omawiamy szczegółowo w rozdziale Grawitacja.



Rysunek 4.17 Wystrzelenie pocisku na orbitę ziemską. Pocisk wystrzeliwany jest z wysokiej wieży, dzięki czemu opór powietrza jest pomijalny. Wraz ze wzrostem prędkości początkowej zasięg rzutu jest większy niż względem płaskiej powierzchni, ponieważ powierzchnia Ziemi zakrzywia się w dół względem toru lotu pocisku. Przy prędkości początkowej 8000 m/s pocisk osiąga orbitę.


Na stronie PhET Explorations: Projectile Motion (https://openstaxcollege.org/l/21phetpromot) możesz zapoznać się z parametrami rzutu ukośnego w zależności od kąta wyrzutu i prędkości początkowej.

4.4 | Ruch po okręgu

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

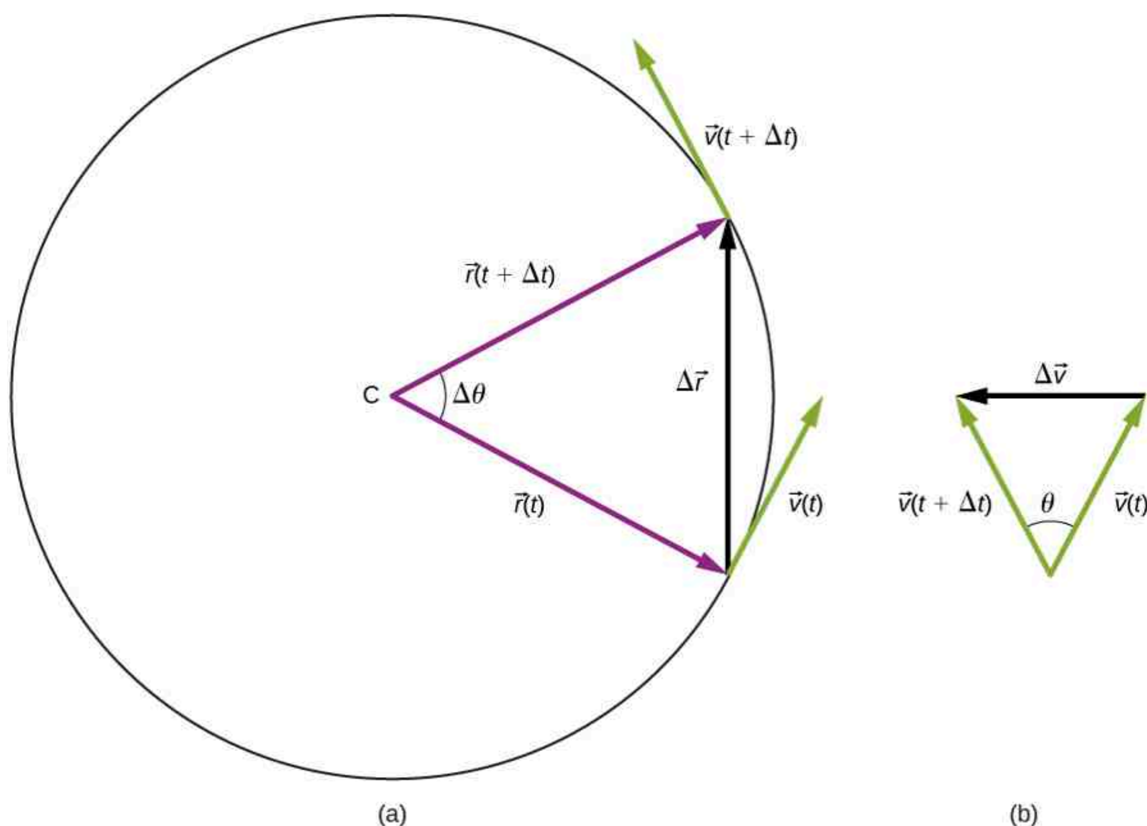
- obliczać przyspieszenie dośrodkowe ciała w ruchu po okręgu;
- korzystać z kinematycznych równań ruchu, aby znaleźć położenie, prędkość i przyspieszenie ciała w ruchu po okręgu;
- wyjaśniać różnice między przyspieszeniem dośrodkowym, a stycznym w ruchu niejednostajnym po okręgu;
- obliczać przyspieszenie dośrodkowe, styczne oraz całkowite w ruchu niejednostajnym po okręgu.

Ruch jednostajny po okręgu jest szczególnym rodzajem ruchu, w którym ciało porusza się po torze o kształcie okręgu z prędkością o stałej wartości (stałą szybkością). Przykładowo, dowolny punkt śmigła samolotowego obracającego się ze stałą częstotliwością wykonuje ruch jednostajny po okręgu. Innymi obiektami obrazującymi ten ruch są wska-

zówki zegara – sekundowa, minutowa oraz godzinowa. Co ciekawe, ale nieoczywiste, każdy punkt w takim ruchu doznaje przyspieszenia, mimo że nazywamy go jednostajnym i prędkość ma stałą wartość. Aby to zrozumieć, musimy dokonać bardziej szczegółowej analizy wektorowej tego ruchu. W tym rozdziale zajmujemy się też ruchem zmiennym po okręgu (przyspieszonym lub opóźnionym), gdzie oprócz przyspieszenia wspomnianego powyżej, występuje także przyspieszenie związane ze zmianą szybkości w czasie.

Przyspieszenie dośrodkowe

W przypadku ruchu po linii prostej ciała poruszające się ze stałą szybkością muszą mieć zerowe przyspieszenie. Jednak w dwóch lub trzech wymiarach, nawet jeśli szybkość jest stała, ciało może mieć przyspieszenie, o ile porusza się po torze zakrzywionym, np. po okręgu. W takich przypadkach wektor prędkości się zmienia, tzn. $\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t \neq 0$. Zmienia się w czasie jego kierunek i zwrot, mimo że wartość pozostaje stała. Widzimy to na Rysunku 4.18. Gdy ciało przemieszcza się wzdłuż okręgu przeciwnie do ruchu wskazówek zegara (w lewo), to w czasie Δt wektor położenia zmienia się od $\vec{r}\,(t)$ do $\vec{r}\,(t+\Delta t)$. Wektor prędkości również zmienia się od $\vec{v}\,(t)$ do $\vec{v}\,(t+\Delta t)$, ale jego wartość jest stała i jest on przez cały czas styczny do toru. Zmienia się jedynie kierunek prędkości w przestrzeni. W ruchu po okręgu wektor prędkości $\vec{v}\,(t)$ jest prostopadły do wektora położenia $\vec{r}\,(t)$, jeśli za początek układu współrzędnych przyjmiemy środek okręgu. Skoro tak, to trójkąty zbudowane z wektorów: położenia oraz $\Delta\vec{r}$, a także prędkości i $\Delta\vec{v}$ są podobne. Co więcej, ponieważ $|\vec{r}\,(t)| = |\vec{r}\,(t+\Delta t)|$ oraz $|\vec{v}\,(t)| = |\vec{v}\,(t+\Delta t)|$, oba te trójkąty są równoramienne. Na podstawie tych własności możemy stwierdzić, że $\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r}$ lub inaczej $\Delta v = \frac{v}{r}\Delta r$.



Rysunek 4.18 (a) Ruch cząstki po okręgu ze stałą szybkością, z zaznaczonymi wektorami położenia i prędkości w chwilach czasu t i $t+\Delta t$. (b) Wektory prędkości budują trójkąt równoramienny. Oba zaznaczone na rysunku trójkąty są podobne. W granicy $\Delta t \to 0$, wektor $\Delta\vec{v}$ jest skierowany do środka okręgu.

Wartość przyspieszenia możemy znaleźć, korzystając z definicji

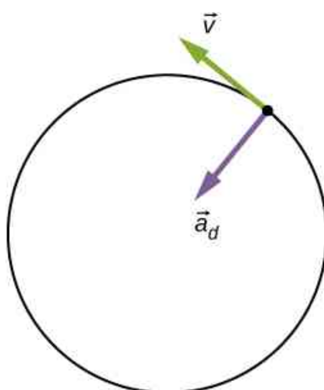
$$a = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = \frac{v}{r}\left(\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t}\right) = \frac{v^2}{r}.$$

Możemy też ustalić kierunek wektora przyspieszenia. Gdy Δt, a więc i $\Delta\theta$ zmierzają do zera, wektor $\Delta\vec{v}$ przyjmuje

kierunek prostopadły do $\vec{v}$. W granicy $\Delta t \to 0$, $\Delta \vec{v}$ staje się prostopadłe do $\vec{v}$. Ze względu na to, że $\vec{v}$ jest styczne do okręgu, przyspieszenie $\mathrm{d}\vec{v} / \mathrm{d}t$ musi być skierowane do środka okręgu. Podsumowując, cząstka poruszająca się po okręgu ze stałą szybkością ma przyspieszenie o wartości:

$$a_d = \frac{v^2}{r}, \tag{4.28}$$

a kierunek wektora przyspieszenia jest do środka okręgu (Rysunek 4.19). To przyspieszenie nazywamy **przyspieszeniem dośrodkowym** (ang. **centripetal acceleration**), dlatego użyliśmy indeksu dolnego „d”. Określenie *dośrodkowe* jednoznacznie sugeruje kierunek wektora przyspieszenia do środka okręgu.



Rysunek 4.19 Wektor przyspieszenia dośrodkowego jest zwrócony do środka okręgu, czyli wzdłuż promienia okręgu. Zaznaczono także wektor prędkości, który jest zawsze styczny do okręgu.

Prześledźmy kilka przykładów ilustrujących wzajemny związek między wartością prędkości, promieniem okręgu i przyspieszeniem dośrodkowym.

Przykład 4.10

Uzyskiwanie przyspieszenia 1g

Odrzutowiec leci z szybkością 134,1 m/s po prostoliniowym torze. W pewnej chwili skręca, przez chwilę poruszając się po łuku okręgu w płaszczyźnie równoległej do ziemi. Jaki musi być promień łuku, aby pilot i odrzutowiec doznali przyspieszenia o wartości 1g w kierunku do środka kołowego toru?

Strategia rozwiązania

Znając szybkość odrzutowca, wykorzystamy wzór na przyspieszenie dośrodkowe do obliczenia promienia okręgu.

Rozwiązanie

Za wartość przyspieszenia dośrodkowego podstawmy wartość przyspieszenia grawitacyjnego, $9{,}81\ \mathrm{m/s}^2 = v^2 / r$. Wyznaczając z tego równania promień, otrzymujemy

$$r = \frac{(134{,}1\ \mathrm{m/s})^2}{9{,}81\ \mathrm{m/s}^2} = 1\,833\ \mathrm{m} = 1{,}833\ \mathrm{km}.$$

Znaczenie

Gdybyśmy chcieli, aby pilot odrzutowca doznawał przyspieszenia większego niż g, odrzutowiec musiałby albo zwiększyć szybkość na tym samym torze, albo zmniejszyć promień łuku okręgu, albo zrobić jedno i drugie.



4.5 Sprawdź, czy rozumiesz. Koło zamachowe o promieniu 20,0 cm obraca się z przyspieszeniem dośrodkowym 900,0 cm/s^2. Z jaką szybkością wirują punkty na obwodzie koła?

Przyspieszenie dośrodkowe może mieć bardzo szeroki zakres wartości zależnie od szybkości i promienia krzywizny toru. Typowe wartości przyspieszenia dośrodkowego dla różnych obiektów są przedstawione w tabeli.

Obiekt	Wartość przyspieszenia dośrodkowego (w m/s^2 lub w jednostkach g)
Ziemia krążąca wokół Słońca	$5{,}93 \cdot 10^{-3}$
Księżyc krążący wokół Ziemi	$2{,}73 \cdot 10^{-3}$
Satelita na orbicie geostacjonarnej	0,233
Zewnętrzna krawędź płyty CD podczas odtwarzania	5,78
Odrzutowiec wykonujący "beczkę"	$2g - 3g$
Kolejka górska (roller coaster)	$5g$
Elektron w atomie wodoru w prostym modelu Bohra	$9{,}0 \cdot 10^{22}$

Tabela 4.1 Typowe wartości przyspieszenia dośrodkowego

Równania ruchu jednostajnego po okręgu

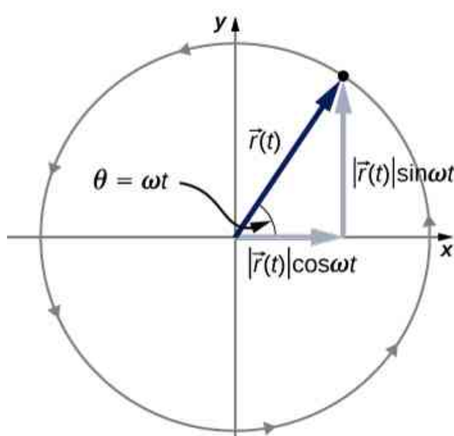
Ruch cząstki poruszającej się ruchem jednostajnym po okręgu może być opisany za pomocą wektora położenia $\vec{r}\,(t)$. Na Rysunku 4.20 prezentujemy ruch cząstki poruszającej się po okręgu w lewo. W trakcie ruchu cząstki jej wektor położenia (wektor wodzący) zakreśla w pewnym czasie kąt θ liczony od osi x. Wektor położenia $\vec{r}\,(t)$ nachylony pod kątem θ do osi x jest także pokazany na rysunku wraz z jego składowymi wzdłuż osi x i y. Przyjmujemy za początek układu współrzędnych środek okręgu. Długość wektora położenia wynosi $A = |\vec{r}\,(t)|$ i jest to długość promienia okręgu. Rozłóżmy wektor na składowe:

$$\vec{r}\,(t) = A\cos(\omega t)\hat{i} + A\sin(\omega t)\hat{j}. \tag{4.29}$$

Wielkość ω jest stałą i nazywa się **częstością kątową** (ang. **angular frequency**) cząstki. Częstość kątowa ma jednostkę radian (rad) na sekundę, czyli rad/s, i jest po prostu miarą tego, jaki kąt w radianach zatoczył w ciągu sekundy wektor wodzący cząstki poruszającej się po okręgu. Wobec tego kąt i częstość kątowa są ze sobą związane prostą relacją $\theta = \omega t$. Częstość kątową nazywamy też czasem częstością kołową lub po prostu częstością.

Częstość kątowa jest także związana z okresem T, czyli czasem jednego pełnego okrążenia cząstki (cząstka zatacza wtedy kąt 2π rad), prostą relacją

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$



Rysunek 4.20 Wektor położenia cząstki w ruchu po okręgu i jego dwie składowe x i y. Cząstka porusza się w lewo (przeciwnie do ruchu wskazówek zegara). Kąt θ jest równy iloczynowi częstości kątowej ω (w radianach na sekundę) i czasu t.

Wektor prędkości łatwo znajdziemy, różniczkując funkcję czasu wektora położenia:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = -A\omega \sin(\omega t)\hat{i} + A\omega \cos(\omega t)\hat{j}. \tag{4.30}$$

Na podstawie Rysunku 4.20 można pokazać, że wektor prędkości jest styczny do okręgu w punkcie, w którym znajduje się cząstka, a jego długość wynosi $A\omega$. Podobnie, różniczkując wektor prędkości, znajdziemy wektor przyspieszenia:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t)\hat{i} - A\omega^2 \sin(\omega t)\hat{j}. \tag{4.31}$$

Z powyższego wzoru wynika, że długość wektora przyspieszenia wynosi $A\omega^2$ oraz że jest on skierowany przeciwnie do wektora położenia: $\vec{a}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t)$.

Przykład 4.11

Ruch protonu po okręgu

Proton porusza się z szybkością $5 \cdot 10^6$ m/s na płaszczyźnie xy po okręgu o promieniu $r = 0{,}175$ m. W jakim położeniu znajduje się proton w chwili $t = 2 \cdot 10^{-7}$ s $= 200$ ns? Załóżmy, że w chwili początkowej $t = 0$ położenie protonu wynosi $0{,}175\,\mathrm{m} \cdot \hat{i}$ oraz kierunek ruchu protonu jest przeciwny do kierunku ruchu wskazówek zegara. Naszkicujemy trajektorię protonu.

Rozwiązanie

Na podstawie danych możemy obliczyć okres i częstość kątową protonu:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 0{,}175\,\mathrm{m}}{5 \cdot 10^6\,\mathrm{m\,/\,s}} = 2 \cdot 10^7\,\mathrm{s},$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s}} = 2{,}856 \cdot 10^7\,\mathrm{s}^{-1}.$$

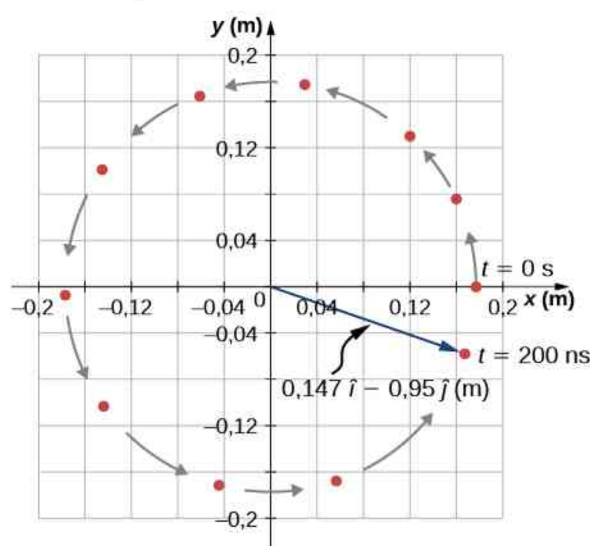
Położenie protonu w chwili $t = 2 \cdot 10^{-7}$ s dane jest wektorem

$$\vec{r}\,(t) = A\cos(\omega t)\cdot\hat{i} + A\sin(\omega t)\cdot\hat{j},$$

$$\begin{aligned}\vec{r}\left(2\cdot10^{-7}\,\text{s}\right) &= 0{,}175\,\text{m}\cdot\cos\left(2{,}86\cdot10^{7}\,\text{s}^{-1}\cdot2\cdot10^{-7}\,\text{s}\right)\cdot\hat{i}\\ &\quad+0{,}175\,\text{m}\cdot\sin\left(2{,}86\cdot10^{7}\,\text{s}^{-1}\cdot2\cdot10^{-7}\,\text{s}\right)\cdot\hat{j},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{r}\left(2\cdot10^{-7}\,\text{s}\right) &= 0{,}175\,\text{m}\cdot\cos(5{,}712)\cdot\hat{i}+0{,}175\,\text{m}\cdot\sin(5{,}712)\cdot\hat{j}\\ &= 0{,}147\,\text{m}\cdot\hat{i}-0{,}095\,\text{m}\cdot\hat{j}.\end{aligned}$$

Na podstawie wyniku możemy stwierdzić, że w danym momencie proton znajduje się tuż pod osią x na płaszczyźnie xy. Obrazujemy to na Rysunku 4.21.



Rysunek 4.21 Wektor położenia protonu w chwili $t = 2{,}0 \cdot 10^{-7}$ s $= 200$ ns. Nakreślono szkic trajektorii protonu. Całkowity kąt, jaki przez ten czas zatoczy proton poruszający się po okręgu wynosi 5,712 rad i jest tylko trochę mniejszy od kąta pełnego.

Znaczenie

Wybraliśmy położenie początkowe protonu na osi x. Jest to wybór całkowicie arbitralny. W przypadku innej pozycji początkowej po czasie t = 200 ns mielibyśmy inne niż obliczone powyżej położenie końcowe protonu. Kąt zatoczony przez wektor wodzący protonu byłby jednak taki sam.

Ruch zmienny po okręgu

Ruch po okręgu nie musi zachodzić tylko ze stałą szybkością. Cząstka, poruszając się po okręgu, może przyspieszać lub zwalniać, a więc mieć przyspieszenie w kierunku ruchu.

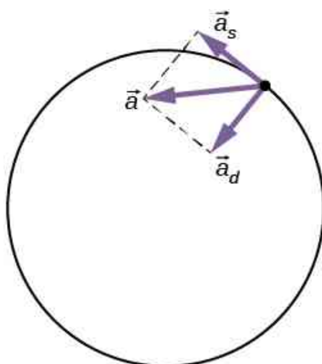
W ruchu jednostajnym po okręgu cząstka poruszała się z prędkością o wartości stałej w czasie. Zmianie ulegał jedynie kierunek i zwrot wektora, z czym wiązaliśmy przyspieszenie dośrodkowe. Jeżeli również wartość prędkości cząstki ulega zmianie, to musimy wprowadzić do opisu ruchu takiej cząstki dodatkowe przyspieszenie, którego kierunek jest styczny do okręgu. Z takim przyspieszeniem mamy do czynienia np. w dowolnym punkcie na łopatce rozpędzającego się wirnika w silniku elektrycznym albo na powierzchni wirującego bąka (zabawki), który zmienia swoją szybkość obrotu. Na początku tej sekcji pokazaliśmy, że przyspieszenie dośrodkowe jest odpowiedzialne za zmianę kierunku i zwrotu wektora prędkości w czasie. Gdy zmienia się także szybkość cząstki ma ona **przyspieszenie styczne** (ang. **tangential acceleration**), które wyraża szybkość zmian wartości prędkości w czasie:

$$a_s = \frac{\mathrm{d}|\vec{v}\,|}{\mathrm{d}t}. \tag{4.32}$$

Kierunek przyspieszenia stycznego jest styczny do okręgu (wzdłuż wektora prędkości), natomiast przyspieszenie dośrodkowe jest zwrócone radialnie do środka okręgu. Wobec tego cząstka w ruchu zmiennym po okręgu ma **całkowite przyspieszenie** (ang. **total acceleration**), które jest sumą wektorową przyspieszenia stycznego i dośrodkowego:

$$\vec{a} = \vec{a}_d + \vec{a}_s. \tag{4.33}$$

Wszystkie trzy wektory przyspieszenia są pokazane na Rysunku 4.22. Zwróć uwagę, że wektory $\vec{a}_s$ oraz $\vec{a}_d$ są do siebie prostopadłe – wektor $\vec{a}_d$ jest zwrócony do środka okręgu, a wektor $\vec{a}_s$ jest styczny do okręgu. Przyspieszenie całkowite $\vec{a}$ jest skierowane pod pewnym kątem pomiędzy wektorem $\vec{a}_d$ i $\vec{a}_s$.



Rysunek 4.22 Przyspieszenie dośrodkowe jest skierowane wzdłuż promienia okręgu do środka okręgu, natomiast przyspieszenie styczne ma kierunek styczny do okręgu w punkcie, w którym znajduje się cząstka. Oba wektory są zaczepione w punkcie, gdzie znajduje się cząstka. Wektor przyspieszenia całkowitego jest sumą tych dwóch prostopadłych do siebie wektorów przyspieszeń.

Przykład 4.12

Całkowite przyspieszenie w ruchu po okręgu

Cząstka porusza się po okręgu o promieniu $r = 2{,}0$ m. W przedziale czasu od $t = 1{,}5$ s do $t = 4{,}0$ s jej szybkość zmienia się w czasie zgodnie ze wzorem

$$v(t) = c_1 - \frac{c_2}{t^2}, \quad c_1 = 4{,}0\,\mathrm{m/s}, \quad c_2 = 6{,}0\,\mathrm{m \cdot s}.$$

Jakie jest całkowite przyspieszenie cząstki w chwili $t = 2{,}0$ s?

Strategia rozwiązania

Z podanej zależności od czasu obliczymy szybkość i, mając promień okręgu, łatwo znajdziemy przyspieszenie dośrodkowe. Jego kierunek jest oczywiście do środka okręgu. Aby obliczyć wartość przyspieszenia stycznego, musimy najpierw wyliczyć pochodną po czasie funkcji szybkości od czasu, $|v(t)|$, zgodnie z definicją Równania 4.32, i dopiero wtedy podstawić za $t = 2{,}0$ s. Wartość przyspieszenia całkowitego obliczymy jako pierwiastek z sumy kwadratów obu przyspieszeń.

Rozwiązanie

Obliczamy przyspieszenie dośrodkowe

$$v\,(2{,}0\ \mathrm{s}) = \left(4{,}0 - \frac{6{,}0}{(2{,}0)^2}\right)\ \mathrm{m/s} = 2{,}5\ \mathrm{m/s},$$

$$a_d = \frac{v^2}{r} = \frac{(2{,}5\ \mathrm{m/s})^2}{2{,}0\ \mathrm{m}} = 3{,}1\ \mathrm{m/s^2}.$$

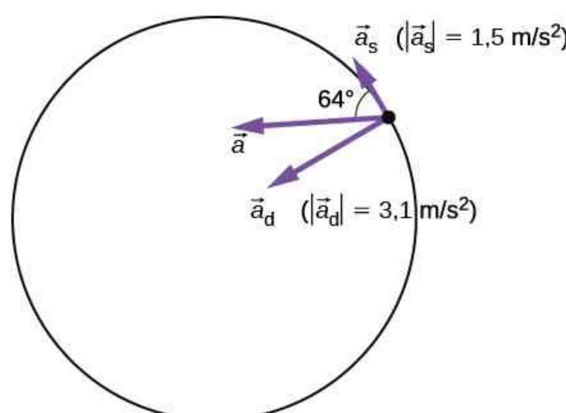
Dzięki temu, że w zadaniu podano zależność szybkości od czasu, to możemy od razu różniczkować. Przyspieszenie styczne wynosi

$$a_s = \frac{\mathrm{d}|\vec{v}\,|}{\mathrm{d}t} = \frac{2c_2}{t^3} = \frac{12{,}0}{(2{,}0)^3}\ \mathrm{m/s^2} = 1{,}5\ \mathrm{m/s^2}.$$

Obliczamy przyspieszenie całkowite

$$|\vec{a}\,| = \sqrt{3{,}1^2 + 1{,}5^2}\ \mathrm{m/s^2} = 3{,}44\ \mathrm{m/s^2}$$

oraz kąt jaki tworzy wektor przyspieszenia całkowitego ze styczną do okręgu $\theta = \mathrm{arctg}\left(\frac{3{,}1}{1{,}5}\right) = 64^\circ$. Spójrz na Rysunek 4.23.



Rysunek 4.23 Wektory przyspieszenia stycznego i dośrodkowego. Przyspieszenie całkowite $\vec{a}$ jest sumą wektorową tych dwóch przyspieszeń.

Znaczenie

Obliczenie przyspieszenia stycznego było w tym przykładzie proste – mieliśmy podaną zależność szybkości od czasu, którą od razu mogliśmy różniczkować. Gdyby podany był wektor prędkości jako funkcja czasu, to najpierw musielibyśmy obliczyć jego długość w funkcji czasu i dopiero wtedy różniczkować (przypuszczalnie dość niewygodną zależność pierwiastkową), a na końcu podstawić w miejsce czasu. Wektory przyspieszenia stycznego i dośrodkowego można wygodniej opisać w biegunowym układzie współrzędnych, nazywanym też polarnym. Jego wersory są skierowane w kierunku radialnym i stycznym do kierunku ruchu cząstki i, co łatwo zauważyć, same zmieniają swoje położenie w czasie. Taki układ współrzędnych, często używany do opisu ruchu po zakrzywionych torach, będziemy wykorzystywać w dalszych partiach podręcznika.

4.5 | Ruch względny w jednym i dwóch wymiarach

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- wyjaśniać koncepcję układu odniesienia i dokonywać opisu ruchu w różnych układach odniesienia;
- zapisywać wektor położenia i prędkości względnej w ruchu względnym dwóch ciał;
- rysować wektory położenia względnego i prędkości względnej;
- analizować problemy jedno- i dwuwymiarowego ruchu względnego ciał, używając równań położenia i prędkości dla tego ruchu.

Ruch ciała nie zawsze rozpatrujemy niezależnie od innych ciał w ruchu. Jeżeli np. jedziesz pociągiem z szybkością 10m/s w kierunku na wschód, to prędkość o tej wartości jest mierzona względem podłoża (np. torów czy peronu). Jeśli jednak wyprzedza cię inny pociąg również jadący na wschód, lecz z szybkością 15 m/s, to względem tego drugiego pociągu twoja prędkość jest inna. Wektor twojej prędkości względnej ma wartość 5 m/s i jest zwrócony na zachód. Aby móc w szczegółach mówić o problemie ruchu względnego, musimy wcześniej poznać nową terminologię.

Układy odniesienia

Aby móc omówić ruch względny w jednym lub wielu wymiarach, musimy najpierw zapoznać się z pojęciem **układu odniesienia** (ang. **reference frame**). Kiedy mówimy, że jakieś ciało ma daną prędkość, zasadniczo powinniśmy podać względem jakiego układu odniesienia ta prędkość jest podana. W większości rozważanych przez nas dotąd problemów układem odniesienia była ziemia (powierzchnia Ziemi). Jeżeli powiesz, że jedziesz w pociągu z prędkością o wartości 10 m/s na wschód, masz zapewne na myśli, że taką prędkość ma pociąg względem podłoża, czyli ziemi. Powierzchnia Ziemi jest wybranym przez ciebie układem odniesienia. Możemy rozszerzyć nasze postrzeganie Ziemi jako układu odniesienia, uwzględniając jej ruch wokół Słońca. Wtedy sytuacja staje się bardziej złożona. Tym razem układem odniesienia staje się cały Układ Słoneczny i ruch pociągu przestaje być już tylko prostym ruchem jednostajnym prostoliniowym. Podsumowując, w dyskusji o ruchu względnym ciał musimy definiować co jest naszym układem odniesienia. W dalszej części poznamy metody pokazujące, jak należy odnosić problem ruchu względnego do różnych układów odniesienia.

Ruch względny w jednym wymiarze

Na początek zajmiemy się przypadkiem jednowymiarowym, gdy wektory prędkości mają tylko dwa dozwolone kierunki (lewo/prawo, góra/dół itd.). Wróćmy do przykładu człowieka podróżującego pociągiem z szybkością 10 m/s w kierunku na wschód. Jeśli za dodatni kierunek prędkości przyjmiemy kierunek na wschód, a układem odniesienia będzie ziemia, to wektor prędkości pociągu jest następujący $\vec{v}_{\text{P,Z}} = 10\hat{i} \text{ m/s}$, gdzie kierunek wschodni jest osią x, a indeks dolny P,Z oznacza, że chodzi nam o prędkość pociągu względem ziemi. Załóżmy teraz, że człowiek wstaje z fotela i idzie na tył pociągu z szybkością 2 m/s. Kierunek ruchu człowieka na zachód jest względem pociągu ujemny, dlatego prędkość człowieka względem pociągu jest wektorem $\vec{v}_{\text{C,P}} = -2\hat{i} \text{ m/s}$ (indeks dolny C,P oznacza: człowiek względem pociągu). Jeśli teraz dodamy oba wektory prędkości do siebie, to dostaniemy wektor prędkości człowieka względem ziemi. Ta **prędkość względna** (ang. **relative velocity**) wynosi

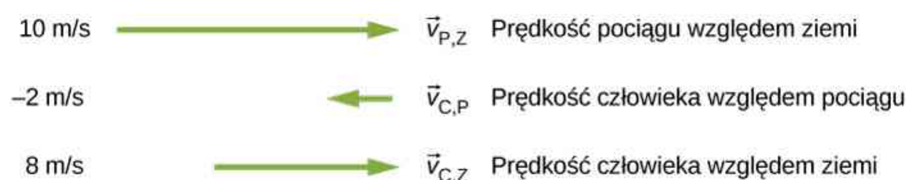
$$\vec{v}_{\text{C,Z}} = \vec{v}_{\text{C,P}} + \vec{v}_{\text{P,Z}} . \tag{4.34}$$

Zwróćmy szczególną uwagę na to, w jakiej kolejności piszemy indeksy dolne przy wektorach w Równaniu 4.34. Schemat na Rysunku 4.24 pokazuje poprawny zapis podczas dodawania wektorów. Pamiętajmy, że zwyczajowo indeks pochodzący od układu odniesienia, względem którego definiujemy wektor prędkości, piszemy jako ten drugi po przecinku.

$$\vec{v}_{C,Z} = \vec{v}_{C,P} + \vec{v}_{P,Z}$$

Rysunek 4.24 Przy zapisywaniu równania wektorowego dla ruchu względnego, indeks wspólny dla wektorów po prawej stronie równania piszemy „po wewnętrznej” stronie. Wektor po lewej stronie równania otrzymuje indeksy „skrajne” od wektorów po prawej stronie.

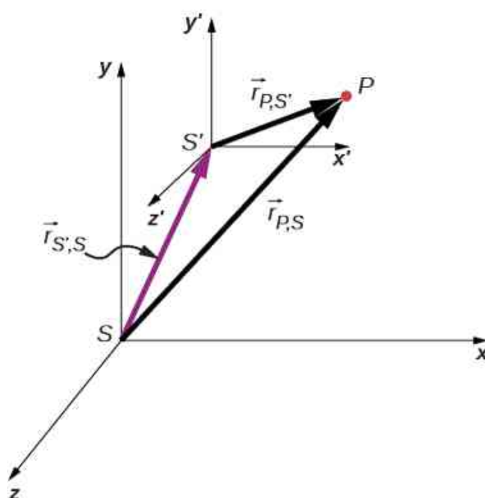
Dodając wektory z równania powyżej, otrzymamy $\vec{v}_{C,Z} = 8\hat{i}$ m/s, a więc człowiek przemieszcza się na wschód względem ziemi z szybkością 8 m/s. Graficznie przedstawiamy to na Rysunku 4.25.



Rysunek 4.25 Wektory prędkości: pociągu względem ziemi, człowieka względem pociągu oraz człowieka względem ziemi.

Ruch względny w dwóch wymiarach

Poznane pojęcia zastosujemy teraz do opisu ruchu względnego na płaszczyźnie. Rozważmy punkt P i dwa układy odniesienia S oraz S'. Z każdym układem odniesienia związujemy inny układ współrzędnych, jak pokazano na Rysunku 4.26. Czasem w żargonie fizycznym te układy odniesienia nazywa się odpowiednio nieprimowanym i primowanym. Początek układu S' zmierzony w układzie S dany jest wektorem $\vec{r}_{S',S}$, położenie punktu P zmierzone w układzie S' wynosi $\vec{r}_{P,S'}$, natomiast położenie punktu P w układzie S jest $\vec{r}_{P,S}$.



Rysunek 4.26 Położenia cząstki w punkcie P względem różnych układów odniesienia S i S' wynoszą odpowiednio $\vec{r}_{P,S}$ oraz $\vec{r}_{P,S'}$.

Z Rysunku 4.26 odczytamy związek między wektorami położenia

$$\vec{r}_{P,S} = \vec{r}_{P,S'} + \vec{r}_{S',S}. \quad (4.35)$$

Związek między wektorami prędkości względnych obliczymy, różniczkując powyższe równanie

$$\vec{v}_{\text{P,S}} = \vec{v}_{\text{P,S'}} + \vec{v}_{\text{S',S}}. \tag{4.36}$$

Względna prędkość cząstki w układzie S jest równa sumie prędkości cząstki względem układu S' oraz prędkości układów S' i S względem siebie.

Równanie 4.36 możemy uogólnić na dowolną liczbę układów odniesienia. Przykładowo dla cząstki P o prędkościach $\vec{v}_{\text{P,A}}$, $\vec{v}_{\text{P,B}}$ i $\vec{v}_{\text{P,C}}$ względem układów A, B i C mamy:

$$\vec{v}_{\text{P,C}} = \vec{v}_{\text{P,A}} + \vec{v}_{\text{A,B}} + \vec{v}_{\text{B,C}} \tag{4.37}$$

Możemy też określić, jak związane są ze sobą przyspieszenia względne mierzone w różnych układach odniesienia. W tym celu różniczkujemy Równanie 4.36:

$$\vec{a}_{\text{P,S}} = \vec{a}_{\text{P,S'}} + \vec{a}_{\text{S',S}}. \tag{4.38}$$

Zauważmy, że jeśli prędkość względna układu S' względem S jest stała, to wtedy $\vec{a}_{\text{S',S}} = 0$ oraz

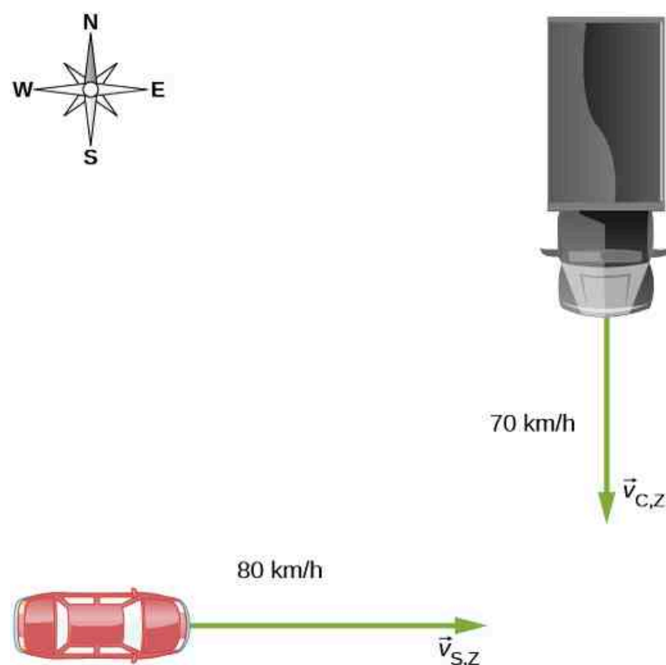
$$\vec{a}_{\text{P,S}} = \vec{a}_{\text{P,S'}}. \tag{4.39}$$

Ten wynik oznacza, że przyspieszenia cząstki w dwóch układach odniesienia, które poruszają się względem siebie ze stałą prędkością, są takie same.

Przykład 4.13

Ruch względny samochodu i ciężarówki

Ciężarówka wjeżdża na skrzyżowanie z szybkością 70 km/h z kierunku północnego. Samochód osobowy nadjeżdża z zachodu z szybkością 80 km/h (Rysunek 4.27). Jaką prędkość ma samochód względem ciężarówki?



Rysunek 4.27 Samochód osobowy i ciężarówka wjeżdżają na skrzyżowanie z kierunków prostopadłych.

Strategia rozwiązania

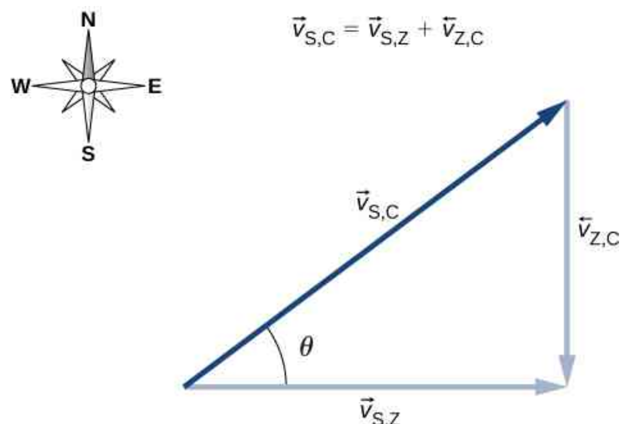
Najpierw musimy ustalić wspólny dla obu ciał układ odniesienia. Naturalnym wyborem jest ziemia. Następnie zapiszemy wektory prędkości obu pojazdów względem ziemi, co pozwoli nam sformułować równanie prędkości wiążące samochód, ciężarówkę i ziemię. Z tego równania wyznaczymy wektor prędkości względnej samochodu i ciężarówki oraz jego wartość i kierunek.

Rozwiązanie

Prędkość samochodu względem ziemi wynosi $\vec{v}_{S,Z} = 80\hat{i}$ km/h . Prędkość ciężarówki względem ziemi to $\vec{v}_{C,Z} = -70\hat{j}$ km/h . Używając reguł składania prędkości, będziemy chcieli obliczyć

$$\vec{v}_{S,C} = \vec{v}_{S,Z} + \vec{v}_{Z,C}.$$

Oznaczyliśmy przez $\vec{v}_{S,C}$ prędkość względną samochodu względem ciężarówki. Ziemia jest układem odniesienia, który wiąże ruch samochodu i ciężarówki. Znamy wektor prędkości ciężarówki względem ziemi. Prędkość ziemi względem ciężarówki, której potrzebujemy do rozwiązania powyższego równania, jest wektorem o przeciwnym znaku: $\vec{v}_{Z,C} = -\vec{v}_{C,Z}$. Diagram wektorowy naszego równania prezentuje Rysunek 4.28.



Rysunek 4.28 Diagram wektorowy ilustrujący równanie: $\vec{v}_{S,C} = \vec{v}_{S,Z} + \vec{v}_{Z,C}$.

Jesteśmy teraz w stanie obliczyć szybkość, z jaką samochód porusza się względem ciężarówki:

$$|\vec{v}_{S,C}| = \sqrt{(80{,}0\text{ km/h})^2 + (70{,}0\text{ km/h})^2} = 106{,}3\text{ km/h}$$

oraz kierunek

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{70{,}0}{80{,}0}\right) = 41{,}2^\circ \text{ na północ względem kierunku wschodniego.}$$

Znaczenie

Stworzenie diagramu wektorowego może pomóc w lepszym zrozumieniu ruchu względnego dwóch ciał.



4.6 Sprawdź, czy rozumiesz. Łódka kieruje się na północ i ustawiona jest dokładnie w poprzek rzeki. Przepływa ona na drugą stronę z szybkością 4,5 m/s. Rzeka płynie w kierunku wschodnim ze stałą szybkością 3,0 m/s na całej swojej szerokości. Jaka jest szybkość łódki względem brzegów?

Przykład 4.14

Samolot i wiatr

Pilot samolotu transportowego musi dotrzeć do miejsca docelowego położonego dokładnie na północ od startu. Samolot przy bezwietrznej pogodzie może lecieć z szybkością 300 km/h. W trakcie lotu wieje jednak wiatr o sile 90 km/h z kierunku dokładnie północno-wschodniego.

a. Jaką szybkość ma wtedy samolot względem ziemi?

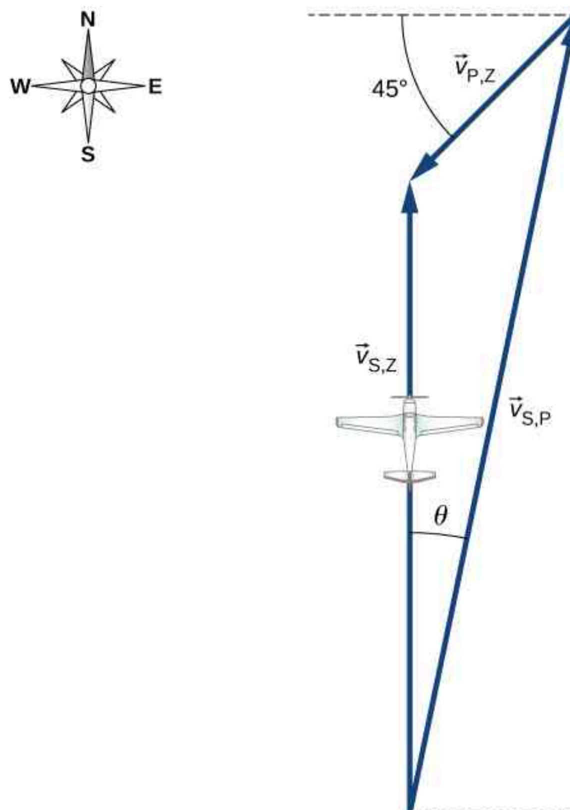
b. Pod jakim kątem pilot musi kierować samolot aby dotrzeć do celu?

Strategia rozwiązania

Pilot musi ustawić samolot nie dokładnie na północ, ale nieco w kierunku na wiatr, aby w ten sposób skompensować niekorzystny kierunek wiatru. Musimy zapisać równanie wektorowe prędkości, które będzie zawierać prędkość samolotu względem wiatru, prędkość wiatru względem ziemi i prędkość samolotu względem ziemi. Skoro znamy pierwsze dwa wektory, łatwo znajdziemy poszukiwaną szybkość samolotu względem ziemi i kierunek ustawienia samolotu. Narysujemy też diagram wektorowy, który znacznie ułatwi nam obliczenia.

Rozwiązanie

Równanie wektorowe na składanie prędkości jest następujące $\vec{v}_{S,Z} = \vec{v}_{S,P} + \vec{v}_{P,Z}$, gdzie S = samolot, Z = ziemia, P = powietrze. Z warunków geometrycznych, wynikających z Rysunku 4.29, wyznaczymy łatwo zarówno szybkość samolotu względem ziemi, jak i kierunek ustawienia samolotu w locie θ.



Rysunek 4.29 Diagram wektorowy dla Równania 4.35 wiążący wektory $\vec{v}_{S,P}$, $\vec{v}_{P,Z}$ i $\vec{v}_{S,Z}$.

(a) Mamy następujące dane:

$$|\vec{v}_{S,P}| = 300\,\text{km/h}$$

$$|\vec{v}_{P,Z}| = 90\,\text{km/h}$$

Jeśli rozłożymy wektor $\vec{v}_{P,Z}$ na składowe i zauważymy trójkąt prostokątny na diagramie wektorowym, to obliczymy $|\vec{v}_{S,Z}| = 230$ km/h.

(b) Kąt $\theta = \operatorname{arctg}\frac{63{,}64}{300} = 12^\circ$ liczony jest na wschód od kierunku północnego.

PODSUMOWANIE ROZDZIAŁU 4

KLUCZOWE POJĘCIA

czas lotu (ang. time of flight) całkowity czas przebywania pocisku w powietrzu

częstość kątowa (ang. angular frequency) ω, szybkość zmiany w czasie kąta, jaki cząstka zatacza w trakcie ruchu po okręgu, jest związana z okresem i częstotliwością

przyspieszenie całkowite (ang. total acceleration) wektorowa suma przyspieszeń: dośrodkowego i stycznego

przyspieszenie dośrodkowe (ang. centripetal acceleration) składowa przyspieszenia ciała w ruchu po okręgu, która skierowana jest do środka okręgu, jest odpowiedzialna za zakrzywienie toru ruchu

przyspieszenie styczne (ang. tangential acceleration) składowa przyspieszenia styczna do toru, której wartość jest szybkością zmiany wartości prędkości w czasie

prędkość względna (ang. relative velocity) prędkość ciała widziana przez obserwatora z określonego układu odniesienia; także prędkość jednego układu odniesienia względem drugiego

rzut (ang. projectile motion) ruch ciała pod wpływem jedynie przyspieszenia grawitacyjnego

tor, trajektoria (ang. trajectory) krzywa po której pocisk porusza się w powietrzu

układ odniesienia (ang. reference frame) układ, względem którego mierzymy położenie, prędkość i przyspieszenie ciała; posiada własny układ współrzędnych

wektor położenia (ang. position vector) wektor skierowany od początku wybranego układu współrzędnych do punktu położenia cząstki w dwu- lub trójwymiarowej przestrzeni

wektor przemieszczenia (ang. displacement vector) wektor skierowany od początkowego do końcowego położenia cząstki

wektor przyspieszenia (ang. acceleration vector) przyspieszenie chwilowe obliczone jako pochodna wektora prędkości po czasie w zapisie wektorowym z użyciem wersorów osi układu współrzędnych

wektor prędkości (ang. velocity vector) wektor definiujący chwilową szybkość i kierunek ruchu cząstki; jest styczny do toru ruchu

zasięg (ang. range) największa odległość w poziomie, jaką ciało (pocisk) pokonuje w rzucie

NAJWAŻNIEJSZE WZORY

Wektor położenia	$\vec{r}\,(t) = x\,(t)\,\hat{i} + y\,(t)\,\hat{j} + z\,(t)\,\hat{k}$
Wektor przemieszczenia	$\Delta\vec{r} = \vec{r}\,(t_2) - \vec{r}\,(t_1)$
Prędkość	$\vec{v}\,(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}\,(t+\Delta t) - \vec{r}\,(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$
Wektor prędkości	$\vec{v}\,(t) = v_x\,(t)\,\hat{i} + v_y\,(t)\,\hat{j} + v_z\,(t)\,\hat{k}$
Składowe prędkości	$v_x\,(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, \quad v_y\,(t) = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}, \quad v_z\,(t) = \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}$
Wektor prędkości średniej	$\vec{v}_{śr} = \frac{\vec{r}\,(t_2) - \vec{r}\,(t_1)}{t_2 - t_1}$
Przyspieszenie chwilowe	$\vec{a}\,(t) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{\vec{v}\,(t+\Delta t) - \vec{v}\,(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}\,(t)}{\mathrm{d}t}$
Wektor przyspieszenia i jego składowe	$\vec{a}\,(t) = \frac{\mathrm{d}v_x(t)}{\mathrm{d}t}\hat{i} + \frac{\mathrm{d}v_y(t)}{\mathrm{d}t}\hat{j} + \frac{\mathrm{d}v_z(t)}{\mathrm{d}t}\hat{k}$
Przyspieszenie jako wektor drugich pochodnych położenia	$\vec{a}\,(t) = \frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}\hat{i} + \frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}\hat{j} + \frac{\mathrm{d}^2z(t)}{\mathrm{d}t^2}\hat{k}$
Czas lotu w rzucie ukośnym	$T = \frac{2(v_0 \sin\theta_0)}{g}$
Równanie toru w rzucie ukośnym	$y = (\mathrm{tg}\theta_0)\,x - \left[\frac{g}{2(v_0 \cos\theta_0)^2}\right]x^2$

Zasięg w rzucie ukośnym	$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$
Wysokość maksymalna w rzucie ukośnym	$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g}$
Przyspieszenie dośrodkowe	$a_d = \frac{v^2}{r}$
Wektor położenia w ruchu jednostajnym po okręgu	$\vec{r}\ (t) = A\cos(\omega t)\hat{i} + A\sin(\omega t)\hat{j}$
Wektor prędkości w ruchu jednostajnym po okręgu	$\vec{v}\ (t) = \frac{d\vec{r}\,(t)}{dt} = -A\omega\sin(\omega t)\hat{i} + A\omega\cos(\omega t)\hat{j}$
Wektor przyspieszenia w ruchu jednostajnym po okręgu	$\vec{a}\ (t) = \frac{d\vec{v}\,(t)}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t)\hat{i} - A\omega^2\sin(\omega t)\hat{j}$
Przyspieszenie styczne	$a_s = \frac{d\lvert\vec{v}\rvert}{dt}$
Przyspieszenie całkowite	$\vec{a} = \vec{a}_d + \vec{a}_s$
Wektor położenia cząstki w układzie S jako suma wektora położenia cząstki w układzie S' i wektora położenia początku układu S względem układu S'	$\vec{r}_{\text{P,S}} = \vec{r}_{\text{P,S'}} + \vec{r}_{\text{S',S}}$
Składanie prędkości w dwóch układach odniesienia	$\vec{v}_{\text{P,S}} = \vec{v}_{\text{P,S'}} + \vec{v}_{\text{S',S}}$
Składanie prędkości w trzech układach odniesienia	$\vec{v}_{\text{P,C}} = \vec{v}_{\text{P,A}} + \vec{v}_{\text{A,B}} + \vec{v}_{\text{B,C}}$
Składanie przyspieszeń	$\vec{a}_{\text{P,S}} = \vec{a}_{\text{P,S'}} + \vec{a}_{\text{S',S}}$

PODSUMOWANIE

4.1 Przemieszczenie i prędkość

- Funkcja położenia $\vec{r}\,(t)$ definiuje zależność od czasu położenia cząstki na płaszczyźnie lub w przestrzeni. Graficznie jest to wektor skierowany od początku wybranego układu współrzędnych do punktu, w którym cząstka się znajduje w danej chwili czasu.
- Wektor przemieszczenia $\Delta\vec{r}$ określa najkrótszą odległość między dwoma punktami toru ruchu cząstki w dwóch lub trzech wymiarach.
- Prędkość chwilowa $\vec{v}\,(t)$ definiuje szybkość i kierunek ruchu cząstki w danej chwili czasu i jest wektorem na płaszczyźnie lub w przestrzeni.
- Wektor prędkości jest styczny do toru ruchu cząstki.
- Przemieszczenie $\Delta\vec{r}\,(t)$ może być zapisane jako suma przemieszczeń $\Delta\vec{x}\,(t), \Delta\vec{y}\,(t), \Delta\vec{z}\,(t)$ w każdym kierunku przestrzeni x, y, z.
- Prędkość $\vec{v}\,(t)$ można zdefiniować jako wektorową sumę składowych $v_x(t), v_y(t), v_z(t)$ wzdłuż kierunków x, y i z.
- Ruch w dowolnym kierunku jest niezależny od ruchu w kierunku prostopadłym.

4.2 Przyspieszenie

- W dwóch i trzech wymiarach wektor przyspieszenia może mieć dowolny kierunek i nie musi być skierowany wzdłuż którejkolwiek składowej wektora prędkości.
- Przyspieszenie chwilowe jest zdefiniowane jako zmiana prędkości zachodząca w bardzo krótkim (inifinitezymalnym) przedziale czasu. Jest to wielkość wektorowa o dwóch lub trzech składowych. W praktyce obliczamy przyspieszenie jako pochodną prędkości po czasie.
- W przypadku trójwymiarowym przyspieszenie $\vec{a}\ (t)$ może być zapisane jako wektorowa suma składowych $\vec{a}_x\ (t), \vec{a}_y\ (t)$ oraz $\vec{a}_z\ (t)$ wzdłuż trzech kierunków x, y i z.

- Kinematyczne równania ruchu jednostajnie zmiennego (ze stałym przyspieszeniem) możemy zapisać jako wektorową sumę równań jednowymiarowych dla kierunków x, y i z.

4.3 Rzuty

- Rzuty są przykładem ruchu w pobliżu powierzchni Ziemi, na który wpływ ma tylko przyspieszenie grawitacyjne.
- Do rozwiązania problemu rzutów używamy jednowymiarowych kinematycznych równań ruchu zapisanych osobno dla kierunku poziomego x i pionowego y.
- Czas lotu pocisku w rzucie ukośnym z prędkością początkową v_0 względem powierzchni płaskiej możemy opisać wzorem

$$T = \frac{2\,(v_0 \sin \theta_0)}{g}.$$

Ten wzór jest poprawny tylko w przypadku, gdy pocisk upada na tej samej wysokości, z jakiej został wystrzelony.
- Największa odległość w poziomie, jaką pokonuje pocisk w rzucie ukośnym, nazywa się zasięgiem i wynosi:

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}.$$

Wzór na zasięg obowiązuje tylko w sytuacji, gdy pocisk upada na tej samej wysokości, z jakiej był wystrzelony.

4.4 Ruch po okręgu

- Ruch jednostajny po okręgu odbywa się ze stałą szybkością.
- Przyspieszenie dośrodkowe $\vec{a}_d$ jest przyspieszeniem, które występuje zawsze w przypadku ruchu po zakrzywionym torze. Jest ono skierowane zawsze do środka okręgu (ogólniej: do środka krzywizny toru) i ma wartość $a_d = v^2/r$.
- Ruch zmienny po okręgu występuje, gdy dodatkowo cząstka ma przyspieszenie w kierunku stycznym do okręgu powodujące zmianę wartości prędkości. To przyspieszenie nazywamy przyspieszeniem stycznym $\vec{a}_s$. Wartość tego przyspieszenia jest równa zmianie wartości prędkości w czasie. Przyspieszenie styczne jest prostopadłe do przyspieszenia dośrodkowego. Całkowite przyspieszenie, jakiego doznaje cząstka, obliczamy jako sumę dwóch wektorów przyspieszeń: dośrodkowego i stycznego. Możemy też powiedzieć, że te dwa przyspieszenia są składowymi wektora przyspieszenia całkowitego.
- Dla ciała w ruchu po okręgu możemy napisać równania ruchu. Wektor położenia ma postać $\vec{r}\,(t) = A\cos(\omega t)\hat{i} + A\sin(\omega t)\hat{j}$, gdzie A jest wartością tego wektora $|\vec{r}\,(t)|$, co jest także długością promienia okręgu, natomiast ω jest częstością kątową. Wektor prędkości i przyspieszenia znajdziemy, różniczkując odpowiednio wektor położenia jedno- lub dwukrotnie.

4.5 Ruch względny w jednym i dwóch wymiarach

- Do precyzyjnego określenia wektorów położenia, prędkości i przyspieszenia ciała w ruchu należy dobrze zdefiniować układ odniesienia.
- Prędkość względna to prędkość ciała rejestrowana przez obserwatora z określonego układu odniesienia. Wektor prędkości zmienia się w zależności od wyboru układu odniesienia.
- Jeśli dwa układy odniesienia S i S' poruszają się względem siebie ze stałą prędkością, to prędkość ciała względem S jest równa sumie prędkości tego ciała względem S' oraz względnej prędkości układu S' względem S.
- Przyspieszenia ciała mierzone w dwóch układach odniesienia poruszających się względem siebie ze stałą prędkością są takie same.

PYTANIA

4.1 Przemieszczenie i prędkość

1. Jaką krzywą dany jest tor ruchu cząstki, jeśli droga pokonana przez cząstkę między dowolnymi punktami A i B jest równa długości wektora przemieszczenia z punktu A do punktu B ?

2. Podaj przykłady ruchów w dwóch lub trzech wymiarach będących złożeniem niezależnych ruchów w kierunkach prostopadłych.

3. Jeżeli prędkość chwilowa cząstki jest równa $0 \mathrm{m/s}$, to co można powiedzieć o nachyleniu funkcji położenia od czasu?

4.2 Przyspieszenie

4. Jeżeli położenie cząstki dane jest liniową funkcją czasu, to co możemy powiedzieć o jej przyspieszeniu?

5. Jeżeli ciało porusza się z prędkością o stałej wartości składowej x i nagle doznaje przyspieszenia w kierunku y , to czy składowa x prędkości się zmienia?

6. Jeżeli ciało ma stałą wartość składowej x prędkości i nagle doznaje przyspieszenia pod kątem 70° do kierunku x , to czy składowa x prędkości ulegnie zmianie?

4.3 Rzuty

7. Odpowiedz na następujące pytania dotyczące rzutu ukośnego przy założeniu braku oporów powietrza oraz kącie początkowym większym od 0°, a mniejszym niż 90°:
a. Czy prędkość kiedykolwiek spada do zera?
b. Kiedy całkowita prędkość ma najmniejszą wartość? Kiedy największą?
c. Czy wektor prędkości w jakiejkolwiek innej chwili niż $t = 0$ ma szansę być równy prędkości początkowej?
d. Czy szybkość może być taka jak szybkość początkowa w chwili innej niż $t = 0$?

8. Odpowiedz na następujące pytania dotyczące rzutu ukośnego, przy założeniu braku oporów powietrza oraz kącie początkowym większym od 0°, a mniejszym niż 90°:
a. Czy przyspieszenie jest kiedykolwiek równe zero?
b. Czy wektor przyspieszenia ma kiedykolwiek zwrot i kierunek którejkolwiek składowej wektora prędkości?
c. Czy przyspieszenie jest kiedykolwiek zwrócone przeciwnie do którejś ze składowych prędkości?

9. Dwuzłotówkę kładziemy płasko na krawędzi stołu tak, że wystaje nieco poza stół. Uderzamy w nią centralnie pięciozłotówką prostopadle do krawędzi stołu tak, że obie monety spadają. Która z nich pierwsza upadnie na podłogę?

4.4 Ruch po okręgu

10. Czy przyspieszenie dośrodkowe powoduje zmianę szybkości cząstki w ruchu po okręgu?

11. Czy przyspieszenie styczne zmienia szybkość cząstki w ruchu po okręgu?

4.5 Ruch względny w jednym i dwóch wymiarach

12. Jakiego układu odniesienia użyłbyś w sposób najbardziej naturalny do opisu twojego ruchu podczas jazdy samochodem? Jakiego podczas lotu odrzutowcem?

13. Koszykarz, kozłując piłkę w biegu, najczęściej obserwuje zawodników dookoła, a nie patrzy na piłkę. Dlaczego?

14. Wyobraźmy sobie pasażera jadącego na odkrytej pace półciężarówki (typu pickup albo polski Żuk), który wyrzuca do tyłu piłkę (przeciwnie do kierunku jazdy). Czy jest możliwe, że względem obserwatora z pobocza jezdni piłka spadnie pionowo w dół? Jaki warunek musi być wtedy spełniony? Jak opisałbyś ruch piłki względem rzucającego piłkę?

15. Biegacz uprawiający poranny jogging gubi czapkę, gdy biegnie ze stałą szybkością w parku.
a. Naszkicuj trajektorię czapki w układzie odniesienia związanym z biegaczem.
b. Powtórz rysunek w układzie spoczywającego obserwatora. Pomiń opory ruchu.

ZADANIA

4.1 Przemieszczenie i prędkość

16. Współrzędne położenia cząstki wynoszą w układzie kartezjańskim (1,0; −4,0; 6,0). Jakie są współrzędne wektora położenia cząstki?

17. Położenie cząstki zmienia się od $\vec{r}_1 = (2{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j})$ cm do $\vec{r}_2 = (-4{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j})$ cm . Jakie jest przemieszczenie cząstki?

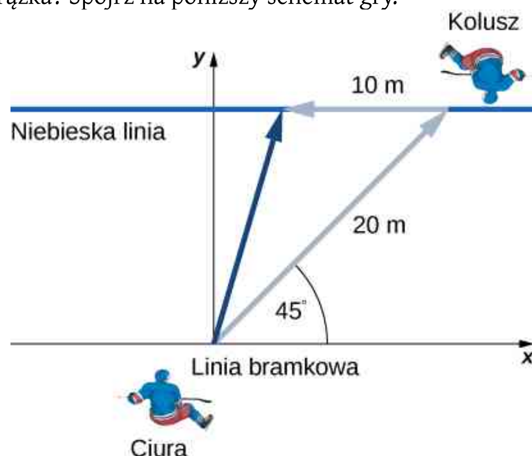
18. Golfista uderza piłkę, która – lecąc wzdłuż pola golfowego – pokonuje dystans 300,0 m. Jeśli za oś x przyjmiemy kierunek wzdłuż pola golfowego, a za oś y – kierunek prostopadły, to przemieszczenie po pierwszym

uderzeniu wynosi $\Delta \vec{r}_1 = 300{,}0\hat{i}$ m. Drugie uderzenie golfisty przemieszcza piłkę o wektor $\Delta \vec{r}_2 = 172{,}0\hat{i}\text{ m} + 80{,}3\hat{j}$ m, czyli o 189,0 m dalej. Jakie jest całkowite przemieszczenie piłki po dwóch uderzeniach?

19. Ptak leci dokładnie na północny wschód, pokonując dystans 95,0 km w ciągu 3,0 godzin. Przyjmując kierunek wschodni za oś x, a kierunek północny za oś y, podaj wektor przemieszczenia ptaka, wyrażając go za pomocą wersorów osi. Jaką prędkość średnią uzyskał ptak w trakcie podróży?

20. Rowerzysta pokonuje dystans 5,0 km na wschód, a następnie 10,0 km w kierunku 20° na zachód (względem kierunku północnego). Z tego miejsca jedzie dalej na zachód, pokonując kolejne 8,0 km. Jakie jest całkowite przemieszczenie rowerzysty od startu?

21. Obrońca hokejowego klubu GKS Tychy Bartosz Ciura stoi na linii bramkowej i podaje krążek na odległość 20 m pod kątem 45° względem linii bramkowej na prawe skrzydło do napastnika Marcina Kolusza, który na niebieskiej linii czeka na podanie. Następnie, gdy Ciura dojeżdża do niebieskiej linii, Kolusz podaje mu krążek na odległość 10 m. Jakie jest całkowite przemieszczenie krążka? Spójrz na poniższy schemat gry.



22. Położenie cząstki w przestrzeni jest następujące: $\vec{r}(t) = \left(4{,}0t^2\hat{i} - 3{,}0\hat{j} + 2{,}0t^3\hat{k}\right)$ m. (a) Jaka jest prędkość cząstki w chwili 0 s i 1 s? (b) Jaka jest prędkość średnia cząstki po 1. sekundzie ruchu?

23. Kamil Grosik, skrzydłowy reprezentacji Polski, może osiągnąć w biegu szybkość 10,0 m/s. Po rozpoczęciu gry przez bramkarza Grosik biegnie ze środka boiska w kierunku bramki przeciwnika na skrzydło pod kątem 45° względem linii środkowej, pokonując 8,0 m w czasie 1 s. Następnie przez 1,2 s biegnie prostopadle do linii środkowej dalej w kierunku bramki drużyny przeciwnej i pokonuje 12 m. (a) Jakie jest całkowite przemieszczenie Grosika od rozpoczęcia gry? (b) Jaki jest wektor jego prędkości średniej?

24. Odrzutowiec F-35 Lightning II jest amerykańskim samolotem krótkiego startu i pionowego lądowania. Jakie jest całkowite przemieszczenie odrzutowca od startu, jeśli w pierwszej fazie wznosi się on pionowo na wysokość 20,00 m, a następnie przez 20,00 km leci pod kątem 30° względem ziemi po linii prostej?

4.2 Przyspieszenie

25. Położenie cząstki dane jest funkcją czasu $\vec{r}(t) = \left(3{,}0t^2\hat{i} + 5{,}0\hat{j} - 6{,}0t\hat{k}\right)$ m.

a. Określ jaką funkcją czasu są prędkość i położenie cząstki.
b. Jakie są prędkość i przyspieszenie początkowe cząstki (w chwili $t = 0$?

26. Wektor przyspieszenia cząstki jest następujący $\left(4{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j}\right)$ m/s^2. W chwili $t = 0$ jej położenie i prędkość są równe zeru.

a. Jaką funkcją czasu są położenie i prędkość cząstki?
b. Znajdź równanie toru cząstki w ruchu na płaszczyźnie. Naszkicuj trajektorię cząstki na płaszczyźnie xy.

27. Łódka opuszcza przystań w momencie $t = 0$ i kieruje się na otwarte jezioro z przyspieszeniem $2{,}0\hat{i}$ m/s^2. Silny wiatr spycha łódkę z kursu, nadając jej dodatkową prędkość $\left(2{,}0\hat{i} + 1{,}0\hat{j}\right)$ m/s.

a. Jaką prędkość wypadkowo uzyska łódka po czasie t = 10 s?
b. Jakie jest położenie łódki po czasie t = 10 s? Naszkicuj wykres zależności y od x, na którym przedstawisz tor ruchu łódki od startu do $t = 10$s, oraz wykres składowych x i y położenia w funkcji czasu przez pierwsze 10 s ruchu.

28. Położenie cząstki dla $t > 0$ jest dane wektorem $\vec{r}(t) = \left(3{,}0t^2\hat{i} - 7{,}0t^3\hat{j} - 5{,}0t^{-2}\hat{k}\right)$ m.

a. Podaj zależność prędkości cząstki od czasu.
b. Jaką zależnością od czasu dane jest przyspieszenie?
c. Jaka jest prędkość cząstki w chwili $t = 2{,}0$s?
d. Oblicz szybkość cząstki w momentach $t = 1{,}0$s oraz $t = 3{,}0$s.
e. Z jaką średnią prędkością poruszała się cząstka między $t = 1{,}0$s oraz $t = 2{,}0$s?

29. Cząstka porusza się ze stałym przyspieszeniem. W czasie t = 0 cząstka ma prędkość $\left(10\hat{i} + 20\hat{j}\right)$ m/s. W chwili t = 4 s cząstka ma już prędkość $10\hat{j}$ m/s.

a. Z jakim przyspieszeniem porusza się cząstka?
b. Jak zmieniają się w czasie położenie i prędkość? Załóż, że początkowo cząstka znajdowała się w początku układu współrzędnych.

30. Zależność położenia cząstki od czasu jest następująca $\vec{r}(t) = \cos(1{,}0t)\hat{i} + \sin(1{,}0t)\hat{j} + t\hat{k}$, gdzie argumenty funkcji sinus i cosinus podano w radianach. (a) Podaj postać wektora prędkości. (b) Jaki jest wektor przyspieszenia cząstki?

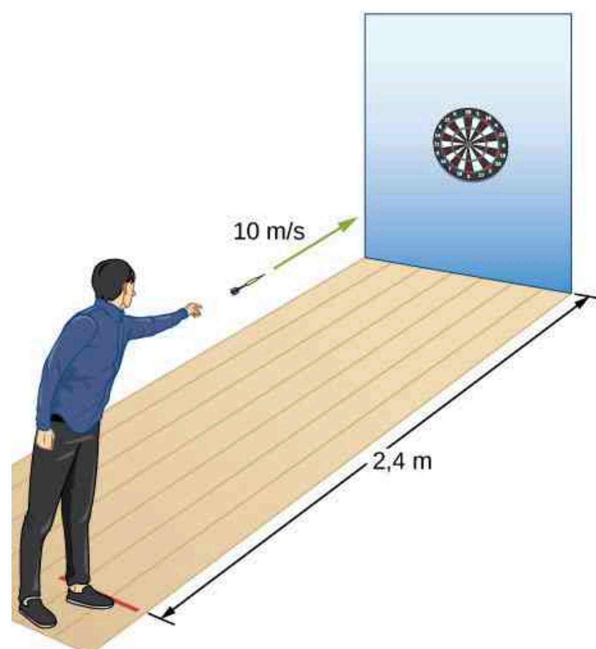
31. Myśliwiec F-35 Lightning II musi osiągnąć szybkość 70 m/s, by wystartować z krótkiego pasa lotniskowca o długości 90 m. Aby to się udało, odrzutowiec jest wystrzeliwany w powietrze przy pomocy dwóch napędów: siły odrzutu silnika samolotu oraz katapulty, dzięki czemu może uzyskać ogromne przyspieszenie. W końcowej fazie startu przyspieszenie F-35 spada do ustalonej wartości 5,0 m/s^2 i jest skierowane pod kątem 30° względem pokładu lotniskowca.
a. Jaka musi być początkowa wartość przyspieszenia F-35 na pokładzie lotniskowca, aby ten wzniósł się w powietrze?
b. Napisz wektorowe równania ruchu odrzutowca, przyjmując za punkt odniesienia moment oderwania się od pasa startowego (zapisz składowe wektorów położenia i prędkości w tak wybranym układzie współrzędnych).
c. Na jaką wysokość wzniesie się myśliwiec w ciągu 5,0 s od momentu oderwania się od pokładu lotniskowca?
d. Jaka jest wówczas jego prędkość i szybkość?
e. Jak daleko w poziomie oddali się wtedy od lotniskowca?

4.3 Rzuty

32. Pocisk karabinowy jest wystrzelony poziomo z wysokości ramienia strzelca (1,5 m) z szybkością 200 m/s.
a. Ile czasu upłynie zanim pocisk upadnie na ziemię?
b. Jaki dystans w poziomie pocisk pokona?

33. Szklana kuleczka stacza się ze stołu o wysokości 1,0 m i upada na podłogę w odległości 3,0 m w poziomie od krawędzi stołu.
a. Jak długo kulka przebywała w powietrzu?
b. Jaką prędkość miała kulka, gdy minęła krawędź stołu?
c. Jaką szybkość uzyskała kulka w momencie upadku na podłogę?

34. Lotka jest rzucona poziomo z szybkością 10 m/s dokładnie w kierunku środka tarczy odległej o 2,4 m, co pokazuje poniższy rysunek.



a. O ile poniżej zamierzonego celu lotka trafia w tarczę?
b. Co twoja odpowiedź mówi ci o technice stosowanej przez profesjonalnych zawodników tej gry?

35. Samolot lecący poziomo z prędkością 500 km/h na wysokości 800 m zrzuca paczkę z zaopatrzeniem (spójrz na rysunek). Jeśli spadochron nie otworzy się, to jak daleko od miejsca zrzutu paczka upadnie na ziemię?



36. Załóżmy, że samolot z poprzedniego zadania wystrzeliwuje rakietę z poziomą prędkością o wartości 300m/s i kierunku zgodnym z kierunkiem lotu.
a. Po jakim czasie i w jakiej odległości poziomej od miejsca wystrzelenia upadnie rakieta?
b. Jaka jest szybkość rakiety w chwili upadku?

37. Miotacz drużyny baseballowej rzuca piłkę z prędkością 40 m/s (144 km/h).
a. Zakładając, że miotacz rzuca piłkę poziomo w kierunku odległej o 18,4 m bazy, oblicz czas lotu piłki do bazy.
b. W jakiej odległości od bazy upadnie piłka wyrzucona przez miotacza z wysokości 1,5 m, jeśli pałkarz nie trafi?

38. Pocisk, wystrzelony pod kątem 30°, upada po 20 s na ten sam poziom, z którego go wystrzelono.
a. Jaką miał prędkość początkową?
b. Na jaką największą wysokość wzniósł się pocisk?
c. Jaki jest zasięg pocisku?
d. Oblicz przemieszczenie pocisku od miejsca wystrzelenia do punktu na trajektorii po 15 s.

39. Koszykarz rzuca piłką w kierunku kosza odległego o 6,1 m i zawieszonego 3,0 m nad parkietem. Jeżeli piłka jest rzucona z wysokości 1,8 m nad parkietem pod kątem 60°, to jaka musi być jej początkowa szybkość, aby doleciała do kosza?

40. W pewnym momencie balon wypełniony gorącym powietrzem znajduje się na wysokości 100 m i zaczyna opadać ze stałą szybkością 2,0 m/s. W tym samym momencie z kosza balonu dziewczynka rzuca poziomo piłkę z szybkością 20 m/s. Gdzie będzie piłka po wylądowaniu balonu? Zaniedbaj opory powietrza.

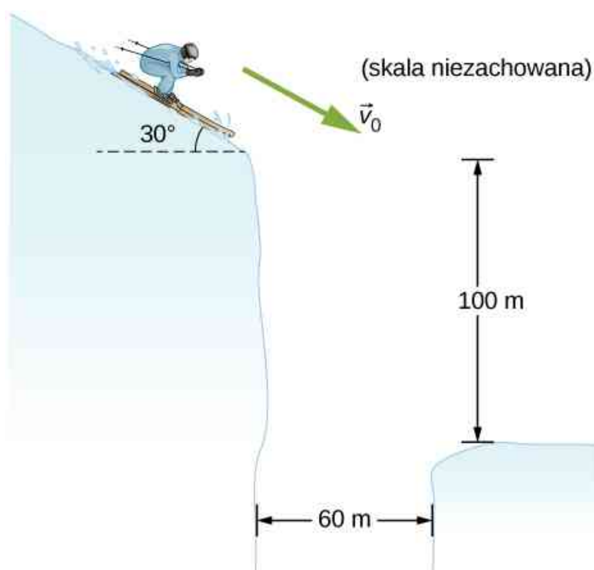
41. Mężczyzna poruszający się motocyklem ruchem jednostajnym z prędkością 10 m/s wyrzuca puszkę po coli pionowo do góry z szybkością 3,0 m/s. Wyznacz równanie toru lotu puszki, jaki widzi z pobocza policjant obserwujący zdarzenie. Przyjmij za położenie początkowe punkt wyrzutu puszki. Zaniedbaj opory powietrza.

42. Lekkoatleta potrafi skoczyć w dal na odległość 8,0 m. Jak daleko byłby w stanie skoczyć na Księżycu, gdzie przyspieszenie grawitacyjne jest 6 razy mniejsze niż na Ziemi?

43. Największa odległość na jaką chłopiec potrafi rzucić piłkę wynosi 50 m. Załóżmy, że chłopiec z tą prędkością może rzucać pod dowolnym kątem, także w pionie. Jak wysoko wzniesie się piłka, jeśli chłopiec wyrzuci ją pionowo do góry?

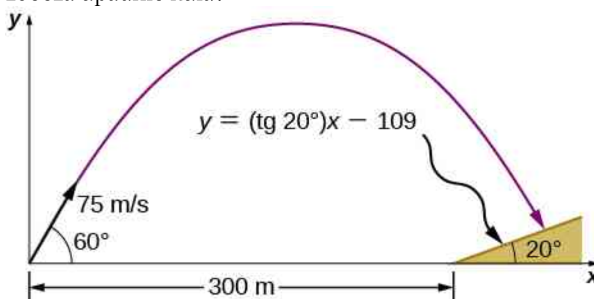
44. Kamień wyrzucono z krawędzi klifu po kątem 53° do poziomu. Wysokość klifu to 100 m. Prędkość początkowa kamienia ma wartość 30 m/s.
a. Jak wysoko ponad klif wzniesie się kamień?
b. Jak daleko w poziomie przemieści się kamień, gdy znajdzie się na wysokości maksymalnej swojego lotu?
c. Po jakim czasie od wyrzucenia kamień upadnie na ziemię?
d. Jaki jest zasięg kamienia?
e. Jakie są współrzędne położenia kamienia względem krawędzi klifu w chwilach $t = 2{,}0\text{s}$, $t = 4{,}0\text{s}$ oraz $t = 6{,}0\text{s}$?

45. Agent 007, uciekając przed napastnikami, zjeżdża na nartach w dół stoku o nachyleniu 30° z szybkością 60 km/h. Gdy dociera do przepaści, przeskakuje na drugą stronę głębokiego wąwozu o szerokości 60 m i upada 100 m poniżej krawędzi przepaści (rysunek) Jak tego dokonał? Zaniedbaj opory powietrza.



46. Dołek jest w odległości 70 m od golfisty i 20 m poniżej poziomu, na którym stoi mężczyzna. Jeśli uderzy piłkę pod kątem 40° z początkową szybkością 20 m/s, to jak blisko dołka upadnie piłka?

47. Kula armatnia jest wystrzelona w kierunku zbocza nachylonego do poziomu pod kątem 20° i oddalonego od armaty o 300 m. Prędkość początkowa pocisku ma wartość 75 m/s i kierunek 60° do poziomu. W układzie współrzędnych przyjętym jak na rysunku, równanie prostej, jaką zbocze tworzy względem poziomu, jest następujące $y = (\text{tg}20^\circ)\,x - 109$. W którym miejscu zbocza upadnie kula?



48. Astronauta na Marsie kopie piłkę futbolową pod kątem 45° z prędkością $15\,\text{m/s}$. Przyjmując, że przyspieszenie grawitacyjne na Marsie jest równe $3{,}7\,\text{m/s}^2$
a. jaki jest zasięg piłki względem płaskiej powierzchni?
b. Jaki byłby zasięg tego samego kopnięcia na Księżycu, gdzie przyspieszenie grawitacyjne jest 6 razy mniejsze niż na Ziemi?

49. Rekord Mike'a Powella z 1991 roku w skoku w dal wynosi 8,95 m i do dzisiaj nikt go nie pobił. Jeżeli podczas tego skoku Powell wybił się pod kątem 15°, to jaką musiał mieć początkową prędkość?

50. Robot skonstruowany na MIT w Bostonie potrafi przeskakiwać przeszkody o wysokości 46 cm z szybkością 12 km/h.

a. Jeśli robot potrafi wybić się przy tej prędkości pod kątem 60°, to jaka jest jego wysokość maksymalna?
b. Pod jakim kątem musiałby się wybić ten robot, aby osiągnąć wysokość 46 cm?

51. Góra Asama w Japonii jest czynnym wulkanem. Podczas erupcji w 2009 roku wulkan wyrzucał duże bloki skalne na odległość 1 km od krateru (liczoną w poziomie). Jeżeli kąt wyrzucania skał z wulkanu wynosił 40°, a wysokość względna wulkanu to 900 m, to (a) jaka była prędkość początkowa i (b) czas lotu bloków skalnych?

52. Zawodnik słynnych „Świętych” z Nowego Orleanu, Drew Brees, może kopnąć piłkę do futbolu amerykańskiego z szybkością 23,0 m/s (82,8 km/h). Na jaką odległość poleci piłka, jeśli zawodnik kopnie ją pod kątem 10° do poziomu?

53. Pojazd kołowy LRV (Lunar Roving Vehicle) używany podczas ostatniej misji *Apollo* do transportu sprzętu i załogi na powierzchni Księżyca, nieoficjalnie osiągnął szybkość 5,0 m/s. Gdyby wpadł z tą szybkością na niewielką fałdę na powierzchni Księżyca, która zadziałałaby jak katapulta wystrzeliwująca pojazd pod kątem 20°, to przez jaki czas unosiłby się „w powietrzu”?

54. Bramka na stadionie piłki nożnej ma wysokość 2,44m . Piłkarz wykonuje rzut karny z odległości 11 m od bramki, nadając piłce kierunek 25° względem poziomu. Jaka musiała być szybkość piłki w momencie kopnięcia, skoro ta trafiła dokładnie w poprzeczkę bramki?

55. Olympus Mons na Marsie ma wysokość ok. 25 km i promień w obwodzie u podstawy ok. 312 km, co czyni ją najwyższą znaną górą w Układzie Słonecznym. Wyobraź sobie, że stoisz na szczycie tej góry i strzelasz z armaty ustawionej dokładnie w poziomie. Jaka musiałaby być szybkość wystrzeliwanych pocisków armatnich, aby upadały tuż przy podstawie góry na powierzchnię planety. Przyjmij, że przyspieszenie grawitacyjne na Marsie ma wartość 3,7 m/s^2.

56. Robbie Knievel jest pierwszym człowiekiem, który przeskoczył Wielki Kanion na motocyklu. Dokonał tego w 1991 roku. Na skraju wąskiej części kanionu o szerokości 69,0 m ustawił rampę, na którą wjeżdżał rozpędzonym do prędkości 35,8 m/s motocyklem. Pod jakim kątem musiał wybijać się w górę, aby dotrzeć na drugą stronę kanionu?

57. Gra w palanta uznawana jest czasem za pierwowzór gry w baseball. Zawodnik drużyny palantowej uderza piłkę z szybkością 15,0 m/s, kierując ją do góry pod kątem 30° względem poziomu. Jaka musiałaby być prędkość początkowa piłki uderzonej także pod kątem 30°, ale w kosmicznym meczu palanta – na planecie o przyspieszeniu grawitacyjnym dwukrotnie większym niż na Ziemi, tak aby zasięg uderzenia był taki sam jak na Ziemi? Załóż, że wyrzut i upadek piłki mają miejsce na tej samej wysokości.

58. Bramkarz wykopuje piłkę od bramki w kierunku środka boiska z szybkością 25,0 m/s. Ląduje ona dokładnie na linii środkowej (50,0 m od bramkarza).
a. Pod jakimi kątami bramkarz mógł kopnąć piłkę?
b. Z odległości 30,0 m od środka boiska pomocnik ruszył do podania z szybkością 7 m/s. Dla którego z powyższych kątów pomocnik ma szansę odebrać piłkę i o ile wcześniej dobiegnie on do piłki przed jej wylądowaniem?

4.4 Ruch po okręgu

59. Koło zamachowe wykonuje 30 obrotów na sekundę. Ile wynosi całkowity kąt, jaki punkt na obwodzie koła zatoczy po 40 s?

60. Cząstka krąży po okręgu o promieniu 10 m ze stałą prędkością o wartości 20 m/s. Jaka jest wartość przyspieszenia dośrodkowego cząstki?

61. David Beckham, wykonując rzut wolny, podkręca piłkę tak, że wiruje ona z szybkością 8 obr/s. Profesjonalna piłka ma obwód 68 cm. Jakiego przyspieszenia dośrodkowego doznaje punkt na obwodzie piłki podczas lotu?

62. Karuzela w wesołym miasteczku ma kształt spodka o promieniu 8,00 m, który wiruje wokół własnej osi. Jeżeli pasażerowie karuzeli siedzący na obwodzie spodka doznają przyspieszenia dośrodkowego o wartości przyspieszenia grawitacyjnego, to ile obrotów na minutę wykonują w trakcie jazdy?

63. Łyżwiarka szybka, startująca w konkurencji short-tracku, pokonuje tor o długości 200 m w czasie 23,2 s. Na zakrętach tor ma kształt półokręgów o promieniu 30 m. Zakładając, że w czasie całego biegu łyżwiarka ma stałą szybkość, oblicz jakiego przyspieszenia doznaje na zakrętach?

64. Jakie jest przyspieszenie dośrodkowe Wenus w ruchu orbitalnym wokół Słońca, przy założeniu kołowego kształtu orbity?

65. Eksperymentalna rakieta krąży wokół Ziemi tuż nad równikiem. Z jaką stałą szybkością rakieta się porusza, jeśli doznaje przyspieszenia o wartości g ?

66. Śmigło wentylatora sufitowego wiruje z częstotliwością 360,0 obr/min. Jaka jest wartość przyspieszenia dośrodkowego punktu na jednej z łopat śmigła w odległości 10,0 cm od osi obrotu?

67. Pewien punkt na wskazówce sekundowej zegara ma przyspieszenie dośrodkowe równe 0,1 cm/s^2. Jak daleko od osi obrotu znajduje się ten punkt?

4.5 Ruch względny w jednym i dwóch wymiarach

68. Osie układu współrzędnych przynależącego do układu odniesienia S' są równolegle do osi układu S. Układ S' oddala się od S ze stałą prędkością $\vec{v}_{S',S} = \left(4{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j} + 5{,}0\hat{k}\right)$ m/s .

a. Jeżeli w chwili $t = 0$ środki obu układów pokrywają się, to jak zmienia się w czasie położenie początku O' w układzie odniesienia S?;

b. Jak są związane ze sobą wektory położenia $\vec{r}\,(t)$ oraz $\vec{r}\,'(t)$ zmierzone odpowiednio w układach S i S'?;

c. Jaki jest związek między odpowiednimi wektorami prędkości $\vec{v}\,(t)$ i $\vec{v}\,'(t)$?;

d. Jak są ze sobą powiązane wektory przyspieszeń $\vec{a}\,(t)$ i $\vec{a}\,'(t)$?.

69. Osie współrzędnych w układach odniesienia S' i S pozostają równoległe w czasie, gdy układ S' porusza się względem S ze stałą prędkością $\vec{v}_{S',S} = \left(1{,}0\hat{i} + 2{,}0\hat{j} + 3{,}0\hat{k}\right)$ m/s .

a. Jeżeli w chwili $t = 0$ początki obu układów pokrywały się, to jak względem układu S zmienia się w czasie położenie środka O'?

b. W jakiej relacji pozostają położenia $\vec{r}\,(t)$ i $\vec{r}\,'(t)$, zmierzone w układach S i S'?

c. Jak związane są prędkości $\vec{v}\,(t)$ i $\vec{v}\,'(t)$?

d. Jak związane są przyspieszenia $\vec{a}\,(t)$ i $\vec{a}\,'(t)$?

70. Wektor prędkości cząstki w układzie A wynosi $\left(2{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j}\right)$ m/s. Prędkość względna układu A względem układu B wynosi $4{,}0\hat{k}$ m/s , natomiast prędkość układu B względem układu C wynosi $2{,}0\hat{j}$ m/s. Jaka jest prędkość naszej cząstki względem układu C?

71. Krople deszczu spadają pionowo w dół na szybę samochodu z szybkością 4,5 m/s w układzie związanym z ziemią. Jaką szybkość kropel zmierzy pasażer samochodu poruszającego się po linii prostej w poziomie z szybkością 22,0 m/s?

72. Mewa osiąga szybkość 9,00 m/s w locie przy bezwietrznej pogodzie.

a. Jeżeli w locie pod wiatr mewa pokonuje 6,00 km w ciągu 20,0 min, to z jaką szybkością wieje wtedy wiatr?

b. Jeżeli następnie mewa zawróci i leci z powrotem kursem z wiatrem, to ile czasu zajmie jej powrót do początku trasy?

73. Prom ze Świnoujścia wyrusza dokładnie na północ z szybkością 7,00 m/s względem wody. Prąd morski ma w tym miejscu prędkość o wartości 1,50 m/s w kierunku 40° na północny wschód. Jaką szybkość względem brzegu ma prom? W jakim kierunku rzeczywiście płynie?

74. Łódką można płynąć z szybkością 8,0 km/h względem wody.

a. Ile czasu zajmie wiosłowanie przez 1,5 km w dół rzeki płynącej z szybkością 3,0 km/h względem brzegu?

b. Ile czasu zajmie powrót w górę rzeki?

c. Pod jakim kątem trzeba ustawić łódkę, aby dotrzeć na drugi brzeg rzeki dokładnie po przeciwnej stronie?

d. Załóżmy, że szerokość rzeki to 0,8 km. Ile czasu zajmie przepłynięcie na drugi brzeg?

e. Załóżmy teraz, że ustawiamy łódkę na rzece prostopadle do brzegu. Ile teraz czasu zajmie podróż na drugi brzeg i jak daleko w dół rzeki prąd zniesie łódkę?

75. Mały samolot lata z maksymalną szybkością 200 km /h względem powietrza. Jeżeli wiatr wieje z szybkością 50 km /h dokładnie z zachodu, to (a) jak pilot musi ustawić samolot, aby lecieć dokładnie na północ oraz (b) ile czasu zajmie podróż na północ do punktu odległego o 300 km?

76. Rowerzysta jadący z szybkością 15 km/h na południowy wschód czuje na twarzy wiatr wiejący z kierunku południowo-zachodniego z szybkością 25 km/h. Jaką szybkość i kierunek ma wiatr względem spoczywającego obserwatora?

77. Rzeka płynie na wschód z prędkością 4 m/s. Łódź wyrusza z portu z szybkością 7 m/s na północny wschód pod kątem 30° liczonym od kierunku wschodniego. Jeżeli rzeka ma szerokość 1 800 m, to (a) jaką szybkość ma łódź względem brzegów, oraz (b) ile czasu zajmie łodzi dotarcie na drugi brzeg?

ZADANIA DODATKOWE

78. Bolid Formuły 1 wchodzi w zakręt o promieniu 200,0 m z prędkością o wartości 89,0 m/s. Jakiego przyspieszenia doznaje podczas pokonywania zakrętu?

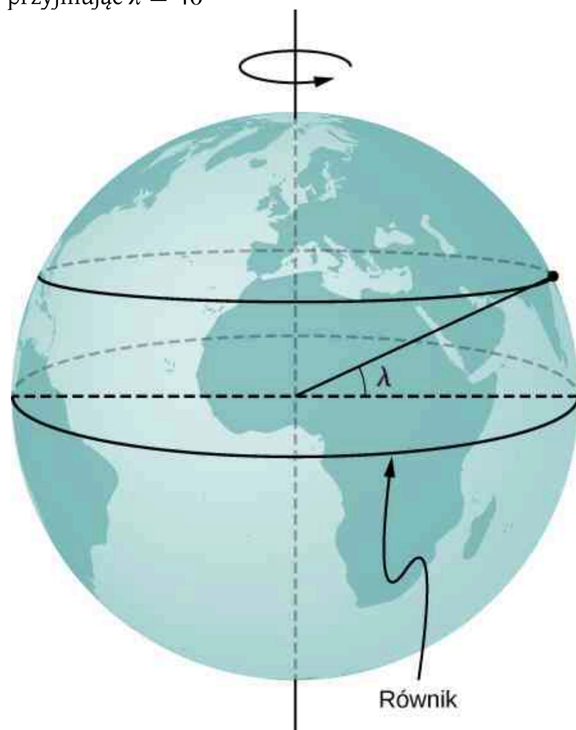
79. Cząstka porusza się po kołowej orbicie o promieniu 10 m ze stałą szybkością 40,0 m/s. W pewnej chwili zaczyna zwiększać swoją szybkość w tempie 15,0 m/s^2. Jaka jest wartość przyspieszenia cząstki w momencie rozpoczęcia przyspieszania?

80. Kierowca wciska pedał hamulca w chwili, gdy samochód wchodzi z szybkością 90 km/h w zakręt o promieniu 150,0 m. Samochód zaczyna zwalniać w tempie 9,0 km/h w ciągu każdej sekundy. Ile wynosi przyspieszenie samochodu, gdy kierowca zwolni do 60,0 km/h?

81. Samochód wyścigowy wchodzi w zakręt na torze „Poznań”, zmniejszając szybkość z 85,0 do 80,0 m/s w czasie 2,0 s. Jeżeli krzywizna toru wynosi 316,0 m, to ile wynosi całkowite przyspieszenie samochodu na

początku i na końcu manewru hamowania?

82. Oblicz przyspieszenie dośrodkowe wynikające z ruchu obrotowego Ziemi wokół własnej osi, jakiego doznaje słoń umieszczony w ZOO na szerokości geograficznej λ. Wyraź odpowiedź przez λ, promień Ziemi R_Z i okres obrotu Ziemi T. Porównaj wynik z wartością g, przyjmując $\lambda = 40°$



83. Proton rozpędzany w synchrotronie porusza się po okręgu o promieniu 1 km i zwiększa swoją szybkość zgodnie z równaniem $v(t) = c_1 + c_2 t^2$, gdzie $c_1 = 2{,}0 \cdot 10^5$ m/s i $c_2 = 10^5$ m/s^3.

a. Jakie jest całkowite przyspieszenie protonu w chwili t = 5,0 s?

b. Przy jakim czasie wyrażenie na zmianę szybkości protonu w czasie staje się niefizyczne?

84. Łopaty śmigła samolotowego rozpędzają się od czasu $t = 0$s do $t = 5{,}0$s z przyspieszeniem stycznym punktów na końcach łopat $3{,}00\text{m/s}^2$ Długość łopat wynosi $1{,}5$m. Jakiego całkowitego przyspieszenia doznają końce łopat w chwili $t = 5{,}0$s ?

85. Cząstka wykonuje ruch jednostajny po okręgu z częstością ω = 4,00 rad/s. Jeżeli w chwili początkowej t = 0 cząstka ma położenie y = 0 m, x = 5 m, to:

a. Jakie jest położenie cząstki w chwili t = 10 s?

b. Jaka jest wtedy jej prędkość?

c. Jakie jest jej przyspieszenie?

86. Przyspieszenie dośrodkowe cząstki ma wartość $a_d = 4{,}0\ \text{m/s}^2$. Z jaką częstością wiruje ta cząstka, jeśli znajduje się 5,0 m od osi obrotu? Jaki jest wektor szybkości cząstki w chwili t = 10 s?

87. Pręt o długości 3,0 m obraca się w płaszczyźnie poziomej z częstotliwością 2,0 obr/s wokół osi przechodzącej przez jeden z jego końców. Jakie przyspieszenia dośrodkowe mają punkty na pręcie odległe o 1,0m, 2,0m oraz 3,0m od osi obrotu?

88. Cząstka o początkowym położeniu $\left(1{,}5\hat{j} + 4{,}0\hat{k}\right)$ m doznaje przemieszczenia o wektor $\left(2{,}5\hat{i} + 3{,}2\hat{j} - 1{,}2\hat{k}\right)$ m. Jakie jest końcowe położenie cząstki?

89. Położenie cząstki dane jest funkcją czasu $\vec{r}\,(t) = (50\ \text{m/s})\, t\hat{i} - \left(4{,}9\ \text{m/s}^2\right) t^2\hat{j}$.

a. Jakimi funkcjami czasu są prędkość i przyspieszenie cząstki?

b. Jaki warunek początkowy musi być spełniony, aby ruch cząstki był w ogóle możliwy?

90. Statek kosmiczny leci w przestrzeni z prędkością $\vec{v}\,(t) = 250{,}0\hat{i}$ m/s o stałej wartości. W pewnym momencie odpala rakietę, nadając jej przyspieszenie o wektorze $\vec{a} = \left(3{,}0\hat{i} + 4{,}0\hat{k}\right)$ m/s^2. Jaka jest prędkość rakiety 5,0 s po wystrzeleniu?

91. Łucznik strzela do tarczy ustawionej 40 m od niego. Strzała trafia jednak 30 cm poniżej punktu, do którego celował. Z jaką szybkością łucznik wypuścił strzałę?

92. Skoczek w dal osiąga odległość 8,0 m przy kącie odbicia 45° względem podłoża. Zakładając, że z tą samą szybkością wybija się pod kątem 30°, oblicz jego zasięg przy tym kącie.

93. Na pewnej planecie maksymalny możliwy zasięg pocisku wystrzelonego ukośnie z szybkością 10 m/s wynosi 20 m. Jakie jest przyspieszenie grawitacyjne na tej planecie?

94. Zawodnik motocrossu wyskakuje na jednej z przeszkód w powietrze pod kątem 60° względem płaskiego podłoża. Jeżeli ląduje w odległości 45,0 m w poziomie i 20 m poniżej płaszczyzny początkowej, to jaka była szybkość motocyklisty?

95. Który pojazd doznaje większego przyspieszenia dośrodkowego: motocykl wchodzący w zakręt o promieniu 100,0 m z szybkością 15,0 m/s, czy samochód na zakręcie o promieniu 75,0 m z szybkością 12,0 m/s?

96. Satelita geostacjonarny krąży wokół Ziemi na orbicie o promieniu 42 250 km z okresem równym 24 h. Jakie przyspieszenie dośrodkowe ma ten satelita?

97. Dwie identyczne motorówki płyną rzeką po tej samej prostej, ale w przeciwnych kierunkach. Obie mają tę samą szybkość względem wody. Obserwator z brzegu rzeki odnotowuje szybkości łódek 4,0 oraz 5,0 m/s.

a. Jakie szybkości mają motorówki względem wody?

b. Jaka jest szybkość nurtu rzeki?

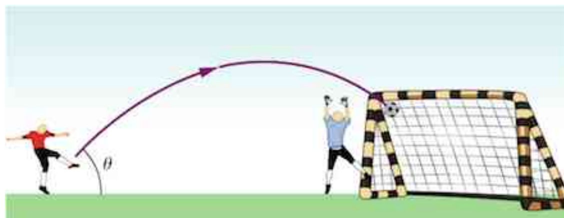
ZADANIA TRUDNIEJSZE

98. Golf ekstremalny w RPA. Jeden z dołków na polu golfowym w górach Afryki Południowej znajduje się u podnóża szczytu o wysokości $h = 400{,}0\,\mathrm{m}$. Golfista uderza piłkę ze szczytu w stronę dołka odległego w poziomie o $s = 359{,}0\,\mathrm{m}$. Zakładając, że piłka zostaje uderzona pod kątem $\varphi = 40°$ do poziomu i trafia bardzo blisko dołka, oblicz (a) prędkość początkową piłki oraz (b) czas lotu piłki. Pomiń opór powietrza.

99. Robert Lewandowski wykonuje rzut wolny z odległości 30 m. Uderza piłkę pod kątem 45°.

a. Jaką maksymalną prędkość może nadać piłce, aby trafić tuż pod porzeczkę bramki o wysokości 2,44 m?

b. Dodatkowo musi pokonać mur ustawiony w przepisowej odległości 9,15 m, którego zawodnicy wyskakują na wysokość 2,5 m. Czy kopiąc piłkę z maksymalną prędkością Robert pokona mur? Czy sytuacja zmieniłaby się, gdyby mur pod nieuwagę sędziego przesunął się na odległość tylko 7 m od Roberta?



100. W pewnej chwili ciężarówka jedzie po długiej prostej z prędkością 80 km/h dokładnie na wschód w kierunku skrzyżowania odległego o 32 km. W tym czasie na skrzyżowanie wjeżdża samochód osobowy, który z prędkością 50 km/h porusza się na północ.

a. Po jakim czasie oba pojazdy znajdą się najbliżej siebie?

b. Jaka jest najmniejsza odległość między pojazdami w tym momencie?

5 | ZASADY DYNAMIKI NEWTONA



Rysunek 5.1 Most Golden Gate, jeden z największych dzieł nowoczesnej techniki, w momencie otwarcia w 1937 roku był najdłuższym mostem wiszącym na świecie. Aktualnie jest on nadal jednym z dziesięciu najdłuższych mostów wiszących. Jakie zjawiska fizyczne musimy rozważyć i uwzględnić przy projektowaniu i budowie tego typu mostu? Jakie siły działają na most? Jakie siły przeciwdziałają zawaleniu mostu? Jak elementy mostu takie jak liny, wieże czy jezdnia wpływają na jego stabilność?

Treść rozdziału

Wstęp

Wiadomo, że aby podróż przez most była możliwa, jego konstrukcja musi być stabilna. Często zdarza się, iż jadące mostem samochody gwałtownie przyspieszają bądź zwalniają, na przykład podczas korków. W obydwu przypadkach mamy do czynienia z siłami działającymi zarówno na most, jak i na podróżujące na nim samochody. Siły działające na most się równoważą, stąd też pozostaje on w równowadze. Z kolei w przypadku silnika samochodu siła przez niego wywierana powoduje zmianę ruchu. Isaac Newton, formułując trzy fundamentalne zasady dynamiki, stworzył narzędzia pozwalające opisać z fizycznego punktu widzenia wymienione wyżej sytuacje.

W codziennym życiu niemal na każdym kroku możemy obserwować działania sił. Zauważmy, że ludzkie ciało utrzymuje się na powierzchni Ziemi dzięki działającej na nie sile grawitacji. Sama zwarta struktura ludzkiego ciała również jest wynikiem oddziaływań międzycząsteczkowych – czyli pewnego rodzaju sił. Gdy otwierasz okno, podążasz wzdłuż ruchliwej ulicy, używasz sztućców bądź dotykasz gładkiej, dziecięcej twarzy – używasz siły! Analizując głębiej – atomy, z których zbudowana jest ludzka twarz, sprzężone są oddziaływaniem kulombowskim, a w ich jądrze występuje jedno z najsilniejszych oddziaływań w przyrodzie – oddziaływanie krótkozasięgowe sił atomowych. Widać więc, że pojęcie siły jest ważnym narzędziem do opisu bardzo wielu zjawisk w otaczającym nas świecie.

5.1 | Pojęcie siły

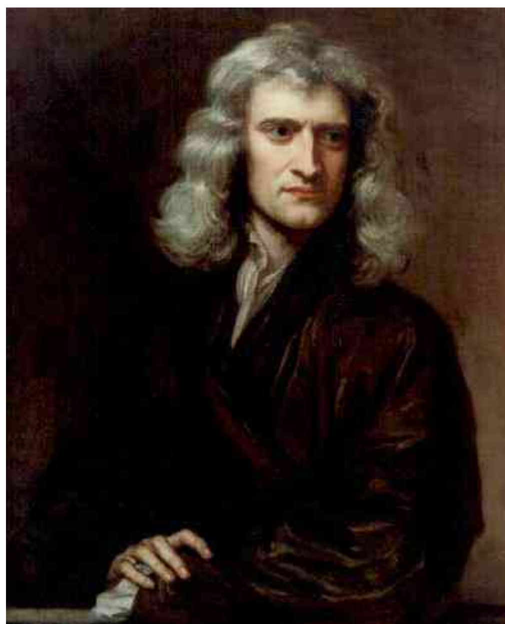
Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- różnic między kinematyką a dynamiką;
- rozumieć pojęcie siły;
- wykonywać proste diagramy sił;
- definiować jednostkę siły;
- opisywać siłę jako wektor.

Kinematyka, zajmująca się matematycznym opisem ruchu, jest bardzo ważnym działem fizyki. Jednakże obejmuje ona wyłącznie opis ruchu ciała z uwzględnieniem funkcji położenia, prędkości i przyspieszenia. **Dynamika** (ang. **dynamics**) z kolei jest działem fizyki pozwalającym na pełny opis ruchu ciała, rozważa przyczyny tego ruchu i analizuje siły działające na ciało w danym układzie. Do najważniejszych praw z zakresu dynamiki należą trzy zasady dynamiki, sformułowane przez **Isaaca Newtona** (1642–1727, Rysunek 5.2). Zasady te stanowią doskonały przykład uniwersalności i prostoty praw, które panują w przyrodzie i znajdują zastosowanie we wszystkich przypadkach ruchu, zarówno na Ziemi, jak i w kosmosie.

Sformułowanie przez Newtona trzech zasad dynamiki było jednym z jego największych osiągnięć i przyczyniło się do jego wielkiej sławy w świecie nauki. Okres, w którym Newton opracował zasady dynamiki, uznawany jest za początek nowożytnej nauki. Dopiero dokonania fizyki współczesnej pokazują, iż prawa newtonowskie pozwalają tylko na opis ruchu ciał poruszających się z prędkościami znacznie mniejszymi od prędkości światła, o rozmiarach znacząco większych niż rząd wielkości rozmiarów molekuł (około 10^{-9} m średnicy). Ograniczenia te determinują zakres stosowalności praw mechaniki klasycznej, podanych przez Newtona. Na początku XX wieku Albert Einstein (1879–1955) sformułował postulaty szczególnej teorii względności oraz, z udziałem wielu innych wielkich uczonych, prawa mechaniki kwantowej. Mechanika kwantowa pozwala na analizę układów bez ograniczeń znanych z klasycznej mechaniki newtonowskiej. Problematyka poruszona w niniejszym rozdziale oraz wszystkie te zagadnienia sprzed opracowania teorii względności, opisanej w rozdziale Teoria względności (https://cnx.org/content/m65887/latest/), dotyczą mechaniki opisanej przez Isaaca Newtona.

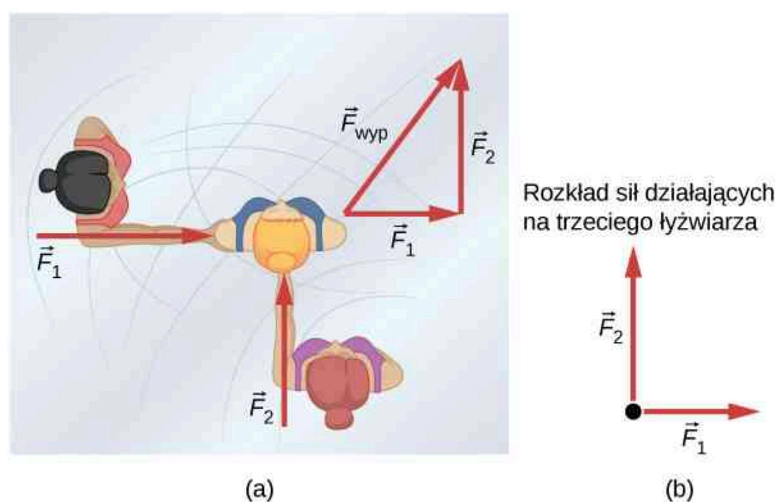


Rysunek 5.2 Isaac Newton (1642–1727) opublikował swoją nadzwyczajną pracę *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* w roku 1687. Zaproponował w niej pewne prawa, które po dziś dzień pozwalają na pełen opis ruchu ciał. Ponadto Newton przyczynił się do rozwoju teorii grawitacji oraz teorii opisujących zachowanie się światła i jego barw.

Operacyjna definicja siły

Dynamika pozwala na opis sił i, w konsekwencji, przyczyn ruchu ciał w przyrodzie. Aby lepiej objaśnić to zagadnienie, należy wprowadzić podstawową definicję siły. Pomóc w zrozumieniu pojęcia siły może wyobrażenie sobie dość prostej sytuacji, w której raz ciągniemy, a raz pchamy jakieś ciało. Czynności te można opisać, podając wielkość (wartość) oraz kierunek przyłożonej do ciała siły. Widać stąd, że mamy do czynienia z wektorem. Możemy więc zdefiniować siłę jako ilościowy opis czynności pchania lub ciągnięcia pewnego obiektu, uwzględniający odpowiednie cechy, takie jak wielkość przyłożonej siły bądź jej kierunek. Siła opisywana jest jako wektor lub jako wielokrotność pewnej siły jednostkowej.

W przypadku czynności popychania bądź ciągnięcia ciała rozpatrywać należy wielkość przyłożonej siły oraz jej kierunek. Dla przykładu, działo wywiera ogromną siłę na wystrzeliwany w powietrze pocisk, w przeciwieństwie natomiast Ziemia wywiera bardzo niewielki nacisk na żyjącą na niej pchłę. Nasze codzienne doświadczenia pozwalają nam zrozumieć, jak wiele sił nas otacza. Gdy dwoje ludzi popycha trzeciego człowieka w różnych kierunkach, jak to pokazano na Rysunku 5.3, całkowita siła będzie miała kierunek zgodny z tym oznaczonym jako $\vec{F}_{wyp}$ – siła wypadkowa. Siły, jak wszystkie wektory, oznaczane są jako strzałki, a ich dodawanie można wykonać za pomocą klasycznej metody dodawania geometrycznego wektorów lub z użyciem odpowiednich funkcji trygonometrycznych. Zagadnienia te poruszono w rozdziale Wektory.



Rysunek 5.3 (a) Schemat ukazujący sytuację, w której dwie łyżwiarki popychają trzecią. Siły przedstawione są oczywiście jako wektory oznaczone odpowiednio jako $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$, stąd też ich sumę stanowi wektor $\vec{F}_{wyp}$. (b) Rysunek przedstawiający rozkład sił działających na trzecią łyżwiarkę.

Rysunek 5.3(b) ukazuje po raz pierwszy w niniejszym rozdziale diagram przedstawiający **rozkład sił działających na ciało** (ang. **free body diagram**), uwzględniający wszystkie siły działające na analizowany obiekt. Jak widać, ciało przedstawiono jako pojedynczy punkt, do którego przyłożono siły, będące **siłami zewnętrznymi** (ang. **external force**). Jedynie siły zewnętrzne są przyczyną ruchu danego obiektu. Wszelkie siły wewnętrzne w układzie są w tym przypadku zaniedbywane. Wyżej wspomniane siły zewnętrzne są wielkościami wektorowymi, mającymi zwrot od punktu przyłożenia analizowanego ciała na zewnątrz.

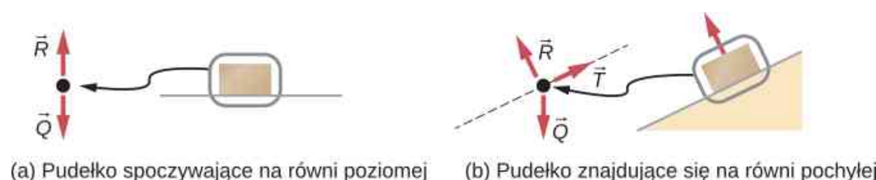
Rysunki pokazujące rozkłady sił działających na ciała są niezwykle użyteczne w przypadku analizowania tych sił. Są szeroko stosowane w celu zrozumienia podstawowych praw dynamiki Newtona. Z pewnością spotkasz się z tego typu diagramami podczas studiowania zarówno tego rozdziału, jak i wielu innych działów fizyki. Schemat tworzenia tego typu diagramów z pewnością wyjaśni omówienie kilku podstawowych kroków. Przeanalizujemy to zagadnienie dokładniej w podrozdziale Rozkłady sił działających na ciało.

Wskazówka dotycząca zagadnienia: Rozkład sił działających na ciało

1. Narysuj obiekt, który analizujesz. Twój obiekt możesz potraktować jako punkt materialny, reprezentujący środek masy. Następnie umieść ten punkt w kartezjańskim układzie współrzędnych xy.

2. Przeanalizuj wszystkie możliwe siły działające na ciało, rysując je jako wektory z punktem przyłożenia w środku masy (w punkcie materialnym). Nie uwzględniaj jednak na rysunku siły wypadkowej oraz sił wywieranych przez obiekt na jego otoczenie.
3. Rozłóż naniesione na diagram wektory sił na składowe wzdłuż odpowiednich osi układu współrzędnych x i y.
4. Narysuj według omówionego schematu osobno rozkład sił działających na każde ciało w układzie.

Zilustrujmy powyższą strategię sporządzania diagramów z rozkładem sił działających na ciało (Rysunek 5.4). Niektóre pojęcia użyte na poniższym rysunku zostaną bardziej szczegółowo opisane w dalszej części rozdziału.

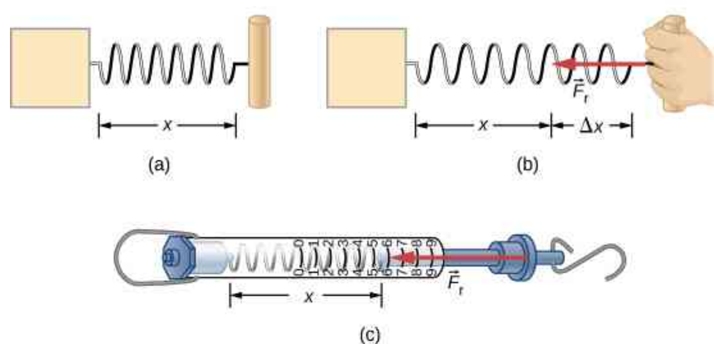


Rysunek 5.4 Na powyższym rysunku $\vec{R}$ oznacza siłę reakcji podłoża, $\vec{Q}$ to siła ciężkości, natomiast jako $\vec{T}$ oznaczono siłę tarcia.

Opisane powyżej kroki są w zupełności wystarczające, aby nauczyć cię rozwiązywania zagadnień związanych z rozkładem sił działających na ciało. Ostatnia część tego rozdziału wyjaśnia bardziej szczegółowo, jak rysować diagramy działających sił, co jest przydatne podczas rozwiązywania zadań rachunkowych.

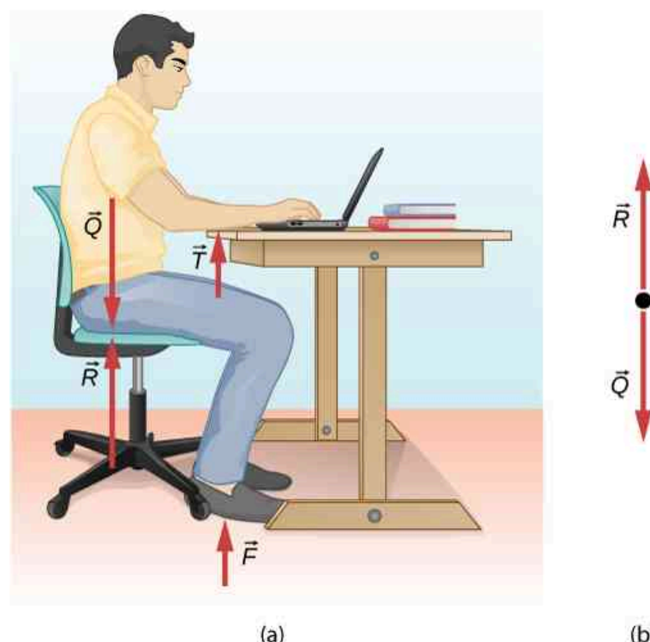
Dokładniejsza analiza pojęcia siły

Siłę można zdefiniować ilościowo, posługując się wzorcem (jednostką) siły, tak jak odległość mierzona jest w jednostkach odnoszących się do pewnego ustalonego wzorca. Jedną z możliwości tego typu definicji siły jest rozciągnięcie sprężyny na pewną ustaloną odległość (Rysunek 5.5) i przyjęcie siły powodującej powrót sprężyny do położenia równowagi za wzorzec siły. Wielkość wszystkich innych sił można wyrazić jako wielokrotność tego wzorca siły. Istnieje wiele innych możliwości i metod określenia jednostek siły. W dalszej części tego podrozdziału zostaną przedstawione inne alternatywne definicje siły.



Rysunek 5.5 Siła wywierana przez rozciągniętą sprężynę może być uznana za wzorzec siły. (a) Sprężyna w stanie spoczynku, nierozciągnięta, ma długość x. (b) Po rozciągnięciu sprężyny o długość Δx pojawia się siła $\vec{F}_r$ powodująca jej powrót do położenia równowagi. (c) Waga sprężynowa jako urządzenie pozwalające na zdefiniowanie wzorca siły. Siła $\vec{F}_r$ wywierana jest przez element przymocowany do haka. W sytuacji przedstawionej na rysunku siła ma wielkość sześciu jednostek (jest sześciokrotnością wzorca).

Spróbujmy przeanalizować pojęcie siły nieco dokładniej. Wyobraźmy sobie sytuację, w której student fizyki siedzi przy stole, pracując ciężko nad zadaniem domowym (Rysunek 5.6). Jak myślisz, jakie siły zewnętrzne działają na niego? Czy możemy poznać źródło tych sił?



Rysunek 5.6 (a) Widoczne na rysunku siły działające na studenta wynikają głównie z jego oddziaływania z krzesłem, stołem i podłogą oraz z natury przyciągania grawitacyjnego. (b) Aby dobrze przeanalizować problem fizyczny z udziałem studenta, warto rozważyć wszystkie siły działające wzdłuż linii biegnącej przez jego tułów. Na rysunku pokazano dodatkowo rozkład sił działających na studenta.

W większości sytuacji siły można podzielić na dwie grupy: **siły kontaktowe** i **siły wynikające z działania pól zewnętrznych**. Jak się łatwo domyślić, siły kontaktowe powstają przy bezpośrednim kontakcie rozpatrywanych ciał. Dla przykładu, student na Rysunku 5.6 doświadcza działania sił kontaktowych, oznaczonych jako $\vec{R}$, $\vec{F}$ oraz $\vec{T}$, które wywierane są przez stół na jego ręce, przez podłogę na jego stopy oraz przez krzesło na jego tułów. Na ciało mogą również działać siły związane z obecnością pola w obszarze, w którym znajduje się analizowany obiekt. W odróżnieniu od sił kontaktowych, siły wynikające z obecności pola nie wymagają bezpośredniego, fizycznego kontaktu z innym ciałem. Dopóki student znajduje się w obszarze ziemskiego pola grawitacyjnego, działa na niego siła ciężkości $\vec{Q}$.

Wspomniane „pole” traktować można jako pewną właściwość przestrzeni, objawiającą się w formie sił, które w nim działają. Naukowcy twierdzą, że w naturze istnieją jedynie cztery rodzaje pól. Mowa tutaj o polu grawitacyjnym, elektromagnetycznym, oraz polach oddziaływań silnych (sił jądrowych) i słabych. Pola te omówione zostaną szerzej w dalszej części niniejszego podręcznika. Jak widać, siła ciężkości $\vec{Q}$ na Rysunku 5.6 wynika z obecności pola grawitacyjnego. Dzięki temu polu zdefiniować można pojęcie **ciężaru** (ang. **weight**) ciała. Siły działające w obecności pól elektromagnetycznych to głównie siły oddziaływań elektrostatycznych lub siły magnetyczne. Odpowiadają one m.in. za oddziaływania atomów w ciele stałym. Siły jądrowe i siły oddziaływań słabych są dominujące jedynie przy odległościach rzędu (10^{-15} m). Ich zasięg jest tak mały, że żadne pole przez nie wywołane nie ma wpływu na makroskopowy świat mechaniki newtonowskiej.

Siły kontaktowe są z reguły natury elektromagnetycznej. Podczas gdy łokieć studenta na Rysunku 5.6 pozostaje w kontakcie z blatem stołu, atomy skóry jego łokcia oddziałują elektromagnetycznie z atomami blatu stołu. Siła wypadkowa owego oddziaływania to widoczna na powyższym rysunku siła $\vec{T}$. Podobnie podczas przyklejania taśmy klejącej do kartki papieru atomy taśmy „przeplatają” się z tymi znajdującymi się w kartce papieru, czego skutkiem jest oddziaływanie elektromagnetyczne pomiędzy dwoma obiektami. Jednakże z punktu widzenia klasycznej mechaniki newtonowskiej natura oddziaływań elektromagnetycznych przy analizowaniu sił kontaktowych nie odgrywa istotnej roli.

Siła jako wektor

Jak wcześniej wspomniano, siła jest wielkością wektorową. Posiada wartość, kierunek i zwrot. Jednostką siły w układzie SI jest **niuton** (ang. **newton**), oznaczany jako N. Siła 1 N jest to siła potrzebna, aby ciału o masie 1 kg nadać przyspieszenie $1\ \mathrm{m/s}^2 : 1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg} \cdot\ \mathrm{m/s}^2$. Łatwo zapamiętać, czym jest niuton, utożsamiając taką wartość z ciężarem jabłka (Q wynosi wówczas około 1 N).

Niech siła działająca w przestrzeni dwuwymiarowej ma postać ogólną: $\vec{F} = a\hat{i} + b\hat{j}$, gdzie wektory $\hat{i}$ i $\hat{j}$ są tzw. wersorami (wektorami jednostkowymi) w kierunkach odpowiednio x i y. Z kolei w przestrzeni trójwymiarowej siła ma postać ogólną $\vec{F} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$. Załóżmy, że pierwsza łyżwiarka na Rysunku 5.3, znajdująca się po lewej stronie, pcha trzecią łyżwiarkę w kierunku poziomym, działając siłą 30,0 N w prawo. Oznaczmy tę siłę jako $\vec{F}_1 = 30{,}0\hat{i}\ \mathrm{N}$. Analogicznie, jeżeli druga łyżwiarka, znajdujący się z kolei po prawej stronie, pcha trzecią łyżwiarkę z siłą 40,0 N w kierunku pionowym (jak na rysunku), siłę tę oznaczmy jako $\vec{F}_2 = 40{,}0\hat{j}\ \mathrm{N}$. W rezultacie działania dwóch sił zewnętrznych trzecia łyżwiarka doznaje pewnego przyspieszenia. Wynikiem działania wyżej wymienionych sił zewnętrznych jest **siła wypadkowa** $\vec{F}_{\text{wyp}}$, definiowana jako suma wektorowa wszystkich sił działających na ciało. Stąd też często można spotkać się z zapisem $\sum \vec{F}$.

$$F_{\text{wyp}} = \sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots \tag{5.1}$$

Równanie to można stosować w stosunku do dowolnej liczby sił.

Analizując dalej przykład dotyczący łyżwiarki, widzimy, że siła wypadkowa na nią działająca wynosi $\vec{F}_{\text{wyp}} = \sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \left(30{,}0\hat{i} + 40{,}0\hat{j}\right)\ \mathrm{N}$. Przeciwprostokątna w trójkącie sił na Rysunku 5.3 jest właśnie wektorem siły wypadkowej. W celu znalezienia jej wartości (długości wektora siły wypadkowej) należy posłużyć się regułami opisanymi szerzej w rozdziale Wektory i obliczyć ją jako pierwiastek z sumy kwadratów poszczególnych działających sił zewnętrznych:

$$F_{\text{wyp}} = \sqrt{(30{,}0\ \mathrm{N})^2 + (40{,}0\ \mathrm{N})^2} = 50{,}0\ \mathrm{N}.$$

Kierunek siły wypadkowej może określony być poprzez odpowiedni kąt:

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{F_2}{F_1}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{40{,}0}{30{,}0}\right) = 53{,}1°,$$

mierzony względem dodatniej półosi x, jak to pokazano na Rysunku 5.3(b) ilustrującym rozkład sił działających na łyżwiarkę.

Załóżmy, że w tym momencie dwie łyżwiarki działają na trzecią siłami odpowiednio $\vec{F}_1 = \left(3{,}0\hat{i} + 8{,}0\hat{j}\right)\ \mathrm{N}$ i $\vec{F}_2 = \left(5{,}0\hat{i} + 4{,}0\hat{j}\right)\ \mathrm{N}$. Jaki jest wynik tego oddziaływania? Jaka jest siła wypadkowa? W celu obliczenia tej siły musimy posłużyć się regułami dodawania wektorów:

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \left(3{,}0\hat{i} + 8{,}0\hat{j}\right) + \left(5{,}0\hat{i} + 4{,}0\hat{j}\right) = \left(8{,}0\hat{i} + 12{,}0\hat{j}\right)\ \mathrm{N}.$$



5.1 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Znajdź wartość i kierunek siły wypadkowej działającej na łyżwiarkę w wyżej opisanym przypadku.



Zapoznaj się z materiałem multimedialnym (https://openstaxcollege.org/l/21addvectors) w celu dokładniejszego zrozumienia zagadnienia dodawania wektorów. Narysuj wektory na wykresie, modyfikuj ich długość i kąt między osiami i spróbuj je dodać. Wartość, kąt oraz poszczególne składowe wektorów mogą być wyświetlane w kilku formatach.

5.2 | Pierwsza zasada dynamiki Newtona

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

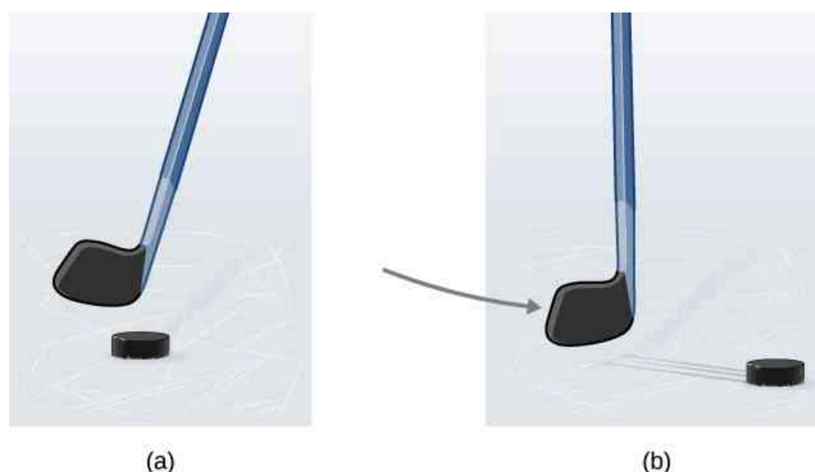
- opisywać zagadnienie pierwszej zasady dynamiki Newtona;
- rozpoznawać siłę tarcia jako siłę zewnętrzną;
- definiować pojęcie bezwładności;
- opisywać inercjalny układ odniesienia;
- opisywać układ jako stan równowagowy.

Obserwacje z życia codziennego wskazują, że spoczywające ciała pozostają w spoczynku, jeśli nie zostaną poddane jakiemuś działaniu, natomiast ciała będące w ruchu mają tendencje do zwolnienia i zatrzymania się, chyba że pojawi się jakaś zewnętrzna przyczyna, która utrzyma je w ruchu. **Pierwsza zasada dynamiki Newtona** (pierwsze prawo Newtona, prawo bezwładności) pozwoli nam lepiej zrozumieć te spostrzeżenia.

Pierwsza zasada dynamiki Newtona

Jeżeli na ciało nie działają siły zewnętrzne lub działające siły równoważą się, to ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Zwróć uwagę na dość często powtarzający się czasownik „pozostaje”. Pierwsza zasada dynamiki Newtona mówi o zachowaniu (niezmienność) ruchu ciał. Trzeba właściwie rozumieć pojęcie „stałej prędkości”. Oznacza ono, że obiekt utrzymuje stały charakter swojego ruchu, ponieważ nie ulega zmianie ani wartość, ani kierunek jego prędkości. Pierwsze prawo Newtona częściowo obrazuje Rysunek 5.7.



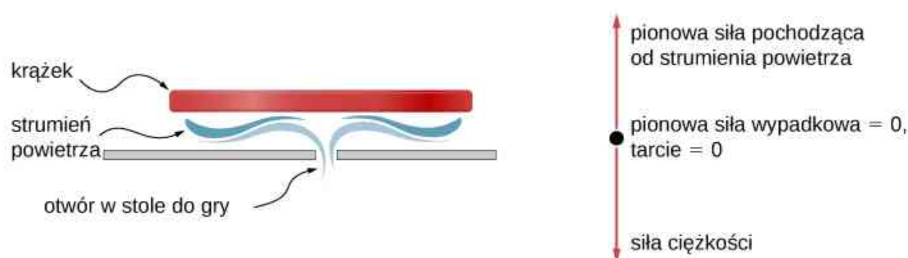
Rysunek 5.7 (a) Rysunek przedstawia kij oraz krążek hokejowy. Jak widać, krążek pozostaje w spoczynku. Pozostaje w takim stanie dopóki nie pojawi się zewnętrzna siła, np. pochodząca od kija hokejowego, która nada mu prędkość. (b) Na rysunku tym pokazano krążek hokejowy podczas jego ruchu. Krążek kontynuuje ruch wzdłuż jednej prostej (ruch prostoliniowy) tak długo, dopóki nie pojawi się siła zewnętrzna powodująca zmianę jego prędkości. W tym przypadku, pomimo że siła tarcia krążka o lód jest stosunkowo niewielka, z czasem spowoduje jednak spowolnienie krążka.

Pierwsza zasada dynamiki Newtona nie przeczy doświadczeniu, lecz stwierdza, że musi istnieć przyczyna jakiejkolwiek zmiany prędkości (zmiana wartości prędkości lub jej kierunku). Przyczyną tą jest zewnętrzna siła, którą zdefiniowaliśmy w poprzednim podrozdziale. Zauważmy, że obiekt przesuwający się po stole lub podłodze zwalnia z powodu istnienia w układzie siły tarcia działającej na ten przedmiot. Jeśli zjawisko tarcia zniknie, czy obiekt nadal będzie zwalniał?

Pojęcie „przyczyny” i „skutku” ruchu ma kluczowe znaczenie przy dokładnym opisie tego, co dzieje się w różnych sytuacjach fizycznych. W tym celu warto rozważyć, co dzieje się z obiektem poruszającym się wzdłuż szorstkiej,

poziomej powierzchni. Na powierzchni bardzo szorstkiej, obiekt zapewne bardzo szybko się zatrzyma. Jeśli natomiast rozpylimy na tej powierzchni talk, aby powierzchnia była znacznie gładsza, obiekt ten będzie przesuwał się dużo dalej. Idąc tym tropem, jeśli sprawimy, że powierzchnia stanie się bardziej gładka, na przykład smarując ją olejem, analizowany obiekt przesunie się dużo dalej niż w dwóch poprzednich sytuacjach. Stosując takie podejście w stosunku do powierzchni, na której tarcie jest zupełnie pomijalne, oraz ignorując wpływ sił oporu powietrza, możemy stwierdzić, że będzie się obiekt przesuwać wzdłuż linii prostej przez nieskończony czas. Zatem widać, że zjawisko tarcia jest przyczyną zwalniania ciał – zgodnie z pierwszym prawem Newtona. Obiekt na stole nie zatrzymałby się nigdy, gdyby tarcie zostało całkowicie wyeliminowane.

Rozpatrzmy stół do gry w cymbergaja (Rysunek 5.8). Gdy przepływ powietrza jest wyłączony, krążek znajdujący się na nim potrafi przebyć niewielką drogę, zanim tarcie spowoduje jego całkowite zatrzymanie się. Jednakże w obecności strumienia powietrza na blacie stołu mamy niemal pozbawioną tarcia powierzchnię, a krążek potrafi ślizgać się na bardzo duże odległości bez znaczących spowolnień wywołanych tarciem. Ponadto jeśli wiemy wystarczająco dużo na temat występującego na stole zjawiska tarcia, możemy dokładnie przewidzieć, jak szybko krążek zwolni bądź całkowicie się zatrzyma.



Rysunek 5.8 Analiza gry w cymbergaja jest bardzo przydatna w celu zilustrowania zasad dynamiki Newtona. Bez strumienia powietrza zjawisko tarcia szybko spowalnia ruch krążka. Jednak gdy strumień powietrza zostanie włączony, kontakt pomiędzy krążkiem a stołem zostaje zminimalizowany – wówczas krążek może ślizgać się po stole na duże odległości.

Pierwsza zasada dynamiki Newtona jest uniwersalnym prawem fizyki, znajdującym zastosowanie wszędzie, począwszy od obiektu poruszającego się po stole, poprzez satelitę krążącego na orbicie, a skończywszy na krwi wypompowywanej z serca. Na podstawie wielu różnych eksperymentów wykazano, że każda zmiana prędkości (jej wartości bądź kierunku) musi być spowodowana przez działanie siły zewnętrznej. Koncepcja *powszechnie obowiązujących praw fizyki* jest niezwykle ważna. Uniwersalność ich stosowania stanowi podstawową cechę wszystkich praw fizyki. Identyfikacja tychże praw jest niczym rozpoznawanie różnych wzorów panujących w naturze, na podstawie których możliwe jest odkrywanie następnych zasad. Włoski fizyk i astronom Galileusz, który jako pierwszy podjął ideę pierwszego prawa dynamiki Newtona, a następnie sam Newton, który to prawo doprecyzował, zadawali sobie podczas swoich prac badawczych fundamentalne pytanie: „Czym jest przyczyna?” Myślenie w kategoriach przyczyny i skutku zasadniczo różni się od podejścia do nauki powszechnego w starożytności, zwłaszcza w Grecji. Na pytanie: „Dlaczego tygrys ma paski?”, Arystoteles odpowiedziałby po prostu: „Bo taka jest natura tej bestii!”. Styl myślenia polegający na analizie zagadnień pod względem ich przyczynowości i skutkowości stanowi cenną zdolność do łączenia i wiązania obserwowanych zachowań z otaczającym światem.

Grawitacja i bezwładność

Niezależnie od skali analizowanego obiektu – czy są to cząsteczki, czy też cząstki subatomowe – dwa pojęcia pozostają niezwykle ważne: grawitacja oraz bezwładność. Oba te pojęcia wiążą się ściśle z masą obiektu. *Masa* jest miarą ilości materii zawartej w danym obiekcie fizycznym. *Grawitacja* to oddziaływanie obserwowane w obecności pól grawitacyjnych, przejawiające się jako przyciąganie jednej masy przez drugą. Ona właśnie sprawia, że człowiek może stąpać po powierzchni Ziemi. Miarą tego oddziaływania jest siła, nazywana ciężarem bądź siłą ciężkości.

Pojęcie masy jest również mocno związane z **bezwładnością** (ang. **inertia**), czyli zdolnością ciał do przeciwstawiania się zmianom w ich ruchu. Ciało dąży do zachowania stanu spoczynku – próbuje „oprzeć się” przyspieszeniom. Pierwsze prawo Newtona nazywane jest często **prawem bezwładności**. Wiadomo, że niektóre obiekty cechują się większą bezwładnością niż inne. Znacznie trudniej jest zmienić bądź zatrzymać ruch dużych, ciężkich głazów niż piłki do gry w koszykówkę. Dzieje się tak, ponieważ głaz ma znacznie większą masę niż piłka do koszykówki. Innymi słowy, bezwładność danego obiektu fizycznego może być mierzona poprzez jego masę. Związek między masą ciała a jego ciężarem opisana zostanie w dalszej części niniejszego rozdziału.

Inercjalne układy odniesienia

Pierwsze prawo Newtona mówi zatem, że: „Jeżeli na ciało nie działają siły zewnętrzne lub działające siły równoważą się, to ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym”. W ujęciu mechaniki newtonowskiej „ruch jednostajny prostoliniowy” oznacza ruch z pewną stałą prędkością, niezależną od czasu. W szczególnym przypadku może to być prędkość zerowa, czyli stan spoczynku danego ciała. Pierwsza zasada dynamiki Newtona stwierdza zatem, że prędkość obiektu pozostaje stała, jeśli działająca na ten obiekt siła wypadkowa wynosi 0.

Pierwsza zasada dynamiki Newtona znajduje zastosowanie przy analizowaniu różnych typów układów odniesienia. Dzięki znajomości tej zasady można precyzyjnie zdefiniować tzw. **inercjalny układ odniesienia** (ang. **inertial reference frame**). W zasadzie można doprowadzić do sytuacji, w której siła wypadkowa działająca na ciało jest równa zero. Jeśli prędkość danego ciała względem przyjętego układu odniesienia jest wtedy stała, to układ taki przyjęło się nazywać inercjalnym. Z definicji, inercjalny układ odniesienia to układ, w którym spełnione jest pierwsze prawo Newtona. Pierwsze prawo Newtona dotyczy ruchu ze stałej prędkością. Z tego faktu wywnioskować możemy następujące stwierdzenie:

Inercjalny układ odniesienia

Układ odniesienia poruszający się ze stałą prędkością względem pewnego układu inercjalnego jest również układem inercjalnym. Układ odniesienia poruszający się z przyspieszeniem względem dowolnego inercjalnego układu odniesienia nie jest inercjalny.

Czy inercjalne układy odniesienia są w naturze często spotykane? Okazuje się, że – w granicach niepewności pomiarowej – dowolny układ odniesienia, który pozostaje w spoczynku względem tzw. gwiazd stałych, czyli najbardziej odległych od Ziemi, jest inercjalny. Ponadto wszystkie układy odniesienia poruszające się jednostajnie względem układu związanego z gwiazdami stałymi są również inercjalne. Na przykład nieobracający się układ odniesienia związany ze Słońcem jest inercjalny, ponieważ jego prędkość względem gwiazd stałych nie zmienia się bardziej niż o $1/10^{10}$. Ziemia względem gwiazd stałych posiada pewne przyspieszenie, ponieważ obraca się wokół własnej osi oraz obraca się wokół Słońca. Zatem układ odniesienia związany z powierzchnią Ziemi nie jest już inercjalny. Jednak w przypadku większości zagadnień taki układ odniesienia można w przybliżeniu uznać za inercjalny, ponieważ przyspieszenie punktu znajdującego się na powierzchni Ziemi jest raczej niewielkie względem gwiazd stałych ($< 3{,}4 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m/s^2}$). Dlatego też, jeśli nie zostanie zaznaczone inaczej, układ odniesienia związany z Ziemią będziemy uważać za inercjalny.

Nie można uznać, że jeden konkretny typ układu odniesienia ma większe znaczenie niż inne. Dopóki analizuje się niepodważalne prawa przyrody, wszystkie inercjalne układy odniesienia są równoważne. Analizując zagadnienie, wybieramy inercjalny układ odniesienia, najdogodniejszy do rozwiązania danego problemu.

Pierwsza zasada dynamiki Newtona a stan równowagi

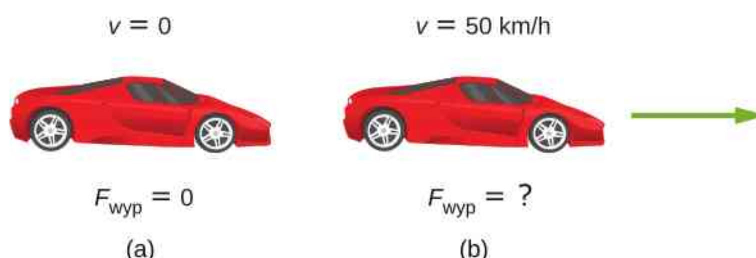
Pierwsze prawo Newtona mówi nam o **stanie równowagi** w danym układzie, w którym wszystkie siły działające na obiekty są zrównoważone. Wróćmy jeszcze do analizowanego w rozdziale Pojęcie siły przykładu łyżwiarki popychanej przez dwie pozostałe (Rysunek 5.3). Wiemy, że siły $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ po dodaniu tworzą siłę wypadkową działającą na łyżwiarkę: $\vec{F}_R = \vec{F}_{wyp} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. W celu wytworzenia stanu równowagi w tym układzie należy przyłożyć do łyżwiarki taką siłę, aby siła wypadkowa na nią działająca się wyzerowała. Wartość tej siły musi być taka sama jak siły wypadkowej, lecz jej zwrot powinien być przeciwny do $\vec{F}_{wyp}$, siła ta to zatem $-\vec{F}_{wyp}$. W sytuacji łyżwiarki siły wypadkowa $\vec{F}_{wyp}$ wynosi $\left(30{,}0\hat{i} + 40{,}0\hat{j}\right)\ \mathrm{N}$. Zatem siła równoważąca siłę wypadkową powinna mieć postać $-\vec{F}_R = \left(-30{,}0\hat{i} - 40{,}0\hat{j}\right)\ \mathrm{N}$.

W zapisie wektorowym pierwsze prawo Newtona ma następującą postać:

$$\vec{v} = \text{const., gdy } \vec{F}_{wyp} = \vec{0}\ \mathrm{N}. \tag{5.2}$$

Powyższe równanie oznacza, że gdy siła wypadkowa działająca na ciało równa jest zeru, prędkość $\vec{v}$ ciała jest stała. (Pamiętajmy, że słowo „stała” może oznaczać w tym przypadku również zerową prędkość).

Pierwsze prawo Newtona jest stosunkowo proste i zrozumiałe. Na przykład, jeżeli samochód znajduje się w spoczynku, jedynymi siłami działającymi na niego są siła ciężkości oraz siła reakcji pochodząca od podłoża, a siły te się równoważą (Rysunek 5.9). Wiadomo, że do zmiany stanu ruchu samochodu potrzebna jest niezerowa siła wypadkowa na niego działająca. Jeśli jednak samochód porusza się ze stałą, niezerową prędkością, to panuje powszechne, błędne przekonanie, że siła napędzająca samochód, pochodząca od silnika, ma większą wartość niż siła tarcia, która przeciwstawia się ruchowi auta do przodu. W rzeczywistości obie te siły mają taką samą wartość, lecz przeciwny zwrot.



Rysunek 5.9 Na rysunku pokazano (a) zaparkowany samochód oraz (b) samochód poruszający się ze stałą prędkością. Jak można zastosować pierwsze prawo Newtona w przypadku zaparkowanego samochodu? Jaką wiedzę na temat siły wypadkowej daje nam informacja o stałej prędkości samochodu?

Przykład 5.1

Jak pierwsze prawo Newtona może znaleźć zastosowanie w analizie ruchu twojego samochodu?

Prawa newtonowskie znajdują zastosowanie przy opisie wielu procesów fizycznych dotyczących sił i ruchu ciał, również sytuacji tak powszechnych, jak prowadzenie auta.

(a) Zaparkowałeś swój samochód przed domem. Czy w tej sytuacji pierwsza zasada dynamiki Newtona może znaleźć swoje zastosowanie? Jeżeli tak, to dlaczego?

(b) Jedziesz samochodem ze stałą prędkością wzdłuż ulicy. Czy w zaistniałej sytuacji pierwsza zasada dynamiki Newtona może znaleźć swoje zastosowanie? Jeżeli tak, to dlaczego?

Strategia rozwiązania

W przypadku (a) rozpatrujemy pierwsze prawo Newtona w odniesieniu do ciała spoczywającego; natomiast w podpunkcie (b) zastosować musimy drugą część pierwszej zasady dynamiki Newtona dotyczącej ciał poruszających się.

Rozwiązanie

a. Gdy twój samochód jest zaparkowany, wszystkie siły na niego działające muszą się równoważyć; suma wszystkich sił działających na samochód wynosi 0 N. Stąd, całkowita siła wypadkowa również się zeruje, co stanowi podstawę pierwszego prawa Newtona. Wówczas zarówno przyspieszenie, jak i prędkość samochodu wynoszą zero.

b. Gdy twój samochód znajduje się w ruchu ze stałą prędkością wzdłuż ulicy, siła wypadkowa na niego działająca, zgodnie z pierwszym prawem Newtona, wynosi zero. Silnik samochodu powoduje działanie siły ciągu, skierowanej zgodnie ze zwrotem wektora prędkości, natomiast zjawisko tarcia między samochodem a jezdnią jest przyczyną działania siły skierowanej przeciwnie do wektora prędkości samochodu. Siły te mają tę samą wartość oraz kierunek, lecz przeciwny zwrot, stąd siła wypadkowa działająca na samochód wynosi zero. Samochód będzie kontynuował ruch wzdłuż ulicy ze stałą prędkością, dopóki nie pojawi się niezerowa siła wypadkowa. Należy sobie uświadomić, że *występowanie zerowej siły wypadkowej działającej na obiekt oznacza, że obiekt ten porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym, ze stałą prędkością, nie przyspieszając.* Jak sądzisz, co stałoby się, gdyby auto zaczęło gwałtownie przyspieszać? To zagadnienie omówimy szerzej w kolejnym rozdziale niniejszego podręcznika.

Znaczenie

Jak pokazał powyższy przykład, istnieją dwa rodzaje równowagi w układach mechanicznych. W przypadku (a) samochód pozostawał w spoczynku, stan taki nazywamy *równowagą statyczną*. Przypadek (b) z kolei ukazuje samochód poruszający się z pewną stałą prędkością, w którym wszystkie siły są zrównoważone. Wów-

czas mowa jest o *równowadze dynamicznej*. (Omówimy tę problematykę bardziej szczegółowo w podrozdziale Równowaga statyczna i sprężystość ciał). Zatem możliwe jest, aby dwie lub więcej sił działało na obiekt, który pozostaje w ruchu. Zerowa siła wypadkowa nie powoduje występowania w układzie niezerowego przyspieszenia.



5.2 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Skoczek spadochronowy otwiera swój spadochron i zaraz po tym zaczyna opadać na ziemię ze stałą prędkością.

a. Jakie siły działają na skoczka?

b. Która z tych sił jest większa?



Zapoznaj się z materiałem zawartym w symulacji (https://openstaxcollege.org/l/21forcemotion) w celu zrozumienia, jak siły zewnętrzne wpływają na ruch różnych obiektów. Postaraj się wyjaśnić te sytuacje przy pomocy diagramu pokazującego rozkład sił działających na obiekt. Zastosuj tego typu diagram w celu pokazania położenia, prędkości, przyspieszenia oraz wykresu sił działających na obiekt. Wyjaśnij, jak sporządzone przez ciebie wykresy będą ze sobą powiązane. Zaproponuj inne scenariusze sytuacji i spróbuj narysować wszystkie cztery wyżej wymienione wykresy.

5.3 | Druga zasada dynamiki Newtona

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

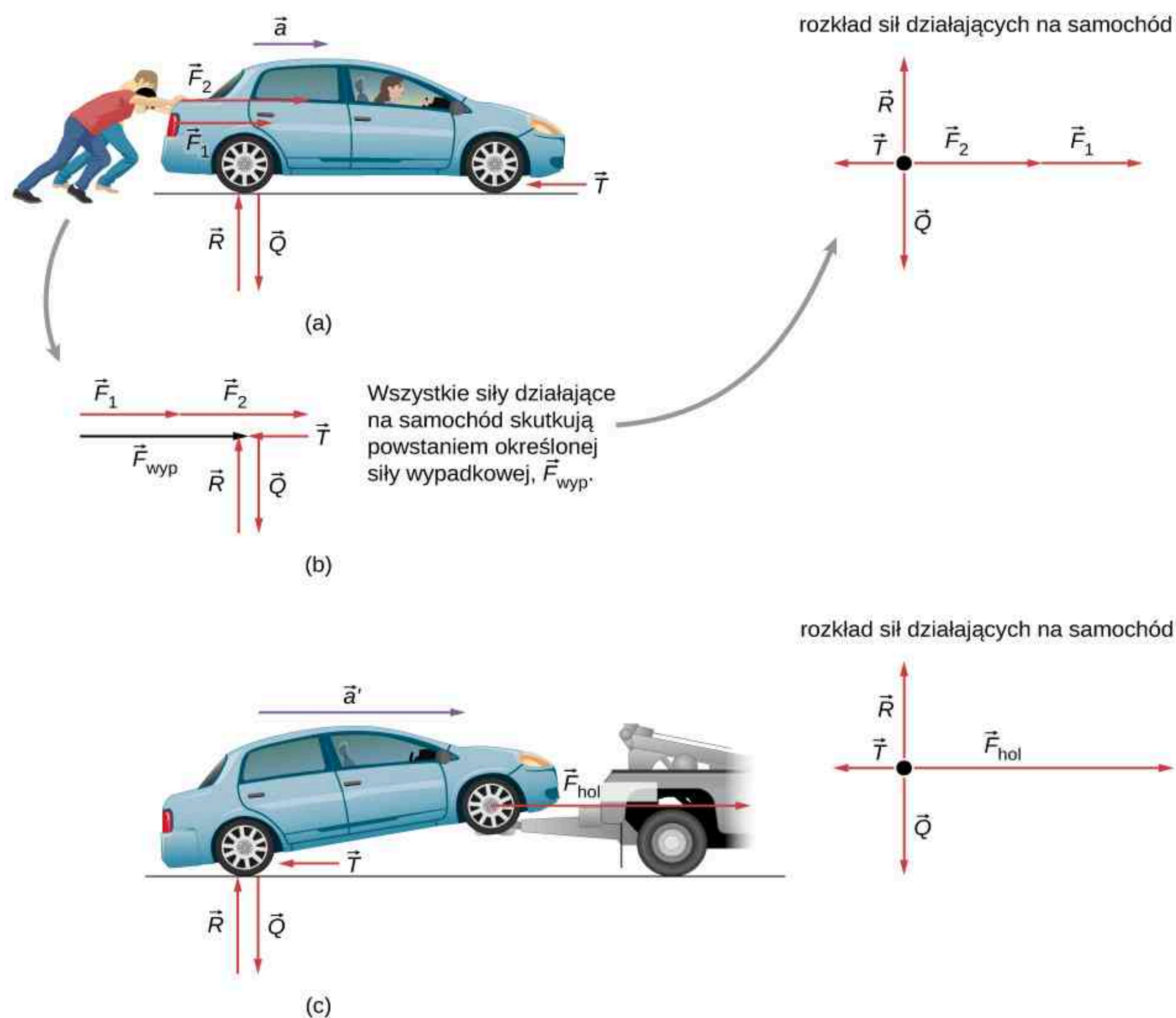
- różnic między siłami zewnętrznymi i wewnętrznymi;
- matematycznego opisu drugiej zasady dynamiki Newtona;
- wyjaśniać relacje między przyspieszeniem, siłą wypadkową i masą.

Druga zasada dynamiki Newtona (drugie prawo Newtona, ang. **Newton's second law of motion**) jest bardzo ściśle powiązana z pierwszą i podaje matematyczny opis związków przyczynowo-skutkowych między siłą a zmianami ruchu. Daje zatem możliwość ilościowego opisu sytuacji fizycznych i używana jest do obliczeń w sytuacjach, w których w układzie przyłożone są różne siły. Zanim zapiszemy drugie prawo Newtona w formie prostego równania matematycznego, pozwalającego na dokładne powiązanie siły i przyspieszenia ciała, musimy przypomnieć sobie pewne zagadnienia, o których wspominaliśmy wcześniej.

Siła a przyspieszenie

Na początku należy sobie uświadomić, co rozumiemy poprzez pojęcie zmiany ruchu. Otóż zmiana ruchu oznacza zmianę prędkości ciała. Zmiana prędkości świadczy o tym, że w układzie istnieje pewne przyspieszenie. Pierwsza zasada dynamiki Newtona mówi, że zewnętrzna siła wypadkowa powoduje zmiany ruchu ciał. Zatem *niezerowa siła wypadkowa jest przyczyną występowania w układzie przyspieszenia*.

Zdefiniowaliśmy już siłę zewnętrzną w podrozdziale Pojęcie siły jako siłę działającą na obiekt lub układ, której źródło znajduje się poza obiektem. Przeanalizujmy to zagadnienie nieco dokładniej. Intuicyjnie odgadujemy, że słowo *zewnętrzna* oznacza, iż działa ona spoza układu. Na przykład na Rysunku 5.10(a) analizowany układ to samochód z kierowcą siedzącym w środku. Dwie siły wywierane na samochód przez dwóch studentów na rysunku to właśnie siły zewnętrzne. Z kolei siły wewnętrzne to głównie siły oddziaływania pomiędzy elementami układu. I tak na przykład siła, którą kierowca działa na kierownicę samochodu, to siła wewnętrzna. Jedynie siły zewnętrzne wpływają na ruch samochodu, zgodnie z pierwszym prawem Newtona. (Wewnętrzne siły kompensują się, co zostanie dokładniej wyjaśnione w następnym rozdziale). Dlatego koniecznie jest określenie pewnych granic układu, zanim przystąpimy do analizowania, które siły są zewnętrzne. Często okazuje się to bardzo proste, lecz w niektórych układach fizycznych bywa to nieco trudniejsze. Pojęcie układu i określenie jego granic jest fundamentalne z punktu widzenia wielu dziedzin fizyki, podobnie jak prawidłowe stosowanie praw Newtona.



Rysunek 5.10 Gdy na dany obiekt o określonej masie działają różne siły, skutkiem jest różne co do wartości jego przyspieszenie. (a) Dwóch studentów pcha samochód. Wszystkie siły zewnętrzne działające na samochód pokazano na rysunku. (b) Siły działające na samochód (na rysunku jako punkt materialny) pokazano w formie diagramu rozkładu sił, w celu ułatwienia analizy sytuacji. (c) Wóz holowniczy może zadziałać na samochód znacznie większą siłą zewnętrzną niż dwoje ludzi, nawet dorosłych. Wówczas wartość wektora przyspieszenia samochodu jest większa.

W tej sytuacji widać, że różne siły działające na tę samą masę m skutkują występowaniem przyspieszenia o różnej wartości, zależnej od wielkości przyłożonej siły. Na Rysunku 5.10(a) dwóch studentów pcha samochód, podczas gdy kierowca samochodu znajduje się w środku. Strzałki na rysunku reprezentują wszystkie siły zewnętrzne działające w układzie zawierającym samochód i kierowcę. Siłę ciężkości $\vec{Q}$ układu samochód-kierowca oraz siłę reakcji od podłoża $\vec{R}$ pokazano również na rysunku. Siły te się równoważą – układ nie porusza się z przyspieszeniem w kierunku pionowym. Wektor siły tarcia $\vec{T}$ odzwierciedla zjawisko tarcia między kołami samochodu a jezdnią i skierowany jest w lewo, przeciwnie do kierunku ruchu (zjawisko tarcia omówimy nieco szerzej w kolejnym rozdziale). Na Rysunku 5.10(b) siły te zostały do siebie dodane i rezultatem tego jest siła wypadkowa $\vec{F}_{\text{wyp}}$. Diagram wszystkich sił działających na samochód wraz z kierowcą pokazano na tym samym rysunku. Punkt, do którego przyłożono siły, reprezentuje środek masy układu samochód-kierowca. Ponieważ obie siły skierowane są w prawo, wektory narysowano jako współliniowe. Z kolei na Rysunku 5.10(c) widać znacznie większą siłę wypadkową, ponieważ samochód ciągnięty jest przez wóz holowniczy, a nie przez ludzi. Skutkuje to większym przyspieszeniem układu samochodu wraz z kierowcą $\left(\vec{a}' > \vec{a}\right)$.

Stwierdzenie, że wektor przyspieszenia posiada wartość proporcjonalną do przyłożonej siły wypadkowej oraz ten sam kierunek co siła, wydaje się bardzo rozsądne. To założenie zostało już wielokrotnie potwierdzone eksperymen-

talnie i pokazane m.in. w przykładzie na Rysunku 5.10. Aby móc sformułować matematyczną postać drugiej zasady dynamiki Newtona, zapiszmy relację między przyspieszeniem $\vec{a}$ a siłą wypadkową $\vec{F}_{\text{wyp}}$. Widać, że zależność ta jest proporcjonalna:

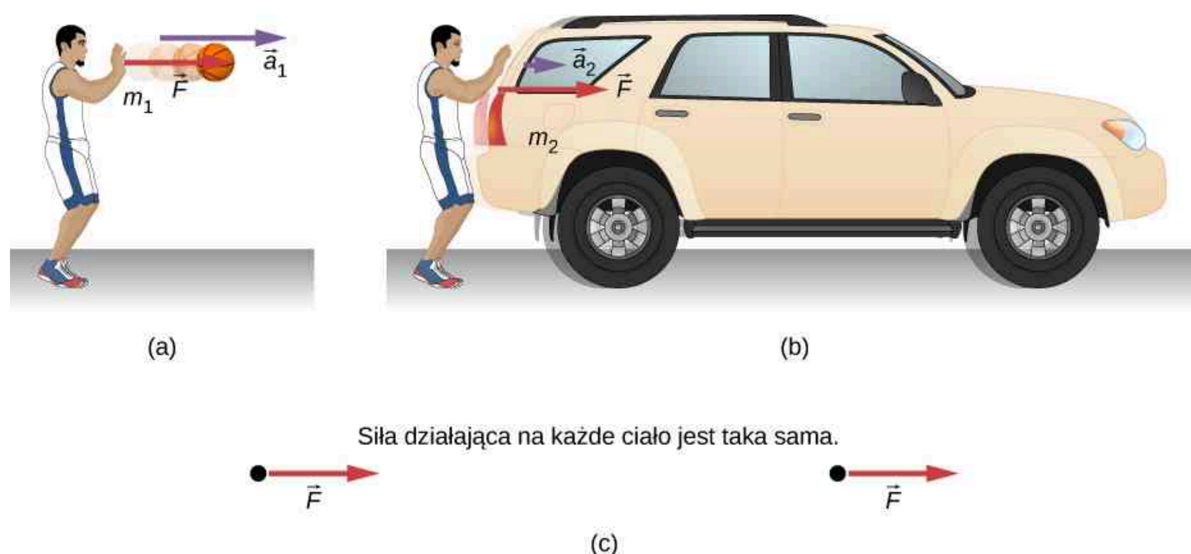
$$\vec{a} \propto \vec{F}_{\text{wyp}},$$

gdzie symbol $\propto$ oznacza proporcjonalność. Nawiązując do omówionej wcześniej definicji siły wypadkowej jako sumy wektorowej wszystkich sił działających na obiekt, często oznaczanej jako $\sum \vec{F}$, możemy stwierdzić, że przyspieszenie ciała jest proporcjonalne do zewnętrznej siły wypadkowej. Gdy obierzemy już układ, który chcemy przeanalizować, należy zidentyfikować wszystkie siły zewnętrzne, pomijając siły wewnętrzne działające w układzie. Jest to znaczne uproszczenie, pozwalające na pominięcie sił wewnętrznych działających między obiektami, jak i w samych obiektach, takich jak siły mięśni czy niezliczone siły oddziaływania międzycząsteczkowego. Właśnie to uproszczenie umożliwia rozwiązywanie problemów fizycznych z zakresu dynamiki nawet dla złożonych wewnętrznie układów.

Przyspieszenie ciała jest także odwrotnie proporcjonalne do jego masy. Im większa masa danego ciała (i co za tym idzie, jego bezwładność), tym mniejsze przyspieszenie ciało zyskuje na skutek działania siły zewnętrznej. Pokazano to na rysunku Rysunku 5.11. Określona siła wypadkowa działająca na piłkę do koszykówki skutkuje znacznie większym przyspieszeniem, niż gdyby tę samą siłę przyłożyć do znacznie cięższego samochodu osobowego. Omawianą proporcjonalność zapisać możemy jako

$$a \propto \frac{1}{m},$$

gdzie m to masa obiektu, natomiast a oznacza wartość jego przyspieszenia. Doświadczenia fizyczne pokazały, że przyspieszenie ciała jest odwrotnie proporcjonalne do jego masy, a wprost proporcjonalnie do siły wypadkowej.



Rysunek 5.11 Ta sama siła działa na ciała o różnych masach, nadając im różne przyspieszenia. (a) Koszykarz uderza piłkę do koszykówki (zaniedbano efekt siły ciężkości działającej na piłkę). (b) Ten sam człowiek działa na samochód osobowy identyczną siłą jak w przypadku piłki do koszykówki, czego skutkiem jest dużo mniejsze przyspieszenie samochodu, niż to miało miejsce w przypadku piłki. (c) Rozkład sił jest identyczny w obydwu przypadkach. Wykonanie szeregu diagramów sił działających na ciała w podrozdziale Rozkład sił działających na ciało pozwoli ci uzyskać doświadczenie w rozwiązywaniu wielu problemów fizycznych.

Wiadomo, że przyspieszenie ciała zależy jedynie od siły wypadkowej działającej na ciało oraz masy ciała. Zestawiając pokazane powyżej proporcjonalności, możemy sformułować matematyczną postać **drugiej zasady dynamiki Newtona.**

Druga zasada dynamiki Newtona

Przyspieszenie ciała jest wprost proporcjonalne do siły wypadkowej, ma również ten sam kierunek co siła, natomiast jest odwrotnie proporcjonalne do masy ciała. Możemy to zapisać w formie równania:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{wyp}}}{m},$$

gdzie $\vec{a}$ to przyspieszenie ciała, $\vec{F}_{\text{wyp}}$ oznacza siłę wypadkową, natomiast m to masa ciała. Często równanie to zapisuje się w nieco innej postaci

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = \sum \vec{F} = m\vec{a}, \tag{5.3}$$

jednakże pierwsze z tych równań pozwala lepiej zrozumieć drugie prawo Newtona. Gdy rozpatrujemy jedynie wartości wektorów przyspieszenia i siły wypadkowej, powyższe równanie można przedstawić w prostszej formie:

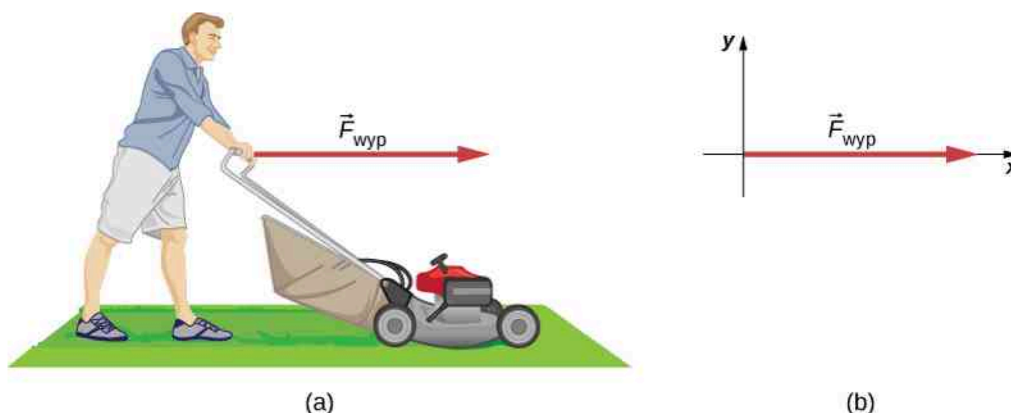
$$F_{\text{wyp}} = ma. \tag{5.4}$$

Druga zasada dynamiki Newtona określa prostą zależność przyczynowo-skutkową między trzema wielkościami, która nie sprowadzają się do ich definicji. Drugie prawo Newtona zostało bardzo dobrze zweryfikowane eksperymentalnie. Schemat rozkładu sił działających na ciało, omówiony w rozdziale Rozkład sił działających na ciało jest podstawą poprawnego sformułowania drugiego prawa Newtona dla danego zagadnienia.

Przykład 5.2

Jakie przyspieszenie może nadać człowiek kosiarce?

Załóżmy, że siła wypadkowa (siła, z którą pchana jest kosiarka, minus siła tarcia) wywierana na kosiarkę wynosi 51 N, a jej kierunek jest równoległy do podłoża (Rysunek 5.12). Masa kosiarki wynosi 24 kg. Jakie przyspieszenie uzyskała kosiarka?



Rysunek 5.12 (a) Siła wypadkowa działająca na kosiarkę skierowana jest w prawą stronę i wynosi 51 N. Jak bardzo kosiarka przyspiesza? (b) Rozkład sił działających na kosiarkę.

Strategia rozwiązania

Zauważmy, że powyższy problem dotyczy tylko ruchu kosiarki w kierunku poziomym. Znana jest całkowita siła wypadkowa, reprezentowana przez pojedynczy wektor, jednakże możemy przejść do zapisu skalarnego i wówczas zastosować drugie prawo Newtona w postaci skalarnej. Dana jest: F_{wyp} oraz masa m, więc przyspieszenie ciała można obliczyć bezpośrednio z równania: $F_{\text{wyp}} = ma$.

Rozwiązanie

Wartość przyspieszenia a wynosi $a = F_{\text{wyp}}/m$. Wstawiając wartości liczbowe, otrzymujemy:

$$a = \frac{51\ \text{N}}{24\ \text{kg}}.$$

Zastępujemy jednostkę 1 N jednostką kilograma pomnożonego przez metr na sekundę kwadrat:

$$a = \frac{51\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2}{24\ \text{kg}} = 2{,}1\ \text{m/s}^2.$$

Znaczenie

Kierunek przyspieszenia jest taki sam, jak kierunek siły, która jest równoległa do podłoża. Jest to wynikiem wektorowej zależności wyrażonej w drugim prawie Newtona: wektor siły wypadkowej jest wielokrotnością wektora przyspieszenia. W analizowanym przykładzie z kosiarką nie podano wielu informacji na temat sił zewnętrznych działających w układzie. Jednakże spróbujmy co nieco o nich powiedzieć. Na przykład siła wywierana przez osobę naciskającą na kosiarkę musi być większa niż siła tarcia skierowana przeciwnie do kierunku ruchu, ponieważ wiemy, że kosiarka poruszała się do przodu. Jeżeli chodzi o siły pionowe, muszą się one równoważyć, ponieważ przyspieszenie nie występuje w kierunku pionowym (kosiarka porusza się jedynie w kierunku poziomym). Znaleziona wartość przyspieszenia jest rozsądnie mała, lecz odpowiada sytuacji, w której jakaś osoba pcha po trawniku kosiarkę. Wysiłek nie potrwa długo, ponieważ osoba pchająca kosiarkę szybko osiągnie prędkość maksymalną.



5.3 **Sprawdź, czy rozumiesz** Na początku XX wieku transatlantyk *Titanic* był jednym z największych na świecie statków pasażerskich. Miał masę równą $6{,}0 \cdot 10^7\ \text{kg}$. Gdyby na statek zadziałano ogromną, wynoszącą 6 MN siłą $(6{,}0 \cdot 10^6\ \text{N})$, to jakie przyspieszenie osiągnąłby Titanic?

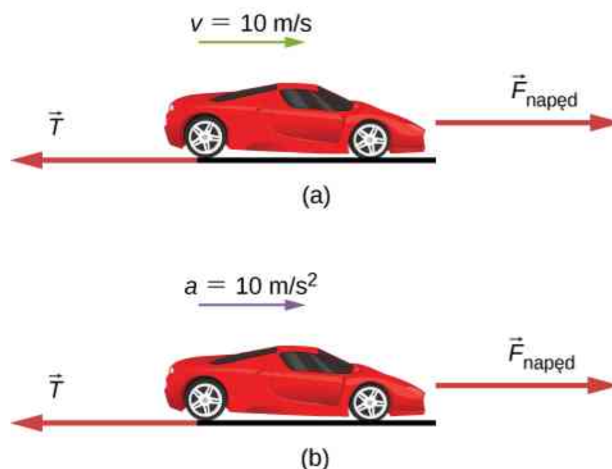
W poprzednim przykładzie z kosiarką założyliśmy jedynie działanie na kosiarkę poziomo skierowanej siły wypadkowej. Jednakże, w rzeczywistości na kosiarkę działa znacznie więcej sił. Siła ciężkości $\vec{Q}$ (omówiona szerzej w podrozdziale Masa i ciężar) ciągnie kosiarkę w dół, w stronę jądra Ziemi; takie oddziaływanie powoduje powstanie siły kontaktowej z podłożem. Wówczas Ziemia działa na kosiarkę siłą reakcji, skierowaną ku górze: $\vec{R}$, którą zdefiniowaliśmy w podrozdziale Rodzaje sił. Siły te równoważą się, zatem ciało nie podlega pionowemu przyspieszeniu. W następnym przykładzie pokażemy obie te siły. Natomiast teraz, nadal przy użyciu drugiego prawa Newtona, przeanalizuj przykład wielu sił działających na kosiarkę.

Przykład 5.3

Która siła jest większa?

a. Samochód przedstawiony na Rysunku 5.13 porusza się ze stałą prędkością. Która siła jest większa: $\vec{F}_{\text{napęd}}$ czy $\vec{T}$? Wyjaśnij dlaczego.

b. Ten sam samochód porusza się z pewnym przyspieszeniem w prawo. Która siła jest większa: $\vec{F}_{\text{napęd}}$ czy $\vec{T}$? Wyjaśnij dlaczego.



Rysunek 5.13 Na rysunku (a) pokazano samochód poruszający się ze stałą prędkością, natomiast na rysunku (b) ten sam samochód poruszający się ze stałym przyspieszeniem w prawo. Jak przedstawiają się siły działające na samochód w obydwu przypadkach? (A) Jakie informacje dotyczące wartości wektorów siły ciągu silnika i siły tarcia daje nam to, że samochód porusza się ze stałą prędkością? (B) Jakie informacje dotyczące wartości wektorów siły ciągu silnika i siły tarcia daje nam to, że samochód porusza się ze stałym przyspieszeniem?

Strategia rozwiązania

Musimy rozpatrzyć zarówno pierwsze, jak i drugie prawo Newtona do rozwiązania tego problemu. Trzeba zdecydować, które prawo znajduje zastosowanie w każdym z tych dwóch przypadków. To pozwoli nam dobrze prześledzić relacje między działającymi w układzie siłami.

Rozwiązanie

a. Wartości obydwu sił są równe. Według pierwszej zasady dynamiki, gdy działająca na ciało siła wypadkowa wynosi zero, prędkość ciała jest stała.

b. W tym przypadku wartość siły ciągu silnika $\vec{F}_{\text{napęd}}$ musi być większa niż siły tarcia $\vec{T}$. Jak głosi drugie prawo Newtona, niezerowa siła wypadkowa jest konieczna do występowania przyspieszenia ciała.

Znaczenie

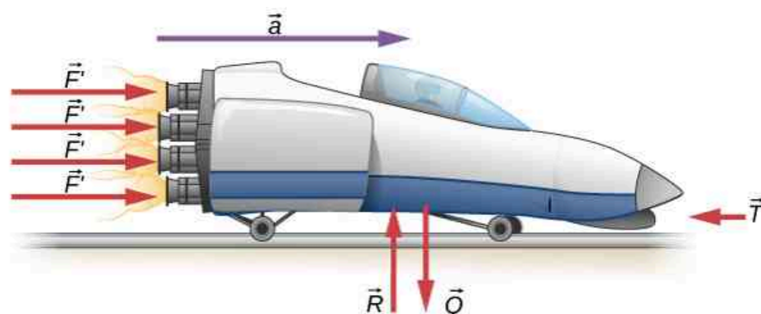
Powyższe pytania mogą wydawać się trywialne, lecz udzielane na nie odpowiedzi niestety często są nieprawidłowe. Aby samochód lub jakikolwiek inny obiekt mógł się poruszać, musi podlegać przyspieszeniu od stanu spoczynku do określonej prędkości. Wymaga to, aby wartość siła ciągu silnika była większa niż siła tarcia. Jednak, gdy samochód porusza się ze stałą prędkością, siła wypadkowa na niego działająca musi wynosić zero. W przeciwnym razie samochód dozna przyspieszenia (zwiększy swoją prędkość). Aby dobrze rozwiązać problemy związane z prawami Newtona, musimy zawsze zdecydować, czy zastosować pierwsze prawo Newtona (gdzie $\sum \vec{F} = \vec{0}$), czy raczej drugie prawo Newtona (gdzie występuje niezerowa siła wypadkowa $\sum \vec{F}$).

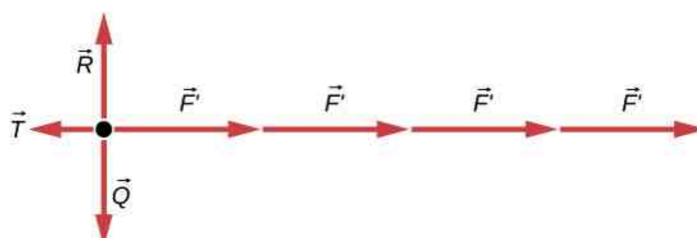
Przykład 5.4

Jak ciąg rakietowy przyspiesza sanie rakietowe?

Przed lotami załogowymi w przestrzeni kosmicznej do testowania samolotów, sprzętu rakietowego i różnych efektów fizjologicznych występujących u ludzi przy poruszaniu się z bardzo dużymi prędkościami, używano sań rakietowych. Składały się one z platformy zamontowanej na jednej lub dwóch szynach i napędzanej kilkoma silnikami rakietowymi.

Oblicz siłę ciągu każdej z czterech dysz silnika rakietowego (tzw. **odrzutu**, ang. **thrust**) F, pokazanego na Rysunku 5.14. Początkowe przyspieszenie komory rakietowej wynosi 49 m/s^2, jej masa to 2100 kg, a siła tarcia w układzie wynosi 650 N.





Rysunek 5.14 Komora rakiety doznaje siły odrzutu pochodzącej od dysz, skierowanej w prawo. Każda z dysz rakietowych wytwarza identyczną siłę ciągu F'. Zaniedbano wszystkie siły oddziaływania między komorą rakiety a osobą się w niej znajdującą. Strzałkę reprezentującą siłę tarcia $\left(\vec{T}\right)$ narysowano większą niż przyjęta skala.

Strategia rozwiązania

Mimo iż w analizowanym układzie siły działają zarówno w kierunku pionowym, jak i poziomym, przyjmujemy, że siły pionowe się równoważą z powodu braku pionowego przyspieszenia. W układzie istotne są więc jedynie siły poziome i wówczas problem sprowadzony jest do jednego wymiaru. Kierunki sił oznaczone są znakami plus lub minus, przyjmując prawy kierunek jako dodatni. Zapoznaj się z diagramem zawierającym rozkład sił działających na rakietę Rysunek 5.14).

Rozwiązanie

W momencie gdy znamy masę obiektu, jego przyspieszenie, siły go napędzające oraz siłę tarcia, możliwe jest rozwiązanie tego zagadnienia poprzez wykorzystanie drugie prawa Newtona. Zgodnie z naszą definicją siła i przyspieszenie skierowane są w prawo, dlatego też musimy rozważyć jedynie wartości tych wielkości. Zacznijmy od podstawowego równania:

$$F_{\text{wyp}} = ma,$$

gdzie F_{wyp} to wartości siły całkowitej działającej w kierunku poziomym. Na podstawie rysunku możemy wywnioskować, że siły pochodzące od dysz rakietowych przyjmiemy ze znakiem plus, natomiast siłę tarcia ze znakiem minus. Siła wypadkowa wówczas wynosi

$$F_{\text{wyp}} = 4F' - T.$$

Wykorzystujemy drugie prawo Newtona

$$F_{\text{wyp}} = ma = 4F' - T.$$

Po prostych przekształceniach otrzymujemy wyrażenie na całkowitą siłę odrzutu pochodzącą od dysz $4F'$

$$4F' = ma + T.$$

Wstawiając znane wartości sił i przyspieszenia podanych w treści zadania, otrzymujemy:

$$4F' = ma + T = (2\,100\,\text{kg})\left(49\,\text{m/s}^2\right) + 650\,\text{N}.$$

Wynika z tego, że całkowita siła odrzutu silnika wynosi

$$4F' = 1{,}0 \cdot 10^5\,\text{N},$$

a cząstkowa siła odrzutu każdej z dysz to wówczas:

$$F' = \frac{1{,}0 \cdot 10^5\,\text{N}}{4} = 2{,}5 \cdot 10^4\,\text{N}.$$

Znaczenie

Bardzo wysoki wynik otrzymanej siły odrzutu rakiety może wydać się zaskakujący. Eksperymenty z udziałem ludzi i rakiet odrzutowych były przeprowadzone już na początku lat sześćdziesiątych, aby przetestować granice ludzkiej wytrzymałości w ekstremalnych warunkach. Tego typu układy projektowano w celu ochrony pilotów katapultujących się z myśliwców odrzutowych. Uzyskano prędkości nawet dochodzące do 1000 km/h, przyspieszenie układu wynosiło prawie 45 g (g oznacza tutaj przyspieszenie grawitacyjne, wynoszące $9{,}81\,\text{m/s}^2$). Przyspieszenie będące 45-krotną wielokrotnością g to $45 \cdot 9{,}8\,\text{m/s}^2$, co w przybliżeniu wynosi $440\,\text{m/s}^2$). Obecnie nie wykonuje się prób z udziałem ludzi, jednak warto powiedzieć, że maksymalna prędkość osiągnięta sanie rakietowe to prawie 10 000 km/h!

W tym przykładzie, podobnie jak w poprzednim, analizowany układ jest stosunkowo prosty. W dalszych przykładach zauważymy, że dobre zdefiniowanie analizowanego układu i jego wybór ma kluczowe znaczenie w rozwiązaniu problemu. Czasem problem nie jest wcale oczywisty.

Drugie prawo Newtona jest czymś więcej niż tylko definicją; ukazuje fundamentalny związek między przyspieszeniem, siłą i masą obiektu. Prawo to może nam pomóc podejmować pewne decyzje. Każda z wielkości fizycznych pojawiających się w tym prawie może być zdefiniowana niezależnie, więc drugie prawo Newtona wyjaśnia nam prawdy podstawowe i uniwersalne o funkcjonowaniu natury.



5.4 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Samochód sportowy o masie 550 kg zderzył się z ciężarówką o masie 2200 kg. Podczas kolizji siła wypadkowa działająca na każdy z pojazdów jest w zasadzie siłą pochodzącą od drugiego pojazdu. Jeżeli wartość przyspieszenia ciężarówki wynosi $10\,\text{m/s}^2$, jakie przyspieszenie osiągnął samochód sportowy?

Wektorowa forma drugiego prawa Newtona

Omówiliśmy drugą zasadę dynamiki Newtona i sformułowaliśmy ją w formie wektorowego Równania 5.3. To równanie wektorowe może być zapisane również w postaci trzech równań składowych:

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x, \quad \sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y, \text{oraz} \quad \sum \vec{F}_z = m\vec{a}_z. \tag{5.5}$$

Drugie prawo Newtona opisuje, w jaki sposób ciało odpowiada mechanicznie na środowisko je otaczające. Wpływ środowiska zewnętrznego to nic innego jak siła wypadkowa $\vec{F}_{\text{wyp}}$, odpowiedzią ciała jest przyspieszenie $\vec{a}$, przy czym odpowiedź ta jest odwrotnie proporcjonalna do masy m. W ogólności im większa jest masa ciała, tym jego odpowiedź na siłę zewnętrzną jest mniejsza. Dlatego też masa ciała jest miarą jego bezwładności co pokazaliśmy w podrozdziale Pierwsza zasada dynamiki Newtona.

Przykład 5.5

Siła i piłka nożna

Piłkarz kopnął przez boisko piłkę o masie 400 g. Nadał piłce wówczas przyspieszenie $\vec{a} = \left(3{,}00\hat{i} + 7{,}0\hat{j}\right)$ m/s^2. Znajdź:

a. siłę działającą na piłkę;
b. wartość i kierunek tej siły.

Strategia rozwiązania

Przyspieszenie zapisano w notacji wersorowej, gdzie wersory jednostkowe $\hat{i}$ oraz $\hat{j}$ definiują kierunek działania składowych przyspieszenia odpowiednio w kierunkach x i y.

Rozwiązanie

a. Zastosujmy drugie prawo Newtona:

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = m\vec{a} = (0{,}400\,\text{kg})\left[\left(3{,}00\hat{i} + 7{,}00\hat{j}\right)\,\text{m/s}^2\right] = \left(1{,}20\hat{i} + 2{,}80\hat{j}\right)\,\text{N}.$$

b. Wartość i kierunek siły wypadkowej F_{wyp}:

$$F_{\text{wyp}} = \sqrt{(1{,}20\,\text{N})^2 + (2{,}80\,\text{N})^2} = 3{,}05\,\text{N},$$
$$\theta = \text{arctg}\left(\frac{2{,}80}{1{,}20}\right) = 66{,}8°.$$

Znaczenie

Musimy pamiętać, że druga zasada dynamiki Newtona jest opisywana równaniem wektorowym. W przypadku (a) mnożymy wektor przez skalar, aby określić wypadkową siłę w postaci wektorowej. Zapis wektorowy siły wypadkowej daje nam jej zwartą reprezentację, jednakże nie mówi nam nic o jej wartości czy kierunku. W punkcie (b) z kolei określiliśmy faktyczną wartość działającej siły oraz kierunek, w którym działa.

Przykład 5.6

Masa samochodu

Znajdź masę samochodu, jeśli działająca na niego siła wypadkowa o wartości $600{,}0\hat{j}$ N powoduje przyspieszenie samochodu $0{,}2\hat{j}$ m/s^2.

Strategia rozwiązania

Z matematycznego punktu widzenia nie istnieje działanie dzielenia wektorów, dlatego też $m = \vec{F}_{\text{wyp}}/\vec{a}$ jest działaniem nieprawidłowym. Jednakże masa m jest skalarem, więc możemy zastosować skalarną postać drugiego prawa Newtona: $m = F_{\text{wyp}}/a$.

Rozwiązanie

Zastosujmy relację $m = F_{\text{wyp}}/a$, wstawiając odpowiednio długości wektorów przyspieszenia i siły wypadkowej: $F_{\text{wyp}} = 600{,}0$ N i $a = 0{,}2$ m/s^2. Zatem:

$$m = \frac{F_{\text{wyp}}}{a} = \frac{600{,}0\,\text{N}}{0{,}2\,\text{m/s}^2} = 3\,000\,\text{kg}.$$

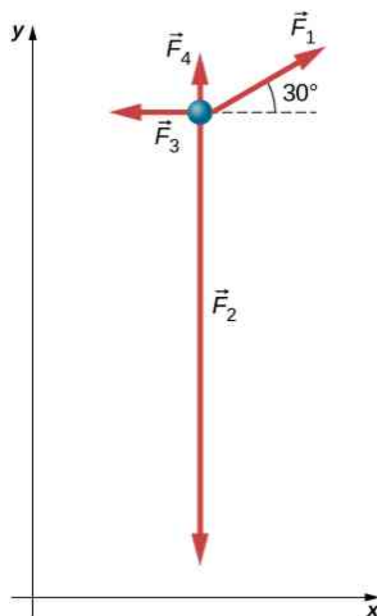
Znaczenie

Zarówno siła, jak i przyspieszenie były dane w formie wektorów, zapisanych za pomocą wersorów jednostkowych $\hat{i}$ i $\hat{j}$, lecz zauważmy, że szukana masa jest wielkością skalarną, dlatego też nie zapisano jej z użyciem wersorów $\hat{i}$ oraz $\hat{j}$.

Przykład 5.7

Wiele sił działających na cząstkę

Cząstka o masie $m = 4{,}0\ \text{kg}$ poddana jest działaniu czterech sił o wartościach bezwzględnych odpowiednio $F_1 = 10{,}0\ \text{N}, \quad F_2 = 40{,}0\ \text{N}, \quad F_3 = 5{,}0\ \text{N}, \quad F_4 = 2{,}0\ \text{N}$. Siły te działają w kierunkach przedstawionych na diagramie z Rysunku 5.15. Jakie przyspieszenie ma analizowana cząstka?



Rysunek 5.15 Cztery siły, zdefiniowane w układzie współrzędnych xy działają na cząstkę o masie 4 kg.

Strategia rozwiązania

Ponieważ układ jest dwuwymiarowy, należy narysować rozkład sił działających na cząstkę, uwzględniając rozkład sił na składowe. Po pierwsze siłę $\vec{F}_1$ należy rozłożyć na składowe wzdłuż osi x i y. Wówczas możemy zastosować drugie prawo Newtona osobno dla każdego z dwóch wyróżnionych kierunków.

Rozwiązanie

Rysujemy diagram sił, przedstawiony na Rysunku 5.15. Następnie możemy zastosować drugie prawo Newtona. Rozpatrujemy wektory składowe sił osobno w kierunku x:

$$\sum F_x = ma_x,$$
$$F_{1x} - F_{3x} = ma_x,$$
$$F_1 \cos 30° - F_{3x} = ma_x,$$
$$10{,}00\text{N} \cdot \cos 30° - 5{,}0\text{N} = 4{,}0\text{kg} \cdot a_x,$$
$$a_x = 0{,}92\text{m/s}^2,$$

i w kierunku y:

$$\sum F_y = ma_y,$$
$$F_{1y} + F_{4y} - F_{2y} = ma_y,$$
$$F_1 \sin 30° + F_{4y} - F_{2y} = ma_y,$$
$$10{,}00\text{N} \cdot \sin 30° + 2{,}0\text{N} - 40{,}0\text{N} = 4{,}0\text{kg} \cdot a_y,$$
$$a_y = -8{,}3\text{m/s}^2.$$

Wynika z tego, że przyspieszenie cząstki wynosi:

$\vec{a} = \left(0{,}92\hat{i} - 8{,}3\hat{j}\right)\ \text{m/s}^2$,

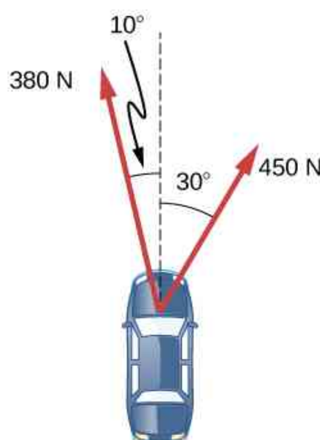
jest ono zatem wektorem o długości 8,4 m/s^2 skierowanym pod kątem 276° do dodatniej półosi x.

Znaczenie

Można znaleźć liczne przykłady w życiu codziennym, kiedy mamy do czynienia z trzema lub więcej siłami działającymi na pojedynczy obiekt. Tak jest w przypadku mocujących na moście Golden Gate lub piłkarza, który jest popychany i blokowany przez trzech obrońców. Widzimy, że rozwiązanie tego przykładu stanowi jedynie rozszerzenie tych zagadnień, które już rozpatrywaliśmy.



5.5 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Na samochód osobowy działają siły zgodnie z poniższym rysunkiem. Masa samochodu wynosi 1000 kg. Pada deszcz, więc jezdnia jest bardzo śliska. Wówczas siłę tarcia możemy zaniedbać. (a) Jaka jest siła wypadkowa działająca na samochód? (b) Znajdź również przyspieszenie samochodu.



Drugie prawo Newtona a pęd ciała

Newton sformułował swoje prawo również w odniesieniu do pędu ciała: „Szybkość zmian pędu ciała równa jest sile na nie działającej”. (Szybkość zmian rozumiana jest jako pochodna po czasie). Możemy to sformułowanie zapisać w formie równania:

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (5.6)$$

Oznacza to, że druga zasada dynamiki Newtona odnosi się do podstawowej kwestii ruchu: co powoduje zmianę ruchu obiektu? Pęd ciała został opisany przez Newtona jako pewien „parametr ilościowy ruchu”, czyli relacja łącząca prędkość obiektu i jego masę.

Na użytek tego rozważania możemy zdefiniować *pęd* $\vec{p}$ ciała jako iloczyn jego masy m i prędkości $\vec{v}$:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (5.7)$$

Ponieważ prędkość ciała jest wielkością wektorową, pęd również nią jest.

Przykładowo, pociąg poruszający się z prędkością 10 m/s ma większy pęd niż wówczas, gdyby poruszał się z prędkością 2 m/s.

Podstawiając definicję pędu do Równania 5.6, opisującego siłę w zależności od pędu, otrzymujemy:

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(m\vec{v}\right)}{\mathrm{d}t},$$

gdzie m to stała (masa), więc możemy zapisać powyższe równanie nieco inaczej:

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = m\frac{\mathrm{d}\left(\vec{v}\right)}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}.$$

Widzimy, że drugie prawo Newtona zapisane w funkcji pędu ciała, po odpowiednich przekształceniach matematycznych redukuje się do formy pokazanej wcześniej w niniejszym podrozdziale.


Przeanalizuj przykłady pokazane w aplikacji siły w działaniu (https://openstaxcollege.org/l/21forcesatwork) , zobacz, co się dzieje gdy ciągnięty jest wózek (https://openstaxcollege.org/l/21pullacart) albo gdy pchana jest lodówka, skrzynia lub człowiek. Stwórz w aplikacji przykładana siła (https://openstaxcollege.org/l/21forcemotion) model sił w układzie i przeanalizuj, jak zachowują się obiekty. Zbadaj również sytuację w przypadku ciała na równi pochyłej (https://openstaxcollege.org/l/21ramp) i zobacz, jak to wpływa na ich ruch.

5.4 | Masa i ciężar ciała

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- wyjaśniać różnice między masą i ciężarem ciała;
- wyjaśniać, dlaczego ciała spadają swobodnie w polu grawitacyjnym;
- opisywać zjawisko stanu nieważkości.

Masa i ciężar często używane są zamiennie podczas codziennej rozmowy. Mówi się na przykład o ciężarze ciała w kilogramach, zamiast we właściwych jednostkach – niutonach. W fizyce jest to jednak bardzo istotna różnica. Ciężar to efekt przyciągania ciała przez kulę ziemską. Wartość tego oddziaływania zależy od odległości od środka Ziemi. Masa, w przeciwieństwie do ciężaru, nie zmienia się w zależności od położenia w polu grawitacyjnym. Masa obiektu jest taka sama na Ziemi, na orbicie ziemskiej lub na powierzchni Księżyca.

Jednostka siły

Równanie $F_{\text{wyp}} = ma$ używane jest w celu definiowania siły wypadkowej w funkcji masy, położenia i czasu. Jak już wspomnieliśmy, jednostką siły w układzie SI jest niuton. Skoro $F_{\text{wyp}} = ma$, to

$$1\ \text{N} = 1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

Ciężar ciała i siła grawitacji

Gdy upuszczamy jakiś przedmiot, opada on z pewnym przyspieszeniem w kierunku środka kuli ziemskiej. Drugie prawo Newtona mówi, że siła wypadkowa działająca na obiekt jest odpowiedzialna za jego przyspieszenie. Jeżeli siły oporu powietrza są zaniedbywalne, całkowita siła wypadkowa działająca na ciało to siła oddziaływania grawitacyjnego między obiektem a kulą ziemską, nazywana **siłą ciężkości (lub inaczej ciężarem ciała)** (ang. **weight**) $\vec{Q}$. Ciężar ciała jest wielkością wektorową, ponieważ posiada zdefiniowany kierunek; siła ta skierowana jest *w dół*, zgodnie z wektorem natężenia pola grawitacyjnego. Galileusz udowodnił, że przy braku sił oporu powietrza wszystkie ciała spadają swobodnie z tym samym przyspieszeniem, dziś oznaczanym symbolem g. Korzystając z teorii Galileusza oraz drugiego prawa Newtona, możemy wyprowadzić równanie na ciężar ciała.

Rozpatrzmy obiekt o masie m opadający swobodnie w polu grawitacyjnym. Obiekt ten doświadcza jedynie obecności pionowej siły ciężkości (ciężaru) $\vec{Q}$. Druga zasada dynamiki Newtona mówi, że siła wypadkowa dana jest zależnością $\vec{F}_{\text{wyp}} = m\vec{a}$. Całkowite przyspieszenie ciała wywołane polem grawitacyjnym wynosi $\vec{g}$, czyli $\vec{a} = \vec{g}$. Wstawiając jedno do drugiego otrzymać możemy wyrażenie na ciężar ciała.

Ciężar

Siła grawitacji działająca na daną masę to jej ciężar. Zapiszmy tą relację w formie wektorowej, gdzie $\vec{Q}$ to siła ciężkości, am to masa ciała:

$$\vec{Q} = m\vec{g}. \tag{5.8}$$

Przechodząc do formy skalarnej:

$$Q = mg. \tag{5.9}$$

Skoro $g = 9{,}80\ \text{m/s}^2$ na powierzchni Ziemi, ciężar ciała o masie 1 kg wynosi 9,80 N:

$$Q = mg = (1{,}00\ \text{kg})\left(9{,}0\ \text{m/s}^2\right) = 9{,}80\ \text{N}.$$

Kiedy jedyną zewnętrzną siłą działającą na obiekt jest jego ciężar, mówimy, że ciało **swobodnie spada** (ang. **free fall**) w polu grawitacyjnym. Jednakże, gdy przedmioty spadają w polu ziemskim, nigdy nie jest to spadek swobodny, ponieważ zawsze istnieją pewne siły oporu ruchu, np. powietrza działającego na przedmiot.

Przyspieszenie grawitacyjne g zależy nieznacznie od położenia nad powierzchnią Ziemi, więc siła ciężkości działająca na ciało zależy od jego położenia. Nie jest ona jedynie własnością danego ciała. Ciężar ciał zmienia się istotnie, gdy opuścimy Ziemię. Na przykład na Księżycu przyspieszenie grawitacyjne wynosi jedynie $1{,}67\ \text{m/s}^2$. Obiekt o masie 1 kg doznaje na Ziemi działania siły ciężkości o wartości 9,8 N, natomiast na Księżycu jedynie 1,7 N.

Najogólniejszą definicją siły ciężkości, czyli ciężaru ciała, jest siła oddziaływania tego ciała z najbliższym i dużym obiektem, takim jak Ziemia, Księżyc czy Słońce. Jest to najczęściej używana definicja siły ciężkości w fizyce. Różni się ona znacząco od definicji ciężaru używanej przez NASA czy media publiczne. Gdy mówią oni o „stanie nieważkości” albo „mikrograwitacji”, odnoszą się do zjawiska, które my określamy jako spadek swobodny. Będziemy używać podanej wyżej definicji ciężaru jako siły $\vec{Q}$, będącej wynikiem oddziaływania kuli ziemskiej z masą m, i będziemy rozróżniać spadek swobodny i faktyczną nieważkość.

Pamiętaj, że masa i ciężar to dwie odrębne wielkości fizyczne, mimo, że są sobie dość bliskie. Masa to pewna własność danego ciała, mówiąca o ilości materii w nim zawartej. Ilość materii zawartej w danym ciele określona jest przez liczbę tworzących je atomów i cząsteczek. Ponieważ ilość materii w danym ciele jest stała, w fizyce newtonowskiej masa jest parametrem stałym. Nie zmienia się więc reakcja ciała na przyłożoną siłę zewnętrzną. Natomiast ciężar zależy od przyspieszenia grawitacyjnego. Na przykład osoba znajdująca się w obniżeniu terenu, bliżej środka kuli ziemskiej, ma ciężar nieznacznie większy niż osoba ulokowana wysoko na wzniesieniu, mimo że mają taką samą masę.

To bardzo kuszące, aby utożsamić definicje ciężaru i masy obiektu, ponieważ badane ciało najczęściej znajduje się przy powierzchni Ziemi, gdzie ciężar obiektu zmienia się bardzo nieznacznie w zależności od jego lokalizacji. Ponadto, trudno jest policzyć ilość i zidentyfikować wszystkie atomy i molekuły w danym obiekcie, więc masa ciała rzadko jest określana jako miara liczby molekuł w ciele. Jeśli weźmiemy pod uwagę sytuację, w której $\vec{g}$ jest na Ziemi stałe, widzimy wówczas, że ciężar $\vec{Q}$ jest wprost proporcjonalny do masy m. Skoro $\vec{Q} = m\vec{g}$, oznacza to, że im bardziej masywny jest obiekt, tym większy jego ciężar. Masa obiektu jest operacyjnie definiowana poprzez porównanie ze wzorcem kilograma, tak jak omówione to zostało w rozdziale Jednostki i pomiary. Porównując obiekt znajdujący się na Ziemi i Księżycu, zauważymy znaczne różnice w jego ciężarze, ale nie w masie. Dla przykładu, na Ziemi obiekt o masie 5 kg ma ciężar 49 N, natomiast na Księżycu, gdzie g wynosi $1{,}67\ \text{m/s}^2$, ciężar ten to jedynie 8,4 N. Masa obiektu nie ulega zmianie i wynosi 5 kg zarówno na Księżycu, jak i na Ziemi.

Przykład 5.8

Porządkowanie pola uprawnego

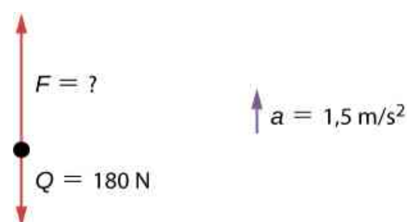
Rolnik oczyszcza swoje pole uprawne z kamieni. Podnosi kamień o ciężarze 180 N. Jaką siłą musi zadziałać na kamień, jeśli przyspieszenie kamienia wynosi $1{,}5\ \text{m/s}^2$?

Strategia rozwiązania

W treści zadania podano ciężar kamienia, dla którego musimy znaleźć siłę wypadkową. Musimy jednak znaleźć również masę kamienia, aby móc zastosować drugie prawo Newtona. Zatem konieczne jest skorzystanie z relacji: $Q = mg$ w celu znalezienia masy kamienia.

Rozwiązanie

Jak widać na poniższym rysunku, żadne siły nie działają w kierunku poziomym, więc możemy skoncentrować się jedynie na analizie sił pionowych. Kierunek przyspieszenia kamienia oznaczono z boku rysunku. Ma to na celu uzmysłowienie, że obiekt przyspiesza do góry (więc zwrot siły wypadkowej jest skierowany w górę).



$$Q = mg,$$
$$m = \frac{Q}{g} = \frac{180\ \text{N}}{9{,}8\ \text{m/s}^2} = 18\ \text{kg},$$
$$\sum F = ma,$$
$$F - Q = ma,$$
$$F - 180\ \text{kg} = 18\ \text{kg} \cdot 1{,}5\ \text{m/s}^2,$$
$$F - 180\ \text{kg} = 27\ \text{N},$$
$$F = 207\ \text{N} = 210\ \text{N} \quad \text{(po zaokrągleniu do dwóch cyfr znaczących).}$$

Znaczenie

Aby móc zastosować drugie prawo Newtona w celu rozwiązania zadania, czasami musimy użyć innych równań, takich jak związek pomiędzy masą a ciężarem lub jedno z kinematycznych równań ruchu.



5.6 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Dla przypadku z Przykładu 5.8, znajdź przyspieszenie kamienia, gdy rolnik działa na kamień siłą 230 N skierowaną w górę.



Czy umiałbyś uniknąć lądowania na kamienistym polu, zanim skończyłoby się paliwo w twojej rakiecie, tak jak zrobił to Neil Armstrong w 1969 roku? W linku klasyczna gra wideo (https://openstaxcollege.org/l/21lunarlander) znajdziesz pewien rodzaj gry wideo, w której możesz zasymulować rzeczywisty ruch lądownika, znając jego masę, siłę ciągu dysz rakietowych oraz grawitację Księżyca. W rzeczywistości sterowanie lądownikiem jest bardzo trudne.



Zapoznaj się z symulacją (https://openstaxcollege.org/l/21gravityorbits) , w której możesz zmieniać położenie Słońca, Ziemi, Księżyca czy stacji kosmicznych, aby zaobserwować wpływ na ich wzajemne oddziaływanie grawitacyjne i orbity. Zasymuluj różne rozmiary i odległości między różnymi ciałami niebieskimi. Zobacz, jak zachowa się układ po wyłączeniu grawitacji.

5.5 | Trzecia zasada dynamiki Newtona

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- podawać treść trzeciej zasady dynamiki Newtona;
- identyfikować siły akcji i reakcji w różnych sytuacjach;
- stosować trzecie prawo Newtona w rożnych układach w celu analizy ich ruchu.

Kilka rozdziałów wcześniej zdefiniowaliśmy siłę jako wynik na przykład pchania bądź ciągnięcia ciała. Jednakże gdy dobrze się zastanowisz, zauważysz, że czynności te nigdy nie pozostają bez pewnej odpowiedzi. Gdy naciskasz na ścianę, ściana działa na ciebie tą samą siłą, lecz o zwrocie przeciwnym. To przybliża nas do zrozumienia **trzeciej zasady dynamiki Newtona**, nazywanej też trzecim prawem Newtona (ang. **Newton's third law of motion**).

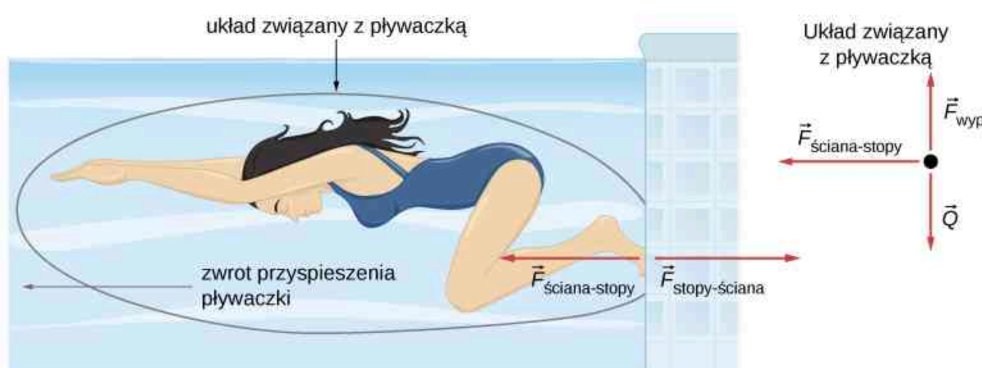
Trzecia zasada dynamiki Newtona

Jeżeli jedno ciało działa na drugie pewną siłą, to drugie ciało działa na pierwsze siłą o takim samym kierunku i wartości, lecz przeciwnym zwrocie. Matematycznie, jeżeli ciało A działa siłą $\vec{F}$ na ciało B, wówczas jednocześnie ciało B, działa na ciało A siłą$-\vec{F}$. Wektorowo można to zapisać jako

$$\vec{F}_{\text{AB}} = -\vec{F}_{\text{BA}}. \tag{5.10}$$

Trzecia zasada dynamiki Newtona opisuje pewną symetrię w układach mechanicznych. Siły zawsze występują parami – jedno ciało nie może działać z jakąkolwiek siłą na drugie, nie doświadczając tej samej siły ze strony drugiego ciała. Czasami trzecie prawo Newtona potocznie nazywamy „prawem akcji i reakcji”, gdzie wywierana siła jest nazywana akcją, a siła doświadczana przez ciało jako konsekwencja jest reakcją. Trzecie prawo Newtona ma praktyczne zastosowanie w analizowaniu pochodzenia sił i pozwala zrozumieć, które siły są w danym układzie traktowane jako zewnętrzne.

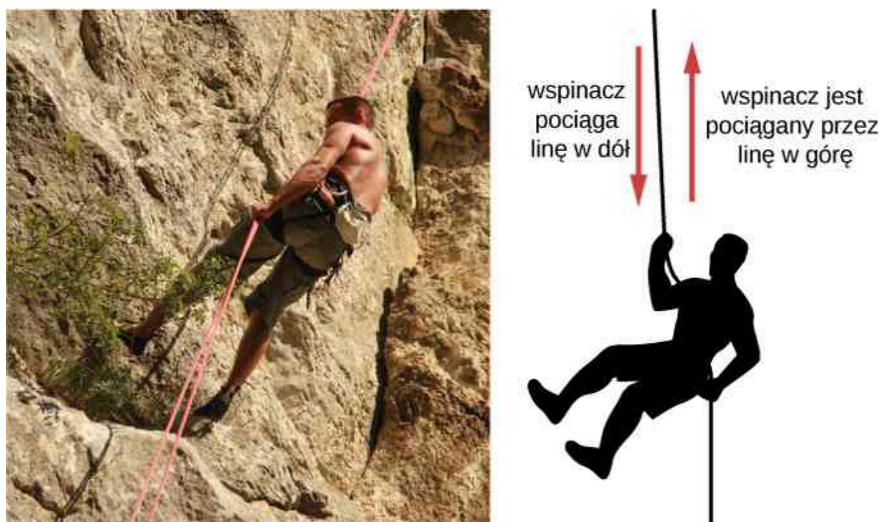
Możemy łatwo zauważyć w codziennych sytuacjach konsekwencje działania trzeciego prawa Newtona. Wyobraźmy sobie pływaczkę odbijającą się od ściany basenu (Rysunek 5.16). Odpycha się ona stopami od ściany basenu i płynie w kierunku przeciwnym do zwrotu siły, z którą, odbijając się, zadziałała na ścianę. Podczas odbijania ściana basenu reaguje na stopy pływaczki siłą o zwrocie przeciwnym, lecz równej wartości. Na pierwszy rzut okawydaje się, że siły te się równoważą. Jednak tak się nie dzieje, ponieważ działają one *na różne układy*. W wyżej wymienionej sytuacji dostrzec możemy dwa odrębne układy: pływaczkę oraz ścianę. Jeżeli chcemy przeanalizować jedynie zachowanie pływaczki, tak jak pokazano to na poniższym rysunku, wówczas $F_{\text{ściana-stopy}}$ oznacza siłę wywieraną przez ścianę na stopy pływaczki. Siła ta wpływa na ruch pływaczki, stąd też zwrot tej siły jest taki sam, jak kierunek jej przyspieszenia. Z kolei siła $F_{\text{stopy-ściana}}$ działa na ścianę, a nie na układ, którego ruch badamy. Dlatego też siła $F_{\text{stopy-ściana}}$ nie wpływa bezpośrednio na ruch pływaczki i nie równoważy siły $F_{\text{ściana-stopy}}$. Pływaczka działa na ścianę siłą o zwrocie przeciwnym niż kierunek, w którym chce popłynąć. Z kolei siła reakcji ma zwrot zgodny z pożądanym kierunkiem płynięcia. Na poniższym rysunku (Rysunek 5.16) zamieszczono również diagram sił działających na pływaczkę. Jak widać, nie uwzględniliśmy na nim siły, z którą pływaczka działa na ściankę basenu $F_{\text{stopy-ściana}}$.



Rysunek 5.16 Pływaczka działa na ścianę siłą, w wyniku czego zaczyna przyspieszać, przy czym zwrot przyspieszenia jest przeciwny do zwrotu działającej na ścianę siły. Innymi słowy, siła wypadkowa działająca na pływaczkę ma zwrot przeciwny niż zwrot siły $F_{\text{stopy-ściana}}$. Dzieje się tak z powodu trzeciego prawa Newtona, zgodnie z którym siła $F_{\text{ściana-stopy}}$ ma tą samą wartość i kierunek, lecz przeciwny zwrot niż siła $F_{\text{stopy-ściana}}$ i powoduje ruch pływaczki w lewą stronę. Diagram ukazujący rozkład sił działających na pływaczkę zawiera, jak widać, jedynie siłę $F_{\text{ściana-stopy}}$, siłę ciężkości Q oraz siłę wyporu F_{wyporu} . Siła wyporu oraz siła ciężkości równoważą się, więc pływaczka nie doznaje przyspieszenia w kierunku pionowym.

Łatwo znaleźć również inne przykłady zastosowania trzeciej zasady dynamiki Newtona:

- Gdy profesor przechodzi w czasie wykładu przed tablicą, wywiera siłę na podłogę. Podłoga z kolei działa na niego siłą reakcji, nadając mu przyspieszenie naprzód.
- Samochód przyspiesza do przodu, ponieważ ziemia popycha naprzód koła samochodu w wyniku działania siły reakcji na koła „odpychające w tył” ziemię. Dowodem na to jest fakt, że gdy samochód gwałtownie przyspiesza na żwirze, widoczny jest odrzut ziarenek żwiru w tył, przeciwnie do kierunku ruchu samochodu.
- Rakiety poruszają się naprzód, wyrzucając z dysz dużą ilość gazu z bardzo dużą prędkością. Oznacza to, że rakieta wywiera dużą siłę wsteczną na gaz w komorze spalania w silniku; dlatego też gaz wywiera dużą siłę reakcji na rakietę. Ta siła reakcji, która popycha ją do przodu w odpowiedzi na siłę wsteczną, nazywa się **odrzutem** (ang. **thrust**). Istnieje powszechnie błędne przekonanie, że ruch rakiety jest wywołany oddziaływaniem z podłożem lub z powietrzem znajdującym się tuż za rakietą. Tak naprawdę rakiety poruszają się sprawniej w próżni, gdzie mogą łatwiej wyrzucać z dysz gazy spalinowe.
- Helikoptery utrzymują się w powietrzu „popychając” powietrze w dół, i doświadczając siły reakcji skierowanej w górę.
- Ptaki i samoloty latają, działając na powietrze siłą o zwrocie przeciwnym niż siła reakcji, wpływająca na ich ruch naprzód. Skrzydła ptaków działają na powietrze siłą o kierunku zarówno poziomym, jak i pionowym, aby móc unieść ptaka nad ziemią i spowodować lot do przodu.
- Ośmiornica porusza się w wodzie dzięki temu, że wyrzuca za siebie wodę z jamy w swoim ciele; Podobny napęd ma skuter wodny.
- Gdy człowiek działa na linę siłą zwróconą w dół, lina odpowiada siłą reakcji skierowaną z kolei w górę, powodując ruch człowieka właśnie w górę (Rysunek 5.17).



Rysunek 5.17 Gdy wspinacz górski ciągnie linę w dół, ona z kolei w wyniku działania siły reakcji ciągnie wspinacza w górę.

W związku z trzecim prawem dynamiki podkreślić trzeba dwie ważne kwestie. Pierwsza z nich to to, że siła wywierana na układ oraz siła reakcji mają zawsze tą samą wartość, lecz przeciwny zwrot. Z kolei druga dotyczy tego, że siły działają na dwa zupełnie osobne układy: siła wywierana przez układ A działa na układ B, czego skutkiem jest działanie siły reakcji ze strony układu B na układ A. Innymi słowy, te dwie siły działają na dwa odrębne układy, a zatem nie równoważą się.

Rozpatrzmy sytuację na Rysunku 5.6. Na podstawie trzeciego prawa Newtona można stwierdzić, że skoro krzesło działa na studenta siłą $\vec{N}$, to student działa na krzesło siłą $-\vec{N}$. Równocześnie działa on odpowiednio na podłogę i stół siłami $-\vec{F}$ i $-\vec{T}$. Ziemia, działając na studenta siłą ciężkości $\vec{Q}$, powoduje to, że on z kolei działa na Ziemię siłą o przeciwnym zwrocie $-\vec{Q}$. Gdy zezłoszczony student uderzy pięścią w stół, dozna bólu w wyniku działania siły reakcji wywieranej przez stół na jego pięść.

Osoba, która chodzi lub biegnie po ulicy, jest doskonałym przykładem działania trzeciego prawa Newtona. Na przykład biegacz przedstawiony na Rysunku 5.18 działa na podłoże siłą skierowaną w tył i w dół, czego skutkiem jest siła o zwrocie przeciwnym, napędzająca jego ruch naprzód.



Rysunek 5.18 Biegacz podczas biegu ulicznego doświadcza działania trzeciej zasady dynamiki Newtona. (a) Siła pochodząca od biegacza skierowana jest w dół i w lewo, w stronę podłoża. (b) Siła reakcji od podłoża napędza ruch biegacza, dzięki czemu biegnie on do przodu.

Przykład 5.9

Siły działające na obiekty pozostające w spoczynku

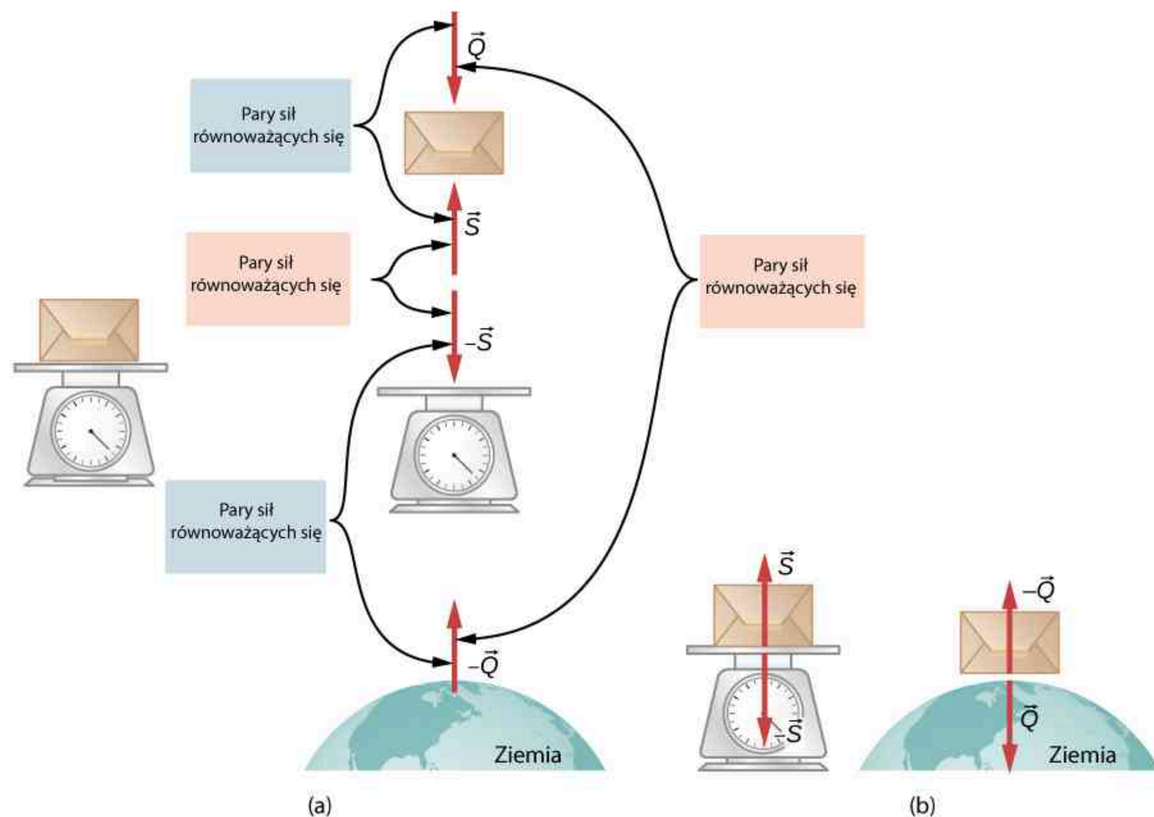
Na Rysunku 5.19 przedstawiono sytuację, w której paczka leży na wadze. Siły działające na paczkę to siła reakcji pochodząca od platformy wagi $\vec{S}$, o zwrocie w górę, oraz siła pochodząca od oddziaływania grawitacyjnego z Ziemią $\vec{Q}$. Siły reakcji, wywierane przez paczkę to odpowiednio $-\vec{S}$ oraz $-\vec{Q}$. Ponieważ paczka znajduje się w spoczynku (jej przyspieszenie wynosi zero), zastosowanie drugiego prawa Newtona prowadzi nas do wniosku, że:

$$\vec{S} + \vec{Q} = m\vec{a} = \vec{0},$$

więc:

$$\vec{S} = -\vec{Q},$$

Na podstawie wskazania wagi możemy uzyskać informacje na temat ciężaru paczki. Nie jest to jednak w istocie wartość jej ciężaru. Wskazanie wagi dotyczy pomiaru siły $-\vec{S}$ działającej na jej powierzchnię. Gdy układ doznaje pewnych przyspieszeń, wówczas siły $\vec{S}$ i $-\vec{Q}$ nie będą zrównoważone. Zagadnienie to zostanie dokładniej wyjaśnione w podrozdziale Zastosowanie zasad dynamiki Newtona.

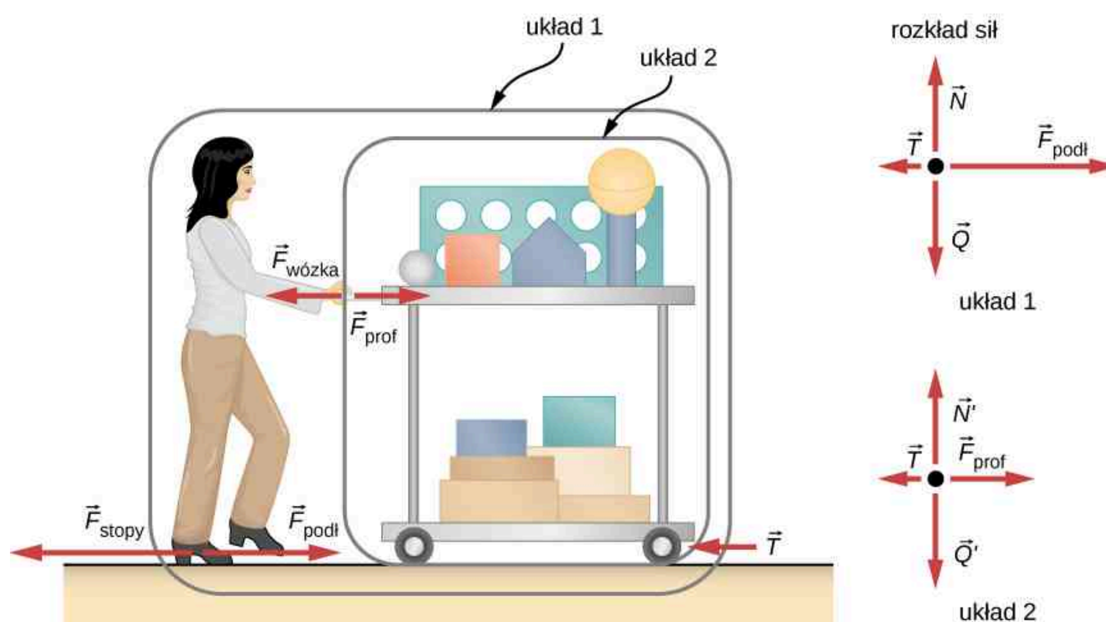


Rysunek 5.19 (a) Rysunek pokazujący siły, wraz z siłami reakcji, działające na paczkę znajdującą się na wadze. Siła $\vec{Q}$ to ciężar paczki, natomiast $\vec{S}$ to siła reakcji pochodząca od podłoża. (b) Rysunek układów odizolowanych: paczki znajdującej się na wadze, oraz paczki znajdującej się na Ziemi. W układach tych siły akcji i reakcji całkowicie się równoważą.

Przykład 5.10

Poruszający się układ: dobór odpowiedniego układu do analizy

Nauczycielka fizyki pcha wózek z układem pokazowym podczas lekcji (Rysunek 5.20). Masa nauczycielki wynosi 65 kg, masa wózka pokazowego to 12 kg, a sprzęt na wózku waży 7 kg. Oblicz przyspieszenie wózka, wiedząc, że nauczycielka pcha wózek, działając na podłogę siłą 150 N. Łączna siła oporu ruchu, wliczając siłę tarcia i oporu powietrza, wynosi 24 N.



Rysunek 5.20 Nauczycielka fizyki pcha wózek ze sprzętem pokazowym. Długość wektorów sił na rysunku odzwierciedla wartości sił, oprócz wektora siły tarcia $\vec{T}$. Układ 1 jest odpowiedni do analizy tego przykładu, ponieważ pytanie dotyczy ruchu całej grupy obiektów. Jedynie siły $\vec{F}_{podł}$ i $\vec{T}$ to siły zewnętrzne działające na układ 1 w kierunku ruchu wózka. Wszystkie inne siły równoważą się albo działają na inny układ. Układ 2 będzie odpowiedni dla następnego przykładu. Tu $\vec{F}_{prof}$ jest siłą zewnętrzną, która pojawi się w drugiej zasadzie dynamiki Newtona. Zauważ, ze rozkłady sił działających na ciała w układach 1 i 2 różnią się od siebie.

Strategia rozwiązania

Potraktujmy układ 1, w którym znajduje się nauczycielka, wózek i sprzęt demonstracyjny, jako jeden przyspieszający punkt. Na Rysunku 5.20 oznaczono to jako układ 1. Nauczycielka pcha do przodu wózek, działając na podłogę siłą wsteczną F_{stopy} wynoszącą 150 N. Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki podłoga wywiera na układ 1 siłę reakcji $F_{podł}$ o wartości 150 N, skierowaną do przodu. Ponieważ ruch jest w poziomie, nie musimy uwzględniać siły ciężkości oraz pionowej siły reakcji pochodzącej od podłoża. Wówczas zagadnienie sprowadza się do jednowymiarowego opisu ruchu. Siła tarcia T skierowana jest przeciwnie do kierunku ruchu wózka, ma zatem zwrot przeciwny niż siła $F_{podł}$ Nie uwzględniamy również sił F_{prof} oraz $F_{wóz}$, ponieważ są to siły wewnętrzne. Siły F_{stopy} też nie bierzemy pod uwagę, ponieważ działa ona na podłogę, a nie na elementy analizowanego układu 1. Skoro zdefiniowaliśmy już wszystkie zewnętrzne siły działające na układ 1, możemy zastosować drugie prawo Newtona do obliczenia przyspieszenia. Popatrz na rozkład sił działających na układ 1, pokazany na rysunku.

Rozwiązanie

Drugie prawo Newtona brzmi:

$$a = \frac{F_{wyp}}{m}.$$

Na podstawie przeprowadzonej dyskusji zewnętrzna siła wypadkowa w układzie 1 (Rysunek 5.20) wynosi

$$F_{wyp} = F_{podł} - T = (150{,}0 - 24{,}0)\ \text{N} = 126\ \text{N}.$$

Masa całkowita elementów układu 1 wynosi:

$$m = (65{,}0 + 12{,}0 + 7{,}0)\ \text{kg} = 84\ \text{kg}.$$

Zatem znając wartość siły wypadkowej F_{wyp} i masę całkowitą układu m, możemy znaleźć przyspieszenie:

$$a = \frac{F_{wyp}}{m} = \frac{126\ \text{N}}{84\ \text{kg}} = 1{,}5\ \text{m/s}^2.$$

Znaczenie

Żadna z sił wewnętrznych, działających w układzie 1, jak np. siła wywierana przez dłonie nauczycielki na wózek, nie ma wpływu na siłę wypadkową działającą na ten układ. Siły te tworzą pary sił równej wartości, lecz mają przeciwne zwroty, a zatem się równoważą: siła, z jaką nauczycielka pcha na wózek, powoduje występowanie tak samo dużej siły, z którą wózek działa na nauczycielkę, lecz mającej przeciwny zwrot. W tym wypadku obie siły działają na ten sam układ 1, więc równoważą się. Widzimy więc, że siły wewnętrzne (pomiędzy częściami układu) równoważą się. Wybranie do analizy układu oznaczonego na rysunku jako 1 było kluczowe w rozwiązaniu tego problemu.

Przykład 5.11

Siły działające na wózek: wybór innego układu do analizy

Oblicz siłę, z jaką nauczycielka działa na wózek na Rysunku 5.20, korzystając z danych z poprzedniego przykładu.

Strategia rozwiązania

Jeżeli określimy analizowany układ jako wózek wraz ze sprzętem pokazowym na nim się znajdującym (układ 2 na Rysunku 5.20), to całkowita siła wypadkowa w układzie 2 będzie różnicą siły, z jaką nauczycielka pcha wózek, i siły tarcia. Siła F_{prof}, z jaką nauczycielka popycha wózek to w układzie 2 siła zewnętrzna, podczas gdy z punktu widzenia układu 1 była traktowana jako wewnętrzna. Dlatego też w układzie 2, to właśnie ta siła wchodzi do równania opisującego drugie prawo Newtona.

Rozwiązanie

Aby znaleźć wartość siły F_{prof} zastosujmy drugie prawo Newtona,

$$a = \frac{F_{wyp}}{m}.$$

Wartość zewnętrznej siły wypadkowej w układzie 2 możemy znaleźć, korzystając z relacji:

$$F_{wyp} = F_{prof} - T.$$

Znajdujemy z powyższego równania F_{prof}:

$$F_{prof} = F_{wyp} + T.$$

Wartość siły tarcia T jest podana w treści zadania, więc musimy jeszcze obliczyć wartość siły wypadkowej F_{wyp}. Jest to proste, ponieważ zarówno masa, jak i przyspieszenie układu 2 są znane. Zastosujmy więc drugą zasadę dynamiki Newtona:

$$F_{wyp} = ma,$$

gdzie masa całkowita układu drugiego wynosi 19 kg ($m = (12{,}0 + 7{,}0)\ \text{kg}$), a przyspieszenie $a = 1{,}5\ \text{m/s}^2$. Zatem:

$$F_{wyp} = ma = (19{,}0\ \text{kg})\left(1{,}5\ \text{m/s}^2\right) = 29\ \text{N}.$$

Teraz możemy już znaleźć wartość poszukiwanej siły:

$$F_{\text{prof}} = F_{\text{wyp}} + T = (29 + 24)\ \text{N} = 53\ \text{N}.$$

Znaczenie

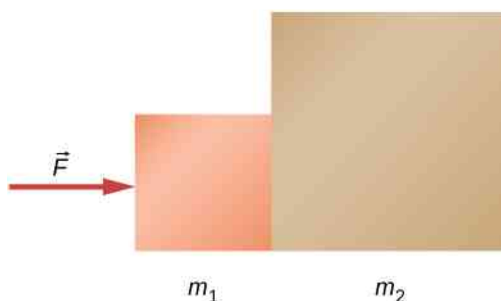
Obliczona siła okazała się znacznie niższa niż 150 N, a tyle właśnie wyniosła wartość siły wstecznej między nauczycielką a podłogą. Jak widać, nie cała siła 150 N jest wywierana przez nauczycielkę na wózek, część z niej powoduje przyspieszenie nauczycielki. Wybór elementów analizowanego układu to ważna rzecz przy rozwiązywaniu problemów fizycznych.



5.7 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Dwa klocki spoczywają na poziomej powierzchni tak, jak pokazano na poniższym rysunku. Masy klocków wynoszą odpowiednio $m_1 = 2{,}0\ \text{kg}$, $m_1 = 6{,}0\ \text{kg}$. Przyłożona siła wynosi 24 N.

a. Znajdź przyspieszenie układu klocków.

b. Załóż, że klocki zostały odseparowane. Jaką należałoby przyłożyć siłę, aby drugi klocek o masie 6 kg miał takie samo przyspieszenie, jak układ klocków w podpunkcie (a)?





Przejrzyj materiał wideo (https://openstaxcollege.org/l/21actionreact) , aby zobaczyć przykłady występowania sił akcji i reakcji w rożnych układach.



Obejrzyj materiał wideo (https://openstaxcollege.org/l/21NewtonsLaws) , aby przeanalizować zastosowania praw Newtona i różne siły wewnętrzne i zewnętrzne działające w układach.

5.6 | Rodzaje sił

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- określać siły normalne i siły naciągu w układzie;
- rozróżniać siły rzeczywiste i pozorne;
- stosować zasady Newtona do rozwiązywania problemów dynamicznych.

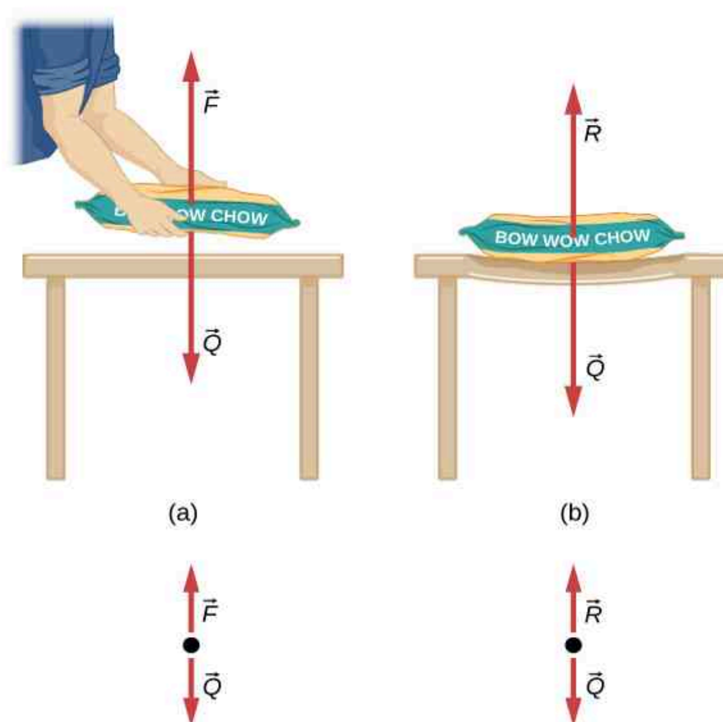
Istnieje bardzo wiele rodzajów sił, jak choćby siły parcia, ciągu, odrzutu czy ciężaru. W ogólności, siły pogrupowano w kategoriach w zależności od ich pochodzenia, tego jak działają w danych układach i jaki wywołują efekt. Wiele z tych kategorii zostanie przedyskutowane w niniejszym rozdziale wraz z omówieniem ciekawych przykładów występowania tych sił. Przeprowadzona zostanie dyskusja różnych sytuacji fizycznych.

Rodzaje sił: siły nacisku, naciągu i inne

Znajomość różnych rodzajów sił będzie bardzo przydatna przy dalszym rozważaniu problemów ruchu ciał. Mówimy tutaj o siłach nacisku, naciągu, tarcia czy siłach sprężystości.

Siły nacisku

Ciężar (często nazywany również siłą ciężkości) to siła, która działa nieprzerwanie na obiekt w polu grawitacyjnym. Musi być ona zrównoważona przez inną siłę, przeciwnie skierowaną, aby ciało to swobodnie nie opadło, np. w przypadku, gdy trzymasz przedmiot nad ziemią. Przypadek taki pokazano na Rysunku 5.21(a). Jak to się dzieje jednak, że obiekty nieożywione, jak np. stół, utrzymują na swojej powierzchni masę w pozycji nieruchomej (patrz Rysunek 5.21(b))? Kiedy na stole znajduje się worek z karmą dla psów, stół nieco ugina się pod jego ciężarem. Z pewnością byłoby to bardziej zauważalne, gdyby worek ten został umieszczony na stole z dykty, lecz nawet solidny dębowy stół odkształca się, gdy jest do niego przyłożona siła. Jeśli obiekt nie jest odkształcony w taki sposób, że granice sprężystości zostają przekroczone, będzie on wywierać siłę przywracającą do położenia równowagi, podobnie jak odkształcona sprężyna (lub trampolina). Im większy jest stopień odkształcenia ciała, tym większa jest siła przywracająca je do stanu początkowego. Toteż gdy masę umieścimy na stole, jego blat będzie się deformował do momentu, gdy siła przywracająca dorówna sile ciężkości masy umieszczonej na stole. W tym momencie siła wypadkowa w układzie wynosi zero i masa na stole jest nieruchoma. W przypadku stołu układ reaguje stosunkowo szybko, a linia ugięcia jest niewielka, lecz w istocie jest to ten sam efekt, który obserwuje w przypadku obciążonej trampoliny.



Rysunek 5.21 (a) Osoba trzymająca nad stołem worek z karmą dla psów zmuszona jest działać na worek siłą $\vec{F}$ o wartości równej ciężarowi worka$\vec{Q}$, lecz przeciwnie skierowaną. W wyniku tego działania worek nie opada swobodnie na blat stołu. (b) Stół z dykty ulega ugięciu, gdy położy się na nim ciężki worek z karmą dla psów. Siły sprężystości stołu rosną w miarę ugięcia, aż osiągną wartość siły nacisku $\vec{R}$ równoważącej ciężar worka.

Należy zauważyć, że w układzie musi działać skierowana w górę siła, równoważąca ciężar podpieranej masy (w tym przypadku worka z karmą dla psów) – a jej źródłem może być dźwigający masę człowiek albo przedmiot (tutaj: stół). Jeśli siła podtrzymująca ciężar jest prostopadła do powierzchni kontaktu między obciążeniem a podporą, siła ta jest określana jako **siła nacisku** lub **siła reakcji podłoża** i zwykle oznaczana symbolem $\vec{R}$. Siła reakcji podłoża działa zawsze prostopadle do jego powierzchni. Oznacza to, że siła taka, działająca na ciało spoczywające na poziomym stole może być zapisana jako wektor:

$$\vec{R} = -m\vec{g}. \tag{5.11}$$

Skalarnie powyższe równanie wygląda następująco:

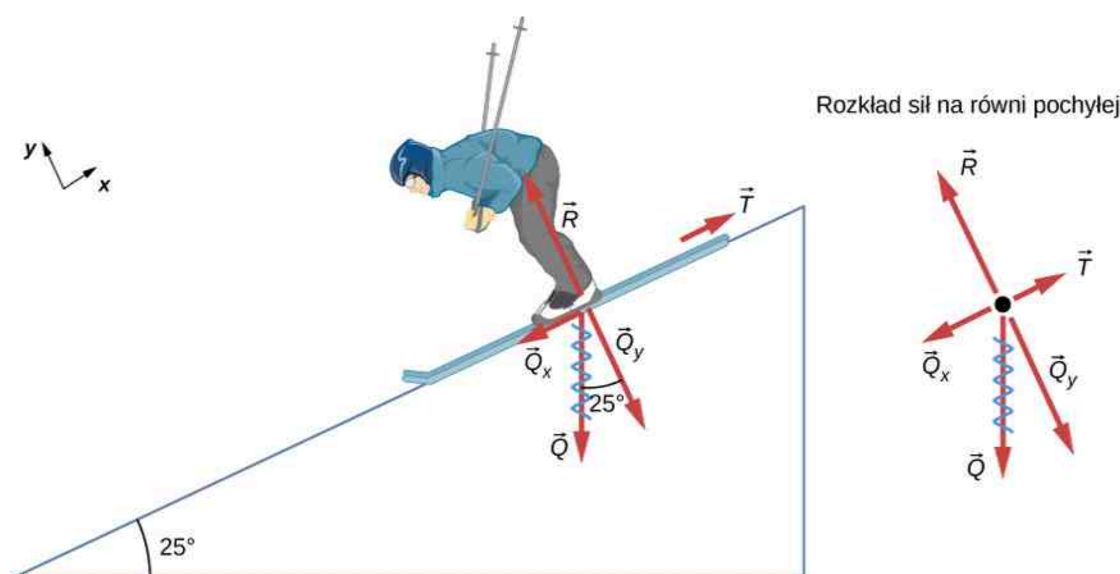
$$R = mg. \tag{5.12}$$

Siła reakcji podłoża może być mniejsza niż siła ciężkości działająca na dany obiekt, jeśli obiekt znajduje się na nachylonej powierzchni.

Przykład 5.12

Ciężar na równi pochyłej

Rozpatrzmy przykład narciarza zjeżdżającego po stoku narciarskim, tak jak pokazano to na Rysunku 5.22. Jego masa wraz ze sprzętem wynosi 60 kg. (a) Jakie jest przyspieszenie narciarza, gdy zaniedbamy siłę tarcia? (b) Jakie przyspieszenie uzyska narciarz, jeżeli siła tarcia wynosi 45 N?



Rysunek 5.22 Ponieważ przyspieszenie narciarza jest równoległe do powierzchni stoku, łatwo jest przeanalizować dynamikę jego ruchu, przyjmując obrócony układ współrzędnych jak na rysunku. Siła $\vec{R}$ jest prostopadła do stoku, siła $\vec{T}$ to siła równoległa do stoku, a siła ciężkości $\vec{Q}$ rozkłada się na dwie składowe, Q_y i Q_x. Strzałka na rysunku, którą oznaczono siłę $\vec{Q}$, jest przekreślona wężykiem, aby zaznaczyć, że została zastąpiona przez swoje składowe. Z kolei siła $\vec{R}$ równoważy siłę Q_y, więc w kierunku prostopadłym do równi układ nie doznaje przyspieszenia. Jednakże siła tarcia T jest mniejsza niż Q_x, dlatego narciarz porusza się w dół stoku z przyspieszeniem o kierunku równoległym do stoku.

Strategia rozwiązania

Jest to problem dwuwymiarowy, ponieważ nie wszystkie siły działające na narciarza na stoku w analizowanym układzie są do siebie równoległe. Należy zastosować podobne podejście, które wykorzystaliśmy już w przypadku układów dwuwymiarowych w kinematyce. Na początku należy wybrać wygodny do rozwiązania zadania układ współrzędnych i zrzutować wektory na jego osie, tworząc dwa osobne równania ruchu do rozwiązania. Najbardziej wygodnym układem współrzędnych jest taki, który ma jedną współrzędną równoległą do stoku i drugą do niego prostopadłą (ruchy wzdłuż wzajemnie prostopadłych osi są niezależne). Zastosujemy oznaczenia odpowiednio x i y dla kierunku równoległego i prostopadłego. Taki wybór osi upraszcza bardzo to zagadnienie, ponieważ ruch narciarza nie ma składowej w kierunku prostopadłym do

stoku. Siła tarcia stanowi siłę oporu w tym ruchu i jest zawsze równoległa do stoku. Siła Q_x jest równoległa do stoku i ma zwrot zgodny z kierunkiem ruchu narciarza. Problem ten możemy łatwo rozwiązać, tworząc dwa osobne równania Newtona dotyczące sił działających w dwóch osobnych kierunkach x i y.

Rozwiązanie

Wartość składowej siły ciężkości równoległej do stoku wynosi

$$Q_x = Q \sin 25^\circ = mg \sin 25^\circ,$$

natomiast składowa prostopadła do stoku to:

$$Q_y = Q \cos 25^\circ = mg \cos 25^\circ.$$

a. Zaniedbajmy siłę tarcia w układzie. Ponieważ przyspieszenie całkowite narciarza ma kierunek równoległy do stoku, wystarczy, że przeanalizujemy wszystkie siły działające w tym kierunku. Siły prostopadłe do stoku zerują się, narciarz nie ma przecież przyspieszenia w kierunku y. Siły równoległe do równi to składowa siły ciężkości równoległa do stoku Q_x oraz siła tarcia T. Zastosujmy drugą zasadę dynamiki Newtona, aby utworzyć równanie sił jedynie w kierunku poziomym:

$$a_x = \frac{F_{\text{wypx}}}{m},$$

gdzie $F_{\text{wyp}x} = Q_X - mg \sin 25^\circ$, zakładając chwilowo, że tarcie jest zaniedbywalne. Zatem

$$a_x = \frac{F_{\text{wyp}x}}{m} = \frac{mg \sin 25°}{m} = g \sin 25° = 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 0{,}4226 = 4{,}14 \text{ m/s}^2 ,$$

to poszukiwane przyspieszenie narciarza.

b. Uwzględniamy znaną wartość siły tarcia oraz jej kierunek równoległy do stoku. Wypadkowa siła działająca na narciarza w kierunku x wynosi:

$$F_{\text{wyp}x} = Q_x - T.$$

Wstawiając obliczoną siłę wypadkową w kierunku x do równania wyrażającego drugie prawo Newtona $a_x = F_{\text{wyp}x}/m,$, otrzymujemy

$$a_x = \frac{F_{\text{wyp}x}}{m} = \frac{Q_x - T}{m} = \frac{mg \sin 25^\circ - T}{m}.$$

Podstawiając znane z treści zadania wartość otrzymujemy

$$a_x = \frac{(60{,}0 \text{ kg}) \left(9{,}81 \text{ m/s}^2\right) (0{,}4226) - 45{,}0 \text{ N}}{60{,}0 \text{ kg}},$$

a stąd wartość przyspieszenia narciarza:

$$a_x = 3{,}39 \text{ m/s}^2,$$

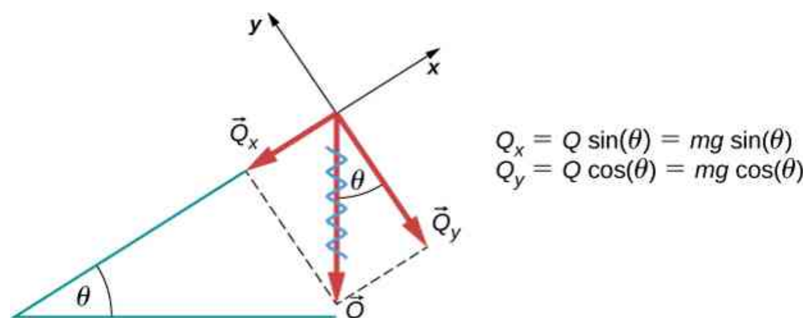
co stanowi wartość przyspieszenia skierowanego równolegle do równi pochyłej, gdy uwzględnia się siłę tarcia o wartości 45 N.

Znaczenie

Gdy siła tarcia jest uwzględniana, przyspieszenie ciała zsuwającego się z równi pochyłej ma mniejszą wartość niż wtedy, gdy to tarcie zaniedbujemy. Przy zaniedbaniu zjawiska tarcia, przyspieszenie ciała zsuwającego się z równi wynosi $a = g \sin \theta$, niezależnie od masy tego ciała. Jak już wcześniej omówiono, wszystkie obiekty opadają swobodnie w polu grawitacyjnym z tym samym przyspieszeniem tylko wtedy, gdy zaniedbamy wpływ sił oporu powietrza. Analogicznie, wszystkie ciała, niezależnie od masy, zsuwają się z tym samym przyspieszeniem (dla tego samego kąta nachylenia równi), jeśli zaniedbamy zjawisko tarcia między ciałem a równią.

Gdy ciało spoczywa nieruchomo na równi pochyłej o kącie nachylenia θ, siła ciężkości działająca na to ciało rozkłada

się na dwie składowe: prostopadłą do powierzchni Q_y oraz równoległą do powierzchni Q_x (Rysunek 5.23). Siła normalna do powierzchni stoku to $\vec{R}$ i ma taką samą wartość jak składowa prostopadła siły ciężkości, lecz przeciwny zwrot. Z kolei składowa Q_x nadaje ciału przyspieszenie w dół równi.



Rysunek 5.23 Obiekt spoczywający na równi pochyłej o kącie nachylenia θ.

Bądź uważny podczas rozkładania siły ciężkości na jej składowe. Gdy równia posiada kąt nachylenia θ, wówczas wartości składowych wynoszą odpowiednio:

$$Q_x = Q \sin \theta = mg \sin \theta$$

oraz

$$Q_y = Q \cos \theta = mg \cos \theta.$$

Zastosujmy równanie opisujące drugie prawo Newtona, aby zapisać wyrażenie na reakcji działającą na ciało spoczywające na równi pochyłej:

$$R = mg \cos \theta. \tag{5.13}$$

Zamiast uczyć się powyższych równań na pamięć, naucz się je wyprowadzać. W tym celu narysuj prostokąt rozpięty przez składowe siły ciężkości. Wektor siły ciężkości leży na jego przekątnej. Kąt nachylenia równi θ równy jest kątowi między wektorami Q i Q_y, co wynika z podobieństwa trójkątów. Mając tę wiedzę i stosując odpowiednie zależności trygonometryczne, możemy łatwo wyznaczyć składowe siły Q:

$$\cos \theta = \frac{Q_y}{Q} \Rightarrow Q_y = Q \cos \theta = mg \cos \theta,$$
$$\sin \theta = \frac{Q_x}{Q} \Rightarrow Q_x = Q \sin \theta = mg \sin \theta.$$



5.8 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Siła o wartości 1150 N działa równolegle do rampy, na którą wciągany jest sejf ważący 250 kg. Załóż, że między sejfem a rampą nie ma tarcia, a kąt nachylenia równi wynosi 17°.

a. Jakie jest przyspieszenie sejfu podczas wsuwania, jeżeli nie uwzględnimy tarcia?
b. Jeżeli uwzględnimy siłę tarcia o wartości 120 N między sejfem a rampą, jakie przyspieszenie uzyska wówczas sejf?

Siły naciągu

Siłą naciągu (ang. **tension**) nazywamy siłę powstającą na skutek reakcji na zewnętrzną siłę napinającą. W praktyce jest to siła, z którą rozciągane jest elastyczne długie ciało, np. sznurek bądź nić.

Elastyczne elementy, takie jak sznurek, lina, łańcuch, drut lub kabel, wywierają siłę naciągu skierowaną równolegle do ich długości, siła przenoszona przez nie jest naprężeniem o kierunku równoległym do łącznika. Rozważmy sens następującego zdania: „Nie możesz popchnąć liny”. Siła naciągu zawsze skierowana jest do zewnątrz odcinka liny.

Rozpatrzmy osobę trzymającą pewien obiekt zawieszony na sznurku. Sytuację tę pokazano na Rysunku 5.24. Gdy

obiekt ważący 5 kg znajduje się w spoczynku, jego przyspieszenie całkowite wynosi zero (ponieważ działa na niego zerowa siła wypadkowa). Jedyne siły zewnętrzne działające na obiekt to jego siła ciężkości oraz siła naciągu sznura. Zatem:

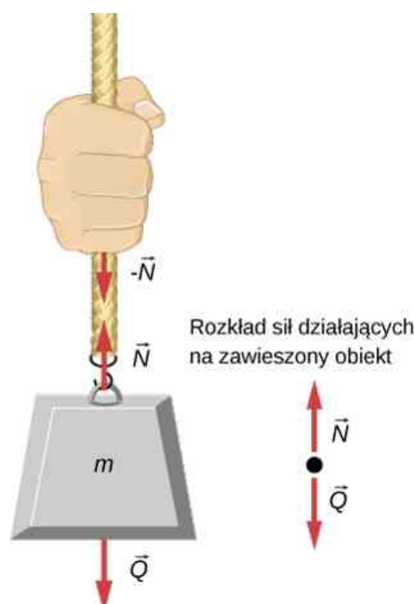
$$F_{\text{wyp}} = N - Q = 0,$$

gdzie N i Q to wartości odpowiednio siły naciągu sznura i siły ciężkości obiektu. Znaki przy siłach świadczą o ich przeciwnych zwrotach. Zgodnie z drugim prawem Newtona dla tego układu, siła naciągu sznurka równoważy siłę ciężkości analizowanej masy:

$$N = Q = mg. \tag{5.14}$$

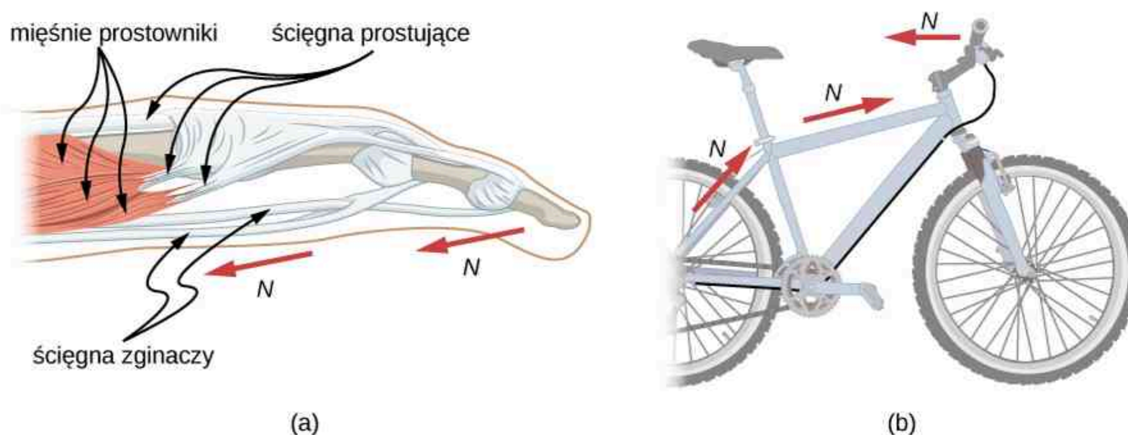
Dlatego w przypadku obiektu o masie 5 kg zawieszonego na sznurze (traktując sznur jako nieważki) możemy zapisać: $N = mg = (5{,}00\ \text{kg})\left(9{,}81\ \text{m/s}^2\right) = 49{,}0\ \text{N}$.

Gdybyśmy przecięli kawałek sznura i zamiast niego umieścili sprężynę, uległaby ona rozciągnięciu o długość odpowiadającą sile 49 N. Pozwoliłoby to na bezpośrednią obserwację siły naciągu sznura.



Rysunek 5.24 Doskonale giętki element (tj. niewymagający jakiejkolwiek siły, by go zgiąć), np. sznur, przenosi siłę naciągu $\vec{N}$, jest ona zawsze równoległa do rozciągniętego sznura (patrz powyższy rysunek). Zgodnie z trzecim prawem Newtona sznur wywiera siły identyczne co do wartości, lecz przeciwnie skierowane (zaniedbując masę sznura). Naciąg między sznurem a ręką jest w każdym punkcie liny taki sam, więc jeśli się zna siłę naciągu liny w jednym z jej punktów, wyznaczyć można siłę naciągu w każdym innym punkcie.

Elastyczne obiekty są powszechnie stosowane do przenoszenia sił wzdłuż lub wokół różnych elementów, jak ma to miejsce na przykład w przypadku ludzkich ścięgien czy linki hamulca rowerowego. Gdy tarcie w układzie nie występuje, naprężenia przenoszone są bez strat. Zmienia się jedynie kierunek siły, pozostaje on zawsze równoległy do giętkiego elementu, tak jak pokazano to na Rysunku 5.25.

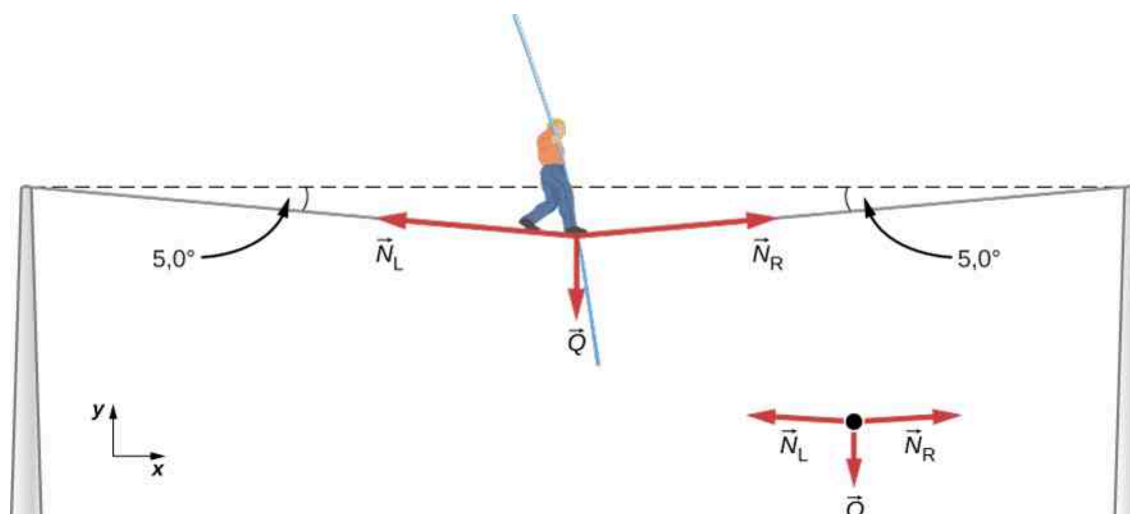


Rysunek 5.25 (a) Ścięgna palców przenoszą siły N od mięśni dłoni do palców, zwykle zmieniając kierunek sił, a nie ich wartość. (b) Linka hamulca rowerowego przenosi siłę naciągu N od dźwigni hamulcowej umieszczonej na kierownicy aż do samego hamulca przy kole. Tak jak w przypadku mięśni, kierunek sił ulega zmianie, ale ich wartość się nie zmienia.

Przykład 5.13

Jakie siły działają podczas spaceru po linie?

Oblicz siłę naciągu liny, po której spaceruje linoskoczek o masie 70 kg, jak pokazano na Rysunku 5.26.



Rysunek 5.26 Linoskoczek o masie 70 kg idąc po linie powoduje jej odchylenie od położenia poziomego o $5{,}0^\circ$. Analizowany układ stanowi punkt, w którym na poniższym rysunku stoi obecnie linoskoczek.

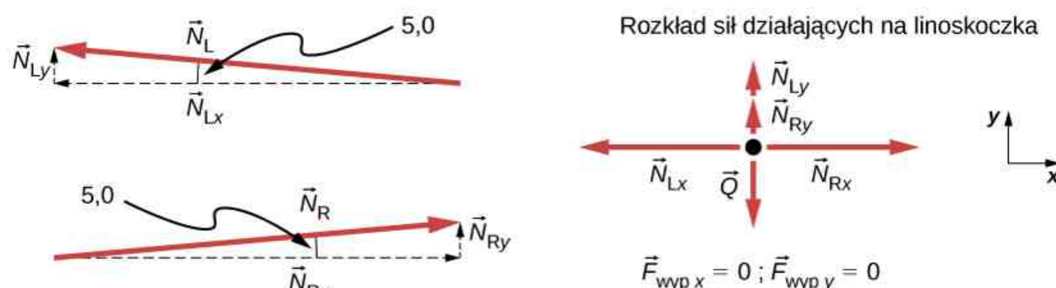
Strategia rozwiązania

Jak widać na Rysunku 5.26, lina ugięła się pod ciężarem spacerującego po niej linoskoczka. Dlatego siła naciągu po każdej stronie linoskoczka ma składową skierowaną w górę, przez co może go podtrzymywać na linie. Siły to wielkości wektorowe, reprezentowane przez strzałki, które mają ten sam kierunek, co siły, a długości proporcjonalne do ich wielkości. Jedyne siły zewnętrzne działające na linoskoczka to $\vec{Q}$ i dwie siły naciągu liny: $\vec{N}_L$ (po lewej od linoskoczka) i $\vec{N}_R$ (po jego prawej stronie). Ciężar liny możemy uznać podczas rozwiązywania tego zadania za zaniedbywalny. Wypadkowa siła w układzie wynosi zero, bo układ znajduje się w równowadze. Możemy za pomocą trygonometrii znaleźć poszczególne siły naciągu liny. Na samym początku warto zauważyć, że wartości sił naciągu liny po lewej i prawej stronie linoskoczka są takie same. Wiemy to, ponieważ nie występuje w układzie przyspieszenie mające kierunek poziomy, a jedyne siły działające w tym kierunku to $\vec{N}_L$ i $\vec{N}_R$. Składowe poziome tych sił równoważą się.

Kiedy mamy do rozwiązania problem dwuwymiarowy, w którym nie wszystkie wektory są do siebie równoległe, najprostszym sposobem rozwiązania tego problemu jest wybranie wygodnego dla nas układu współrzędnych i zrzutowanie wektorów na zdefiniowane osie. W tym przypadku najlepszy układ współrzędnych ma jedną poziomą oś (x) oraz jedną pionową (y).

Rozwiązanie

Na początku konieczne jest rozłożenie każdej z sił naciągu liny na wektory składowe. Dzięki temu będziemy mogli stworzyć dwa nowe diagramy pokazujące nam rozkłady sił odpowiednio w kierunkach x i y (jak na Rysunku 5.27).



Rysunek 5.27 Przy rozłożeniu wektorów sił na składowe pionowe i poziome, poszczególne składowe wzdłuż danej osi muszą się kompensować, ponieważ linoskoczek pozostaje w stanie równowagi. Niewielki kąt ugięcia liny świadczy o tym, że siła naciągu N jest znacznie większa niż ciężar linoskoczka Q.

Rozpatrzmy jedynie poziome składowe sił naciągu (tj. wzdłuż osi x):

$$F_{\text{wyp}x} = N_{\text{R}x} - N_{\text{L}x}.$$

Zewnętrzna siła wypadkowa w kierunku poziomym $F_{\text{wyp}x} = 0$, dopóki linoskoczek znajduje się w stanie równowagi. Więc:

$$F_{\text{wyp}x} = 0 = N_{\text{R}x} - N_{\text{L}x},$$
$$N_{\text{L}x} = N_{\text{R}x}.$$

Rzućmy okiem na Rysunek 5.27. Można zastosować wzory trygonometryczne w celu obliczenia wartości poszczególnych składowych N_L oraz N_R :

$$\cos 5{,}0° = \frac{N_{\text{L}x}}{N_{\text{L}}} \Rightarrow N_{\text{L}x} = N_{\text{L}} \cos 5{,}0°,$$
$$\cos 5{,}0° = \frac{N_{\text{R}x}}{N_{\text{R}}} \Rightarrow N_{\text{R}x} = N_{\text{R}} \cos 5{,}0°.$$

Przyrównując do siebie $N_{\text{L}x}$ i $N_{\text{R}x}$

$$N_{\text{L}} \cos 5{,}0° = N_{\text{R}} \cos 5{,}0°,$$

otrzymujemy:

$$N_{\text{L}} = N_{\text{R}} = N,$$

Teraz rozpatrzmy składowe pionowe siły naciągu liny (oznaczone z indeksem y). Jak już wspomniano, człowiek stojący na linie jest w stanie równowagi, więc $F_{\text{wyp}} = 0$. Na podstawie diagramu pokazującego rozkład sił działających na skoczka można wywnioskować, że

$$F_{\text{wyp}y} = N_{\text{L}y} + N_{\text{R}y} - Q = 0.$$

Podobnie, jak poprzednim razem, możemy użyć zależności trygonometrycznych aby znaleźć relację między $N_{\text{L}y}$,$N_{\text{R}y}$ i T. Analizując składowe poziome sił naciągu, dowiedzieliśmy się, że $N_{\text{L}} = N_{\text{R}} = T$. Zatem:

$$\sin 5{,}0^\circ = \frac{N_{Ly}}{N_L} \Rightarrow N_{Ly} = N_L \sin 5{,}0^\circ,$$
$$\sin 5{,}0^\circ = \frac{N_{Ry}}{N_R} \Rightarrow N_{Ry} = N_R \sin 5{,}0^\circ.$$

Teraz możemy podstawić znane wartości N_{Ly} i N_{Ry} do wyrażenia na siłę wypadkową w kierunku pionowym:

$$F_{wyp} = N_{Ly} + N_{Ry} - Q = 0,$$
$$F_{wyp} = N \sin 5{,}0^\circ + N \sin 5{,}0^\circ - Q = 0,$$
$$2N \sin 5{,}0^\circ - Q = 0,$$
$$2N \sin 5{,}0^\circ = Q.$$

Wynika z tego, że:

$$N = \frac{Q}{2 \sin 5{,}0^\circ} = \frac{mg}{2 \sin 5{,}0^\circ},$$

Zatem szukana siła naciągu liny wynosi:

$$N = \frac{(70{,}0\,\text{kg})\left(9{,}80\,\text{m/s}^2\right)}{2\,(0{,}0872)},$$

co po obliczeniach daje wartość:

$$N = 3\,930\,\text{N}.$$

Znaczenie

Pionowa składowa siły naciągu liny działa jak siła, która „podtrzymuje” ciężar linoskoczka. Otrzymana wartość siły naciągu liny okazała się prawie sześć razy większa niż ciężar linoskoczka, wynoszący około 686 N. Ponieważ dla małych kątów ugięcia lina pozostaje w pozycji prawie poziomej, składowa pionowa siły naciągu stanowi jedynie niewielki procent całej siły naciągu liny. Bardzo duże są wartości składowych poziomych sił naciągu, ich zwroty są przeciwne i siły te równoważą się. Zatem większa część siły naciągu liny nie jest zużywana na podtrzymanie linoskoczka na linie.

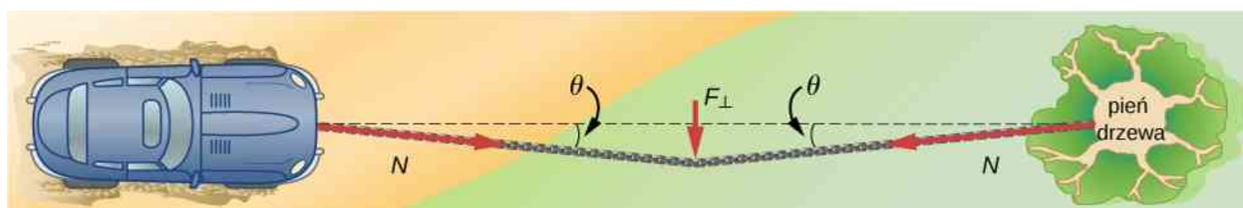
W celu osiągnięcia dużych wartości sił naciągu, należy działać siłą w kierunku prostopadłym do liny, na przykład tak, jak pokazano na Rysunku 5.26. Jak widać w Przykładzie 5.13, siła ciężkości linoskoczka jest siłą prostopadłą do liny. Widzimy również, że siła naciągu liny jest zależna od ciężaru linoskoczka według relacji

$$N = \frac{Q}{2 \sin \theta}.$$

Możemy zastosować to wyrażenie do obliczenia siły naciągu N elementu elastycznego, wywołanej działaniem prostopadłej siły ($F_\perp$) przyłożonej w środku geometrycznym elementu:

$$N = \frac{F_\perp}{2 \sin \theta}.$$

Kąt nachylenia liny do poziomu wynosi θ. W tym przypadku N rośnie wówczas, gdy kąt θ się zmniejsza. Zatem nawet niewielki ciężar spowoduje ugięcie giętkiej liny. Nieskończenie duża siła naciągu skutkowałaby zerowym kątem ugięcia liny ($\theta = 0$ i $\sin \theta = 0$). Na przykład Rysunek 5.28 przedstawia sytuację, w której konieczne jest wyciągnięcie za pomocą liny samochodu z bagna. Za każdym razem, gdy samochód porusza się do przodu, linkę holowniczą naciąga się na tyle mocno, aby utrzymywać ją w formie wyprostowanej. Siła naciągu liny wynosi: $N = \frac{F_\perp}{2 \sin \theta}$, i skoro kąt θ jest bardzo mały, to siła naciągu linki holowniczej N jest duża. Sytuacja ta wydaje się analogiczna do tej z linoskoczkiem, z wyjątkiem tego, że tutaj naprężenia przenoszone są głównie do samochodu i drzewa, nie zaś w punkcie, gdzie przyłożona została siła$F_\perp$ do linki.



Rysunek 5.28 Możemy wytworzyć duże wartości siły naciągu liny, czym spowodujemy spore przemieszczenie samochodu, działając na linę siłą prostopadłą do niej, jak pokazano na powyższym rysunku.



5.9 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Jeden koniec linki holowniczej o długości 3 metrów jest przymocowany do dużego drzewa w pobliżu samochodu. Drugi koniec przyczepiony został do samochodu, który niefortunnie ugrzązł w bagnie. Motocyklista ciągnie linę w jej geometrycznym środku, odchylając ją o 25 cm od położenia równowagi. Jeżeli działa on siłą prostopadłą do liny, wynoszącą 200 N, wyznacz siłę wywieraną na samochód w bagnie.

W podrozdziale Zastosowanie praw dynamiki Newtona, przedyskutujemy sytuacje fizyczne i układy, w których występują siły naciągu. Rozpatrzymy podobne przypadki, jak te analizowane powyżej, a także rozszerzymy je o układy niesymetryczne.

Siła tarcia

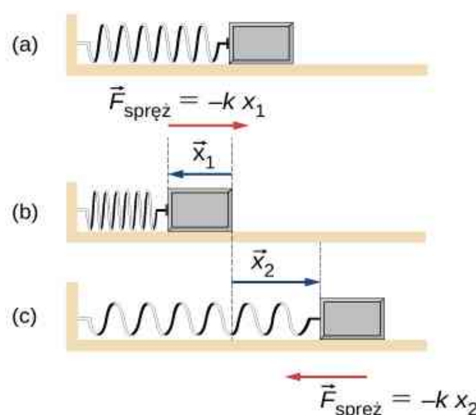
Tarcie jest siłą występującą w układach ruchomych, przeciwstawiającą się ruchowi ciała. Wyobraź sobie obiekt znajdujący się w spoczynku na płaszczyźnie. Siła wypadkowa działającą na obiekt musi wynosić zero, zatem siła ciężkości i siła reakcji powierzchni muszą się równoważyć. Jeśli powierzchnia jest nachylona pod pewnym kątem, jak ma to miejsce na przykład na równi pochyłej, siła reakcji równoważy jedną ze składowych siły ciężkości – prostopadła do powierzchni równi. Jeśli obiekt spoczywający na równi nie zsuwa się z niej, składowa równoległa siły ciężkości równoważona jest przez przeciwnie skierowaną siłę tarcia. Zjawisko tarcia wraz z przykładami jest omówione bardziej szczegółowo w następnym rozdziale.

Siły sprężystości

Sprężystość ciał to własność związana z odzyskiwaniem pierwotnego kształtu po usunięciu sił zewnętrznych wywołujących odkształcenie. Ciało odzyskuje swój kształt, ponieważ w układzie działa siła sprężystości, która powoduje powrót do położenia równowagi. Ma ona zwrot przeciwny niż kierunek wychylenia. Relacja między siłą sprężystości a wychyleniem została sformułowana w prawie Hooke'a. W matematycznej formie wygląda to następująco:

$$\vec{F} = -k\vec{x}.$$

Współczynnik proporcjonalności k w prawie Hooke'a to tzw. stała sprężystości układu. Siła sprężystości ma kierunek równoległy do wychylenia, a zwrot przeciwny do wektora przemieszczenia obiektu (patrz Rysunek 5.29). Przemieszczenie obiektu sprężystego musi być mierzone od punktu początkowego $x = 0$, gdy sprężyna jest nienaprężona.



Rysunek 5.29 Sprężyna na powyższym rysunku wywiera na bloczek siłę proporcjonalną do jej odkształcenia, gdy jest ściskana czy rozciągana. Jednak gdy sprężyna znajduje się w stanie spoczynku (nie jest ściśnięta ani nie rozciągnięta), nie wywiera żadnej siły na bloczek. (b) Sprężynę ściśnięto o $\Delta\vec{x}_1$, w efekcie wywiera ona siłę przywracającą położenie równowagi $-k\Delta\vec{x}_1$, skierowaną w prawo (c) Sprężynę rozciągnięto o $\Delta\vec{x}_2$, siła sprężystości $-k\Delta\vec{x}_2$ skierowana jest wówczas w lewo.

Siły rzeczywiste i inercjalne układy odniesienia

Istnieje w przyrodzie wiele typów sił: niektóre z nich to siły rzeczywiste, natomiast inne to siły pozorne. *Siły rzeczywiste* mają jakieś zdefiniowane fizyczne pochodzenie, na przykład przyciąganie grawitacyjne. W przeciwieństwie do nich **siły pozorne** pojawiają się w przypadkach, gdy obserwator znajduje się w układzie odniesienia doznającym przyspieszenia czyli nieinercjalnym. Układ ten może obracać się (jak np. karuzela) lub posiadać przyspieszenie liniowe (jak np. zwalniający samochód). Ciekawym przykładem może być to, że jeśli satelita porusza się na północ nad półkulą północną Ziemi, to obserwatorowi stojącemu na Ziemi będzie się wydawało, że doświadcza on działania siły skierowanej na zachód, która nie ma żadnej fizycznej przyczyny. Ziemia obraca się na wschód i względem satelity porusza się na wschód. W układzie odniesienia związanym z Ziemią wygląda to tak, jakby siła wywierana na satelitę skierowana na zachód, lub pogwałcona zostałaby pierwsza zasada dynamiki Newtona. Siły pozorne możemy identyfikować, zadając sobie pytanie: „Jaka jest w danym przypadku siła reakcji?”. Gdy nie możemy jej wskazać, to siła jest pozorna. W przykładzie z satelitą krążącym nad Ziemią siłą reakcji musiałaby być siła wywierana na Ziemię, skierowana na wschód. Inercjalny układ odniesienia to taki, w którym wszystkie siły są rzeczywiste, bądź -równoważnie - taki, w którym zasady dynamiki Newtona mają prostą postać podaną w tym rozdziale.

Prędkość kątowa obrotu Ziemi wokół własnej osi jest na tyle niewielka, że można Ziemię traktować jako inercjalny układ odniesienia. Aby zaobserwować siły pozorne związane z ruchem obrotowym Ziemi, należy przeprowadzić bardzo dokładne pomiary. Na przykład modele obrazujące zachowanie się pogody czy też prądów oceanicznych często wymagają dokładnych obliczeń i uwzględnienia efektów niewielkich odstępstw od praw Newtona (Rysunek 5.30).



Rysunek 5.30 Huragan Fran został zaobserwowany w okolicach południowo-wschodniego wybrzeża Stanów Zjednoczonych we wrześniu 1996 roku. Zwróć uwagę na charakterystyczne „oko” huraganu w jego centrum. Jest to efekt występowania w układzie siły Coriolisa, powodującej odchylenie toru ruchu obiektów w układzie odniesienia obracającym się, takim jak Ziemia.

Kluczowym kryterium pozwalającym zaklasyfikować analizowany układ jako inercjalny jest brak przyspieszenia lub obrotu względem znanego, nieruchomego układu odniesienia. Jeśli nie zostanie zaznaczone inaczej, wszystkie zagadnienia rozważane w tym podręczniku analizowane będą w układach inercjalnych.

Siły omawiane w ramach niniejszego rozdziału są siłami rzeczywistymi, lecz nie są to jedyne siły rzeczywiste. Siły działające podczas podnoszenia przedmiotów lub siła odrzutu są bardziej skomplikowanymi siłami rzeczywistymi. Czy można powiedzieć, że jedne siły są bardziej podstawowe niż inne? Czy niektóre z nich stanowią przejawy tej samej siły? Odpowiedź na oba pytania brzmi: tak, a więcej dowiesz się, studiując zagadnienia z zakresu fizyki współczesnej.



Przeanalizuj różne rodzaje ruchów i sił w za pomocą symulacji (https://openstaxcollege.org/l/21ramp) . Wykonaj symulacje, zmieniając parametry sił i ruchu przedmiotów codziennego użytku. Przeanalizuj również zależności sił, energii czy pracy.



Wykonaj ćwiczenie, polegające na ściskaniu i rozciąganiu sprężyny, jak to pokazano w materiale interaktywnym (https://openstaxcollege.org/l/21hookeslaw) , i przeanalizuj relacje między siłami, stałymi sprężystości i zmianami ich długości. Spróbuj zasymulować również sytuację, w której dwie sprężyny połączymy szeregowo i równolegle.

5.7 | Rozkłady sił działających na ciała

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- wyjaśniać zasady rysowania diagramów sił działających na ciała;
- tworzyć tego typu diagramy dla różnych sytuacji fizycznych.

Istotnym krokiem rozwiązania zagadnienia fizycznego z zakresu dynamiki jest rozpatrzenie wszystkich sił działających na analizowany element układu. W niniejszym podrozdziale zbadamy wiele sytuacji, aby nauczyć się, jak przeprowadzić taką analizę w sposób graficzny. Pamiętaj, że rysunek sił działających na ciało powinien uwzględniać jedynie siły zewnętrzne. Analizowane sytuacje mogą dotyczyć ciał spoczywających bądź poruszających się ruchem jednostajnym, gdzie stosujemy pierwsze prawo Newtona ($F_{\text{wyp}} = 0$), lub ciał przyspieszających ($F_{\text{wyp}} \neq 0$).

W podrozdziale Pojęcie siły sformułowaliśmy podstawowe zasady tworzenia diagramu ilustrującego rozkład siły działających na dane ciało. W tym podrozdziale omówimy to zagadnienie bardziej szczegółowo.

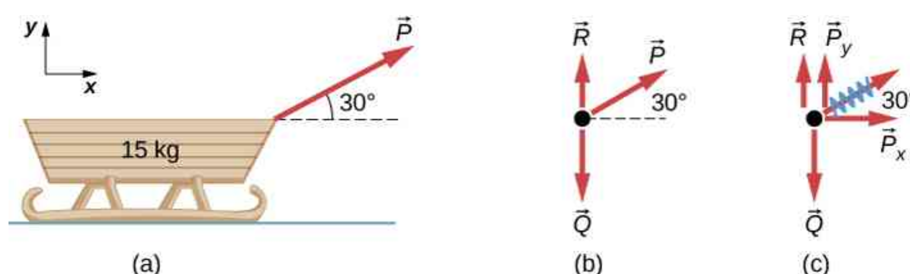
Tworzenie diagramów sił działających na analizowany element układu

Zapoznaj się z kilkoma zasadami rysowania diagramów sił działających na ciało:

1. Narysuj analizowany przez ciebie obiekt (to może być bardzo schematyczny rysunek). Możesz zacząć od zakreślenia badanego obiektu (ciała), aby skupić uwagę na siłach działających na to ciało. Jeżeli traktujesz ciało jako punktowe (jego kształt i wielkość są nieistotne), to możesz zobrazować je jako punkt, zwykle wygodnie jest umieścić badane ciało w początku układu współrzędnych xy.
2. Narysuj wszystkie działające na to ciało siły, uwzględniając ich wartość, kierunek i zwrot. Uwzględnij każdy typ sił, który analizowaliśmy w poprzednich podrozdziałach. Pamiętaj jednak, te siły, które ciało wywiera na swoje otoczenie, oraz siły wewnętrzne nie powinny zostać uwzględnione.
3. Nadaj teraz swojemu diagramowi bardziej szczegółową formę, rozkładając siły na składowe x i y (jest to bardzo przydatne przy rozwiązywania zagadnień z wykorzystaniem pierwszej i drugiej zasady dynamiki). Dokonując tego rozkładu przekreślaj wyjściową siłę wężykiem, aby pamiętać, że nie należy już jej brać pod uwagę (została w sposób całkowicie równoważny zastąpiona przez swoje składowe).
4. Jeżeli w układzie znajduje się więcej niż jedno ciało, narysuj diagram sił osobno dla każdego z nich w ten sam sposób.

Uwaga: Jeżeli układ ma pewne przyspieszenie, nie nanosimy go bezpośrednio na diagram sił działających na ciało. Możemy zaznaczyć je w formie wektora obok naszego rysunku. Warto użyć innego koloru, by zaznaczyć, że wektor przyspieszenia nie jest częścią rozkładu sił.

Zastosujmy to podejście do przykładu znajdującego się na rysunku Rysunek 5.31(a), pokazującego sanie znajdujące się na płaszczyźnie. Na rysunku (b), pokazaliśmy rysunek rozkładu sił działających na sanie zarówno bez (b), jak i z rozłożeniem (c) siły P na składowe wzdłuż osi x - i y.



Rysunek 5.31 (a) Poruszające się sanie; (b) rozkład sił działających na sanie; (c) ten sam rozkład uwzględniający rozłożoną na składowe siłę P.

Przykład 5.14

Klocki na równi pochyłej

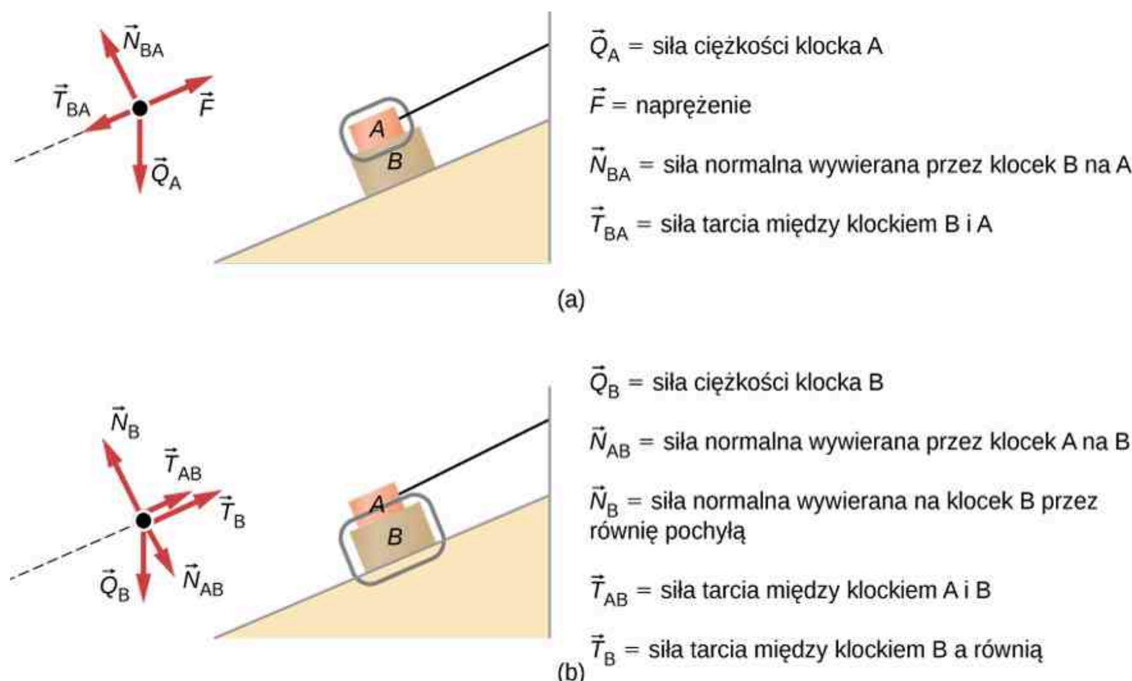
Narysuj rozkład sił działających na ciała A i B na równi pochyłej, jak pokazano na Rysunku 5.32.

Strategia rozwiązania

Zastosujmy do rozwiązania tego zagadnienia metodą opisaną wyżej.

Rozwiązanie

Na początku zaczniemy analizować jedynie obiekt A na Rysunku 5.32(a). Klocek ten zaznaczono szarą obwódką i oznaczono jako A.



Rysunek 5.32 (a) Rozkład sił działających na element A układu. (b) Diagram sił działających na obiekt B. Porównując oba rysunki widzimy, że siła tarcia skierowana jest na nich w przeciwne strony. Dzieje się tak, ponieważ ciało A doświadcza siły, która pcha je w prawo, przez co siła tarcia musi być zwrócona w lewą stronę. W przypadku ciała B, siła ta zwrócona jest odwrotnie. Siła tarcia zawsze ma zwrot przeciwny do kierunku ruchu.

Rozpatrzmy wszystkie siły działające na ciała na równi. Siła ciężkości działa na każde z nich i jest skierowana w dół, prostopadle do podstawy równi. Siła naciągu pochodząca od sznura, który wciąga w górę równi dwa klocki, zaznaczona została od obiektu w górę równi, równolegle do jej powierzchni. Klocek A posiada jedną powierzchnię styczną z klockiem B, dlatego też doświadcza działania siły prostopadłej do powierzchni styku. Źródłem tej siły jest obiekt B. Ponieważ obiekt B dąży do zsunięcia się z równi, obiekt A będzie się przemieszczał względem niego w górę. Siła tarcia T_{BA} jest więc skierowana w dół.

Klocek B doświadcza działania dwóch sił nacisku. Jedna z nich pochodzi od kontaktu z równią pochyłą (R_B), a druga z kontaktu z klockiem A (R_{AB}). Działą też na niego siła tarcia T_B skierowana w górę równi, równolegle do niej. Widoczna na rysunku siła tarcia T_{AB} wynika z kontaktu dwóch klocków ze sobą. Zwrot tej siły jest taki sam, jak siły T_B.

Znaczenie

Każdy z analizowanych obiektów w układzie został zakreślony na szaro. Gdy pierwszy raz podchodzisz do zagadnienia związanego z analizą rozkładu sił działających na ciała, zakreślanie kolejnych ciał może ci znacząco pomóc w odseparowaniu od siebie elementów układu. Dzięki temu zauważysz, które siły są rzeczywiście zewnętrzne i istotne, a które pochodzą z wewnątrz układu.

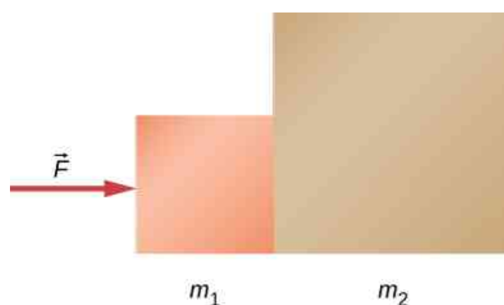
Przykład 5.15

Dwa złączone klocki

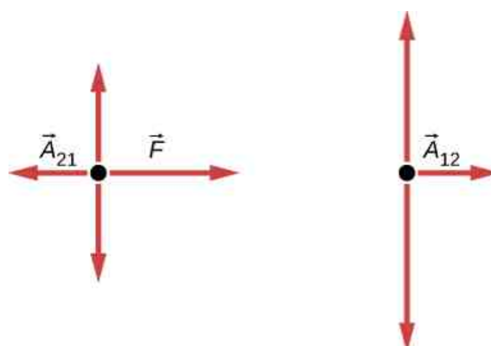
Przyłożono siłę do dwóch złączonych ze sobą klocków, jak pokazano na rysunku.

Strategia rozwiązania

Narysuj rozkład sił działających na każdy z klocków. Zastosuj trzecie prawo Newtona, aby zauważyć, co dzieje się na styku dwóch ciał.



Rozwiązanie



Znaczenie

Siła $\vec{A}_{21}$ to siła reakcji wywierana przez klocek 2 na 1. Z kolei siła $\vec{A}_{12}$ to siła reakcji wywierana przez klocek 1 na 2.

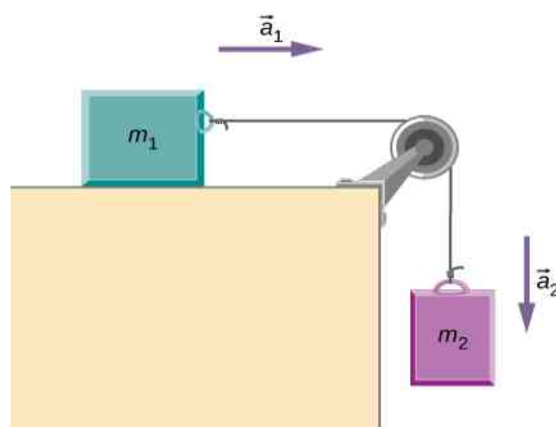
Przykład 5.16

Klocek na stole

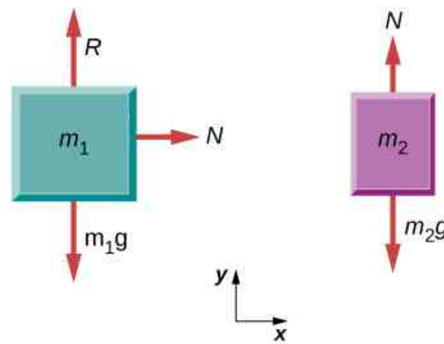
Na stole spoczywa klocek, jak na poniższym rysunku. Przez nieważki bloczek przerzucono nieważką nić, którą połączono klocek na stole z drugim klockiem, swobodnie wiszącym w powietrzu. Klocek drugi o masie m_2 , na który działa siła ciężkości, powoduje występowanie w układzie przyspieszenia.

Strategia rozwiązania

Załóżmy, że nić jest nieważka i nierozciągliwa. Wówczas nie musimy traktować jej jako osobny obiekt w układzie. Narysujmy diagramy sił działających na dwa klocki.



Rozwiązanie

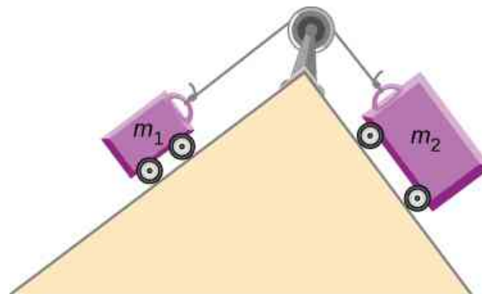


Znaczenie

Każdy z klocków ma przyspieszenie odpowiednio $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$. Jako że nić jest nierozciągliwa, obydwa klocki mają to samo przyspieszenie, $\vec{a}_1 = \vec{a}_2$. Zatem rozwiązując to zagadnienie, możemy przyspieszenie liniowe układu nazwać po prostu $\vec{a}$. Tworzymy dwa diagramy sił, osobno dla każdego z klocków. Umożliwi to znalezienie siły naciągu nici N poprzez rozwiązanie układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi. Ponieważ nić traktujemy jako nieważką, siła naciągu nici jest jednakowa na całej jej długości.



5.10 Sprawdź, czy rozumiesz. (a) Narysuj wszystkie siły działające na obydwie masy pokazane na poniższym rysunku. (b) Wykonaj podobny rysunek, rozkładając siły ciężkości dwóch ciał na równi na wektory składowe. Użyj układów współrzędnych z osiami x wzdłuż równi.





Zapoznaj się z symulacją (https://openstaxcollege.org/l/21forcemotion) aby przeanalizować, jak siły zewnętrzne wpływają na ruch obiektów. Skorzystaj z rysunków zawierających rozkłady sił działających na te ciała. Możesz również narysować wykresy pokazujące zależności prędkości i przyspieszenia ciała. Wyjaśnij, jak te zależności są ze sobą powiązane.

PODSUMOWANIE ROZDZIAŁU 5

KLUCZOWE POJĘCIA

bezwładność (ang. inertia) cecha ciała polegająca na tym, że ciało dąży do zachowania stanu ruchu

ciężar (ang. weight) siła $\vec{Q}$ będąca wynikiem oddziaływania grawitacyjnego między kulą Ziemską a masą m znajdująca się w jej polu grawitacyjnym

druga zasada dynamiki Newtona (ang. Newton's second law of motion) Jeśli siły zewnętrzne działające na ciało nie równoważą się, to ciało porusza się z przyspieszeniem wprost proporcjonalnym do siły wypadkowej, a odwrotnie proporcjonalnym do masy ciała.

dynamika (ang. dynamics) dział mechaniki zajmujący się opisem ruchu ciał pod działaniem sił

inercjalny układ odniesienia (ang. inertial reference frame) układ odniesienia, względem którego każde ciało, niepodlegające działaniu zewnętrznej siły, porusza się bez przyspieszenia

niuton (ang. newton) jednostka siły w układzie SI; 1 N to siła, która obiektowi o masie 1 kg nadaje przyspieszenie o wartości $1\ \mathrm{m/s}^2$

odrzut (ang. thrust) siła reakcji powodująca ruch ciała do przodu w reakcji na siłę wsteczną

pierwsza zasada dynamiki Newtona (ang. Newton's first law of motion) Jeżeli na ciało nie działają siły zewnętrzne, lub działające siły równoważą się, to ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym (znane również pod nazwą zasady bezwładności)

prawo Hooke'a (ang. Hooke's law) prawo mechaniki klasycznej związane ze sprężystością ciał, mówi ono, że każde odkształcenie bądź wychylenie ciała z położenia równowagi pod wpływem siły jest proporcjonalne do tej siły

rozkład sił działających na ciało (ang. free body diagram) rysunek zawierający wszystkie siły zewnętrzne działające na dany obiekt; z reguły obiekt obrazuje się jako punkt, a siły na niego działające jako wektory o odpowiednim zwrocie, kierunku i długości

siła (ang. force) wielkość fizyczna będąca miarą oddziaływań fizycznych między obiektami; jest wielkością wektorową, może być opisana jako wielokrotność odpowiednio zdefiniowanej jednostki i wzorca

siła nacisku reakcji (ang. normal force) siła równoważąca ciężar danego ciała; jest prostopadła do powierzchni kontaktu dwóch ciał; siła ta jest wywierana przez powierzchnię dążącą do utrzymania na niej niezerowego ciężaru

siła naciągu (ang. tension) siła rozciągająca, działająca wzdłuż rozciągliwego elementu, takiego jak kabel czy lina

siła wypadkowa (ang. net external force) suma wektorowa wszystkich sił działających na ciało

siła zewnętrzna (ang. external force) siła działająca na obiekt spoza przyjętego do analizy układu

spadek swobodny (ang. free fall) swobodny ruch ciał pod wpływem działania jedynie siły ciężkości

trzecia zasada dynamiki Newtona (ang. Newton's third law of motion) W inercjalnym układzie odniesienia siły wzajemnego oddziaływania dwóch ciał mają takie same wartości, taki sam kierunek, lecz przeciwne zwroty i różne punkty przyłożenia.

zasada bezwładności (ang. law of inertia) patrz: pierwsza zasada dynamiki Netwona

NAJWAŻNIEJSZE WZORY

Siła wypadkowa zewnętrzna	$\vec{F}_{\text{wyp}} = \sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots$
Pierwsze prawo Newtona	$\vec{v} = \text{const, gdy } \vec{F}_{\text{wyp}} = \vec{0}\ \mathrm{N}$
Drugie prawo Newtona, zapis wektorowy	$\vec{F}_{\text{wyp}} = \sum \vec{F} = m\vec{a}$
Drugie prawo Newtona, zapis skalarny	$F_{\text{wyp}} = ma$
Drugie prawo Netwona, zapis wektorowy przy rozkładzie sił na składowe	$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x,\ \sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y$ oraz $\sum \vec{F}_z = m\vec{a}_z$

Drugie prawo Newtona wyrażone za pomocą pędu	$\vec{F}_{\text{wyp}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$
Definicja siły ciężkości, zapis wektorowy	$\vec{Q} = m\vec{g}$
Definicja siły ciężkości, zapis skalarny	$Q = mg$
Trzecie prawo Newtona	$\vec{F}_{\text{AB}} = -\vec{F}_{\text{BA}}$
Siła reakcji podłoża dla obiektu spoczywającego na równi poziomej, zapis wektorowy	$\vec{R} = -m\vec{g}$
Siła reakcji podłoża dla obiektu spoczywającego na równi poziomej, zapis skalarny	$R = mg$
Siła reakcji podłoża dla obiektu spoczywającego na równi pochyłej, zapis wektorowy	$R = mg \cdot \cos\theta$
Siła naciągu w układzie masy m zawieszonej na linie, zapis skalarny	$N = Q = mg$

PODSUMOWANIE

5.1 Pojęcie siły

- Dynamika to dział fizyki zajmujący się wyjaśnieniem, jak działające siły wpływają na ruch ciał, podczas gdy kinematyka jedynie opisuje z matematycznego punktu widzenia parametry ruchu.
- Siła może być związana z pchaniem lub ciągnięciem ciała, definiowana może być na wiele sposobów. Jest wielkością wektorową, ma więc kierunek, zwrot i długość.
- Siły zewnętrzne to dowolne siły z zewnątrz układu, działające na dany obiekt. Diagram ilustrujący rozkład sił działających na ciało pozwala na przejrzystą ich analizę.
- Jednostką siły w układzie SI jest niuton (1 N).

5.2 Pierwsza zasada dynamiki Newtona

- Jak mówi pierwsza zasada dynamiki Newtona, zawsze musi istnieć przyczyna zmiany prędkości (zarówno jej wartości, jak i kierunku). To prawo znane jest również pod nazwą „zasady bezwładności”.
- Zjawisko tarcia objawia się w formie siły zewnętrznej powodującej zwolnienie poruszających się obiektów.
- Bezwładnością nazywamy dążenie obiektów do pozostawania w spoczynku lub w ruchu. Bezwładność ciał utożsamić można z ich masą.
- Jeśli w danym układzie odniesienia prędkość ciała, na które nie działają żadne siły jest stała, układ taki nazywamy inercjalnym. Oznacza to, że w inercjalnych układach odniesienia spełnione jest pierwsze prawo Newtona.
- Stan równowagi obiekt osiąga w momencie, gdy równoważą się wszystkie siły na niego działające.
- Zerowa siła wypadkowa działająca na obiekt skutkować może zarówno jego spoczynkiem, jak i ruchem ze stałą prędkością, bez przyspieszeń.

5.3 Druga zasada dynamiki Newtona

- Siła zewnętrzna to taka, która działa na obiekt spoza przyjętego układu, w odróżnieniu od siły wewnętrznej, która jest wynikiem oddziaływania między obiektami wewnątrz danego układu.
- Druga zasada dynamiki Newtona mówi, że siła wypadkowa działająca na obiekt o danej masie jest wprost proporcjonalna do jego przyspieszenia.
- Drugie prawo Newtona opisuje również siłę wypadkową jako szybkość zmian pędu w czasie. Niezerowa siła wypadkowa powoduje występowanie w układzie niezerowego przyspieszenia.

5.4 Masa i ciężar ciała

- Masa jest miarą ilości materii w danym ciele.
- Ciężar ciała, czyli jego siła ciężkości, to wypadkowa siła działająca na ciało podczas spadku swobodnego. Ciała doznają przyspieszenia na skutek działania pola grawitacyjnego.

- Podczas spadku swobodnego na Ziemi ciała doznają również działania sił oporu powietrza. Dlatego też spadek swobodny jest tylko pewnym modelem (przybliżeniem).
- Rozróżniamy pomiędzy spadkiem swobodnym a stanem nieważkości. Definiujemy ciężar jako wynik działania pola grawitacyjnego na ciało w nim się znajdujące.

5.5 Trzecia zasada dynamiki Newtona

- Trzecie prawo Newtona odzwierciedla prostą symetrię przyrody: układ doznaje siły o tej samej wartości i kierunku, co siła wywierana na otoczeniu, lecz o przeciwnym zwrocie.
- Dwie symetryczne, przeciwnie zwrócone siły nie równoważą się, jeżeli działają na dwa różne układy.
- Pary sił związane z „akcją i reakcją” w układzie występują na przykład w przypadku, gdy pływak odpycha się stopami od ściany basenu, podczas lotu helikoptera, czy gdy ośmiornica porusza się w wodzie. Ruch rakiet, samolotów i samochodów również stanowi doskonały przykład działania trzeciego prawa Newtona.
- Dobór odpowiedniego układu do analizy pozwala na poprawne zrozumienie fizyki danego układu oraz rozwiązanie zagadnień dotyczących ruchu.

5.6 Rodzaje sił

- Gdy ciało spoczywa na poziomej powierzchni, doznaje działania siły reakcji od strony powierzchni, która równoważy siłę ciężkości ciała. Siła ta często nazywana jest siłą nacisku.
- Gdy ciało spoczywa na powierzchni nie poruszającej się z przyspieszeniem, siła reakcji zawsze równoważy siłę ciężkości ciała spoczywającego na tej powierzchni.
- Gdy ciało spoczywa na równi pochyłej o kącie nachylenia θ, siła ciężkości działająca na ciało rozkłada się na składowe: prostopadłą oraz równoległą do powierzchni równi.
- Siła rozciągająca działająca wzdłuż elastycznego elementu takiego jak kabel bądź lina nazywa się siłą naciągu. Gdy ciało zawieszone jest nieruchomo na linie, siła naciągu liny równoważy ciężar zawieszonego na niej ciała. Gdy obiekt przyspiesza, siła naciągu liny może okazać się większa niż ciężar tego obiektu. Analogicznie podczas zwalniania, naciąg liny okaże się mniejszy niż siła ciężkości.
- Siła tarcia występuje w układzie, w którym obiekty się poruszają. Ma zwrot przeciwny do kierunku ruchu ciała i kierunek równoległy do podłoża. Jest to siła oporu ruchu.
- Siła wywierana przez sprężynę podlega prawu Hooke’a. Wartość tej siły jest proporcjonalna do odkształcenia ciała i sprężyny względem jej długości swobodnej oraz do stałej sprężystości sprężyny.
- Rzeczywiste siły w układzie mają fizyczne źródło, w odróżnieniu od sił pozornych, które występują w układach odniesienia doznających zmiany prędkości – układach nieinercjalnych.

5.7 Rozkłady sił działających na ciała

- Aby wykonać diagram z rozkładem sił działających na ciało, narysuj wszystkie siły zewnętrzne działające na analizowany obiekt i rozłóż wektory sił na składowe wzdłuż osi x i y. Należy wykonać osobny diagram dla każdego obiektu występującego w układzie.
- Rysunek z rozkładem sił działających na obiekt jest niezwykle pomocny w przypadku rozwiązywania problemów dynamicznych. Stosujemy go przy rozwiązywaniu zagadnień w oparciu o zasady dynamiki Newtona.

PYTANIA

5.1 Pojęcie siły

1. Jakie własności można przypisać sile, aby móc potraktować ją jako wektor?

5.2 Pierwsza zasada dynamiki Newtona

2. Przyjmując układ odniesienia związany z Ziemią jako układ inercjalny, wskaż z którym z poniższych obiektów związany jest inercjalny układ odniesienia a z którym nie?

a. Samochód poruszający się ze stałą prędkością;
b. Samochód, który przyspiesza;
c. Swobodnie spadająca kabina windy;
d. Stacja kosmiczna poruszająca się na ziemskiej orbicie;
e. Kabina windy opadająca ze stałą szybkością.

3. Pewna kobieta przewoziła na przyjęcie szkolne pudełko pysznych babeczek. W pewnym momencie samochód znajdujący się przed nią gwałtownie się zatrzymał. Z tego powodu kobieta zmuszona była gwałtownie zahamować. Na szczęście miała zapięte pasy bezpieczeństwa, więc nie ucierpiała z powodu gwałtownego

hamowania (jedynie się zdenerwowała). Niestety pudełko babeczek przeleciało podczas hamowania na deskę rozdzielczą samochodu i babeczki całkowicie się pogniotły. Czy potrafisz wyjaśnić, dlaczego tak się stało?

5.3 Druga zasada dynamiki Newtona

4. Dlaczego możemy zaniedbać podczas stosowania drugiego prawa Newtona siły utrzymujące zwartą strukturę materii analizowanego obiektu?

5. Podrzucamy kamień pionowo do góry. W punkcie maksymalnej wysokości prędkość kamienia maleje do zera. Czy to oznacza, że w tym punkcie również wszystkie działające na kamień siły się zerują?

5.4 Masa i ciężar ciała

6. Jaka jest zależność pomiędzy masą a ciężarem? Która z tych wielkości jest własnością ciała, a nie funkcją położenia w polu grawitacyjnym?

7. Jaki jest ciężar astronauty o masie 70 kg znajdującego się w kosmosie, daleko od jakiegokolwiek ciała niebieskiego? Jaka jest jego masa w tym miejscu?

8. Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe?
a. Masa i ciężar to ta sama wielkość fizyczna, lecz wyrażona w innych jednostkach.
b. Gdy ciało nie ma ciężaru, jego masa również musi być zerowa.
c. Jeżeli ciężar danego ciała jest zmienny, zmienna musi być również jego masa.
d. Masa i bezwładność ciała to pojęcia ze sobą niepowiązane.
e. Ciężar ciała jest wielkością zawsze proporcjonalną do jego masy.

9. Gdy znajdujesz się na Ziemi, twoje stopy działają na powierzchnię Ziemi siłą równą twojemu ciężarowi. Dlaczego na skutek tego kula ziemska nie doznaje przyspieszenia?

10. Jak można zapisać wartość przyspieszenia ziemskiego $\vec{g}$ w formie wektorowej?

5.5 Trzecia zasada dynamiki Newtona

11. Zidentyfikuj siły akcji i reakcji w następujących układach: (a) Ziemia oddziałująca z Księżycem; (b) chłopiec kopie piłkę; (c) rakieta wznosi się w górę z pewnym przyspieszeniem; (d) samochód przyspiesza do przodu; (e) skoczek podczas skoku wzwyż; (f) pocisk wylatujący z lufy pistoletu.

12. Załóżmy, że trzymasz w ręku filiżankę kawy. Zidentyfikuj wszystkie siły działające na filiżankę oraz odpowiadające im siły reakcji.

13.
a. Dlaczego podczas wystrzału ze strzelby doznaje ona odrzutu?
b. Komora działa bezodrzutowego jest otwarta po obu stronach. Opisz jak trzecie prawo Newtona stosuje się do wystrzału z takiego działa.
c. Czy można bezpiecznie stać w niedużej odległości za takim działem podczas wystrzału?

5.6 Rodzaje sił

14. Na dywanie w mieszkaniu stoi stół. Na stole położono książkę. Na który element układu podłoga wywiera siłę nacisku?

15. Cząstka porusza się w prawo.
a. Czy siła działająca na nią może być skierowana w lewo? Jeżeli tak, jak zachowa się cząstka?
b. Czy siła na nią działająca może być skierowana w dół? Jeżeli tak, to dlaczego?

5.7 Rozkłady sił działających na ciała

16. Po narysowaniu wszystkich sił działających na ciało, co w następnej kolejności powinniśmy zrobić, aby rozwiązać w pełni zagadnienie?

17. W przypadku książki spoczywającej na równi, jak wiele sił powinniśmy nanieść na rysunek będący diagramem sił działających na książkę? Opisz te siły.

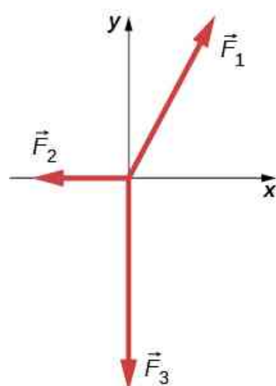
18. Gdyby książka wspomniana w poprzednim pytaniu spadała swobodnie, jak wiele sił działałoby wówczas na książkę? Narysuj wszystkie siły i opisz je.

ZADANIA

5.1 Pojęcie siły

19. Do drzewa przymocowano dwie liny i przyłożono do nich dwie siły działające w jednej płaszczyźnie: $\vec{F}_1 = \left(2{,}0\hat{i} + 4{,}0\hat{j}\right)$ N i $\vec{F}_2 = \left(3{,}0\hat{i} + 6{,}0\hat{j}\right)$ N. (a) Znaleźć siłę wypadkową w opisanym układzie; (b) Znaleźć wartość i kierunek siły wypadkowej.

20. Na słup telefoniczny działają trzy siły pochodzące od kabli przesyłowych do niego przymocowanych. Sytuację przedstawiono na poniższym rysunku. Są to siły wynoszące odpowiednio $\vec{F}_1 = \left(300{,}0\hat{i} + 500{,}0\hat{j}\right)$, $\vec{F}_2 = -200{,}0\hat{i}$ i $\vec{F}_3 = -800{,}0\hat{j}$. (a) Znaleźć siłę wypadkową działającą na słup; (b) Znaleźć kierunek i wartość siły wypadkowej.



21. Dwoje nastolatków ciągnie liny przymocowane do drzewa. Kąt pomiędzy linami wynosi $30{,}0°$. Dawid ciągnie linę, działając siłą o wartości 400,0 N, natomiast Stefania działa siłą o nieco mniejszej wartości: 300,0 N.
a. Znaleźć siłę wypadkową w opisanym układzie w postaci jej składowych.
b. Znaleźć wartości wartość siły wypadkowej działającej na drzewo oraz kąt, który tworzy ona z liną Dawida.

5.2 Pierwsza zasada dynamiki Newtona

22. Dwie siły $\vec{F}_1 = \frac{75{,}0}{\sqrt{2}}\left(\hat{i} - \hat{j}\right)$ N i $\vec{F}_2 = \frac{150{,}0}{\sqrt{2}}\left(\hat{i} - \hat{j}\right)$ N działają na pewien obiekt. Znajdź trzecią siłę $\vec{F}_3$ potrzebną do zrównoważenia dwóch pozostałych sił.

23. Podczas czynności przesuwania kanapy po podłodze, Agnieszka i Joanna działają na kanapę siłami odpowiednio $\vec{F}_A$ i $\vec{F}_J$. Siła wywierana przez Agnieszkę jest skierowana na północ, a jej wartość wynosi 130,0 N. Joanna z kolei działa siłą skierowaną o $32°$ na wschód od kierunku północnego, siłą o wartości 180,0 N.
a. Znajdź wektor siły wypadkowej w rozkładzie na składowe;
b. Znajdź wartość i kierunek wektora siły wypadkowej;
c. Koledzy Agnieszki i Joanny, Dawid i Sylwia nie zgodzili się na przeniesienie kanapy. Jaką siłą $\vec{F}_{\mathrm{DS}}$ powinni zadziałać na kanapę, by uniemożliwić jej przeniesienie? Podaj zarówno składowe siły, jak i jej wartość.

5.3 Druga zasada dynamiki Newtona

24. Andrzej, sprinter ważący 63 kg, startuje w wyścigu, osiągając przyspieszenie $4{,}200\ \mathrm{m/s}^2$. Jaka jest siła wypadkowa działająca na niego?

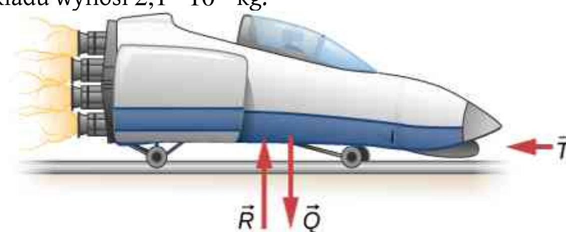
25. Jeżeli sprinter, wspomniany w poprzednim zadaniu, przyspieszy na dystansie 20 m, po czym zacznie utrzymywać stałą prędkość na dystansie kolejnych 100 m, jaki będzie całkowity czas biegu sprintera?

26. Pracownik pralni pcha koszyk z praniem o masie 4,5 kg, działając na niego siłą 60 N. Oblicz przyspieszenie koszyka.

27. Astronauci pracujący na orbicie znajdują się w stanie nieważkości. Do ustalenia masy astronautów stosuje się m.in. metodę, w której na astronautę wywiera się stałą siłę i mierzy się przyspieszenie, jakiego astronauta doznaje. Załóżmy, że na astronautę działa siła zewnętrzna 50 N, a zmierzone przyspieszenie astronauty wynosi $0{,}893\ \mathrm{m/s}^2$.
a. Oblicz masę astronauty.
b. Wywierając siłę na astronautę, statek kosmiczny, w którym astronauta się znajduje, doświadcza występowania siły o tej samej wartości, lecz przeciwnym zwrocie. Wykorzystaj tę wiedzę do znalezienia przyspieszenia całego układu (astronauta plus statek kosmiczny) mierzonego przez obserwatora znajdującego się blisko statku.
c. Zastanów się, jak efekt ten może wpływać na pomiar przyspieszenia astronauty. Zaproponuj metodę, dzięki której można uniknąć efektu odrzutu w statku kosmicznym przy pomiarze masy astronauty.

28. Na Rysunku 5.12 siła wypadkowa o wartości 51 N działa na kosiarkę o masie 24 kg. Jeżeli siła tarcia pomiędzy kosiarką a trawą wynosi 24 N, jaka jest siła F wywierana przez człowieka na kosiarkę? Załóż, że kosiarka porusza się z prędkością 1,5 m/s, gdy siła F przestanie działać. Jak daleką drogę pokona kosiarka przed zatrzymaniem się?

29. Sanie rakietowe przedstawione na poniższym rysunku zwalniają z opóźnieniem $196\ \mathrm{m/s}^2$. Jaka siła potrzebna jest do wywołania w układzie takiego opóźnienia? Załóż, że dysze rakietowe są wyłączone, a masa układu wynosi $2{,}1 \cdot 10^3$ kg.

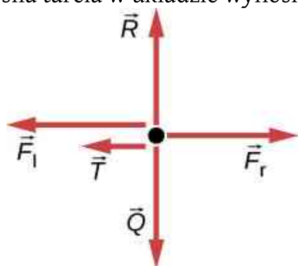


30. Jeżeli sanie rakietowe z powyższego zadania startują jedynie z jedną działającą dyszą, jaka jest wartość ich przyspieszenia? Załóż, że masa sań wynosi $2{,}10 \cdot 10^3$ kg, siła odrzutu pojedynczej dyszy wynosi $F' = 2{,}40 \cdot 10^4$ N, natomiast siła tarcia, skierowana przeciwnie do kierunku ruchu wynosi 650 N. (b) Dlaczego otrzymany wynik przyspieszenia nie stanowi 1/4 wartości uzyskane w przypadku wszystkich czterech działających dysz?

31. Jakie jest opóźnienie sań rakietowych, jeżeli zmieniły swoją prędkość z 1000 km/h do 0 km/h w jedynie 1,1 s? (Takie opóźnienie spowodowało u człowieka tymczasową ślepotę i utratę przytomności).

32. Na dziecko znajdujące się w wózku dwoje innych dzieci działa siłami o kierunku poziomym, ale przeciwnych zwrotach. Pierwsze dziecko działa siłą o wartości 75 N, drugie o wartości 90 N, a siła tarcia w układzie wynosi 12 N. Masa trzeciego dziecka wraz z wózkiem

to 23 kg. (a) Jaki należy rozpatrzyć układ, aby obliczyć przyspieszenie dziecka w wózku? (Rzuć okiem na diagram sił na poniższym rysunku). (b) Oblicz przyspieszenie dziecka. (c) Jakie będzie przyspieszenie dziecka w wózku, jeżeli siła tarcia w układzie wynosi 15 N?



33. Motocykl wyścigowy potrafi osiągnąć przyspieszenie nawet do $3{,}50\ \text{m/s}^2$ przy prędkości 90 km/h. Przy tej prędkości siły przeciwdziałające tarciu i siłom oporu powietrza (działającym przeciwnie do kierunku ruchu) wynoszą prawie 400 N. Jaka jest wartość siły ciągu silnika motocyklowego, aby mógł on mimo działania tak dużych sił oporu, uzyskać przyspieszenie $3{,}50\ \text{m/s}^2$? Masa motocykla wraz z motocyklistą wynosi 245 kg.

34. Samochód o masie 1000 kg zmienia swoją prędkość od 0 do 90 km/h w 10 s. (a) Jakie jest przyspieszenie samochodu? (b) Jaka jest siła wypadkowa działająca na samochód?

35. Kierowca samochodu wspomnianego w poprzednim zadaniu zahamował, gdy samochód jechał z prędkością 90 km/h. Samochód zatrzymał się po przejechaniu drogi 40 m. Jaka była siła wypadkowa działająca na samochód podczas hamowania?

36. Pasażer samochodu poruszający się z prędkością $1{,}00 \cdot 10^2$ km/h i ważący 80 kg ma zapięte pasy bezpieczeństwa. W pewnym momencie kierowca gwałtownie zahamował i auto zatrzymało się po przejechaniu drogi 45 m. Jaka siła była wywierana na pasażera przez pasy bezpieczeństwa podczas hamowania?

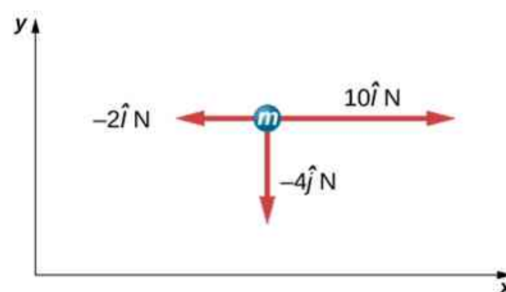
37. Na cząstkę o masie 2 kg działa pojedyncza siła $\vec{F}_1 = 18\hat{i}\ \text{N}$.

a. Jakie jest przyspieszenie cząstki?

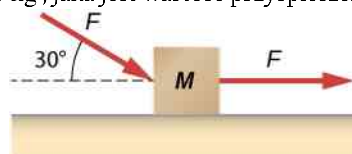
b. Jeżeli cząstka zaczyna ruch od spoczynku, jaką drogę przebędzie przez pierwsze 5 s ruchu?

38. Załóżmy, że cząstka opisana w poprzednim zadaniu doświadcza również działania sił $\vec{F}_2 = -15{,}0\hat{i}\ \text{N}$ i $\vec{F}_3 = 6{,}0\hat{j}\ \text{N}$ Jakie wówczas będzie przyspieszenie cząstki?

39. Znajdź wartość przyspieszenia ciała o masie 5 kg przedstawionego na poniższym rysunku.



40. Na poniższym rysunku przedstawiono klocek spoczywający na poziomej płaszczyźnie. Tarcie między klockiem a podłożem zaniedbujemy. Jeżeli na klocek działają dwie siły o wartościach $F = 30{,}0\ \text{N}$ i $M = 10{,}0\ \text{kg}$, jaka jest wartość przyspieszenia klocka?



5.4 Masa i ciężar ciała

41. Ciężar astronauty wraz z kombinezonem na Księżycu wynosi tylko 250 N.

a. Jaki jest ciężar astronauty (w kombinezonie) na Ziemi?

b. Jaka jest jego masa na Ziemi, a jaka na Księżycu?

42. Załóżmy, że masa całkowicie obładowanego statku, którym astronauta opuszcza powierzchnię Księżyca, wynosi $1{,}00 \cdot 10^4$ kg. Siła ciągu dysz rakietowych wynosi $3{,}00 \cdot 10^4$ N.

a. Oblicz wartość pionowego przyspieszenia statku podczas opuszczania Księżyca.

b. Czy mógłby oderwać się od Ziemi? Jeżeli nie, to dlaczego? Jeżeli tak, oblicz wartość przyspieszenia statku podczas opuszczania Ziemi.

43. Sanie rakietowe przyspieszają z przyspieszeniem równym $49{,}0\ \text{m/s}^2$. Masa pasażera wynosi 75 kg.

a. Oblicz poziomą wartość siły, z jaką pasażer w saniach działa na siedzenie. Porównaj tę siłę z ciężarem pasażera.

b. Znajdź kierunek i wartość siły wypadkowej działającej na pasażera podczas ruchu sań.

44. Pomyśl jeszcze raz o saniach rakietowych z poprzedniego zadania. Załóż teraz, że zwalniają one z opóźnieniem $201\ \text{m/s}^2$. W tym przypadku siła wywierana jest na pasażera przez pasy bezpieczeństwa.

45. Siła o wartości 25 N działa na ciało o masie 2 kg w kierunku pionowym w górę. Jakie przyspieszenie uzyskało ciało?

46. Samochód o ciężarze 12 500 N przyspiesza od prędkości zerowej do 83 km/h w jedynie 5 s. Siła tarcia wynosi 1350 N. Znajdź siłę ciągu silnika samochodu.

47. Ciało o masie 10 kg znajduje się w polu grawitacyjnym Ziemi o natężeniu $g = 9{,}80\ \text{m/s}^2$. Jakie jest przyspieszenie tego ciała?

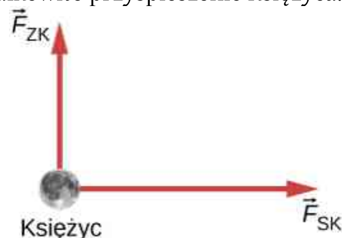
48. Strażak o masie m usłyszał syrenę strażacką, więc zjechał po rurze w dół z przyspieszeniem a (które ma mniejszą wartość niż g).

a. Napisz równanie pozwalające na obliczenie pionowej siły, którą strażak działa na rurę;

b. Jeżeli jego masa wynosi 90 kg, a przyspieszenie, z którym zjeżdża po rurze, wynosi $5{,}00\ \text{m/s}^2$, jaka jest wartość siły, którą strażak działa na rurę?

49. Bejsbolista wykonuje pokaz swoich możliwości do reklamy telewizyjnej: łapie piłkę o masie 145 g upuszczoną z wysokości 60 m powyżej poziomu jego rękawicy. Udało mu się zatrzymać piłkę w czasie 0,01 s. Jaka jest siła wywierana przez rękawicę bejsbolisty na piłkę w momencie kontaktu? Pomiń opór powietrza.

50. Na poniższym rysunku pokazano ułożenie Księżyca względem Ziemi i Słońca. Siła oddziaływania grawitacyjnego pomiędzy Ziemią a Księżycem wynosi F_{ZK} , natomiast między Księżycem a Słońcem F_{SK} . Siły te są do siebie prostopadłe. Wartości tych sił wynoszą odpowiednio $F_{ZK} = 1{,}98 \cdot 10^{20}\ \text{N}$ oraz $F_{SK} = 4{,}36 \cdot 10^{20}\ \text{N}$. Pozostałe siły zaniedbujemy. Wiedząc, że masa Księżyca wynosi $7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg, wyznacz całkowite przyspieszenie Księżyca.



5.5 Trzecia zasada dynamiki Newtona

51.

a. Jaka zewnętrzna siła wypadkowa działa na pocisk o masie 1100 kg wystrzelony z okrętu, który podczas wystrzału doznaje przyspieszenia $2{,}40 \cdot 10^4\ \text{m/s}^2$?

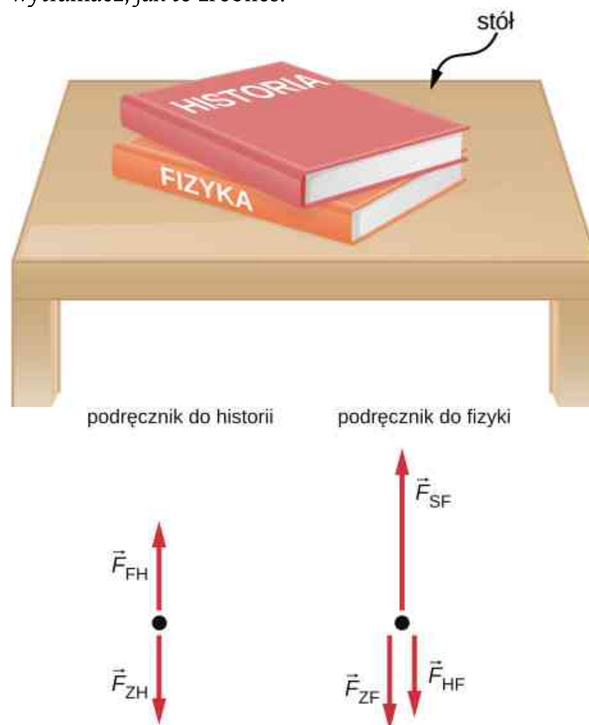
b. Jaka jest wartość siły wywieranej na okręt przez pocisk i dlaczego?

52. Bardzo odważny, jednak nie dość dobrze wyszkolony zawodnik rugby jest przepychany przez gracza z przeciwnej drużyny siłą z 800 N. Masa słabszego zawodnika wraz z kombinezonem do rugby wynosi 90 kg. Zawodnik ten w wyniku pchnięcia doznaje przyspieszenia skierowanego w tył o wartości $1{,}20\ \text{m/s}^2$.

a. Jaka jest wartość siły tarcia między przegrywającym zawodnikiem a murawą?

b. Jaka jest wartość siły powodującej ruch wygrywającego zawodnika do przodu, jeśli jego masa wynosi 110 kg?

53. Na poniższym rysunku przedstawiono sytuację, w której podręcznik do historii leży na podręczniku do podstaw fizyki. Rozkład sił działających na obydwa obiekty pokazano z boku rysunku. Ciężar podręczników wynosi odpowiednio 14 N (podręcznik do historii) oraz 18 N (podręcznik do fizyki). Powiąż siły działające na każdą z książek z symbolami z podwójnym indeksem (np. siła kontaktowa, z jaką książka do historii działa na książkę do fizyki to $\vec{F}_{\text{HF}}$) oraz określ wartości tych sił i wytłumacz, jak to zrobiłeś.



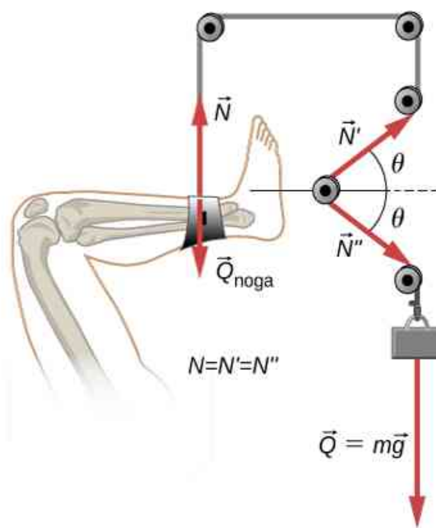
54. Ciężarówka zderza się z samochodem. W czasie zderzenia jedynymi istotnymi siłami są siły wzajemnego oddziaływania zderzających się pojazdów. Załóżmy, że masa samochodu wynosi 550 kg a masa ciężarówki 2200 kg. Wartość przyspieszenia ciężarówki w czasie zderzenia to $10\ \text{m/s}^2$. Znajdź przyspieszenie samochodu.

5.6 Rodzaje sił

55. Złamana noga jest umocowana na szpitalnym wyciągu, jak pokazano na poniższym rysunku.

a. Która część rysunku powinna służyć do obliczenia siły wywieranej na unieruchomioną nogę?

b. Jaka jest siła naciągu liny? Na rysunku siłę naciągu oznaczono jako $\vec{N}$, a $\vec{Q}$ to ciężar elementu powodującego naciąg liny w układzie.



56. Załóżmy, że zamiast kości piszczelowej zostałaby unieruchomiona kość udowa w układzie z linami i krążkami, jak pokazano na poprzednim rysunku. Jak można byłoby zwiększyć siłę naciągu drutu w układzie przy użyciu tego samego ciężaru?

57. Dwie drużyny dziewięcioosobowe postanowiły zabawić się w przeciąganie liny. Każdy z zawodników pierwszej drużyny ma masę 68 kg i działa siłą 1350 N skierowaną poziomo. Natomiast każdy zawodnik drugiej drużyny ma masę 73 kg i działa siłą 1365 N.
a. Jaka będzie wartość przyspieszenia układu podczas przeciągania liny i która drużyna wygra?
b. Jaka będzie siła naciągu liny w obszarze między drużynami?

58. Jakie siły działają na Jolę, ważącą 45 kg gimnastyczkę, ze strony trampoliny, aby nadać jej przyspieszenie $7{,}50\ \mathrm{m/s}^2$? Odpowiedź nie zależy od prędkości gimnastyczki.

59.
a. Oblicz siłę naciągu pionowej nici pajęczej, jeżeli masa pająka, który wisi na niej nieruchomo, wynosi $2{,}00 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{kg}$.
b. Oblicz siłę naciągu poziomej nici pajęczej, jeżeli pająk znajduje się w środku nici i pozostaje w bezruchu. Nić ugina się pod pająkiem pod kątem 12° do poziomu. Porównaj obie siły naciągu obliczone w tym zadaniu.

60. Karol, ważący 60 kg gimnastyk, wspina się po linie. (a) jaka jest siła naciągu liny w momencie, gdy gimnastyk wspina się ze stałą prędkością? Jaka jest siłą naciągu liny, gdy gimnastyk wspina się z przyspieszeniem wynoszącym $1{,}50\ \mathrm{m/s}^2$?

61. Wyprowadź wyrażenie na zależność siły naciągu N i siły $F_\perp$, przyłożonej prostopadle w środku liny zaczepionej w dwóch końcach:$N - F_\perp/2 \sin\theta$.

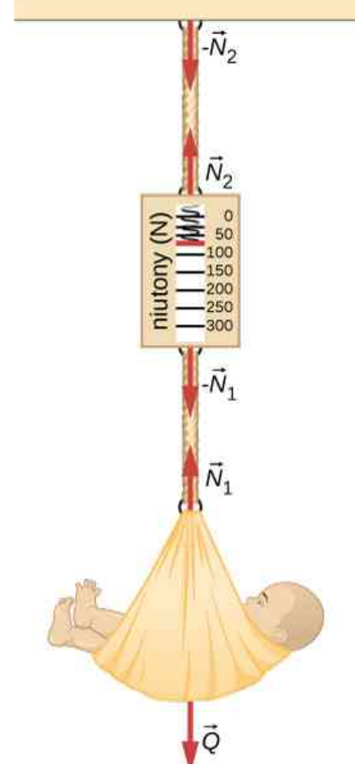
62. Rozpatrz sytuację pokazaną na Rysunku 5.28. Kierowca, aby wydostać z bagna samochód, działa na środek liny siłą prostopadłą o wartości 610 N, odchylając ją o 1 m od położenia równowagi. Odległość kierowcy od samochodu to wówczas 6 m. Jaka jest siła naciągu liny N?

63. Ptak o masie 26 g siedzi na środku przewodu telefonicznego.
a. Udowodnij, że siłę naciągu przewodu można obliczyć, używając zależności $N = \frac{mg}{2 \sin\theta}$.
b. Oblicz wartość siły naciągu, gdy $\theta = 5^\circ$ oraz
c. $\theta = 0{,}5^\circ$. Załóż, że odchylone części przewodu są prostoliniowe.



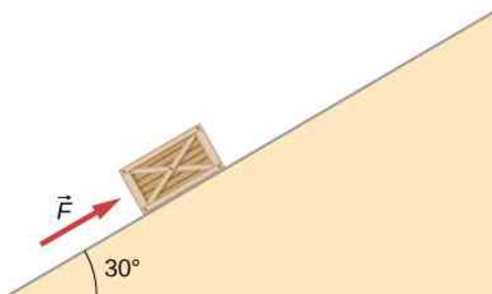
64. Jeden koniec liny od długości 30 m jest przymocowany do drzewa. Drugi koniec przymocowany jest do samochodu, który niestety utknął w bagnie. Motocyklista ciągnie środek liny, z siłą prostopadłą do liny o wartości 80 N, odchylając ją o 2 m od położenia równowagi. Znajdź siłę wywieraną na samochód.

65. Rozpatrz sytuację, w której dziecko ważone jest za pomocą wagi pokazanej na poniższym rysunku.
a. Jaka jest masa dziecka i koszyka, jeżeli waga wskazała 55 N?
b. Jaka jest siła naciągu N_1 w elemencie, który mocuje koszyk z dzieckiem do wagi?
c. Jaka jest siła naciągu N_2 w elemencie, który mocuje wagę do sufitu, jeśli masa wagi wynosi 0,500 kg?
d. Wykonaj rysunek sytuacji wraz z zaznaczeniem sił w układzie. Zaniedbaj masy elementów mocujących.



66. Jaką siłę należy przyłożyć do skrzyni ważącej 100

kg, aby wciągnąć ją w górę równi pochyłej o kącie nachylenia 30°, jeżeli nie uwzględnimy tarcia, a przyspieszenie skrzyni podczas wciągania wynosi $2{,}0\ \text{m/s}^2$?



67. Blok ważący 2 kg znajduje się na idealnie gładkiej powierzchni, która nachylona jest pod kątem 30° do poziomu.
a. Jakie jest przyspieszenie bloku podczas zsuwania się z równi oraz siła, którą równia wywiera na blok?
b. Jaką siłę należałoby przyłożyć do bloku w kierunku równoległym do powierzchni równi, aby blok mógł zsuwać się ruchem jednostajnym?

5.7 Rozkłady sił działających na ciała

68. Piłka o masie m wisi przyczepiona do sprężyny.
a. Zidentyfikuj wszystkie siły w układzie.
b. Narysuj rozkład sił działających na piłkę.

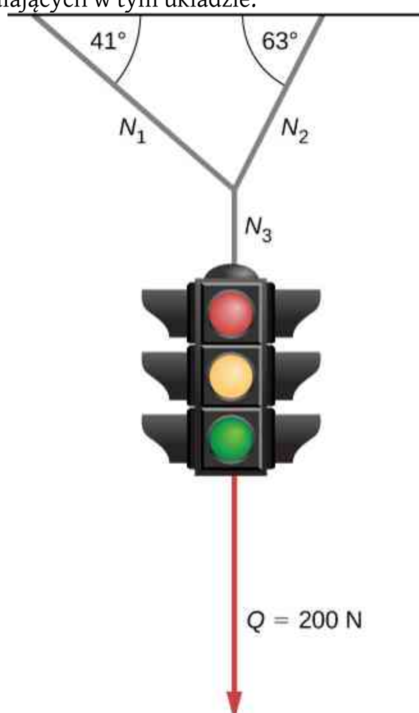
69. Samochód porusza się po ulicy w kierunku poziomym. Narysuj diagram sił na niego działających. Pamiętaj o uwzględnieniu siły tarcia.

70. Biegacz biegnie po bieżni, jak pokazano na rysunku.

a. Stwórz diagram sił działających na biegacza. Przyłóż wektory sił do środka jego ciała. Uwzględnij ciężar.
b. Stwórz podobny diagram, rozkładając siły na wektory składowe w układzie współrzędnych xy.



71. Światła uliczne wiszą na dwóch linach, jak pokazano na poniższym rysunku. Narysuj rozkład wszystkich sił działających w tym układzie.



ZADANIA DODATKOWE

72. Ciągniki kosmiczne wywierają dwie niewielkie siły $\vec{F}_1 = -2{,}40\hat{i} - 6{,}10\hat{j}$ N i $\vec{F}_2 = 8{,}50\hat{i} - 9{,}70\hat{j}$ N na asteroidę.
a. Znajdź siłę wypadkową działającą na asteroidę;
b. Znajdź kierunek i wartość siły wypadkowej;
c. Jeżeli masa asteroidy wynosi 125 kg, jakie jest jej przyspieszenie?
d. Znajdź kierunek i wartość przyspieszenia asteroidy.

73. Dwie siły o wartościach 25 i 45 N działają na obiekt. Ich kierunki różnią się o kąt 70°. Wartość przyspieszenia obiektu to $10{,}0\ \text{m/s}^2$. Jaka jest masa obiektu?

74. Siła o wartości 1600 N działa równolegle do rampy, pchając do przodu pianino o masie 300 kg. Rampa nachylona jest do poziomu pod kątem 20°.
a. Znajdź przyspieszenie pianina podczas wciągania go po rampie.
b. Jaka jest prędkość pianina na wysokości 4 m ponad ziemią?

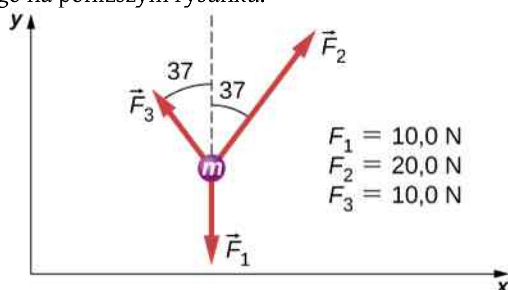
75. Narysuj wszystkie siły działające na nurka w różnych momentach po wejściu do wody.

76. W przypadku pływaka, który wskakuje do wody, siła oporu powietrza podczas wyskoku jest pomijalnie mała. Masa pływaka wynosi 80 kg, a wysokość, z której skoczył, wynosi 10 m. Trzy sekundy po wskoczeniu do wody zatrzymał się. Jaka średnia siła działała w tym momencie na pływaka ze strony wody?

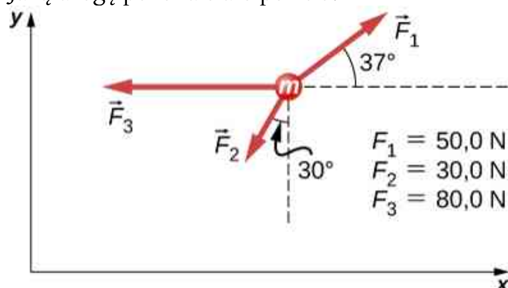
77.
a. Znajdź wyrażenie opisujące wartość siły wypadkowej potrzebnej, aby zatrzymać samochód o masie m poruszający się z prędkością v_0, wiedząc, że zatrzymał się po przejechaniu odległości x.
b. Znajdź wartość siły wypadkowej wiedząc, że masa samochodu wynosi 1050 kg, prędkość początkowa to 40 km/h, a samochód zatrzymał się po przejechaniu 25 m.

78. Łódka ma masę $1{,}50 \cdot 10^3$ kg i porusza się do przodu pod wpływem siły $2{,}00 \cdot 10^3$ N działającej w kierunku na wschód. Wiatr wieje w kierunku $45°$ na północny wschód, a jego siła wynosi $3{,}00 \cdot 10^3$ N. Znajdź kierunek i wartość przyspieszenia łódki.

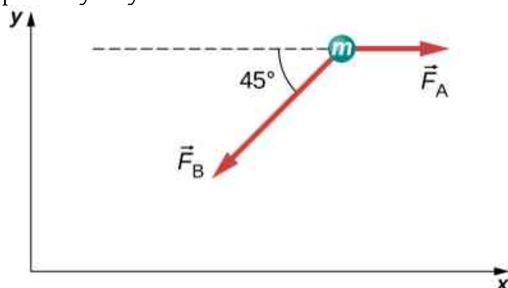
79. Znajdź przyspieszenie ciała o masie 10,0 kg pokazanego na poniższym rysunku.



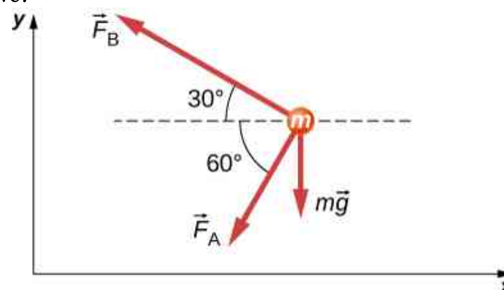
80. Ciało o masie 2,0 kg porusza się wzdłuż osi x, uzyskując prędkość 3,0 m/s, w chwili pokazanej na poniższym rysunku.
a. Jakie jest przyspieszenie ciała?
b. Jaka będzie prędkość ciała 10 s później?
c. Jaką drogę pokona ciało po 10 s?



81. Siła $\vec{F}_B$ ma wartość dwa razy większą niż $\vec{F}_A$. Znajdź kierunek przyspieszenia ciała, przedstawionego na poniższym rysunku.



82. Rysunek poniżej przedstawia ciało o masie 1,0 kg pod działaniem sił $\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$ i $m\vec{g}$. Znajdź $\vec{F}_A$ i $\vec{F}_B$, jeśli ciało ma przyspieszenie 20m/s^2 skierowane w lewo.



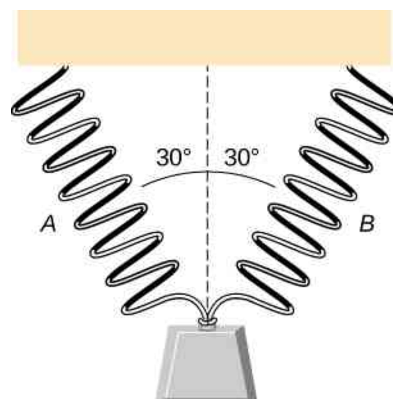
83. Samochód o masie m porusza się wzdłuż osi x. Siła działająca na niego sprawia, że jego prędkość zmienia się wraz z położeniem x zgodnie z równaniem $v = kx^2$, gdzie k to pewna stała. Znajdź siłę działającą na samochód w funkcji jego położenia.

84. Siła o wartości 7,0 N przyłożona została do ciała o masie 1 kg spoczywającego na równi pochyłej. Równia nachylona jest pod kątem $20°$. Tarcie między ciałem a równią zaniedbujemy.
a. Znajdź przyspieszenie ciała.
b. Znajdź przyspieszenie zakładając, że w układzie występuje siła tarcia o wartości 1,9 N.

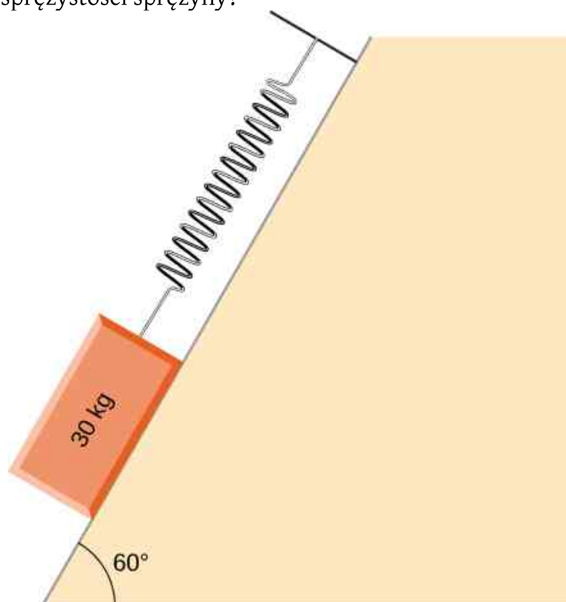
85. Dwa pudełka, A i B, są początkowo w spoczynku. Pudełko A spoczywa na równi poziomej, natomiast pudełko B spoczywa na równi pochyłej nachylonej pod kątem θ.
a. Napisz wyrażenia opisujące siły reakcji podłoża działające na pudełka.
b. Porównaj te dwie siły. Która z nich jest większa i dlaczego?
c. Jeżeli kąt nachylenia równi wynosi $10°$, która z sił jest większa?

86. Ciało o masie 250,0 g zostało przyczepione do sprężyny i zawieszone pionowo nad ziemią. Sprężyna pod wpływem ciężaru ciała wydłużyła się o 6,00 cm. Jak bardzo rozciągnęłaby się sprężyna, gdyby zawisło na niej ciało o masie 530,0 g?

87. Ciało o ciężarze 15,0 N zawieszono na dwóch identycznych sprężynach o stałej sprężystości 20N/m, jak pokazano na poniższym rysunku.
a. Jaka jest siła naprężenia sprężyny A?
b. Jakie jest wydłużenie sprężyny A?

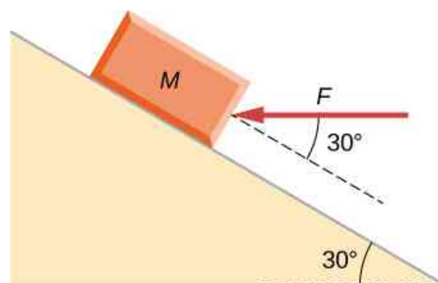


88. Ciało o masie 30,0 kg spoczywa na równi pochyłej o kącie nachylenia 60°. Ciało to przymocowane jest do sprężyny, która wydłużyła się o 5,0 cm. Jaka jest stała sprężystości sprężyny?



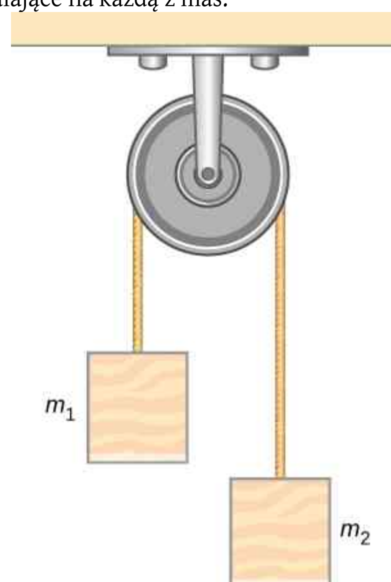
89. Przy budowie domu stolarze wyciągają gwoździe z dużego pudełka. Pudełko jest przymocowane do sprężyny, aby zmierzyć zużycie gwoździ. Na początku dnia, sprężyna była wydłużona o 50 cm, a na końcu o 30 cm. Ile procent gwoździ zostało zużytych tego dnia?

90. Do ciała o masie $M = 5{,}00\,\text{kg}$ znajdującego się na równi pochyłej o kącie nachylenia 30° przyłożono siłę $F = 65{,}0\,\text{N}$ jak na poniższym rysunku, przez co ciało poruszało się w górę równi. Tarcie między ciałem a równią należy zaniedbać. Jakie jest przyspieszenie ciała?



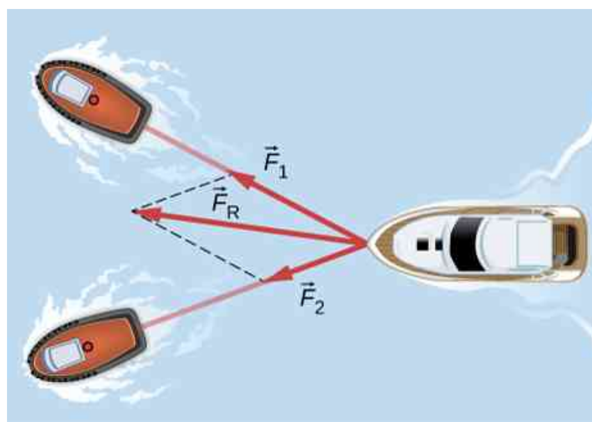
91. Dwie siły przyłożono do ciała o masie 5,0 kg, na skutek czego ciało uzyskało przyspieszenie $2{,}0\,\text{m/s}^2$ w kierunku dodatniej półosi y. Jeżeli jedna z sił działa w kierunku dodatniej półosi x i ma wartość 12 N, to jaka jest wartość drugiej siły?

92. Dwie masy przerzucono przez nieważki bloczek i połączono nieważką i nierozciągliwą nicią. Jedna z mas jest większa niż druga ($m_2 > m_1$). Narysuj wszystkie siły działające na każdą z mas.



ZADANIA TRUDNIEJSZE

93. Jeżeli dwie motorówki holują trzecią, niesprawną motorówkę (jak pokazano na poniższym rysunku), trzecia motorówka będzie poruszać się w kierunku działania siły wypadkowej. (a) Narysuj diagram sił działających na trzecią motorówkę. Załóż brak sił oporu ruchu. (b) Czy uwzględniłeś wszystkie siły zaznaczone na rysunku rysując diagram sił? Dlaczego?



94. Ciało o masie 10,0 kg porusza się na wschód z prędkością 15,0 m/s. W pewnym momencie przez 2 s działa na nie siła, w wyniku czego ciało zmienia kierunek ruchu na północny wschód, nadal z prędkością 15,0 m/

s. Jaki był kierunek i wartość średniej siły działającej na to ciało?

95. 25 czerwca 1983 roku sportowiec niemiecki Udo Beyer pchnął kulę o masie 7,26 kg na odległość 22,22 m, ustanawiając ówczesny rekord świata.
a. Jeżeli pchnięcie nastąpiło na wysokości 2,2 m, a kąt wyrzutu to $45{,}0°$, jaka była prędkość początkowa wyrzutu?
b. Jeżeli podczas wyrzutu z dłoni Beyera kula przyspieszała na dystansie 1,2 m, jaka była siła wypadkowa na nią działająca?

96. Ciało o masie m porusza się w kierunku poziomym. Położenie ciała zmienia się z czasem zgodnie z relacją $x(t) = at^4 + bt^3 + ct$, gdzie a, b, i c to pewne stałe.
a. Znaleźć przyspieszenie ciała;
b. Znaleźć zależność siły od czasu.

97. Ciało o masie m ma prędkość początkową v_0 skierowaną w stronę dodatniej półosi x. Do ciała przyłożono stałą siłę F w czasie t, aż prędkość ciała zmalała do zera. Siła ta działała na to ciało nadal, aż do momentu, w którym prędkość ciała wyniosła $-v_0$. Zapisz wyrażenie opisujące drogę ciała od podanych parametrów.

98. Prędkości ciała o masie 3,0 kg po czasie odpowiednio $t = 6{,}0\ \text{s}$ i $t = 8{,}0\ \text{s}$ wynoszą $\left(3{,}0\hat{i} - 6{,}0\hat{j} + 4{,}0\hat{k}\right)$ m/s i $\left(-2{,}0\hat{i} + 4{,}0\hat{k}\right)$ m/s. Wiedząc, że ciało porusza się ze stałym przyspieszeniem, znajdź działającą na nie siłę wypadkową.

99. Astronauta o masie 120 kg znajduje się w saniach rakietowych, które przemieszczają się wzdłuż równi pochyłej. Składowa pozioma przyspieszenia rakiety to $5{,}0\ \text{m/s}^2$, natomiast składowa pionowa wynosi $3{,}8\ \text{m/s}^2$. Znajdź wartość siły działającej na astronautę w rakiecie. Pamiętaj o sile grawitacji.

100. Dwie siły działają na obiekt o masie 5,0 kg, w wyniku czego uzyskuje on przyspieszenie $2{,}0\ \text{m/s}^2$ w kierunku dodatniej półosi y. Jeżeli jedna z tych sił działa kierunku dodatniej osi x i ma wartość 12 N, jaka jest wartość drugiej siły?

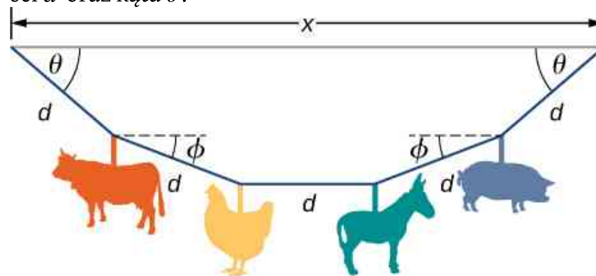
101. Załóżmy, że oglądasz mecz piłki nożnej z helikoptera znajdującego się nad boiskiem. Dwóch piłkarzy jednocześnie kopnęło piłkę. Masa piłki wynosi 420 g. Pierwszy z piłkarzy zadziałał na piłkę siłą o wartości 162 N skierowaną pod kątem $9{,}0°$ na północ od kierunku zachodniego. W tym samy momencie siła od drugiego piłkarza wynosiła 215 N i miała kierunek $15°$ na wschód od kierunku południowego. Znajdź przyspieszenie piłki i zapisz wektor w notacji wersorowej (za pomocą wersorów $\hat{i}$ i $\hat{j}$).

102. Obiekt o masie 10,0 kg wisi na sprężynie o stałej sprężystości 535 N/m. Znajdź wydłużenie sprężyny. (Załóż, że $g = 9{,}80\ \text{m/s}^2$.)

103. Ozdoba w kształcie dwóch kostek do gry o masie 0,0502 kg zawieszona została przy lusterku wstecznym samochodu. Kostki wiszą na dwóch gumkach. Samochód porusza się ze stałym przyspieszeniem, a kostki wiszą pod kątem $3{,}20°$ do pionu. Znajdź wartość przyspieszenia samochodu.

104. W cyrku osiołek ciągnie sanie, na których znajduje się mały klaun. Siła ciągu to $\left(2{,}48\hat{i} + 4{,}33\hat{j}\right)$ N. W pewnym momencie sanie zaczyna ciągnąć koń, pomagając nieszczęsnemu osiołkowi, działa on na sanie siłą $\left(6{,}56\hat{i} + 5{,}33\hat{j}\right)$ N. Masa sań wynosi 575 kg.
a. Znajdź wektor siły wypadkowej i zapisz go w notacji wersorowej dla przypadku, gdy sanie ciągną dwa zwierzęta jednocześnie;
b. znajdź przyspieszenie sań;
c. znajdź prędkość sań po 6,5 s ruchu.

105. Zabawka umieszczana nad dziecięcym łóżeczkiem składa się z elastycznej linki oraz zwierzaków plastikowych, zawieszonych na lince w różnych jej miejscach. Sytuację przedstawiono na poniższym rysunku. Każda z figurek ma masę m, a odległość między miejscami ich umocowania na lince wynosi d i jest stała. Między linką i podporą na łóżeczku utworzył się kąt θ. Środkowy segment ma kierunek poziomy (patrz rysunek). Sąsiednie segmenty tworzą z poziomem kąt ϕ (patrz rysunek). Oznaczmy siły naciągu w kolejnych segmentach nici (od góry) jako N_1, N_2 oraz N_3.
a. Znajdź wyrażenia na siły naciągu nici w każdym jej fragmencie w funkcji kątów podanych w treści zadania.
b. Znajdź zależność wiążącą kąty ϕ i θ.
c. Jaka jest wartość kąta ϕ, jeżeli kąt $\theta = 5{,}10°$?
d. Znajdź odległość x między końcami w funkcji długości d oraz kąta θ.



106. Pocisk karabinu ma masę 10,0 g i porusza się w prawo z prędkością 350 m/s. Trafia w cel, duży worek z piaskiem, wbijając się do środka na głębokość 34,0 cm. Znajdź kierunek i wartość siły hamującej pocisk wewnątrz worka.

107. Ciało poddane jest działaniu trzech sił: $\vec{F}_1 = \left(-3{,}00\hat{i} + 2{,}00\hat{j}\right)$ N, $\vec{F}_2 = \left(6{,}00\hat{i} - 4{,}00\hat{j}\right)$ N oraz $\vec{F}_3 = \left(2{,}00\hat{i} + 5{,}00\hat{j}\right)$ N. Przyspieszenie ciała wynosi $4{,}23\ \text{m/s}^2$.

a. Znajdź wektor przyspieszenia ciała w funkcji jego masy m.
b. Znajdź masę ciała.
c. Znajdź prędkość ciała po 5 s ruchu, jeśli początkowo było on w spoczynku.
d. Znajdź składowe wektora prędkości po 5 s ruchu.

108. W akceleratorze cząstek proton ma masę $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg i prędkość początkową $2{,}00 \cdot 10^{5}$ m/s. Proton ten porusza się po linii prostej i po przebyciu drogi 10,0 cm jego prędkość wynosi $9{,}00 \cdot 10^{5}$ m/s. Zakładając, że przyspieszenie protonu jest stałe, znajdź wartość siły wypadkowej działającej na proton.

109. Dron o masie 1,5 kg leci bezpośrednio nad zamarzniętym jeziorem z prędkością $3{,}00\hat{i}$ m/s. Po 10,0 s lotu jego prędkość zmieniła się do wartości $\left(9{,}00\hat{i} + 4{,}00\hat{j}\right)$ m/s. Zakładając, że w kierunku poziomym działa na niego stała siła powodująca zmianę jego prędkości, znajdź (a) składowe siły i (b) wartość tej siły.

6 | ZASTOSOWANIA ZASAD DYNAMIKI NEWTONA



Rysunek 6.1 Samochody wyścigowe biorące udział w rajdach osiągają często prędkości przekraczające 300 km/h.

Treść rozdziału

Wstęp

W ostatnich latach wyścigi samochodowe zyskały bardzo na popularności. Gdy samochody na zakręcie poruszają się po torze krzywoliniowym, ich koła również szybko się obracają. Koła wykonują wiele pełnych obrotów, podczas gdy samochód wykona jedynie część jednego obrotu (po łuku). Jak opisalibyśmy prędkości, przyspieszenia i siły działające w tym przypadku? Jaka siła chroni samochód przed wypadnięciem z zakrętu czy uderzeniem w bandę ochronną? Co wywołuję tę siłę? Dlaczego tory są otoczone bandami ochronnymi? Odpowiedzi na te i na inne pytania związane z zasadami dynamiki Newtona znajdziecie w niniejszym rozdziale.

6.1 | Rozwiązywanie zadań związanych z zasadami dynamiki Newtona

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- stosować poznaną wcześniej metodologię rozwiązywania zadań fizycznych w bardziej złożonych układach sił;
- stosować podejście z kinematyki do rozwiązywania zagadnień związanych z zasadami dynamiki Newtona w ruchu postępowym;
- rozwiązywać bardziej złożone zadania dotyczące równowagi ciał;
- rozwiązywać bardziej złożone zadania dotyczące przyspieszenia ciał;
- stosować rachunek różniczkowy i całkowy do rozwiązywania bardziej złożonych zadań z dynamiki.

Umiejętność rozwiązywania zadań jest konieczna, aby zrozumieć i właściwie zastosować odpowiednie prawa i zasady fizyki. W rozdziale Zasady dynamiki Newtona przedstawiliśmy metodologię rozwiązywania zadań związanych z zasadami dynamiki Newtona w ruchu postępowym. W niniejszym rozdziale będziemy kontynuować przyjętą strategię rozwiązywania tych zadań metodą „krok po kroku”.

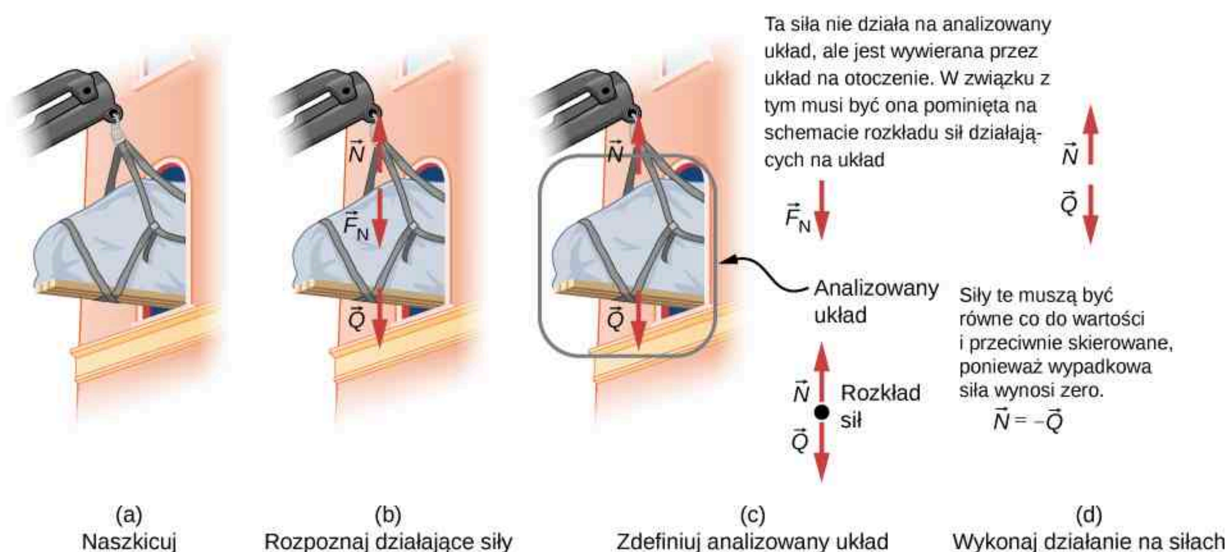
Strategia rozwiązywania zadań

W niniejszym rozdziale będziemy kontynuować przyjętą wcześniej metodologię rozwiązywania problemów fizycznych, ale zostanie ona wzbogacona o konkretne strategie stosowane w odniesieniu do **zasad dynamiki Newtona** (ang. **Newton’s laws of motion**). Po zidentyfikowaniu, jakie zasady i prawa fizyczne występują w zagadnieniu problemowym i po stwierdzeniu, że są to zasady dynamiki Newtona, można zastosować wymienione niżej kroki, aby znaleźć rozwiązanie. Metodologia ta opisuje liczne pojęcia, które są przydatne również w wielu innych dziedzinach fizyki. W opracowanych przykładach przedstawiono wiele strategii rozwiązywania różnorodnych problemów fizycznych, więc ich analiza pomoże ugruntować nabyte wcześniej umiejętności.

Strategia rozwiązywania zadań: zastosowanie zasad dynamiki Newtona

1. Zidentyfikuj wielkości „dane” oraz „szukane”.
2. Wykonaj rysunek poglądowy, zaznaczając wszystkie działające siły za pomocą strzałek.
3. Określ analizowany układ i narysuj **rozkład sił działających na ciało** (ang. **free-body diagram**), który będzie niezbędny do rozwiązania danego problemu.
4. Zastosuj odpowiednią zasadę dynamiki Newtona. Jeśli to konieczne, zastosuj kinematyczne równania ruchu z rozdziału dotyczącego ruchu prostoliniowego.
5. Zastanów się, czy otrzymany wynik ma sens.

Spróbujmy zastosować powyższą strategię do rozwiązania zagadnienia związanego z transportowaniem pianina na drugie piętro budynku. Gdy już ustaliliśmy, że problem ten związany jest z drugą zasadą dynamiki Newtona (bo sytuacja ta wymaga stosowania sił), szczególnie istotne jest właściwe rozrysowanie rozkładu sił działających na pianino (patrz Rysunek 6.2(a)). Wszystkie działające siły można przedstawić w postaci strzałek (patrz Rysunek 6.2(b)). Jeśli tylko mamy do tego wystarczające informacje, narysowane strzałki powinny posiadać odpowiednią długość i kierunek, wiernie odwzorowując reprezentowane siły.



Rysunek 6.2 (a) Wielki fortepian jest wciągany do mieszkania na drugim piętrze. (b) Działające siły są przedstawione za pomocą strzałek. $\vec{N}$ jest naciągiem liny nad fortepianem, $\vec{F}_N$ to siła, jaką fortepian wywiera na linę, zaś $\vec{Q}$ jest ciężarem fortepianu. Wszystkie inne siły, takie jak podmuchy wiatru, są pomijane. (c) Załóżmy, że znamy masę fortepianu i mamy znaleźć naciąg liny. Definiujemy analizowany układ i wykonujemy diagram rozkładu sił działających na ciało, jak to zostało przedstawione na rysunku. Wówczas siła $\vec{F}_N$ nie jest już uwzględniania, ponieważ nie działa ona w obranym układzie odniesienia. $\vec{F}_N$ działa na układ zewnętrzny. (d) W celu znalezienia sumy sił działających w układzie zastosowano graficzną metodę dodawania wektorów. Jest oczywiste, że jeśli fortepian jest nieruchomy, to $\vec{N} = -\vec{Q}$.

Podobnie jak w innych zadaniach fizycznych, na początku trzeba określić, jakie wielkości są dane, a jakie szukane w treści zadania. Szczególnie ważne jest również właściwe określenie analizowanego układu. Następnie definiujemy, które siły są zewnętrzne, a które wewnętrzne w danym układzie, gdyż jest to konieczne, aby móc zastosować drugą zasadę dynamiki Newtona (patrz Rysunek 6.2(c)). Określenie, czy siły są wywierane pomiędzy składnikami układu (siły wewnętrzne) czy pomiędzy układem a elementami zewnętrznymi (siły zewnętrzne), może nastąpić w oparciu o trzecią zasadę dynamiki Newtona. Jak pokazano w rozdziale Zasady dynamiki Newtona, wybór układu jest zdeterminowany wielkościami szukanymi w danym zadaniu. W rozkładzie sił działających na ciało uwzględnia się tylko siły, a nie przyspieszenie czy prędkość. Kilka przykładowych rozkładów sił zostało wykonanych w ramach rozwiązywania poprzednich zadań w niniejszym podręczniku. Z kolei rozkład sił dla dyskutowanego zadania z pianinem przedstawiono na rysunku (patrz Rysunek 6.2(c)). Warto zwrócić uwagę, że na rysunku tym nie ma żadnych sił wewnętrznych.

Teraz możemy zastosować drugą zasadę dynamiki Newtona (patrz Rysunek 6.2(d)). Kiedy siły zewnętrzne zostaną właściwie zidentyfikowane i uwzględnione w rozkładzie sił, dalsze rozwiązanie zadania nie powinno sprawiać nam kłopotu. Jeśli analizowane zagadnienie jest jednowymiarowe (tak jak w tym przypadku) oraz jeśli działające siły są względem siebie równoległe, to sumowanie wektorów można przeprowadzić w sposób algebraiczny. Jeśli natomiast zagadnienie jest dwuwymiarowe, to wektory należy rozłożyć na składowe i przeprowadzić analizę jak dla dwóch zagadnień jednowymiarowych. Robimy to poprzez rzutowanie odpowiednich wektorów siły na osie wybranego wcześniej układu odniesienia. Jak wynika z poprzednich przykładów, właściwy wybór osi może wyraźnie uprościć zadanie. Na przykład jeśli chodzi o zadania z równią pochyłą, to zestaw osi z jedną osią równoległą do równi i drugą prostopadłą do niej jest najwygodniejszy. Zazwyczaj optymalnego wyboru osi dokonuje się tak, by jedna z osi była równoległa do kierunku ruchu. Ogólnie rzecz biorąc, wystarczy napisać drugie prawo Newtona dla odpowiednich składowych sił w różnych kierunkach. Wtedy otrzymamy następujące równania:

$$\sum_i F_{xi} = ma_x, \quad \sum_i F_{yi} = ma_y.$$

Jeśli na przykład układ doznaje przyspieszenia tylko w kierunku równoległym, wówczas można zapisać $a_y = 0$. Wiedza ta jest niezbędna, aby określić, jakie nieznane siły działają w analizowanym układzie.

Następnie, tak jak zawsze, musimy zweryfikować poprawność otrzymanego wyniku. Zazwyczaj sprowadza się to do sprawdzenia, czy wynik ten jest rozsądny. Na przykład rozsądne jest stwierdzenie, że tarcie powoduje, iż obiekt przesuwa się po równi pochyłej wolniej niż kiedy nie ma tarcia. W praktyce intuicja fizyczna rozwija się stop-

niowo poprzez rozwiązywanie kolejnych zadań. W miarę nabierania doświadczenia coraz łatwiejsze do oceny staje się stwierdzenie, czy odpowiedź jest rozsądna. Innym sposobem weryfikacji rozwiązania jest sprawdzenie jednostek. Jeśli rozwiązaniem zadania jest wyliczenie siły, a jednostką, którą otrzymamy jest na przykład milimetr na sekundę to wiemy, że popełniliśmy błąd.

Istnieje wiele ciekawych przykładów zastosowania zasad dynamiki Newtona. Kilka z nich prezentowanych jest m.in. w niniejszym rozdziale. Ich analiza ma służyć zilustrowaniu kilku dalszych subtelności fizyki i pomóc rozwinąć umiejętności rozwiązywania zadań fizycznych. Najpierw przeanalizujemy zadania związane z równowagą cząstek, które wykorzystują pierwszą zasadę dynamiki Newtona, a następnie rozważymy przyspieszenia cząstek, które obejmują drugą zasadę dynamiki Newtona.

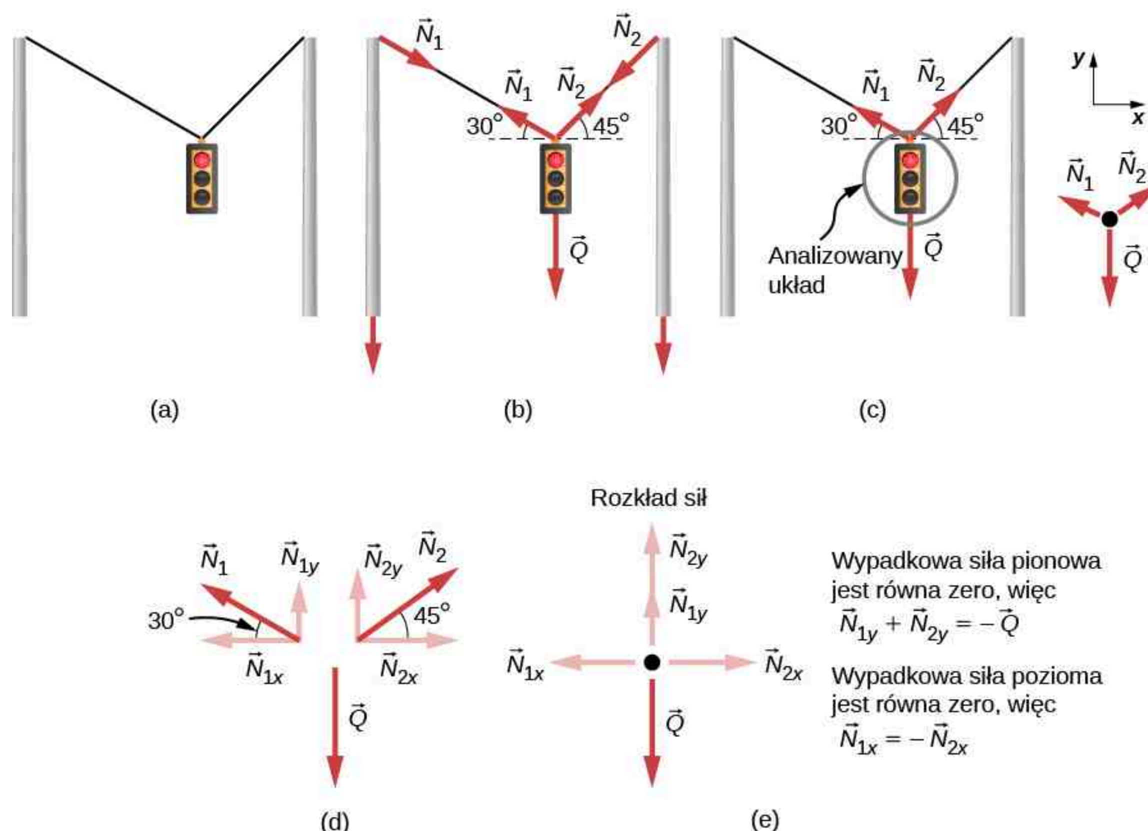
Równowaga ciała

Przypomnijmy, że ciało jest w równowadze, jeśli działające na nie siły zewnętrzne są zrównoważone. Statyczna równowaga obejmuje przedmioty w spoczynku, a równowaga dynamiczna obejmuje obiekty poruszające się bez przyspieszenia. Ważne jednak, aby pamiętać, że warunki te są względne. Na przykład obiekt może być w spoczynku, gdy jest oglądany z naszego układu odniesienia, ale ten sam przedmiot wydaje się być w ruchu, gdy jest obserwowany przez kogoś poruszającego się ze stałą prędkością. Rozwiążmy teraz kolejne zadanie związane z **równowagą ciał** (ang. **particle equilibrium**), bazując na wiedzy zdobytej podczas analizy rozdziału Zasady dynamiki Newtona.

Przykład 6.1

Różne siły naciągu pod różnymi kątami

Rozważmy sygnalizację świetlną o masie 15 kg umocowaną na dwóch kablach (patrz Rysunek 6.3). Znajdź siłę naciągu każdego z kabli, zakładając, że są one nieważkie.



Rysunek 6.3 (a) Sygnalizacja świetlna zawieszona jest na dwóch kablach. (b) Zaprezentowane są siły działające w układzie. (c) Przedstawione są tylko siły działające na analizowany układ. Obok narysowany jest rozkład sił działających na ciało. (d) Siły są rozłożone na składowe w kierunku pionowym (y) oraz poziomym (x). Poziome składowe siły naciągu znoszą się, zaś suma pionowych składowych siły naciągu musi być równa ciężarowi sygnalizacji. (e) Na rozkładzie sił działających na ciało przedstawione są siły działające w kierunku pionowym i poziomym.

Strategia rozwiązania

Analizowanym układem jest sygnalizacja świetlna, dla której rozkład działających sił został przedstawiony na rysunku (patrz Rysunek 6.3(c)). Wszystkie trzy działające siły nie są równoległe, więc trzeba je zrzutować na odpowiedni układ współrzędnych. Najbardziej wygodny układ współrzędnych będzie miał jedną oś poziomą, a drugą pionową. Rzuty poszczególnych sił na wskazany układ współrzędnych zostały przedstawione na rysunku (patrz Rysunek 6.3(d)).W analizowanym zadaniu występują dwie wielkości szukane (N_1,N_2), więc konieczne jest sformułowanie dwóch układów równań. Równania te tworzymy w oparciu o drugą zasadę dynamiki Newtona wzdłuż poziomej oraz pionowej osi. Pamiętamy jednocześnie, że wypadkowa działających sił jest równa zero, ponieważ przyspieszenie jest równe zeru.

Rozwiązanie

Rozważmy siły działające w kierunku poziomym (lub osi x):

$$F_{\text{wyp}\,x} = N_{2x} - N_{1x} = 0.$$

Z czego wynika:

$$N_{1x} = N_{2x}.$$

To z kolei daje nam następującą zależność:

$$N_1 \cos 30^\circ = N_2 \cos 45^\circ.$$

Zatem:

$$N_2 = 1{,}225 N_1.$$

Zauważ, że N_1 i N_2 nie są równe, ponieważ są skierowane pod innymi kątami. Sensowne jest spostrzeżenie, że N_2 jest większa niż N_1 ponieważ jest skierowana bardziej poziomo niż N_1.

Teraz rozważmy siły działające w kierunku pionowym (osi y):

$$F_{\text{wyp}\ y} = N_{1y} + N_{2y} - Q = 0.$$

Stąd wynika, że:

$$N_{1y} + N_{2y} = Q.$$

To z kolei prowadzi do zależności:

$$N_1 \sin 30^\circ + N_2 \sin 45^\circ = Q.$$

W równaniu tym występują dwie niewiadome, ale podstawiając wyrażenie na N_2 zależne od N_1 (z analizy sił poziomych) upraszczamy to równanie do postaci równania z jedną niewiadomą:

$$N_1 \cdot 0{,}500 + 1{,}225 N_1 \cdot 0{,}707 = Q = mg,$$

co równa się

$$1{,}3661 N_1 = 15{,}0\,\text{kg} \cdot 9{,}80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Rozwiązanie tego ostatniego równania daje nam wartość liczbową N_1 równą:

$$N_1 = 108\,\text{N}.$$

Na końcu znajdujemy wartość liczbową N_2 poprzez zastosowanie zależności między siłami $N_2 = 1{,}225 N_1$, co zostało wykazane wcześniej. Wówczas otrzymujemy wartość

$$N_2 = 132\,\text{N}.$$

Znaczenie

Obie siły naciągu byłyby większe, gdyby kable były bardziej poziome. Z kolei siły naciągu każdego z kabli byłyby sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdyby kąty po obu stronach były jednakowe (podobnie jak w przykładzie z linoskoczkiem analizowanym w rozdziale Zasady dynamiki Newtona.

Przyspieszenie ciała

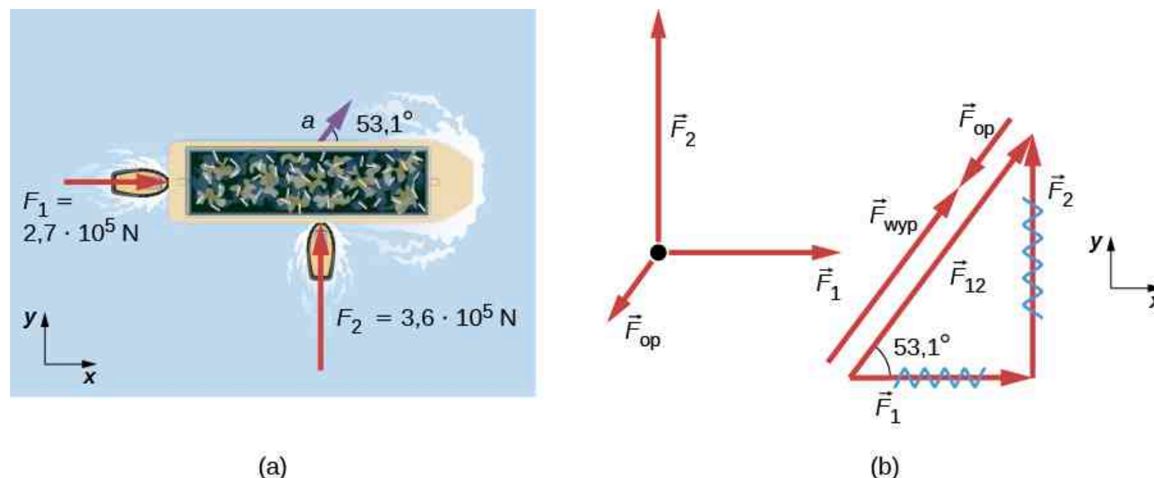
Rozważyliśmy kilka przykładów ciał w równowadze. Teraz nasza uwaga skupi się na zadaniach z **przyspieszeniem ciał** (ang. **particle acceleration**), które wynika z istnienia niezerowej siły wypadkowej. Przyjrzyj się jeszcze raz strategii rozwiązywania zadań przedstawionej na początku tego rozdziału i zastanów się, jak można ją zastosować do poniższych przykładów.

Przykład 6.2

Siła oporu działająca na barkę

Dwa holowniki pchają barkę w różnych kierunkach (Rysunek 6.4). Pierwszy holownik wywiera siłę $2{,}7 \cdot 10^5$ N w kierunku x a drugi holownik wywiera siłę $3{,}6 \cdot 10^5$ N w kierunku y. Masa barki wynosi $5{,}0 \cdot 10^6$ kg, a jej przyspieszenie jest równe $7{,}5 \cdot 10^{-2}$ m/s^2 i skierowane jest jak przedstawiono na rysunku. Ile wynosi siła oporu wody działająca na barkę i utrudniająca jej ruch? (Zauważ, że siła oporu jest

siłą wywieraną na ciała przez płyny takie jak powietrze lub woda. **Siła oporu** (ang. **drag force**) utrudnia ruch ciał. Ponieważ barka jest płaska z dołu, można założyć, że siła oporu działa w kierunku przeciwnym do ruchu barki.)



Rysunek 6.4 (a) Widok z góry na dwa holowniki pchające barkę. (b) Rozkład sił działających na barkę zawiera tylko siły działające w płaszczyźnie lustra wody. Pominięte zostają dwie siły działające w kierunku pionowym: siła ciężkości barki oraz siła wyporu wody, ponieważ się znoszą. Zauważ, że $\vec{F}_{12}$ oznacza całkowitą, sumaryczną siłę wywieraną przez holowniki na barkę.

Strategia rozwiązania

Rysunek 6.4(a) przedstawia kierunki i wartości występujących wektorów sił i przyspieszenia. Całkowita siła wywierana przez holowniki na barkę ($\vec{F}_{12}$) wynosi:

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Siła oporu wody $\vec{F}_{op}$ skierowana jest przeciwnie do kierunku ruchu barki, czyli działa ona w kierunku przeciwnym niż siła $\vec{F}_{12}$, przedstawiona na rozkładzie sił na Rysunku 6.4(b). W tym zadaniu analizowanym układem jest barka, więc do niej przyłożone są wektory sił i przyspieszenia. W związku z tym, że działające siły są prostopadłe, osie x i y są tak samo skierowane jak siły $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$. Analizowane zadanie staje się zagadnieniem jednowymiarowym wzdłuż kierunku działania siły, ponieważ siła oporu skierowana jest przeciwnie do kierunku działania siły $\vec{F}_{12}$. Następnie przyjmujemy odpowiednią strategię, aby znaleźć kierunek i wartość wypadkowej sił wywieranych przez holowniki ($\vec{F}_{12}$) i zastosować drugą zasadę dynamiki Newtona do znalezienia siły oporu $\vec{F}_{op}$.

Rozwiązanie

Jako że siły F_1 i F_2 są prostopadłe, możemy znaleźć kierunek i wartość wypadkowej tych dwóch sił $\vec{F}_{12}$ bezpośrednio z zależności geometrycznych. Po pierwsze, w celu obliczenia wartości tej siły zastosujemy twierdzenie Pitagorasa:

$$F_{12} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{\left(2{,}7 \cdot 10^5\ \mathrm{N}\right)^2 + \left(3{,}6 \cdot 10^5\ \mathrm{N}\right)^2} = 4{,}5 \cdot 10^5\ \mathrm{N}.$$

Kąt natomiast jest równy:

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{F_2}{F_1}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{3{,}6 \cdot 10^5\ \mathrm{N}}{2{,}7 \cdot 10^5\ \mathrm{N}}\right) = 53{,}1^\circ.$$

Z pierwszej zasady dynamiki Newtona wiadomo, że kierunek tej siły jest taki sam jak kierunek działającego przyspieszenia. Wiemy również, że siła oporu $\vec{F}_{op}$ działa w przeciwnym kierunku niż $\vec{F}_{12}$, ponieważ

zmniejsza ona przyspieszenie barki. W związku z tym wypadkowa sił zewnętrznych jest tak samo skierowana jak $\vec{F}_{12}$, ale jej wartość jest nieco mniejsza niż wartość siły $\vec{F}_{12}$. Jako że problem jest w zasadzie zagadnieniem jednowymiarowym, na podstawie diagramu rozkładu sił w układzie można napisać:

$$F_{wyp} = F_{12} - F_{op}.$$

Jednakże z drugiej zasady dynamiki Newtona wynika, że:

$$F_{wyp} = ma.$$

Stąd

$$F_{12} - F_{op} = ma.$$

Na tej podstawie można obliczyć wartość siły oporu wody F_{op} działającej na barkę.

$$F_{op} = F_{12} - ma.$$

Po podstawieniu znanych wartości liczbowych otrzymujemy:

$$F_{op} = 4{,}5 \cdot 10^5 \text{ N} - 5{,}0 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot 7{,}5 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 7{,}5 \cdot 10^4 \text{ N}.$$

Z kolei kierunek siły oporu wody $\vec{F}_{op}$ został określony jako kierunek przeciwny do wypadkowej sił wywieranych na barkę przez holowniki $\vec{F}_{12}$ lub jako zwrócony pod kątem 53° na południowy zachód.

Znaczenie

Wartości liczbowe otrzymane w tym zadaniu są rozsądne dla umiarkowanie dużej barki. Uzyskanie większych wartości przyspieszeń przy użyciu holowników jest szczególnie trudne, a ponadto zachowanie małych prędkości jest pożądane. Przy niskich prędkościach, dla dobrze zaprojektowanych kadłubów, siła oporu jest stosunkowo niska, co zgadza się z odpowiedzią z zadania, gdzie F_{op} jest ponad 600 razy mniejsza od ciężaru barki.

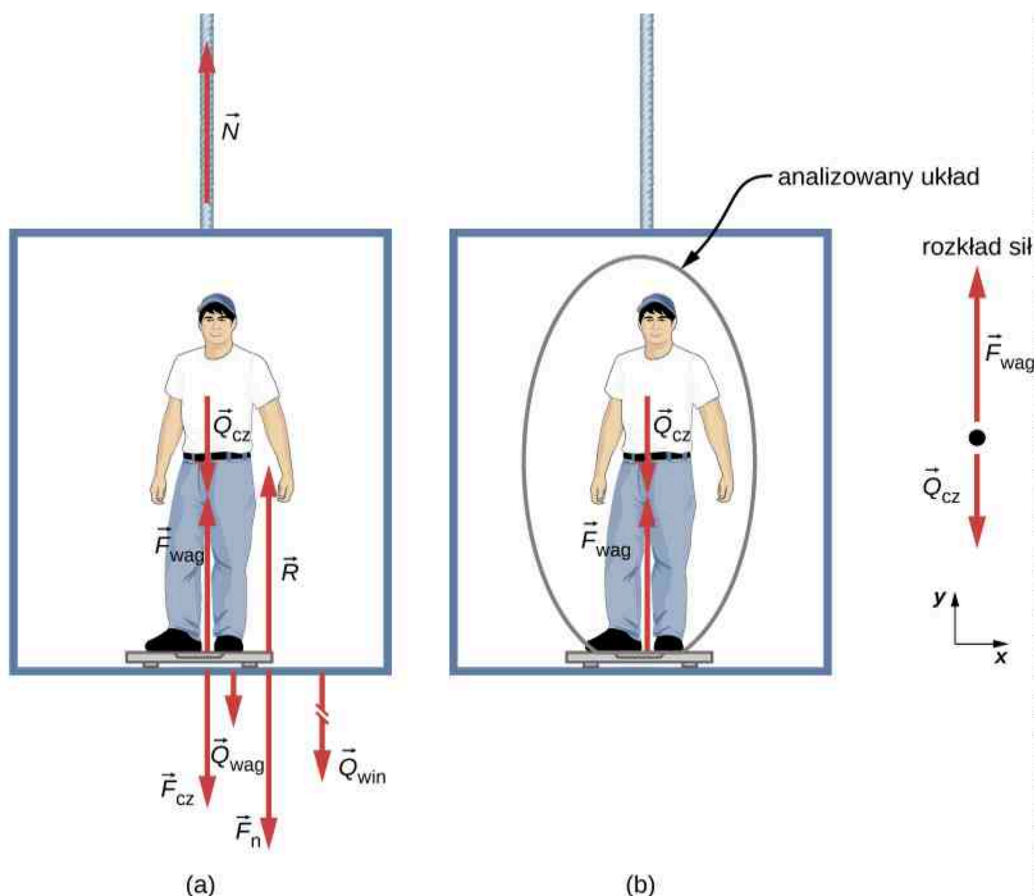
W rozdziale Zasady dynamiki Newtona omawialiśmy pojęcie **siły normalnej** (ang. **normal force**), która jest kontaktową siłą reakcji w kierunku normalnym do płaszczyzny powierzchni i działającą na obiekt w taki sposób, że nie doznaje on przyspieszenia w kierunku prostopadłym do powierzchni. Waga laboratoryjna jest doskonałym przykładem urządzenia mierzącego normalną siłę reakcji działającą na ciało. Daje nam informację, jak mocno trzeba pchać w górę, aby podtrzymać ciężar ciała. Ale czy potrafisz przewidzieć, jakie wskazanie na skali wagi zobaczysz, jeśli waga umieszczona zostanie w poruszającej się **windzie** (ang. **elevator**)? Czy wskazywana wartość będzie większa niż twój statyczny ciężar, kiedy winda wystartuje w górę? Jakie będzie wskazanie, jeśli winda będzie poruszała się w górę ze stałą prędkością? Postaraj się najpierw intuicyjnie odpowiedzieć na to pytanie, zanim jeszcze przyswoisz analizę kolejnego przykładu.

Przykład 6.3

Co tak naprawdę pokazuje waga łazienkowa umieszczona w windzie?

Rysunek 6.5 przedstawa mężczyznę o masie 75 kg, stojącego na wadze łazienkowej umieszczonej w windzie. Oblicz, jakie będą wskazania wagi w następujących przypadkach:

a. gdy winda porusza się w górę z przyspieszeniem $1{,}20 \text{ m/s}^2$
b. gdy winda porusza się w górę ze stałą prędkością równą 1 m/s.



Rysunek 6.5 (a) Różne siły działające na człowieka stojącego w windzie na wadze łazienkowej. Długości wektorów odzwierciedlają sytuację, gdy winda porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym w górę. „Nieciągły" wektor reprezentuje siłę o wartości zbyt dużej, by mogła zostać w całości zaprezentowana na rysunku. $\vec{N}$ jest siłą naciągu liny, na której wisi winda, $\vec{Q}_{cz}$ jest ciężarem człowieka, $\vec{Q}_{wag}$ jest ciężarem wagi, $\vec{Q}_{win}$ jest ciężarem windy, $\vec{F}_{wag}$ jest siłą wywieraną przez wagę na człowieka, $\vec{F}_{cz}$ jest siłą wywieraną przez człowieka na wagę, $\vec{F}_{n}$ jest siłą nacisku wywieraną przez wagę na podłogę windy, zaś $\vec{R}$ jest siłą normalną do podłoża (siłą reakcji podłogi wywieraną na wagę). (b) Wykonany rozkład sił zawiera tylko siły zewnętrzne działające *na* zaznaczony układ (człowieka). Tylko te siły będą brane pod uwagę w dalszej analizie zagadnienia.

Strategia rozwiązania

Waga w spoczynku będzie wskazywała $\vec{F}_{cz}$, czyli wartość siły wywieranej na wagę przez człowieka. Rysunek 6.5(a) przedstawia liczne siły działające na windę, człowieka i wagę. Mimo, że analizowane zagadnienie jest jednowymiarowe, to wygląda ono na dużo bardziej złożone niż w przypadku, gdy jako analizowany układ wybrano tylko człowieka (patrz Rysunek 6.5(b)). Wówczas jedynymi siłami działającymi na człowieka są jego ciężar $\vec{Q}_{cz}$ oraz siła wywierana przez wagę $\vec{F}_{wag}$. Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki Newtona siły $\vec{F}_{cz}$ i $\vec{F}_{wag}$ są zgodne co do wartości, ale przeciwnie skierowane. W związku z tym musimy znaleźć wartość F_{wag} po to, by dowiedzieć się, ile wynosi wskazanie wagi. Jak zawsze, zastosujemy w tym celu drugą zasadę dynamiki Newtona:

$$\vec{F}_{wyp} = m\vec{a}.$$

Z rozkładu sił działających na ciało wynika, że $\vec{F}_{\text{wyp}} = \vec{F}_{\text{wag}} + \vec{Q}_{\text{cz}}$, co po przejściu do zapisu skalarnego oznacza:

$$F_{\text{wag}} - Q_{\text{cz}} = ma.$$

Po przekształceniu uzyskujemy równanie z jedną niewiadomą F_{wag}:

$$F_{\text{wag}} = ma + Q_{\text{cz}},$$

a uwzględniając fakt, że $Q_{\text{cz}} = mg$, równanie upraszcza się do postaci:

$$F_{\text{wag}} = ma + mg.$$

Nie przyjmowaliśmy żadnych założeń dla przyspieszeń, więc uzyskane rozwiązanie powinno być uniwersalne. (Zauważ, że w tym zadaniu rozważamy przypadek, gdy winda porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym w górę. Gdyby poruszała się ruchem jednostajnie przyspieszonym w dół, zależność wynikająca z drugiej zasady dynamiki Newtona wyglądałaby następująco: $F_{\text{wag}} - Q_{\text{cz}} = -ma.$)

Rozwiązanie

a. Przyjmijmy, że $a = 1{,}20\ \text{m/s}^2$, więc

$$F_{\text{wag}} = 75{,}0\ \text{kg} \cdot 9{,}80\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 75{,}0\ \text{kg} \cdot 1{,}20\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

co daje

$$F_{\text{wag}} = 825\ \text{N}.$$

b. Teraz zastanówmy się, co się dzieje, gdy winda osiąga pewną ustaloną wartość prędkości skierowanej w górę? Czy wskazania wagi nadal będą większe niż ciężar człowieka? Otóż w każdym przypadku ruchu ze stałą prędkością, niezależnie, czy w górę, czy w dół, przyspieszenie jest równe zero, ponieważ $a = \Delta v / \Delta t$ i $\Delta v = 0\ \text{m/s}$. Zatem

$$F_{\text{wag}} = ma + mg = 0 + mg$$

lub

$$F_{\text{wag}} = 75{,}0\ \text{kg} \cdot 9{,}80\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

co z kolei daje wartość

$$F_{\text{wag}} = 735\ \text{N}.$$

Znaczenie

Odczyt na wadze (Rysunek 6.5(a)) wynosi ok. 84 kg. Jaki byłby odczyt wagi, gdyby znajdowała się ona w nieruchomej windzie? Jako że przyspieszenie byłoby równe zero, siła wywierana przez wagę na człowieka byłaby równa ciężarowi człowieka:

$$F_{\text{wyp}} = ma = 0 = F_{\text{wag}} - Q_{\text{cz}}$$

$$F_{\text{wag}} = Q_{\text{cz}} = mg$$

$$F_{\text{s}} = 75{,}0\ \text{kg} \cdot 9{,}80\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 735\ \text{N}.$$

Jeśli zatem odczyt wagi jest większy niż ciężar człowieka (wynoszący 735 N, czyli 75 kg) oznacza to, że waga „podnosi” człowieka z siłą większą niż jego ciężar, ponieważ działa na niego przyspieszenie. Zatem im większe jest przyspieszenie windy, tym większy odczyt wagi, co jest zgodne z odczuciami, jakich dozna-

jemy porównując ruch w windach jadących z dużym lub z małym przyspieszeniem. Natomiast otrzymane w przypadku (b) wskazanie wagi wynoszące 735 N (75 kg) jest równe ciężarowi człowieka. Jest to przypadek ruchu windy ze stałą prędkością w górę, w dół lub windy nieruchomej.



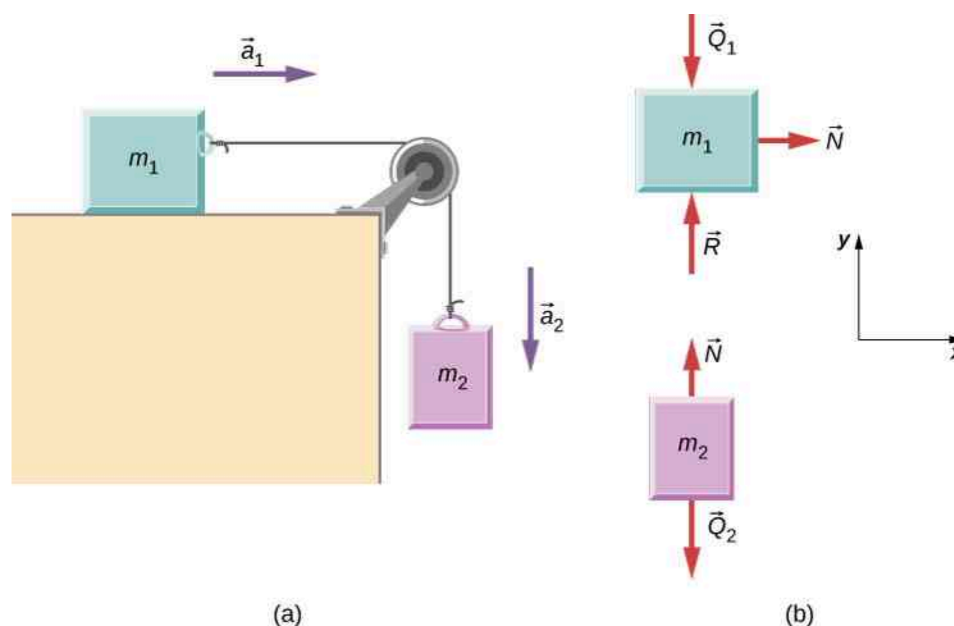
6.1 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Teraz oblicz, jakie będą wskazania wagi, jeśli winda będzie poruszać się w dół ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem równym $1{,}20\ \mathrm{m/s}^2$.

Jak już wspomniano, rozwiązanie poprzedniego przykładu odnosi się również do przypadku windy poruszającej się ruchem jednostajnie przyspieszonym w dół. Wówczas przyspieszenie a jest ujemne, a odczyt wagi jest *mniejszy* niż ciężar człowieka. Jeśli osiągnięta zostanie ustalona wartość prędkości w kierunku pionowym w dół, to wskazanie wagi będzie zgodne z ciężarem człowieka. Jeśli zaś winda zacznie spadać pionowo w dół z przyspieszeniem g, to odczyt na skali wagi będzie równy zero, a człowiek znajdzie się w stanie nieważkości.

Przykład 6.4

Dwa ciała połączone nicią przerzuconą przez bloczek

Rysunek 6.6 przedstawia ciężarek o masie m_1 spoczywający na gładkiej, poziomej powierzchni. Ciężarek ten połączony jest z drugim ciężarkiem o masie m_2 za pomocą cienkiej, nieważkiej i nierozciągliwej nici przerzuconej przez nieważki, nieruchomy bloczek. Znajdź przyspieszenie ciężarków oraz siłę naciągu liny przy założeniu znanych wartości m_1, m_2 i g.



Rysunek 6.6 (a) Ciężarek 1 jest połączony z ciężarkiem 2 za pomocą cienkiej, nieważkiej i nierozciągliwej nici przerzuconej przez nieważki, nieruchomy bloczek. (b) Rozkład sił działających na każdy z ciężarków.

Strategia rozwiązania

Dla każdego klocka z osobna rysujemy rozkład działających sił (Rysunek 6.6). Rozpatrujemy je oddzielnie. Zauważamy, że na klocek 1 działa siła ciężkości, siła reakcji podłoża i siła naciągu nici. Z kolei na klocek 2 wywierana jest siła ciężkości i siła naciągu nici. Równania sił wynikające z drugiej zasady dynamiki Newtona wyglądają następująco:

Dla klocka 1: $\vec{N} + \vec{Q}_1 + \vec{R} = m_1 \vec{a}_1$

Dla klocka 2: $\vec{N} + \vec{Q}_2 = m_2 \vec{a}_2$.

Zauważ, że siła naciągu nici $\vec{N}$ jest taka sama dla obu klocków. W związku z tym, że nić i bloczek są

nieważkie oraz że bloczek nie wywołuje tarcia, siły naciągu są takie same na całej długości nitki. Możemy zatem rozpisać równania na poszczególne składowe dla każdego klocka. Wszystkie siły działają albo w kierunku pionowym, albo poziomym, więc najwygodniej będzie użyć tego samego układu współrzędnych dla obu klocków.

Rozwiązanie

Bilans sił działających wzdłuż poszczególnych kierunków wynika z równań wektorowych przedstawionych powyżej. Widzimy, że dla klocka 1 siły działające w kierunku pionowym są w równowadze (klocek nie porusza się w kierunku pionowym), więc je pomijamy i uwzględniamy tylko siły działające wzdłuż osi x. Z kolei na klocek 2 nie działają żadne siły w kierunku poziomym, więc jedynie siły działające wzdłuż osi y są uwzględniane. W rezultacie otrzymujemy następujące zależności:

$$\begin{array}{ll} \textbf{Klocek 1} & \textbf{Klocek 2} \\ \sum F_x = ma_x & \sum F_y = ma_y \\ N_x = m_1 a_{1x} & N_y - m_2 g = m_2 a_{2y}. \end{array}$$

Gdy klocek 1 przesuwa się w prawo, klocek 2 przemieszcza się dokładnie o ten sam odcinek drogi w dół. Możemy zatem zapisać, że $a_{1x} = -a_{2y}$. Przyjmując jednakowe oznaczenie dla przyspieszeń każdego z klocków $a = a_{1x} = -a_{2y}$, otrzymujemy zależność:

$$N = m_1 a$$

oraz

$$N - m_2 g = -m_2 a.$$

Tworząc układ równań z dwóch powyższych zależności, jesteśmy w stanie wyprowadzić wyrażenia na dwie wielkości szukane: a i N

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g$$

oraz

$$N = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Znaczenie

Zauważ, że siła naciągu nici jest *mniejsza* niż ciężar bloczka zwisającego na jej końcu. Często popełnianym błędem w tego typu zadaniach jest przyjmowanie następującej równowagi sił: $N = m_2 g$. Z rozkładu sił działających na klocek 2 jasno wynika, że tego typu równanie jest niepoprawne, ponieważ klocek ten nie jest statyczny, lecz przyspiesza.



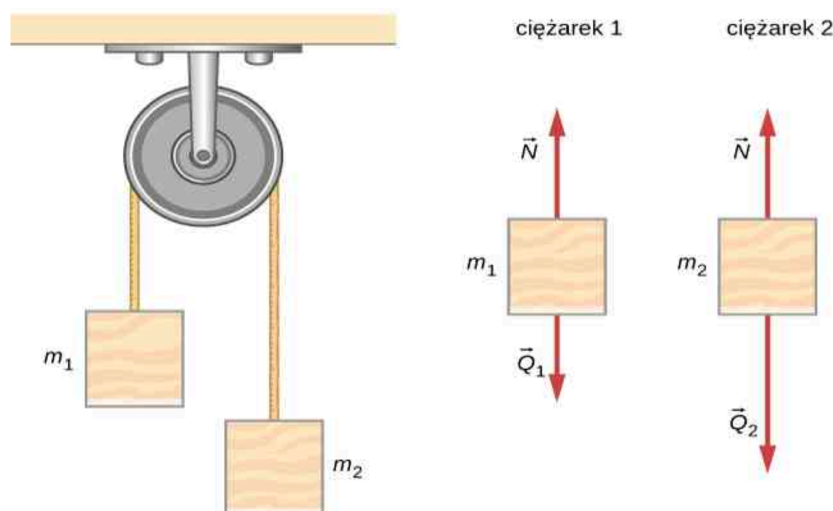
6.2 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Oblicz wartości liczbowe przyspieszenia układu klocków oraz siłę naciągu nici przy założeniu następujących mas klocków: $m_1 = 5{,}00 \text{ kg}$ i $m_2 = 3{,}00 \text{ kg}$.

Przykład 6.5

Spadkownica Atwooda

Jednym z klasycznych zagadnień mechaniki jest analiza ruchu tzw. **spadkownicy Atwooda** (ang. **Atwood machine**), która składa się z liny przerzuconej przez bloczek, na końcu której zawieszone są ciała o różnych masach. Rozważmy spadkownicę przedstawioną na Rysunku 6.7. Przyjmijmy, że bloczek jest nieruchomy, a masy zawieszonych ciężarków wynoszą odpowiednio $m_1 = 2{,}00 \text{ kg}$ i $m_2 = 4{,}00 \text{ kg}$.

a. Jeśli swobodnie puścimy ciężarek o masie m_2, to jakie będzie jego przyspieszenie?
b. Jaki będzie naciąg liny?



Rysunek 6.7 Spadkownica Atwooda oraz rozkłady sił działających na poszczególne klocki.

Strategia rozwiązania

Dla każdego klocka z osobna trzeba narysować rozkłady sił, jak to zostało przedstawione powyżej. Następnie analizujemy każdy schemat, aby znaleźć wymagane wielkości szukane. Otrzymane bilanse sił dla każdego z klocków można ze sobą powiązać, tak jak to zostało przedstawione w poprzednim przykładzie. Jako że klocek 2 porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym w dół z przyspieszeniem a_2, to klocek 1 porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym w górę z przyspieszeniem a_1. Skoro przyspieszenia te są równe co do wartości, to możemy zapisać: $a = a_1 = -a_2$.

Rozwiązanie

a. Ze schematów rozkładów sił wynikają następujące zależności:

$$\text{Dla } m_1 \text{:} \sum F_y = N - m_1 g = m_1 a. \qquad \text{Dla } m_2 \text{:} \sum F_y = N - m_2 g = -m_2 a.$$

Znak minus (−) przed $m_2 a$ wskazuje, że przy intuicyjnie przyjętym układzie współrzędnych, gdzie oś y skierowana jest pionowo w górę, masa m_2 porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym w dół. Oba klocki poruszają się z jednakowym co do wartości przyspieszeniem, ale przeciwnie skierowanym. Po napisaniu układu równań i zauważeniu, że siły naciągu nici są takie same dla obu klocków, otrzymujemy następującą zależność:

$$(m_2 - m_1)g = (m_1 + m_2)a.$$

co po przekształceniu daje następujące wyrażenie na przyspieszenie a :

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g = \frac{4\,\text{kg} - 2\,\text{kg}}{4\,\text{kg} + 2\,\text{kg}} (9{,}8\,\text{m/s}^2) = 3{,}27\,\text{m/s}^2.$$

b. Siłę naciągu nici można obliczyć korzystając z bilansu sił dla któregokolwiek z klocków. Wybierając bilans dla klocka 1 uzyskujemy następujące rozwiązanie:

$$N - m_1 g = m_1 a$$
$$N = m_1 (g + a) = (2\,\text{kg})(9{,}8\,\text{m/s}^2 + 3{,}27\,\text{m/s}^2) = 26{,}1\,\text{N}.$$

Znaczenie

Wyrażenie na przyspieszenie a w rozwiązaniu niniejszego przykładu może być rozumiane jako stosunek niezrównoważonej siły działającej na analizowany układ $(m_2 - m_1)g$, do całkowitej masy tego układu $m_1 + m_2$. Spadkownicy Atwooda można używać również do pomiaru lokalnej siły grawitacji, a konkretnie lokalnej wartości przyspieszenia ziemskiego.



6.3 Sprawdź, czy rozumiesz. Przekształć powyższe równania tak, być znaleźć wyrażenie na siłę naciągu nici N dla spadkownicy Atwooda w funkcji wielkości danych w zadaniu: m_1, m_2 i g.

Kinematyka i zasady dynamiki Newtona

Fizyka jest najbardziej pasjonująca, gdy stosuje się ją do ogólnych sytuacji, które wymagają więcej niż jednego wąskiego zbioru stosowanych zasad fizycznych. Tak właśnie jest z zasadami dynamiki Newtona, które w trakcie rozwiązywania zadań często łączy się z zasadami lub prawami występującymi w innych działach fizyki. Na przykład w celu przeanalizowania ruchu przyspieszonego ciała odwołujemy się nie tylko do zasad dynamiki Newtona, ale również do naszej wiedzy z **kinematyki** (ang. **kinematics**).

Gdy rozwiązujesz zadanie, w którym występują siły, przyspieszenia, prędkości i/lub położenie, należy wypisać wielkości dane i szukane, co pomoże rozpoznać, jakie zasady fizyczne należy zastosować. Wówczas będziesz w stanie odwołać się do konkretnych działów niniejszego podręcznika i na podstawie zamieszczonych tam strategii rozwiązania będziesz umieć to zadanie rozwiązać. W następnym przykładzie zaprezentujemy, jak strategia rozwiązania zadań z niniejszego rozdziału w powiązaniu z tymi przedstawionymi w rozdziałach wcześniejszych, mogą zostać zastosowane do rozwiązania bardziej złożonego zagadnienia fizycznego.

Przykład 6.6

Jak bardzo piłkarz musi się starać, aby osiągnąć maksymalną prędkość?

Piłkarz znajduje się w spoczynku, po czym zaczyna biec ruchem jednostajnie przyspieszonym, dzięki czemu osiąga prędkość 8,00 m/s w ciągu 2,50 s.

a. Jakie jest jego średnie przyspieszenie?
b. Jaką średnią siłę wywiera podłoże na piłkarza, jeśli osiąga on wyliczone przyspieszenie? Masa piłkarza wynosi 70 kg, a opór powietrza pomijamy.

Strategia rozwiązania

Zastosujmy strategię rozwiązania zadań przedstawioną w niniejszym rozdziale. Nie zawsze trzeba wykonać wszystkie kroki, które zostały zaproponowane w ogólnej metodologii. W niniejszym zadaniu po zidentyfikowaniu wielkości danych i szukanych rozwiązujemy zadanie w oparciu o drugą zasadę dynamiki Newtona, a następnie sprawdzamy, czy uzyskany wynik jest racjonalny.

Rozwiązanie

a. Mamy dane: prędkość początkową i końcową (odpowiednio 0 m/s i 8,00 m/s). W związku z tym różnica prędkości wynosi $\Delta v = 8{,}00\ \text{m/s}$. Wiemy również, że czas ruchu wynosi $\Delta t = 2{,}50\ \text{s}$. Szukane jest natomiast przyspieszenie, które można obliczyć na podstawie definicji:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Podstawiając dane z zadania, otrzymujemy

$$a = \frac{8{,}00\ \text{m/s}}{2{,}50\ \text{s}} = 3{,}20\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

b. Następnie jesteśmy pytani o średnią siłę, jaką ziemia wywiera na piłkarza, pomagając mu uzyskać

przyspieszenie. Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki Newtona jest to siła reakcji do tej, którą piłkarz wywiera na ziemię. Pomijając opór powietrza siła ta będzie co do wartości równa wypadkowej sił zewnętrznych działających na sportowca. Znając masę i przyspieszenie piłkarza, możemy zapisać:

$$F_{\text{wyp}} = ma.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych na m i a otrzymujemy

$$F_{\text{wyp}} = 70{,}0\,\text{kg} \cdot 3{,}20\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 224\,\text{N}.$$

Wartość ta jest racjonalna. Przyspieszenie to jest typowe dla sportowca w dobrej kondycji fizycznej. Siła natomiast odpowiada ciężarowi ciała o masie 22,7 kg, co również jest sensownym wynikiem.

Znaczenie

Przykład ten obrazuje, jak zastosować strategie rozwiązywania zadań do zagadnień wiążących w sobie różne działy fizyki. Najpierw trzeba określić, jakich zasad fizycznych dotyczy zadanie, a następnie zidentyfikować dane i szukane. W dalszej kolejności należy zastosować odpowiednie prawa (w tym przypadku drugą zasadę dynamiki Newtona), aby rozwiązać zadanie. Na końcu należy przedyskutować, czy otrzymany wynik jest rozsądny. Takie systematyczne podejście do rozwiązywania problemów będzie przydatne nie tylko w fizyce, ale również w innych dziedzinach nauki, a nawet w codziennym życiu.



6.4 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Po zakończeniu akcji piłka znajduje się w odległości 2,00 m od piłkarza, który stwierdza, że za chwilę przejmie ją przeciwnik. Jak długo zajęłoby mu dotarcie do piłki, jeśli zacząłby biec pod wpływem siły 126 N?

Przykład 6.7

Jaka siła działa na model helikoptera?

Model helikoptera o masie 1,5 kg porusza się z prędkością $\hat{j} \cdot 5{,}00\,\text{m/s}$ w czasie $t = 0$. Porusza się on ze stałym przyspieszeniem przez 2 sekundy, po czym osiąga prędkość $\hat{i} \cdot 6{,}00\,\text{m/s} + \hat{j} \cdot 12{,}00\,\text{m/s}$. Jaka jest wartość siły działającej na ten helikopter w trakcie opisywanego czasu?

Strategia rozwiązania

Obieramy układ współrzędnych, w którym oś x (kierunek $\hat{i}$) jest zorientowana poziomo, zaś oś y (kierunek $\hat{j}$) jest zorientowana pionowo. Wiemy, że $\Delta t = 2{,}00\,\text{s}$ oraz że zmiana prędkości wynosi $\hat{i} \cdot 6{,}00\,\text{m/s} + \hat{j} \cdot 12{,}00\,\text{m/s} - \hat{j} \cdot 5{,}00\,\text{m/s}$. Mając te dane jesteśmy w stanie obliczyć przyspieszenie z definicji, a następnie zastosować drugą zasadę dynamiki Newtona.

Rozwiązanie

Otrzymujemy następujące zależności na przyspieszenie i siłę:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\hat{i} \cdot 6{,}00\,\text{m/s} + \hat{j} \cdot 12{,}00\,\text{m/s} - \hat{j} \cdot 5{,}00\,\text{m/s}}{2{,}00\,\text{s}} = \hat{i} \cdot 3{,}00\,\text{m/s}^2 + \hat{j} \cdot 3{,}50\,\text{m/s}^2$$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = 1{,}5\,\text{kg}\left(\hat{i} \cdot 3{,}00\,\text{m/s}^2 + \hat{j} \cdot 3{,}50\,\text{m/s}^2\right) = \hat{i} \cdot 4{,}50\,\text{N} + \hat{j} \cdot 5{,}25\,\text{N}.$$

Liczbowa wartość siły działającej na helikopter wynosi:

$$F = \sqrt{(4{,}50\,\text{N})^2 + (5{,}25\,\text{N})^2} = 6{,}91\,\text{N}.$$

Znaczenie

Wielkości wektorowe dane w zadaniu zostały przedstawione w postaci typowego zapisu wektorowego, w którym używa się wektorów jednostkowych $\hat{i} - \hat{j}$, co oznacza, że w obliczeniach wykorzystany został rachunek wektorowy. Porównaj to rozwiązanie z rozwiązaniami podanymi w poprzednich przykładach.



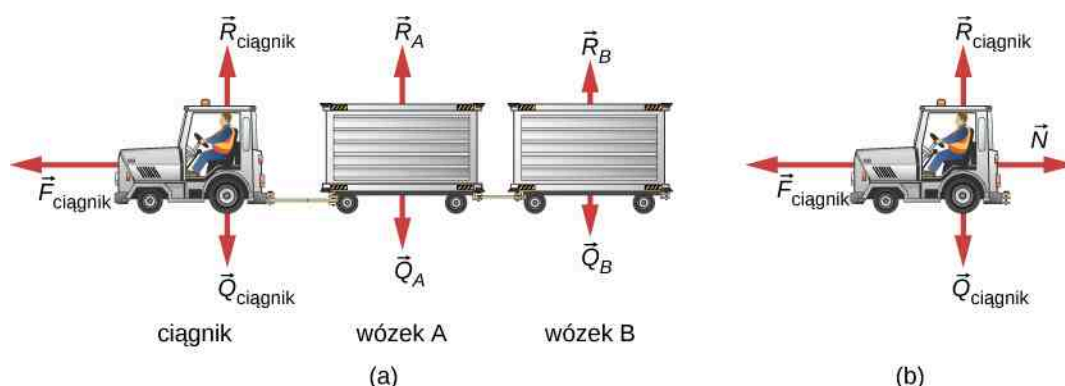
6.5 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Dla sytuacji w poprzednim zadaniu znajdź kierunek, w którym będzie się poruszał się model helikoptera.

Przykład 6.8

Ciągnik bagażowy

Rysunek 6.8(a) przedstawia ciągnik ciągnący wózki z bagażami na lotnisku. Masa ciągnika wynosi 650,0 kg, masa wózka A 250,0 kg, zaś masa wózka B 150,0 kg. Ciągnik rusza pod wpływem siły ciągu silnika, która działa przez 3,00 s.

a. Jeśli siła ciągu silnika jest funkcją zależną od czasu, przedstawioną równaniem $F = t \cdot 820{,}0\ \mathrm{N/s}$, to jaka będzie prędkość ciągnika po upływie 3,00 s?
b. Ile wynosi siła naciągu liny łączącej ciągnik z wózkiem A?



Rysunek 6.8 (a) Rozkład sił zewnętrznych działających na układ składający się z ciągnika oraz przyłączonych do niego dwóch wózków bagażowych. (b) Rozkład sił działających tylko na ciągnik, przedstawiony w celu znalezienia siły naciągu liny łączącej ciągnik z wózkami.

Strategia rozwiązania

Na rozkładzie sił działających na ciągnik przedstawiona jest siła ciągu silnika, która nadaje ciągnikowi przyspieszenie. Rozważamy tylko ruch w kierunku poziomym, ponieważ z bilansu sił w kierunku pionowym wynika, że siły te są w równowadze i nie trzeba ich brać pod uwagę. Z kolei w przykładzie (b) wykorzystujemy tylko rozkład sił dla samego ciągnika, ponieważ chcemy znaleźć siłę naciągu liny między ciągnikiem a wózkiem A, oznaczoną jako $\vec{N}$.

Rozwiązanie

a. $\sum F_x = m_{\text{układu}} a_x$ i $\sum F_x = 820{,}0t$, zatem

$$\begin{aligned} 820{,}0t &= (650{,}0 + 250{,}0 + 150{,}0)a \\ a &= 0{,}7809t. \end{aligned}$$

W związku z tym, że przyspieszenie jest funkcją zależną od czasu, prędkość można obliczyć, wychodząc z definicji przyspieszenia $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ przy założeniu warunków początkowych $v_0 = 0$ w czasie $t = 0$. Po przekształceniu całkujemy obustronnie to wyrażenie w granicach od $t = 0$ do $t = 3\mathrm{s}$

b. $\mathrm{d}v = a\mathrm{d}t, \quad \int_0^3 \mathrm{d}v = \int_0^3 a\mathrm{d}t = \int_0^3 0{,}7809t\mathrm{d}t, \quad v = \left[0{,}3905t^2\right]_0^3 = 3{,}51\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$

c. Spójrz na rozkład sił działających na ciągnik, przedstawiony na Rysunku 6.8(b). Rozpisz bilans działających sił:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= m_{\text{ciągnik}} a_x \\ 820{,}0t - N &= m_{\text{ciągnik}} (0{,}7805)t \\ (820{,}0)(3{,}00) - N &= (650{,}0)(0{,}7805)(3{,}00) \\ N &= 938\ \mathrm{N}. \end{aligned}$$

Znaczenie

W związku z tym, że siła jest zmienna w czasie, do rozwiązania tego zadania musimy użyć rachunku różniczkowo-całkowego. Zwróć uwagę, że w rozwiązaniu przykładu (a) pod uwagę brana jest masa całego układu (Rysunek 6.8(a)), zaś w rozwiązaniu przykładu (b) wystarczy znajomość masy ciągnika (Rysunek 6.8(b)), ponieważ to on bezpośrednio poddawany jest działaniu siły naciągu liny.

Przypomnijmy, że $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ i $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$. Skoro przyspieszenie jest funkcją zależną od czasu, to w niniejszym przykładzie możemy zastosować metody rachunku różniczkowo-całkowego, jak to było robione w rozdziale Ruch prostoliniowy. Czasami jednak przyspieszenie jest dane jako funkcja położenia. Wówczas możemy wyprowadzić szukane zależności, przekształcając odpowiednio równania różniczkowe. Na przykład przekształcając dwie pierwsze zależności na prędkość i przyspieszenie tak, by wyciągnąć z każdego $\mathrm{d}t$ otrzymujemy $\mathrm{d}t = \mathrm{d}s/v$ i $\mathrm{d}t = \mathrm{d}v/a$. Następnie porównując te wyrażenia, otrzymujemy $\mathrm{d}s/v = \mathrm{d}v/a$. Po przekształceniu ich ostatecznie otrzymujemy zależność $a\mathrm{d}s = v\mathrm{d}v$.

Przykład 6.9

Ruch pocisku wystrzelonego pionowo w górę

Pocisk o masie 10 kg jest wystrzeliwany z moździerza, znajdującego się na powierzchni ziemi, pionowo w górę z prędkością początkową 50,0 m/s (spójrz na Rysunek 6.9). Na jaką wysokość wzniesie się pocisk, jeśli opór powietrza wynosi $F_{\text{op}} = v^2 \cdot 0{,}01\ \mathrm{kg/m}$, gdzie v jest szybkością pocisku w danej chwili?



Rysunek 6.9 (a) Pocisk moździerzowy jest wystrzeliwany pionowo w górę. Uwzględniamy siłę oporu powietrza działającą na pocisk. (b) Rozkład sił działających na pocisk w ruchu.

Strategia rozwiązania

Siła działająca na pocisk moździerzowy może zostać obliczona na podstawie równania ruchu zawierającego zależność siły od przyspieszenia. Zależność przyspieszenia od położenia pocisku może zostać obliczona na podstawie równań kinematycznych.

Rozwiązanie

W chwili początkowej $y_0 = 0\,\text{m}$ i $v_0 = 50{,}0\,\text{m/s}$. Po osiągnięciu maksymalnej wysokości $y = h$, $v = 0\,\text{m/s}$. Na rozkładzie sił działających na pocisk siła oporu powietrza F_{op} jest skierowana w dół, ponieważ utrudnia ona ruch pocisku. W związku z tym możemy zapisać:

$$\sum F_y = ma_y$$

$$-F_{op} - Q = ma_y$$
$$-0{,}01v^2 - 98 = 10a$$
$$a = -0{,}001v^2 - 9{,}80.$$

Wypadkowe przyspieszenie pocisku jest zmienne i zależy od v. Skoro $a = f(v)$, możemy uzależnić a od v, korzystając z przekształceń przedstawionych powyżej:

$$a\mathrm{d}s = v\mathrm{d}v.$$

Zamiast $\mathrm{d}s$ podstawiamy $\mathrm{d}y$, ponieważ rozważamy ruch w kierunku pionowym:

$$a\mathrm{d}y = v\mathrm{d}v, \quad (-0{,}001v^2 - 9{,}80)\mathrm{d}y = v\mathrm{d}v.$$

Następnie rozdzielamy zmienne (v i $\mathrm{d}v$ przenosimy na jedną stronę równania, zaś $\mathrm{d}y$ na drugą stronę):

$$\int_0^h \mathrm{d}y = \int_{50}^{0} \frac{v\mathrm{d}v}{-0{,}001v^2 - 9{,}80}$$
$$= -\int_{50}^{0} \frac{v\mathrm{d}v}{0{,}001v^2 + 9{,}80} = -5 \cdot 10^3 \cdot \left[\ln(0{,}001v^2 + 9{,}80)\right]_{50}^{0}.$$

Stąd wynika, że $h = 114$ m.

Znaczenie

Zwróć uwagę, że skoro działająca siła nie jest stała, to również przyspieszenie w tym ruchu nie jest stałe, co wymusza konieczność zastosowania rachunku różniczkowo-całkowego. Co więcej, siła nie zależy od czasu t, ale od prędkości v, więc w celu rozwiązania zadania trzeba zastosować odpowiednie przekształcenia matematyczne. Uzyskane rozwiązanie wskazuje natomiast, że wysokość, na jaką wzniesie się pocisk, jest mniejsza niż w przypadku swobodnego ruchu w polu grawitacyjnym Ziemi, ponieważ działa siła oporu powietrza. Bardziej szczegółowe rozważania na temat sił oporu będziemy prowadzić w podrozdziale Siła oporu i prędkość graniczna.



6.6 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Ustal maksymalną wysokość, na jaką wzniesie się pocisk, jeśli pominiemy wpływ siły oporu powietrza. Czy w rozwiązaniu tego zadania konieczne będzie stosowanie rachunku różniczkowo-całkowego?



Uruchom symulację (https://openstaxcollege.org/l/21forcesatwork) i sprawdź, jakie siły działają, gdy próbujesz przesunąć szafkę na dokumenty. Przyłóż odpowiednią siłę i zobacz, jaka jest siła tarcia między szafką i podłogą oraz jaka jest wypadkowa siła działająca na szafkę. Na wykresach możesz obejrzeć zależności siły, położenia, prędkości i przyspieszenia w funkcji czasu. Wyświetl schemat rozkładu sił działających na szafkę.

6.2 | Tarcie

Cel dydaktyczny

W tym rozdziale nauczysz się:

- charakteryzować siłę tarcia;
- wymieniać różne rodzaje siły tarcia;
- obliczać wartość tarcia statycznego i kinetycznego oraz stosować je w zadaniach z dynamiki.

Ciało w ruchu doświadcza działania oporu, ponieważ jest ono w kontakcie z otoczeniem. Opór ten nazywamy siłą tarcia. Tarcie utrudnia wzajemny ruch między stykającymi się ciałami, ale z drugiej strony pozwala nam się poruszać, co staje się oczywiste, jeśli zobaczymy, jak trudno jest nam chodzić po powierzchniach śliskich (np. po lodzie). Tarcie jest powszechnie występującą, ale złożoną siłą, a mechanizm jej działania nie jest do końca dobrze wyjaśniony. Można natomiast bez problemu określić warunki, przy których siła ta się pojawia.

Tarcie statyczne i kinetyczne

Podstawowa definicja **tarcia** (ang. **friction**) jest stosunkowo prosta.

Tarcie

Tarcie jest siłą, która przeciwdziała względnemu ruchowi między ciałami będącymi w kontakcie.

Istnieje kilka różnych postaci siły tarcia. Najprostsza forma to tzw. tarcie ślizgowe (tarcie suwne), które działa zawsze równolegle do powierzchni styku dwóch ciał i przeciwstawia się ruchowi względnemu lub próbie ruchu między tymi ciałami. Jeśli dwa ciała stykają się ze sobą i przesuwają względem siebie, to działa między nimi tzw. tarcie kinetyczne.

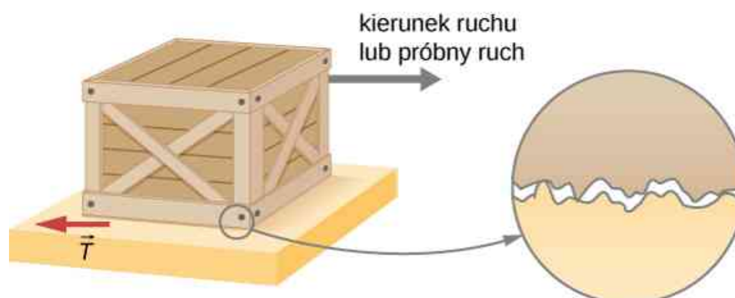
Na przykład tarcie to spowalnia ruch krążka hokejowego na lodzie. Z kolei kiedy ciała pozostają względem siebie w spoczynku, to działa między nimi tarcie statyczne, które zazwyczaj co do wartości jest większe od tarcia kinetycznego.

Tarcie statyczne i kinetyczne

Jeśli dwa spoczywające ciała pozostają w kontakcie, to działa między nimi siła nazywana **tarciem statycznym** (ang. **static friction**). Jeśli dwa ciała pozostające w kontakcie przesuwają się względem siebie, to siła występująca między nimi nazywana jest **tarciem kinetycznym** (ang. **kinetic friction**).

Wyobraź sobie, że próbujesz przesunąć ciężką skrzynię po betonowej podłodze. Musisz pchać bardzo mocno, a i tak masz kłopot z ruszeniem skrzyni. Oznacza to, że próbie ruchu, który chcesz wykonać, przeciwstawia się tarcie statyczne. Jest ono równe co do wartości, ale przeciwnie skierowane do siły, którą przykładasz do skrzyni. Gdy w końcu uda ci się pchnąć skrzynię wystarczająco mocno, wykona ona nagły ruch, po czym jest w stanie dalej się przesuwać pod wpływem siły, którą działasz. Wówczas zaczyna działać tarcie kinetyczne. Co ważne, łatwiej jest utrzymywać skrzynię w ruchu niż w ogóle ją ruszyć. Oznacza to, że siła tarcia kinetycznego jest mniejsza niż siła tarcia statycznego. Gdy dodatkowo obciążysz skrzynię, np. dokładając na jej szczycie dodatkowe pudło, musisz działać jeszcze większą siłą, by ruszyć skrzynię oraz potem, by utrzymać ją w ruchu. Z kolei gdybyś pokrył betonową podłogę olejem, przesuwanie skrzyni stałoby się dużo łatwiejsze, czego zapewne intuicyjnie się spodziewasz.

Rysunek 6.10 przedstawia schematycznie, jaki jest mechanizm powstawania tarcia między dwoma obiektami. Zbliżenie na powierzchnie styku tych ciał wskazuje, że są one chropowate. W związku z tym, gdy pchasz jakiś obiekt (w tym przypadku skrzynię), musisz delikatnie go podnieść po to, by mijały się ze sobą tylko wierzchołki powierzchni trących, lub trąc niszczyć te wybrzuszenia powierzchni. Im twardsze są powierzchnie trące, tym większą siłę trzeba przyłożyć, żeby je ruszyć. Częściowo przyczyną występowania tarcia są siły adhezji między molekułami na powierzchni, co potwierdza zależność siły tarcia od rodzaju powierzchni trących. Na przykład buty podbite gumą ślizgają się mniej niż buty podbite skórą. Gdy ciała przesuwają się względem siebie, liczba punktów styku jest mniejsza niż w momencie, gdy są one w spoczynku. Gdy prędkość ruchu jest bardzo mała, siła tarcia między ciałami jest praktycznie niezależna od prędkości.



Rysunek 6.10 Siła tarcia $\vec{T}$ zawsze przeciwstawia się ruchowi ciał lub próbie tego ruchu. Tarcie powstaje częściowo z powodu chropowatości powierzchni stykających się, jak to zostało przedstawione na powiększonym fragmencie rysunku. Aby obiekt się poruszył, musi delikatnie wznieść się, by wystające fragmenty powierzchni górnej mogły przesunąć się wzdłuż dolnej powierzchni. W związku z tym konieczne jest przyłożenie siły, aby wprawić ciało w ruch, a następnie ten ruch podtrzymać. Niektóre z wystających fragmentów powierzchni na skutek tarcia zostaną zniszczone. Jednakże zdecydowanie największy wpływ na zjawisko występowania tarcia mają siły oddziaływania międzycząsteczkowego pomiędzy trącymi o siebie ciałami, dlatego nawet idealnie gładkie powierzchnie nie są w stanie poruszać się względem siebie bez tarcia. W rzeczywistości idealnie gładkie, czyste, przylegające do siebie powierzchnie tworzą tzw. „zimny spaw”.

Wartość siły tarcia ma dwie formy: jedna dla ciał nieporuszających się (tarcie statyczne), a druga dla ciał będących względem siebie w ruchu (tarcie kinetyczne). Poniżej przedstawiono przybliżony empiryczny (eksperymentalnie określony) model. Należy podkreślić, że równania definiujące tarcie statyczne i kinetyczne nie są równaniami wektorowymi.

Wartość siły tarcia statycznego

Wartość siły tarcia statycznego T_s oblicza się z zależności

$$T_s \leq \mu_s R, \quad (6.1)$$

gdzie μ_s nazywane jest **współczynnikiem tarcia statycznego**, zaś R jest wartością normalnej siły reakcji.

Symbol $\leq$ (czytaj *mniejsze lub równe*), wskazuje, że tarcie statyczne może osiągnąć wartość maksymalną równą $\mu_S R$. Tarcie statyczne jest siłą powstającą w odpowiedzi na siłę przyłożoną z zewnątrz, a jej zwrot jest zawsze przeciwny do tej siły. Gdy wartość siły tarcia statycznego osiągnie wartość maksymalną równą przyłożonej sile $T_s(\max)$, ciało zacznie się poruszać. Zatem

$$T_s(\max) = \mu_s R.$$

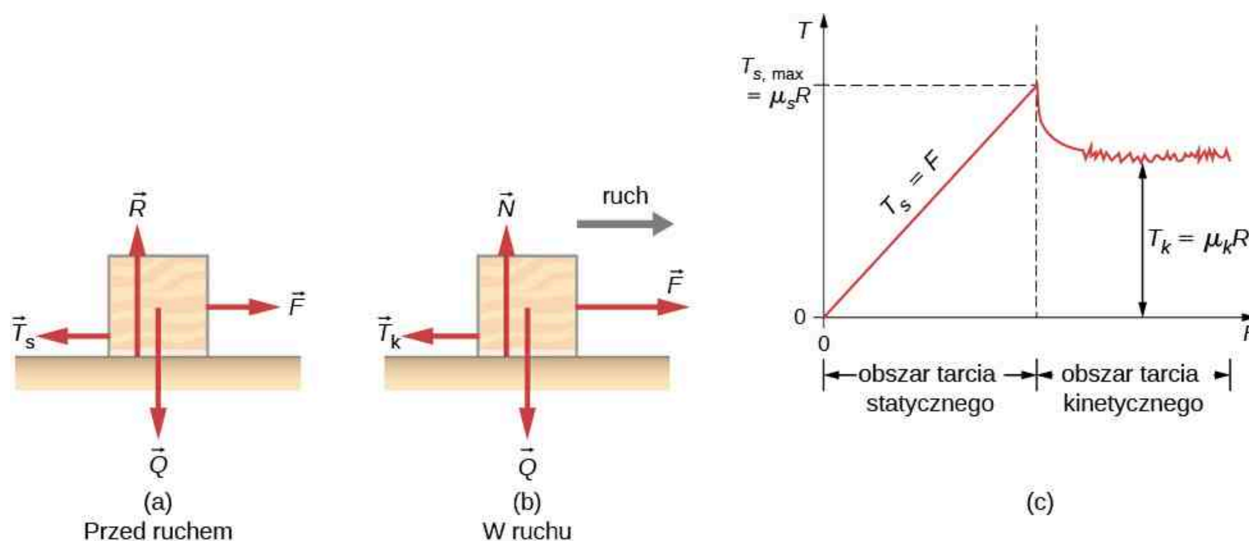
Wartość tarcia kinetycznego

Wartość siły tarcia kinetycznego T_k oblicza się z zależności

$$T_k = \mu_k R, \quad (6.2)$$

gdzie μ_k nazywamy **współczynnikiem tarcia kinetycznego**.

Przejście pomiędzy tarciem statycznym a kinetycznym zostało przedstawione na Rysunku 6.11.



Rysunek 6.11 (a) Siła tarcia $\vec{T}$ między klockiem i chropowatą powierzchnią działa w kierunku przeciwnym do przyłożonej siły $\vec{F}$. Tarcie statyczne równoważy przyłożoną siłę. Jest to zgodne z zależnością przedstawioną po lewej stronie wykresu na rysunku (c). W pewnym momencie wartość siły przykładanej z zewnątrz przewyższa tarcie kinetyczne i klocek zaczyna się poruszać w prawo. To z kolei odpowiada prawej stronie wykresu na rysunku (c). (c) Wykres zależności siły tarcia od przyłożonej siły. Zauważ, że $T_s(\max) > T_k$. To z kolei oznacza, że $\mu_s > \mu_k$.

Jak możesz zobaczyć w Tabeli 6.1, współczynniki tarcia kinetycznego są niższe od ich statycznych odpowiedników. Przybliżone wartości μ są podawane z dokładnością nie większą niż do dwóch cyfr po przecinku, aby dać przybliżony obraz tarcia opisywanego przez poprzednie równania.

Przykładowy układ	Współczynnik tarcia statycznego μ_s	Współczynnik tarcia kinetycznego μ_k
Guma na suchym betonie	1,0	0,7

Tabela 6.1 Przybliżone współczynniki tarcia statycznego i kinetycznego

Przykładowy układ	Współczynnik tarcia statycznego μ_s	Współczynnik tarcia kinetycznego μ_k
Guma na mokrym betonie	0,5-0,7	0,3-0,5
Drewno na drewnie	0,5	0,3
Woskowane drewno na mokrym śniegu	0,14	0,1
Metal na drewnie	0,5	0,3
Stal na stali (sucha)	0,6	0,3
Stal na stali (naoliwiona)	0,05	0,03
Stal na teflonie	0,04	0,04
Kość nasmarowana mazią stawową	0,016	0,015
Buty na drewnie	0,9	0,7
Buty na lodzie	0,1	0,05
Lód na lodzie	0,1	0,03
Stal na lodzie	0,4	0,02

Tabela 6.1 Przybliżone współczynniki tarcia statycznego i kinetycznego

Równanie 6.1 i Równanie 6.2 wyrażają zależność siły tarcia od rodzaju materiału, z jakiego wykonane są powierzchnie trące oraz od siły normalnej. Kierunek siły tarcia jest zawsze przeciwny do kierunku ruchu, równoległy do płaszczyzny powierzchni trących i prostopadły do siły normalnej. Spróbujmy zatem rozwiązać taki przykład. Rozważmy skrzynię o masie 100 kg, którą pchamy siłą równoległą do podłogi. Siła normalna jest co do wartości równa sile ciężkości skrzyni:

$$Q = mg = 100\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 980\,\mathrm{N},$$

która jest prostopadła do podłogi. Jeśli współczynnik tarcia statycznego wynosi 0,45, to aby przesunąć skrzynię należy przyłożyć siłę o kierunku równoległym do podłogi o wartości większej niż

$$T_s(\max) = \mu_s R = 0{,}45 \cdot 980\,\mathrm{N} = 440\,\mathrm{N}.$$

Gdy już rozpocznie się ruch, tarcie stanie się mniejsze. Współczynnik tarcia kinetycznego wynosi w tym przypadku 0,30, więc dla kontynuowania ruchu ze stałą prędkością wystarczy siła równa

$$T_k = \mu_k R = 0{,}30 \cdot 980\,\mathrm{N} = 290\,\mathrm{N}.$$

Jeśli podłoga była naoliwiona, oba współczynniki tarcia byłyby zauważalnie mniejsze. Stąd wniosek, że współczynnik tarcia jest wielkością zależną od rodzaju i pokrycia powierzchni trących. Jest to wielkość bezwymiarowa, której wartość mieści się zazwyczaj w przedziale od 0 do 1,0.

Wielu ludzi doświadczyło, jak ślisko jest, gdy chodzi się po lodzie. Tymczasem wiele części ciała, zwłaszcza stawów, ma znacznie mniejsze współczynniki tarcia – często trzy lub cztery razy mniejsze niż lód. Staw to miejsce styku dwóch kości, zwykle pokryte grubą warstwą tkanki łącznej (chrząstki). Staw kolanowy tworzą dalszy koniec kości udowej i bliższy koniec kości piszczelowej. Biodro jest stawem kulistym (na końcu kości udowej) i panewkowym (część miednicy). Końce kości w stawie są przykryte chrząstkami, co zapewnia gładką, niemal szklaną powierzchnię. Stawy wytwarzają też płyn (maź stawowa), który redukuje tarcie i zużycie. Zużyty lub uszkodzony staw może zostać wymieniony **sztuczny staw** (Rysunek 6.12). Elementy zamienne mogą zostać wykonane z metalu, ceramiki lub plastików (polietylen) o bardzo niskim współczynniku tarcia.



Rysunek 6.12 Wstawianie sztucznego stawu kolanowego jest procedurą stosowaną od ponad 20 lat. Na rysunku przedstawiono zdjęcia rentgenowskie sztucznego stawu kolanowego. (Źródło: Mike Baird)

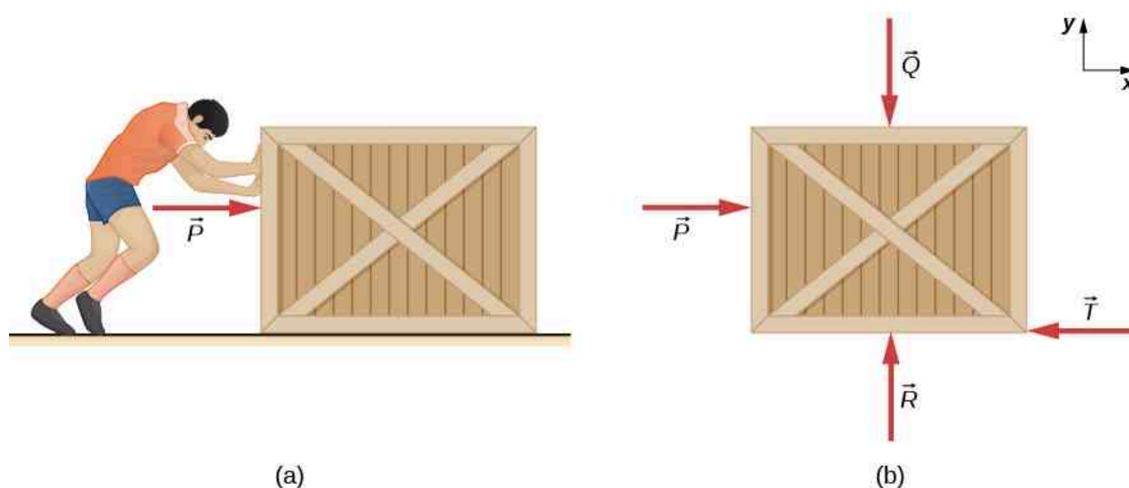
Naturalne środki poślizgowe obejmują m.in. ślinę produkowaną w jamie ustnej w celu ułatwienia przełykania czy śliską maź wypełniającą np. opłucną czy osierdzie i umożliwiającą swobodny ruch narządów (serca w trakcie skurczu, płuc w trakcie oddychania, itp.). Szpitale i kliniki lekarskie często stosują sztuczne środki smarujące, takie jak żele, w celu zmniejszenia tarcia.

Podane wzory na tarcie statyczne i kinetyczne wynikają z praw empirycznych, które opisują zachowanie sił tarcia. Chociaż wzory te są bardzo użyteczne w praktyce, nie mają one statusu twierdzeń matematycznych, które reprezentują ogólne zasady (jak np. druga zasada dynamiki Newtona). W rzeczywistości są przypadki, dla których te równania nie są nawet dobrymi przybliżeniami. Na przykład żaden z przywołanych wzorów nie opisuje dobrze ruchu powierzchni nasmarowanych środkami poślizgowymi ani względnego ruchu powierzchni z dużą szybkością. Jednakże w tym podręczniku nie będziemy zajmować się tymi wyjątkami.

Przykład 6.10

Tarcie statyczne i kinetyczne

Skrzynia o masie 20 kg spoczywa na podłodze, co pokazano na Rysunku 6.13. Współczynnik tarcia statycznego między skrzynią i podłogą wynosi 0,700, a współczynnik tarcia kinetycznego jest równy 0,600. Do skrzyni przyłożona jest pozioma siła $\vec{P}$. Znajdź siłę tarcia, gdy (a) $\vec{P} = 20\,\text{N}$, (b) $\vec{P} = 30\,\text{N}$, (c) $\vec{P} = 120\,\text{N}$, i (d) $\vec{P} = 180\,\text{N}$.



Rysunek 6.13 (a) Skrzynia jest pchana po poziomej powierzchni z siłą $\vec{P}$. (b) Rozkład sił działających na skrzynię. W tym przypadku $\vec{T}$ może oznaczać tarcie statyczne albo kinetyczne.

Strategia rozwiązania

Rozkład sił działających na skrzynię jest przedstawiony na Rysunku 6.13(b). Stosujemy drugą zasadę dynamiki Newtona do sił działających w kierunku poziomym i pionowym, pamiętając o uwzględnieniu siły tarcia w kierunku przeciwnym do ruchu skrzyni.

Rozwiązanie

Z drugiej zasady dynamiki Newtona wynika, że

$$\sum F_x = ma_x \qquad \sum F_y = ma_y$$
$$P - T = ma_x \qquad R - Q = 0.$$

Symbol T użyty w równaniu oznacza ogólnie siłę tarcia, dopóki nie uda nam się konkretnie określić, czy na skrzynię działa tarcie statyczne czy kinetyczne. Ciężar skrzyni wynosi

$$Q = 20{,}0\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 196\,\text{N},$$

który co do wartości jest równy R. Maksymalna siła tarcia statycznego wynosi zatem $0{,}700 \cdot 196\,\text{N} = 137\,\text{N}$. Tak długo dopóki $\vec{P}$ jest mniejsze od 137 N, siła tarcia statycznego utrzymuje skrzynię w bezruchu i $T_\text{s} = P$. Stąd (a) $T_\text{s} = 20\,\text{N}$, (b) $T_\text{s} = 30\,\text{N}$, i (c) $T_\text{s} = 120\,\text{N}$.

(d) Jeśli $\vec{P} = 180\,\text{N}$, to oznacza, że przyłożona siła jest większa od maksymalnej wartości siły tarcia statycznego (137 N), dzięki czemu skrzynia jest w stanie się poruszyć. Gdy już zostanie ona wprawiona w ruch, zaczyna działać tarcie kinetyczne:

$$T_\text{k} = \mu_\text{k} R = 0{,}600 \cdot 196\,\text{N} = 118\,\text{N},$$

a przyspieszenie wynosi:

$$a_x = \frac{P - T_\text{k}}{m} = \frac{180\,\text{N} - 118\,\text{N}}{20\,\text{kg}} = 3{,}10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Znaczenie

Ten przykład ilustruje, jak analizować tarcie w zadaniach z dynamiki. Zauważ, że tarcie statyczne ma wartość taką jak przyłożona siła, aż do momentu osiągnięcia maksymalnej wartości tarcia statycznego. Dopóki przyłożona siła nie jest równa sile tarcia statycznego, nie może wystąpić żaden ruch, ale gdy już ruch się rozpocznie, zacznie działać siła tarcia kinetycznego, która jest mniejsza od siły tarcia statycznego.



6.7 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Ciężarek o masie 1,0 kg leży na poziomej powierzchni. Współczynniki tarcia między ciężarkiem i podłożem wynoszą odpowiednio $\mu_\text{s} = 0{,}50$ i $\mu_\text{k} = 0{,}40$.

a. Ile wynosi minimalna pozioma siła niezbędna do przesunięcia ciężarka?
b. Ile będzie wynosić przyspieszenie ciężarka, gdy przyłożona zostanie ta siła?

Tarcie na równi pochyłej

Jedną z sytuacji, w której tarcie odgrywa istotną rolę, jest ruch ciała na zboczu. Czy rozpatrujemy przypadek skrzyni popchniętej na rampę stacji przeładunkowej czy deskorolkarza zjeżdżającego z górki, podstawowe zasady fizyki są takie same. Zawsze uogólniamy powierzchnię skośną i nazywamy ją **równią pochyłą**, zakładając jednocześnie, że powierzchnia jest płaska. Przyjrzyjmy się zatem zadaniu uwzględniającemu ruch z tarciem po równi pochyłej.

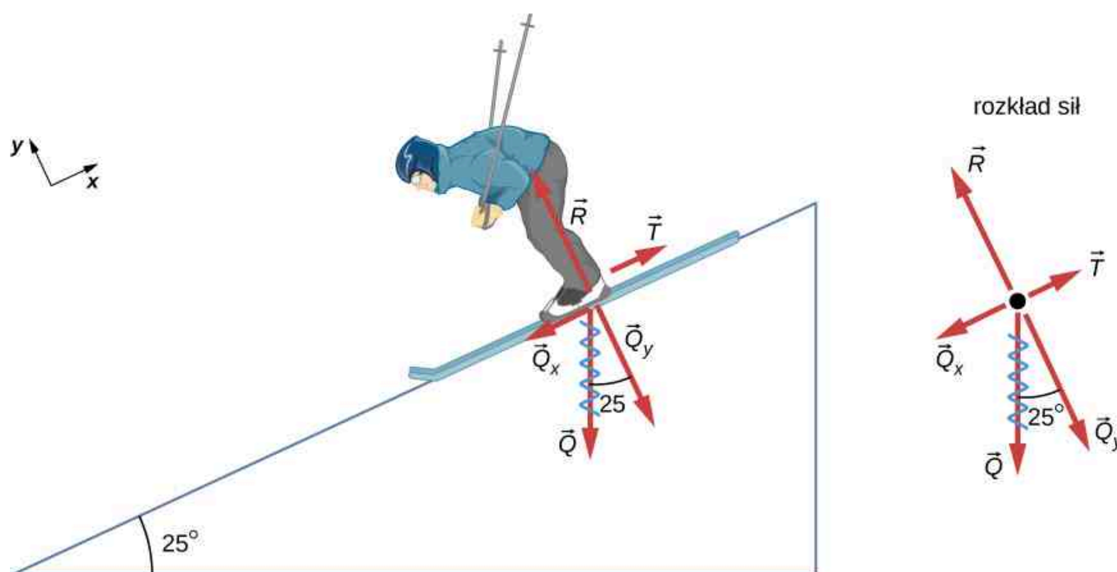
Przykład 6.11

Narciarz zjeżdżający ze zbocza

Narciarz o masie 62 kg zjeżdża po ośnieżonym zboczu w dół ze stałą prędkością. Znajdź współczynnik tarcia kinetycznego narciarza na śniegu, jeśli wiadomo, że siła tarcia wynosi 45,0 N.

Strategia rozwiązania

Wartość siły tarcia kinetycznego wyliczona na podstawie danych z zadania wynosi 45,0 N. Tarcie kinetyczne jest powiązane z siłą normalną R za pomocą zależności $T_\mathrm{k} = \mu_\mathrm{k} R$. Stąd, jeśli znajdziemy wartość siły normalnej, będziemy w stanie obliczyć wartość współczynnika tarcia kinetycznego. Siła normalna jest zawsze prostopadła do powierzchni. Skoro w płaszczyźnie prostopadłej do powierzchni narciarz nie wykonuje ruchu, zgodnie z pierwszą zasadą dynamiki Newtona siła normalna jest równoważona przez składową ciężaru narciarza prostopadłą do zbocza. Spójrz na Rysunek 6.14, który powiela rysunek przedstawiony w rozdziale Zasady dynamiki Newtona.



Rysunek 6.14 Kierunek ruchu narciarza oraz kierunek działania siły tarcia są równoległe do płaszczyzny zbocza, więc najwygodniej jest wybrać układ współrzędnych, w którym jedna z osi jest równoległa do płaszczyzny zbocza, zaś druga jest do zbocza prostopadła (układ przedstawiony na lewo od narciarza). Siła normalna $\vec{R}$ jest prostopadła do zbocza, a tarcie $\vec{T}$ działa równolegle do zbocza. Ciężar narciarza $\vec{Q}$ ma dwie składowe wzdłuż obu osi oznaczone jako $\vec{Q}_y$ i $\vec{Q}_x$. Siła normalna $\vec{R}$ jest równa co do wartości do składowej ciężaru $\vec{Q}_y$, więc w płaszczyźnie prostopadłej do zbocza narciarz jest nieruchomy. Z kolei tarcie $\vec{T}$ jest mniejsze co do wartości od $\vec{Q}_x$, więc wzdłuż powierzchni zbocza ruch odbywa się z przyspieszeniem (wzdłuż osi x).

Mamy

$$R = Q_y = Q\cos 25° = mg\cos 25°.$$

Podstawiając to do równania na tarcie kinetyczne, otrzymujemy zależność

$$T_\mathrm{k} = \mu_\mathrm{k} mg\cos 25°,$$

z której z kolei można wyliczyć współczynnik tarcia kinetycznego μ_k.

Rozwiązanie

Wyprowadzenie μ_k z powyższej zależności daje ostateczny wzór:

$$\mu_\mathrm{k} = \frac{T_\mathrm{k}}{R} = \frac{T_\mathrm{k}}{Q\cos 25°} = \frac{T_\mathrm{k}}{mg\cos 25°}.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych danych w zadaniu otrzymujemy:

$$\mu_\mathrm{k} = \frac{45{,}0\,\mathrm{N}}{62\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}80\,\mathrm{m/s^2}\cdot 0{,}906} = 0{,}082.$$

Znaczenie

Uzyskany wynik jest nieco mniejszy niż współczynnik tarcia wymieniony w Tabeli 6.1 dla nawoskowanego drewna na śniegu, jednakże wartość ta jest jak najbardziej akceptowalna, ponieważ wartości współczynników tarcia mogą się od siebie znacznie różnić. W sytuacjach takich jak ta, gdzie obiekt o masie m zjeżdża w dół po zboczu o kącie nachylenia θ do poziomu, tarcie jest wyrażone jako $T_\mathrm{k} = \mu_\mathrm{k} mg\cos\theta$. W takich warunkach wszystkie ciała zjeżdżają w dół ze stałym przyspieszeniem.

Ustaliliśmy już, że gdy obiekt spoczywa na poziomej powierzchni, siła normalna dla tego ciała co do wartości jest równa jego ciężarowi. Tarcie jest zawsze proporcjonalne do siły normalnej. Gdy ciało znajduje się na płaszczyźnie ukośnej, takiej jak równia pochyła, musimy znaleźć siłę prostopadłą do płaszczyzny ruchu, która jest składową siły ciężkości. Siła ta co do wartości jest wówczas równa sile normalnej.

Wyprowadzimy teraz użyteczny wzór do obliczania współczynnika tarcia na równi pochyłej. Zauważ, że zależność ta będzie prawdziwa tylko wówczas, gdy ciało będzie poruszało się w dół pochyłej powierzchni ze stałą prędkością.

Ciało zsuwa się z równi pochyłej ze stałą prędkością wówczas, gdy siła wypadkowa w płaszczyźnie ruchu wynosi zero. Wiedza ta będzie przydatna, aby obliczyć współczynnik tarcia między dwoma ciałami. Jak pokazano na Przykładzie 6.10, tarcie kinetyczne na zboczu wynosi $T_k = \mu_k mg\cos\theta$. Składowa ciężaru równoległa do płaszczyzny równi jest równa $mg\sin\theta$ (spójrz na rozkład sił działających na ciało przedstawiony na Rysunku 6.14). Siły te działają w przeciwnych kierunkach, więc jeśli są one równe co do wartości, to przyspieszenie ciała jest równe zero. To oznacza, że:

$$\mu_\mathrm{k} mg\cos\theta = mg\sin\theta.$$

Przekształcając powyższe równanie tak, aby obliczyć μ_k, otrzymujemy:

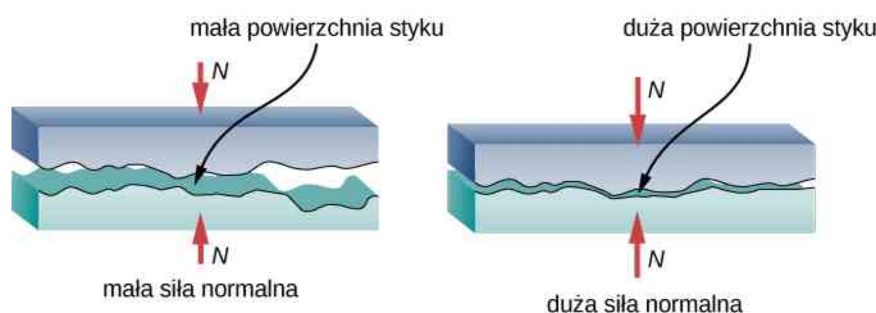
$$\mu_\mathrm{k} = \frac{mg\sin\theta}{mg\cos\theta} = \mathrm{tg}\,\theta.$$

Połóż monetę na książce i pochylaj ją tak długo, dopóki moneta nie zacznie zasuwać się z książki ze stałą prędkością. Być może trzeba będzie delikatnie postukać w książkę, aby moneta poruszyła się. Zmierz kąt jaki książka tworzyła z poziomem gdy moneta zaczęła się poruszać, a następnie oblicz μ_k. Zwróć uwagę, że moneta nie zacznie się poruszać dopóki kąt nachylenia książki nie będzie większy niż θ, ponieważ współczynnik tarcia statycznego jest większy niż współczynnik tarcia kinetycznego. Zastanów się, jak ten fakt wpływa na wyznaczaną eksperymentalnie wartość współczynnika tarcia kinetycznego μ_k i trudności z jego dokładnym określeniem.

Tarcie w skali atomowej

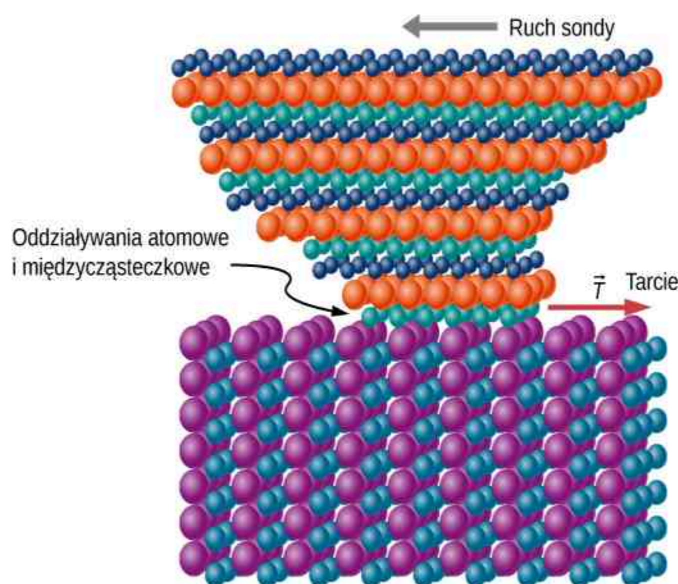
Dotychczas analizowane zagadnienia opierały się na uproszczonej, makroskopowej naturze siły tarcia. Jednakże w ciągu ostatnich kilkudziesięciu lat dokonano wielkich postępów w wyjaśnieniu natury siły tarcia w skali atomowej. Naukowcy odkryli, że atomowa natura tarcia wydaje się mieć kilka podstawowych cech. Te cechy nie tylko wyjaśniają niektóre z prostszych aspektów tarcia. Ich odkrycie stwarza również potencjał do konstruowania ośrodków prawie pozbawionych tarcia, co pomoże zaoszczędzić setki miliardów dolarów na energii zamienianej obecnie (niepotrzebnie) na ciepło.

Rysunek 6.15 przedstawia makroskopowy charakter tarcia, które z kolei wyjaśniane będzie w oparciu o analizę mikroskopową (w małej skali). Stwierdziliśmy, że tarcie jest proporcjonalne do siły normalnej, a nie zależy od powierzchni styku dwóch ciał, co jest zagadnieniem nieco kontrowersyjnym. Gdy dwie szorstkie powierzchnie są w kontakcie, rzeczywisty obszar styku jest niewielką częścią całego obszaru, ponieważ stykają się tylko wysokie punkty. Gdy wywierana jest większa siła normalna, rzeczywista powierzchnia styku wzrasta, co z kolei prowadzi do wniosku, że wartość siły tarcia jest proporcjonalna do wielkości tej powierzchni.



Rysunek 6.15 W wyniku przyłożenia większej siły zewnętrznej wzrasta zarówno obszar rzeczywistego kontaktu między powierzchniami, jak i wartość siły tarcia.

Jednakże obserwacja w skali atomowej pozwala wyjaśnić znacznie więcej niż tylko proste cechy tarcia. Na przykład można w ten sposób analizować mechanizm powstawania ciepła. Innymi słowy, dlaczego powierzchnie stają się cieplejsze, gdy są potarte? Zasadniczo atomy są połączone ze sobą, tworząc sieci. Kiedy powierzchnie o siebie pocierają, atomy powierzchniowe przylegają do siebie i wywołują drgania sieci – tworząc fale dźwiękowe, które penetrują materiał. Fale dźwiękowe zanikają wraz z odległością, a ich energia jest przekształcana w ciepło. Ponadto między atomami i cząsteczkami na powierzchniach trących mogą zachodzić reakcje chemiczne związane z tzw. zużyciem ciernym. Rysunek 6.16 pokazuje, jak końcówka sondy dotykającej badanego materiału (jak w mikroskopie sił atomowych) jest odkształcana na skutek tarcia w skali atomowej. Siła potrzebna do przeciągnięcia końcówki sondy po powierzchni materiału może być zmierzona. Jest ona związana z **naprężeniem ścinającym**, które jest szerzej omawiane w rozdziale Równowaga statyczna i sprężystość. Zróżnicowanie wartości naprężenia ścinającego jest ogromne (nawet rzędu 10^{12}) i trudne do przewidzenia w sposób teoretyczny, ale to właśnie ono daje fundamentalne podstawy do zrozumienia zjawiska tarcia w dużej skali.



Rysunek 6.16 Końcówka sondy jest odkształcana na boki poprzez siłę tarcia, gdy sonda jest przeciągana po powierzchni. Pomiary siły różnią się w zależności od materiału, dając fundamentalny wgląd w atomową naturę tarcia.

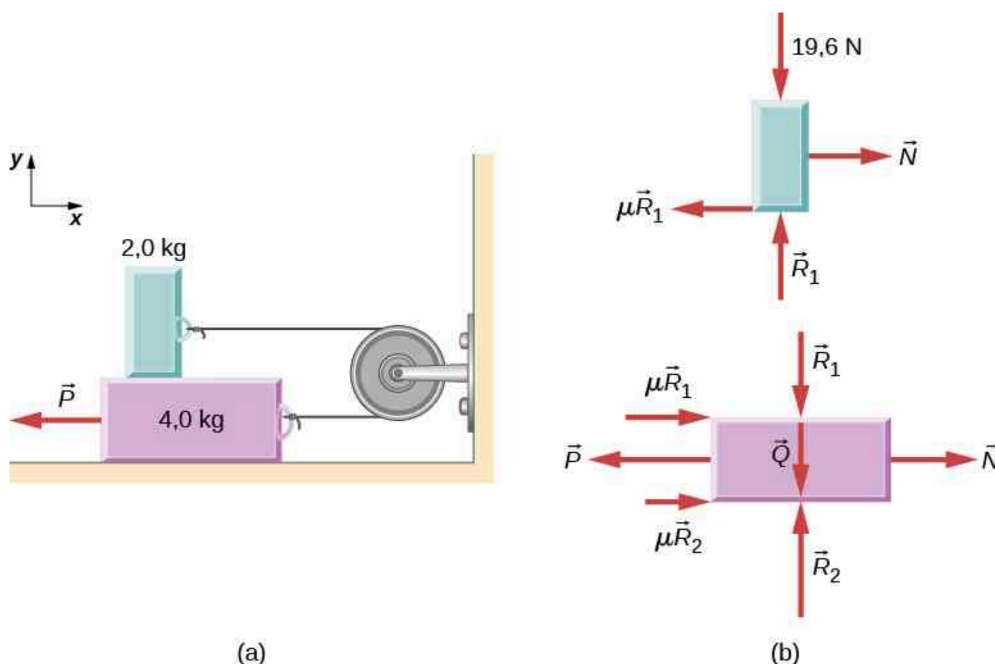


Obejrzyj symulację molekularnego modelu tarcia (https://openstaxcollege.org/l/21friction) i opisz ruch cząsteczek w materii. Opis powinien zawierać wykresy wspomagające opis słowny. Jak temperatura wpływa na prezentowane zależności? Jakie są różnice i podobieństwa między ruchem cząstek w ciałach stałych, ciekłych i gazowych? Jak się ma wielkość i szybkość ruchu cząsteczek gazu do wielkości i szybkości otaczających nas przedmiotów?

Przykład 6.12

Przesuwające się ciężarki

Dwa ciężarki przedstawione na Rysunku 6.17 są połączone nieważką struną przerzuconą przez nieważki bloczek, który może poruszać się bez tarcia. Kiedy ciężarek na spodzie, mający masę 4,00 kg, jest ciągnięty w lewo ze stałą prędkością $\vec{P}$ ciężarek na górze, mający masę 2,00 kg przesuwa się w prawo. Oblicz, jaką siłą trzeba działać, aby przesuwać ciężarki ze stałą prędkością. Załóż, że współczynnik tarcia kinetycznego między wszystkimi powierzchniami wynosi 0,400.



Rysunek 6.17 (a) Każdy z dwóch ciężarków przemieszcza się ze stałą prędkością. (b) Rozkłady sił działających na ciężarki.

Strategia rozwiązania

Rozważamy bilans sił działających na każdy z ciężarków z osobna. Górny klocek jest wystawiony na działanie siły kontaktowej wywieranej przez dolny bloczek. Na siłę tę składają się: siła normalna R_1 i siła tarcia $-0{,}400R_1$. Pozostałe siły działające na górny ciężarek to siła napięcia struny T oraz siła ciężkości ciężarka równa 19,6 N. Dolny ciężarek podlega z kolei działaniu sił kontaktowych ze strony górnego ciężarka oraz ze strony podłogi. Na pierwszą siłę kontaktową składają się $-R_1$ i $0{,}400R_1$, które są po prostu siłami reakcji na siły kontaktowe, jakie dolny klocek wywiera na górny. Na siłę kontaktową ze strony podłogi składają się R_2 i $0{,}400R_2$. Pozostałe siły działające na ten ciężarek to $-P$, siła naciągu struny N oraz ciężar drugiego klocka równy −39,2 N.

Rozwiązanie

Ponieważ górny blok przemieszcza się poziomo w prawo ze stałą prędkością, a w pionie nie porusza się wcale, to jego przyspieszenie wynosi zero zarówno w kierunku poziomym, jak i pionowym. Z drugiej zasady dynamiki Newtona wynika:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= m_1 a_x & \qquad \sum F_y &= m_1 a_y \\ N - 0{,}400R_1 &= 0 & R_1 - Q_1 &= 0. \end{aligned}$$

Rozwiązujemy układ równań z dwoma niewiadomymi pamiętając, że $Q_1 = 19{,}6\text{ N}$. W rezultacie otrzymujemy następujące wartości szukane: $R_1 = 19{,}6\text{ N}$ i $N = 0{,}40R_1 = 7{,}84\text{ N}$. Dolny ciężarek również nie przyspiesza, więc po zastosowaniu drugiej zasady dynamiki Newtona otrzymujemy następujące równania:

$$\sum F_x = m_2 a_x \qquad \sum F_y = m_2 a_y$$
$$N - P + 0{,}400\, R_1 + 0{,}400\, R_2 = 0 \qquad R_2 - Q_2 - R_1 = 0.$$

Wartości R_1 i N wyliczone zostały z pierwszych dwóch zależności, zaś z danych zadania wynika, że $Q_2 = 19{,}6\,\mathrm{N}$. Gdy wartości te podstawimy do prezentowanych równań, możemy wyliczyć wielkości szukane, czyli R_2 i P. Wynoszą one odpowiednio:

$$N_2 = 58{,}8\,\mathrm{N} \quad \text{oraz} \quad P = 39{,}2\,\mathrm{N}.$$

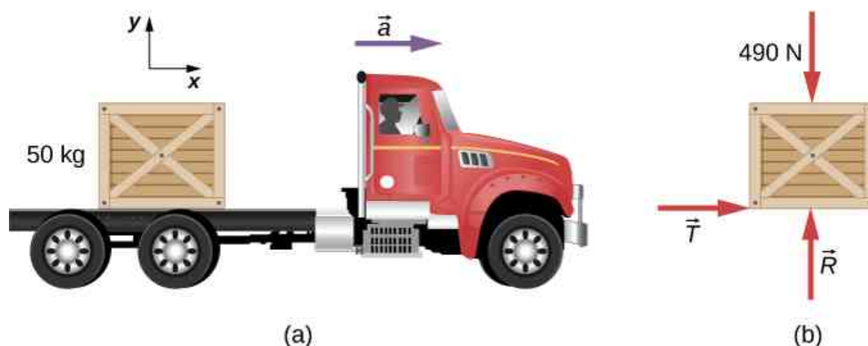
Znaczenie

Właściwy wybór kierunku, w którym należy narysować siłę tarcia, jest zazwyczaj dość problematyczny. Zwróć uwagę, że każda siła tarcia zaznaczona na Rysunku 6.17 działa w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu odpowiadającego jej klocka.

Przykład 6.13

Skrzynia na przyspieszającym samochodzie

Skrzynia o masie 50 kg leży na naczepie samochodu ciężarowego, jak to zostało przedstawione na Rysunku 6.18. Współczynniki tarcia między powierzchniami wynoszą odpowiednio $\mu_k = 0{,}300$ i $\mu_s = 0{,}400$. Znajdź siłę tarcia między skrzynią a podłogą naczepy, jeśli auto jedzie ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem wynoszącym odpowiednio (a) $2{,}00\,\mathrm{m/s^2}$ lub (b) $5{,}00\,\mathrm{m/s^2}$.



Rysunek 6.18 (a) Skrzynia leży na naczepie auta ciężarowego poruszającego się ruchem jednostajnie przyspieszonym. (b) Rozkład sił działających na skrzynię.

Strategia rozwiązania

Na kratę działają: siła ciężkości, siła normalna oraz siła tarcia o naczepę auta. Zaczynamy od przyjęcia *założenia*, że skrzynia nie ślizga się po powierzchni naczepy. W tym przypadku na skrzynię działa siła tarcia statycznego T_s. Ponadto przyspieszenie skrzyni i auta są równe co do wartości.

Rozwiązanie

a. Zastosujmy drugą zasadę dynamiki Newtona, rozpisując bilans sił działających wzdłuż kierunków wyznaczonych przez przyjęty układ współrzędnych:

$$\sum F_x = ma_x \qquad \sum F_y = ma_y$$
$$f_s = 50{,}0\,\mathrm{kg} \cdot 2{,}00\,\mathrm{m/s^2} \qquad R - 4{,}9 \cdot 10^2\,\mathrm{N} = 50{,}0\,\mathrm{kg} \cdot 0\,\mathrm{m/s^2}$$
$$f_s = 1{,}00 \cdot 10^2\,\mathrm{N} \qquad R = 4{,}90 \cdot 10^2\,\mathrm{N}.$$

Sprawdźmy teraz, czy nasze założenie o braku poślizgu skrzyni było słuszne. Maksymalna wartość siły tarcia statycznego wynosi

$$\mu_s R = 0{,}400 \cdot 4{,}90 \cdot 10^2 \text{ N} = 196 \text{ N},$$

podczas gdy *rzeczywista* wartość tarcia statycznego, która działa, gdy auto jedzie z przyspieszeniem $2{,}00 \text{ m/s}^2$ wynosi zaledwie $1{,}00 \cdot 10^2 \text{ N}$. W związku z tym założenie, że skrzynia nie będzie się ślizgać, było słuszne.

b. Jeśli skrzynia ma pozostać w statycznym kontakcie z autem, gdy jedzie ono z przyspieszeniem $5{,}0 \text{ m/s}^2$, siła tarcia statycznego musi wynosić

$$T_s = ma_x = 50{,}0 \text{ kg} \cdot 5{,}00 \text{ m/s}^2 = 250 \text{ N}.$$

Jako że wartość ta przewyższa wartość 196 N, którą wyliczyliśmy wcześniej, skrzynia zacznie się ześlizgiwać. Wówczas działająca siła tarcia kinetycznego wynosi:

$$T_k = \mu R = 0{,}300 \cdot 4{,}90 \cdot 10^2 \text{ N} = 147 \text{ N}.$$

Wypadkowe przyspieszenie skrzyni w płaszczyźnie poziomej względem układu związanego z ziemią można wyliczyć z zależności

$$\begin{aligned} \sum F_x &= ma_x \\ 147 \text{ N} &= 50{,}0 \text{ kg} \cdot a_x \\ a_x &= 2{,}94 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \end{aligned}$$

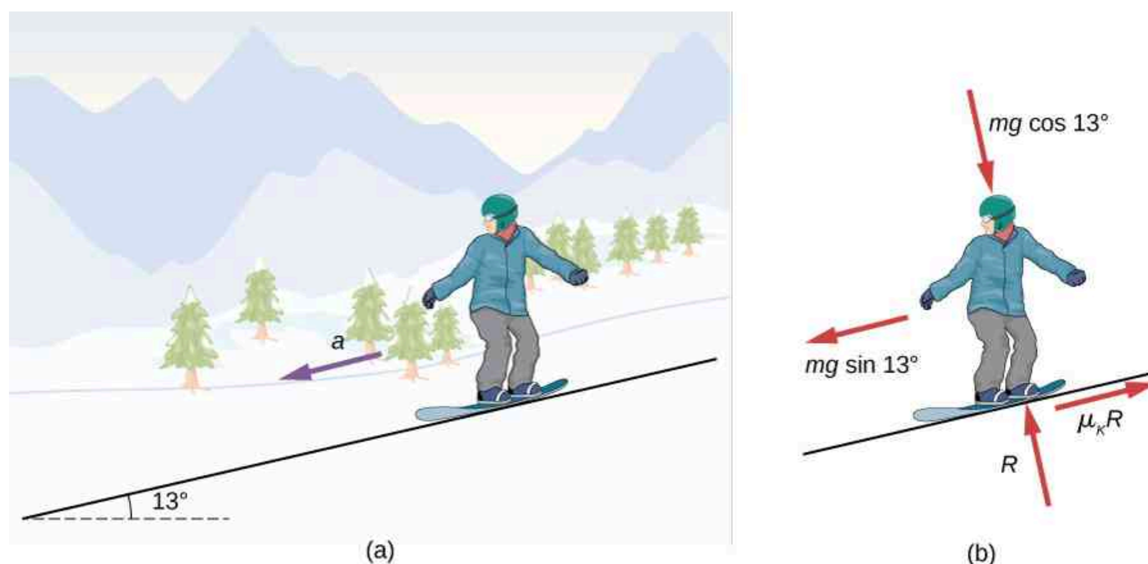
Znaczenie

W układzie odniesienia związanym z ziemią przyspieszenie auta wynosi $5{,}0 \text{ m/s}^2$, zaś przyspieszenie skrzyni jest równe $2{,}94 \text{ m/s}^2$. Stąd skrzynia przesuwa się do tyłu w stosunku do naczepy ciężarówki z przyspieszeniem $2{,}94 \text{ m/s}^2 - 5{,}00 \text{ m/s}^2 = -2{,}06 \text{ m/s}^2$.

Przykład 6.14

Snowboarding

Wcześniej rozwiązywaliśmy zadanie, w którym analizowaliśmy ruch narciarza zjeżdżającego ze stoku ze stałą prędkością, aby obliczyć współczynnik tarcia kinetycznego. Teraz zróbmy podobną analizę, aby obliczyć przyspieszenie. Snowboardzista przedstawiony na Rysunku 6.19 zjeżdża ze stoku nachylonego pod kątem $\theta = 13^\circ$ do poziomu. Współczynnik tarcia kinetycznego pomiędzy deską i śniegiem jest równy $\mu_k = 0{,}20$. Jakie jest przyspieszenie snowboardzisty?



Rysunek 6.19 (a) Snowboardzista zjeżdża w dół ze zbocza nachylonego pod kątem 13° do poziomu. (b) Rozkład sił działających na snowboardzistę.

Strategia rozwiązania

Na snowboardzistę działają siły: ciężkości oraz siła kontaktowa ze zboczem, na którą z kolei składają się siła normalna prostopadła do zbocza oraz siła tarcia kinetycznego zwrócona równolegle do zbocza. Ponieważ sportowiec porusza się wzdłuż zbocza, to najwygodniej będzie wybrać układ współrzędnych tak, by oś x była skierowana równolegle do zbocza, a oś y prostopadle do zbocza. Na tym rysunku siła normalna i siła tarcia są skierowane wzdłuż odpowiednich osi układu współrzędnych, zaś siła ciężkości rozłożona jest na dwie składowe: $mg \sin \theta$ równoległą do zobacza oraz $mg \cos \theta$ prostopadłą do zbocza. Jedyne niezerowe przyspieszenie jest skierowane wzdłuż kierunku x $(a_y = 0)$.

Rozwiązanie

Zastosujmy teraz drugą zasadę dynamiki Newtona do przypadku snowboardzisty:

$$\sum F_x = ma_x \qquad \sum F_y = ma_y$$
$$mg \sin \theta - \mu_\text{k} R = ma_x \qquad R - mg \cos \theta = 0.$$

Z drugiego równania $R = mg \cos \theta$. Po podstawieniu tej zależności do pierwszego równania otrzymujemy:

$$\begin{aligned} a_x &= g(\sin \theta - \mu_\text{k} \cos \theta) \\ &= g(\sin 13^\circ - 0{,}20 \cos 13^\circ) = 0{,}29\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \end{aligned}$$

Znaczenie

Z równania tego wynika, że jeśli θ jest wystarczająco małe lub μ_k jest wystarczająco duże, to przyspieszenie a_x jest ujemne, co oznacza, że snowboardzista zwalnia.



6.8 Sprawdź, czy rozumiesz. Snowboardzista porusza się teraz w dół zbocza nachylonego pod kątem 10°. Jakie jest przyspieszenie snowboardzisty?

6.3 | Siła dośrodkowa

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- wyjaśniać równania na siłę dośrodkową;
- stosować drugą zasadę dynamiki Newtona do wyprowadzania wyrażania na siłę dośrodkową;
- stosować wiedzę na temat ruchu obrotowego w zadaniach z dynamiki.

W rozdziale Ruch w dwóch i trzech wymiarach analizowaliśmy podstawy ruchu po okręgu. Ciało poruszające się po torze kołowym, jak na przykład samochody wyścigowe przedstawione na początku tego rozdziału, musi posiadać przyspieszenie, ponieważ ciągle zmienia się kierunek wektora jego prędkości. Wykazaliśmy, że przyspieszenie skierowane do środka okręgu, zwane **przyspieszeniem dośrodkowym**, jest wyrażone wzorem:

$$a_\text{d} = \frac{v^2}{r}$$

gdzie v oznacza prędkość ciała skierowaną stycznie w punkcie do toru ruchu ciała. Jeśli znamy prędkość kątową ciała ω, możemy wykorzystać następującą zależność:

$$a_\text{d} = r\omega^2.$$

Przyspieszenie kątowe opisuje szybkość, z jaką ciało pokonuje zakręt, wyrażoną w rad/s. Przyspieszenie, o którym była mowa, działa wzdłuż promienia krzywizny toru i nazywane jest również przyspieszeniem normalnym lub radialnym.

Przyspieszenie powstaje zawsze na skutek działania jakiejś siły. Przyspieszenie dośrodkowe może zostać wywołane przez dowolną siłę lub układ sił działających na ciało. Przykładami mogą być siła naciągu liny wahadła, siła grawitacji wywierana przez Ziemię na Księżyc, tarcie między łyżworolkami a podłożem, siła wywierana na samochód na zakręcie, czy też siła wywierana na obiekty w wirówce. Każda siła wypadkowa wywołująca jednostajny ruch po okręgu nazywana jest **siłą dośrodkową** (ang. **centripetal force**). Jest ona zawsze skierowana wzdłuż promienia krzywizny toru, podobnie jak przyspieszenie dośrodkowe. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona siła jest iloczynem masy i przyspieszenia: $F_\text{wyp} = ma$. W jednostajnym ruchu po okręgu przyspieszenie jest równe przyspieszeniu dośrodkowemu: $a = a_\text{d}$. Stąd wartość siły dośrodkowej F_d wynosi:

$$F_\text{d} = ma_\text{d}.$$

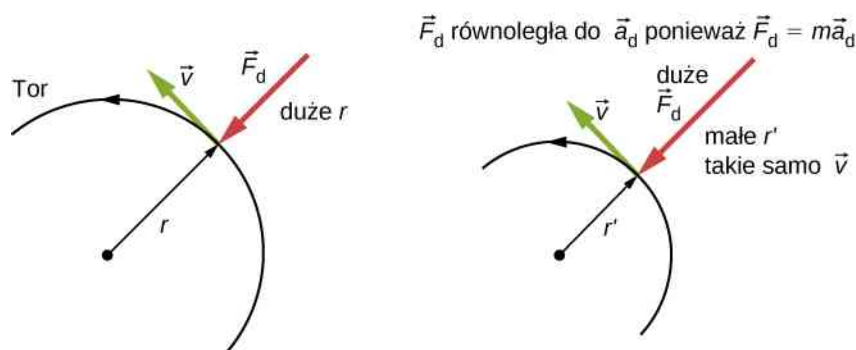
Podstawiając wyrażenie na przyspieszenie dośrodkowe a_d $(a_\text{d} = v^2/r;\ a_\text{d} = r\omega^2)$, otrzymujemy dwa równania na siłę dośrodkową F_d pokazujące jej zależność od masy, prędkości, prędkości kątowej i promienia krzywizny:

$$F_\text{d} = m\frac{v^2}{r};\quad F_\text{d} = mr\omega^2. \qquad (6.3)$$

Oba równania wyrażają to samo, więc możemy je stosować zamiennie. Siła dośrodkowa $\vec{F}_\text{d}$ jest zawsze prostopadła do toru i skierowana jest do środka jego krzywizny, ponieważ $\vec{a}_\text{d}$ jest prostopadłe do prędkości i skierowane do środka krzywizny toru. Zwróć uwagę, że jeśli przekształcisz pierwsze wyrażenie tak, aby obliczyć r, otrzymasz:

$$r = \frac{mv^2}{F_\text{d}}.$$

Oznacza to, że w przypadku danej masy i prędkości duża siła dośrodkowa powoduje mały promień krzywizny, jak to zostało przedstawione na Rysunku 6.20.

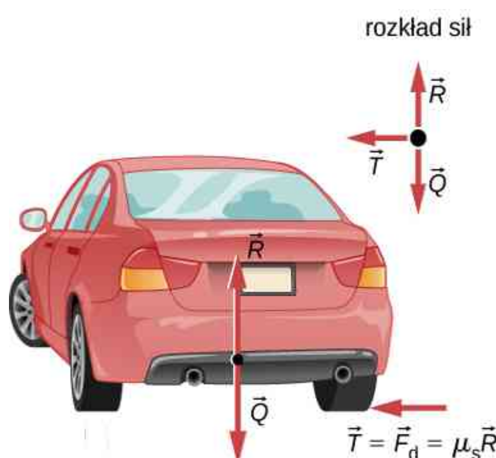


Rysunek 6.20 Siła dośrodkowa jest prostopadła do wektora prędkości i wywołuje jednostajny ruch po okręgu. Im większa jest siła dośrodkowa F_d, tym mniejszy jest promień krzywizny r toru, zaś gdy siła dośrodkowa F_d jest mniejsza, to promień krzywizny r' jest większy (przy założeniu tej samej prędkości v).

Przykład 6.15

Jaki powinien być współczynnik tarcia, aby bezpiecznie pokonać zakręt?

(a) Oblicz siłę dośrodkową wywieraną na auto o masie 900,0 kg, które pokonuje zakręt o promieniu krzywizny 500,0 m z prędkością 25,00 m/s. (b) Zakładając, że zakręt jest płaski, oblicz minimalny współczynnik tarcia statycznego pomiędzy oponami i drogą, aby auto nie wpadło w poślizg (Rysunek 6.21).



Rysunek 6.21 Samochód odjeżdża od obserwatora i skręca w lewo na płaskiej powierzchni. Siła dośrodkowa powodująca zakrzywienie toru powstaje na skutek działania siły tarcia pomiędzy oponami i podłożem. Aby auto nie wypadło z drogi, potrzebny jest odpowiednio duży współczynnik tarcia. Wówczas samochód będzie poruszał się po torze kołowym o założonym promieniu krzywizny.

Strategia rozwiązania

a. Wiemy, że $F_d = mv^2/r$. Zatem

$$F_d = \frac{mv^2}{r} = \frac{900{,}0\,\text{kg} \cdot (25{,}00\,\text{m/s})^2}{500{,}0\,\text{m}} = 1125\,\text{N}.$$

b. Rysunek 6.21 pokazuje siły działające na samochód na płaskim zakręcie. Tarcie skierowane w lewo chroni auto przed poślizgiem, a ponieważ tarcie jest jedyną siłą działającą w płaszczyźnie poziomej, to tarcie w tym przypadku jest równe sile dośrodkowej. Wiemy, że maksymalna siła tarcia statycznego (przy której koła się obracają, a nie ślizgają) jest równa $\mu_s R$, gdzie μ_s jest współczynnikiem tarcia statycznego, a R jest siłą normalną. Siła normalna co do wartości jest równa ciężarowi samochodu na płaszczyźnie poziomej, więc $R = mg$. Zatem siła dośrodkowa w tym przypadku jest równa

$$F_d = T = \mu_s R = \mu_s mg.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób zależność pomiędzy siłą dośrodkową i współczynnikiem tarcia. Korzystając z zależności

$$F_d = m\frac{v^2}{r},$$

otrzymujemy

$$m\frac{v^2}{r} = \mu_s mg.$$

Przekształcając to równanie tak, aby obliczyć μ_s , dochodzimy do zależności

$$\mu_s = \frac{v^2}{rg}.$$

Podstawiając wielkości dane w treści zadania, obliczamy wartość współczynnika tarcia statycznego

$$\mu_s = \frac{(25{,}00\,\mathrm{m/s})^2}{500{,}0\,\mathrm{m} \cdot 9{,}80\,\mathrm{m/s^2}} = 0{,}13.$$

(W związku z tym, że wartości współczynników tarcia są zawsze przybliżone, wynik liczbowy w tym zadaniu podany jest z dokładnością tylko do dwóch miejsc po przecinku.)

Znaczenie

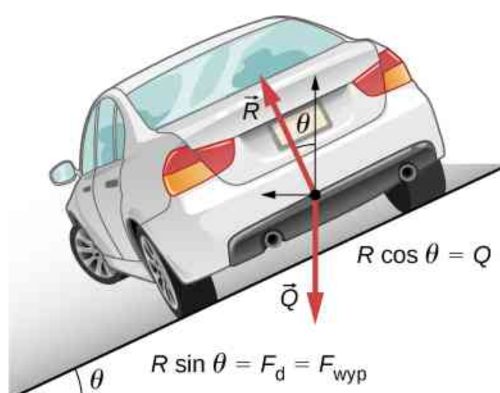
Współczynnik tarcia obliczony w zadaniu jest dużo mniejszy od wartości zazwyczaj wymienianych jako współczynnik tarcia między oponą a asfaltem. Jeśli współczynnik ten byłby większy niż 0,13, to samochód nadal pokonywałby zakręt, ponieważ tarcie statyczne jest siłą zdolną przyjmować wartości mniejsze lub równe $\mu_s R$. Większy współczynnik tarcia pozwoliłby również na pokonanie zakrętu z większą prędkością, zaś gdyby współczynnik ten był mniejszy, to bezpieczna prędkość byłaby niższa niż 25 m/s. Zwróć uwagę, że współczynnik tarcia nie zależy od masy, co oznacza, że pokonanie zakrętu bez poślizgu na płaskiej powierzchni nie będzie zależne od tego, jak ciężkie jest auto. Nieco inaczej sytuacja wygląda w przypadku, gdy zakręt jest nachylony a nie płaski. Wówczas siła normalna będzie mniejsza. Dokładniej opiszemy to w następnym przykładzie.



6.9 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Samochód poruszający się z prędkością 96,8 km/h pokonuje zakręt o promieniu krzywizny 182,9 m na płaskiej, polnej drodze. Ile musi wynosić współczynnik tarcia, aby samochód nie wpadł w poślizg i nie wypadł z drogi?

Profilowany zakręt

Rozważmy teraz ruch po **wyprofilowanym (pochylonym) zakręcie** (ang. **banked curve**), gdzie nachylenie drogi pomaga nam ten zakręt pokonać (Rysunek 6.22). Im większy jest kąt pochylenia drogi θ, tym szybciej możesz przejechać przez zakręt. Tory wyścigowe dla rowerów, jak również dla samochodów, często mają stromo pochylone zakręty. Idealnie wyprofilowany zakręt to taki, który mógłbyś przejechać z daną prędkością bez udziału tarcia pomiędzy oponami a podłożem. Wyprowadźmy zatem wzór na kąt pochylenia drogi θ w przypadku takiego idealnie wyprofilowanego zakrętu.



Rysunek 6.22 Auto na pochyłym zakręcie oddala się od obserwatora i skręca w lewo.

Dla **idealnie nachylonego zakrętu** (ang. **ideal banking**) wypadkowa sił zewnętrznych jest równa sile dośrodkowej (bez udziału tarcia). Składowe siły normalnej R w kierunku poziomym i pionowym muszą być równe odpowiednio sile dośrodkowej i ciężarowi samochodu. W sytuacji, w której siły nie są równoległe, najlepiej jest rozważyć składowe wzdłuż prostopadłych osi – w tym przypadku w kierunku pionowym i poziomym.

Rysunek 6.22 przedstawia rozkład sił działających na samochód na gładkim, pochyłym zakręcie. Jeśli kąt θ jest optymalny, to wypadkowa sił zewnętrznych jest równa sile dośrodkowej. Na samochód działają dwie siły zewnętrzne: ciężar $\vec{Q}$ oraz siła normalna prostopadła do drogi $\vec{R}$. (Gładka powierzchnia może wywierać jedynie siłę prostopadłą do powierzchni - czyli siłę normalną). Suma tych dwóch sił daje siłę wypadkową, która skierowana jest poziomo do środka krzywizny zakrętu i ma wartość mv^2 / r. Ponieważ siła ta jest pozioma, używamy układu współrzędnych z pionowymi i poziomymi osiami. Tylko siła normalna ma składową poziomą, więc musi ona równoważyć siłę odśrodkową:

$$R \sin\theta = \frac{mv^2}{r}.$$

Skoro samochód nie odrywa się od powierzchni drogi, to wypadkowa sił działających w pionie musi być równa zero. Oznacza to, że pionowe siły bądź ich składowe muszą być równe co do wartości, ale przeciwnie skierowane. Z Rysunku 6.22 wynika, że jedynymi siłami działającymi w pionie są: składowa pionowa siły normalnej $R \cos\theta$ oraz siła ciężkości. Muszą być one równe co do wartości, zatem

$$N \cos\theta = mg.$$

Teraz możemy powiązać te dwa równania, aby wyznaczyć R i otrzymać wyrażenie na θ. Przekształćmy drugie równanie do postaci $R = mg / \cos\theta$ i podstawmy do pierwszego równania. Wówczas otrzymamy:

$$\begin{aligned} mg\frac{\sin\theta}{\cos\theta} &= \frac{mv^2}{r} \\ mg \operatorname{tg}\theta &= \frac{mv^2}{r} \\ \operatorname{tg}\theta &= \frac{v^2}{rg}. \end{aligned}$$

Za pomocą funkcji odwrotnej do tangensa (arcus tangens) wyznaczamy wyrażenie na wartość kąta w postaci:

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{v^2}{rg}\right). \tag{6.4}$$

Wyrażenie to pomaga zrozumieć, jaki jest związek pomiędzy θ i v oraz r. Duża wartość kąta θ występuje dla dużych prędkości v i małego promienia krzywizny r. Oznacza to, że drogi muszą być stromo nachylone, aby można było ostre zakręty pokonywać z dużą prędkością. Dodatkowo pomocne okazuje się tarcie, które pozwala pokonywać zakręt z większą prędkością niż w przypadku gładkiej powierzchni drogi. Zwróć uwagę, że θ nie zależy od masy pojazdu.

Przykład 6.16

Jaka jest idealna szybkość, aby pokonać stromo nachylony, wąski zakręt?

Zakręty na torach wyścigowych są często bardzo stromo pochylone. Taka geometria zakrętu w połączeniu z tarciem kół o asfalt oraz odpowiednio stabilną konstrukcją samochodu pozwala pokonywać zakręty z bardzo dużą prędkością. Dla zobrazowania tej zależności oblicz prędkość, z jaką można przejechać gładki zakręt o promieniu krzywizny 100,0 m nachylony pod kątem 31° .

Strategia rozwiązania

Zauważmy, że wszystkie wielkości potrzebne do obliczenia kąta nachylenia idealnie wyprofilowanego zakrętu są dane. W związku z tym wystarczy, że przekształcimy to równanie tak, aby otrzymać z niego zależność na szukaną prędkość.

Rozwiązanie

Zaczynając od

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v^2}{rg},$$

po przekształceniu otrzymujemy równanie

$$v = \sqrt{rg \operatorname{tg} \theta}.$$

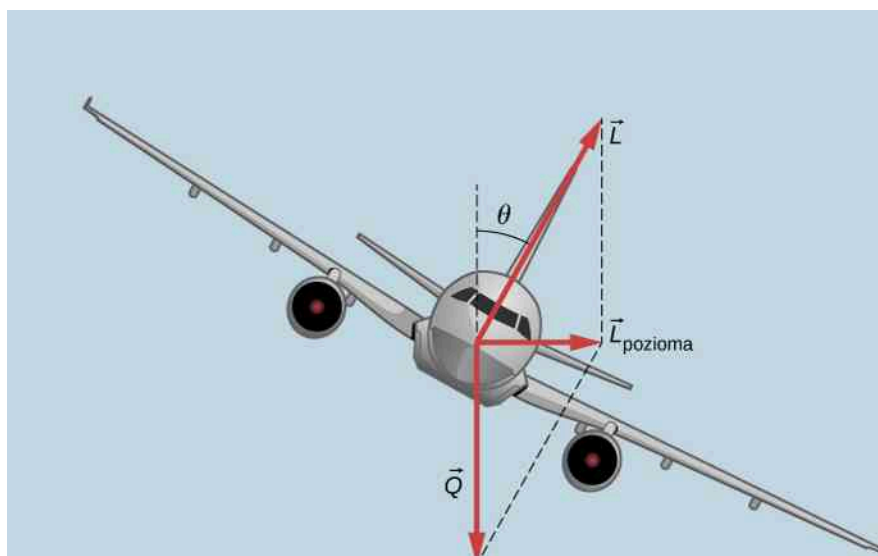
Wiedząc, że $\operatorname{tg} 31^\circ = 0{,}609$, otrzymujemy następującą wartość liczbową:

$$v = \sqrt{100{,}0\,\mathrm{m} \cdot 9{,}80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}609} = 24{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Znaczenie

Wartość ta odpowiada prędkości 165 km/h, z jaką można pokonywać raczej stromo nachylone i ostre zakręty. Uwzględnienie dodatkowo tarcia opon o podłoże pozwala znacząco zwiększyć dopuszczalną prędkość.

Samoloty również przechylają się, gdy wykonują zakręt. Siła nośna działa pod kątem prostym do powierzchni skrzydeł. Gdy samolot przechyla się, uzyskuje większą siłę nośną niż wymagana na tej wysokości. Pionowa składowa siły nośnej równoważy ciężar samolotu, zaś pozioma składowa jest przyczyną jego przyspieszenia dośrodkowego. Kąt przechylenia jest oznaczony na Rysunku 6.23 za pomocą symbolu θ. Analiza sił przebiega tu w sposób analogiczny jak w zadaniu z samochodem pokonującym stromy zakręt.



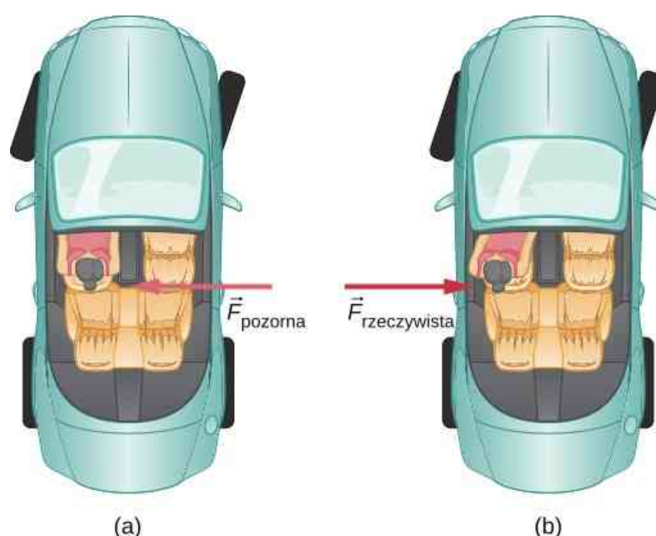
Rysunek 6.23 Podczas wykonywania zakrętu składowa pozioma siły nośnej nie jest zrównoważona żadną inną siłą i staje się przyczyną przyspieszenia dośrodkowego. Z kolei składowa pionowa równoważy ciężar samolotu. Kąt przechylenia samolotu jest oznaczony jako θ. Porównaj graficzny rozkład sił działających na samolot z rozkładem sił przedstawionych na Rysunku 6.22.


Uruchom symulację i przyłącz się do biedronki (https://openstaxcollege.org/l/21ladybug) , by wraz z nią odkrywać ruch po okręgu. Zakręć karuzelą, wybierając stałą prędkość kątową lub stałe przyspieszenie kątowe. Sprawdź, jak ruch obrotowy wpływa na położenie xy, prędkość i przyspieszenie biedronki, posługując się odpowiednimi wykresami i wektorami.


Warunkiem istnienia ruchu po okręgu jest działanie tzw. siły dośrodkowej, która skierowana jest wzdłuż promienia, do wewnątrz toru kołowego. Uproszczony model karuzeli (https://openstaxcollege.org/l/21carousel) obrazuje tę siłę.

Siły bezwładności i układy nieinercjalne (w których występuje przyspieszenie): siła Coriolisa

Co mają ze sobą wspólnego: start samolotu odrzutowego, pokonywanie zakrętu samochodem, jazda na karuzeli i ruch obrotowy cyklonu tropikalnego? W każdej sytuacji występują siły bezwładności, które wydają się wynikać z ruchu, ponieważ układ odniesienia obserwatora przyspiesza lub obraca się. Zapewne większość ludzi stwierdzi, że podczas startu samolotu pasażerowie są wciskani w fotel, ponieważ samolot przyspiesza wzdłuż pasa startowego. Z kolei fizyk patrzący na sytuację z zewnątrz stwierdzi, że pasażer pozostaje nieruchomy, podczas gdy fotel naciska na człowieka. Jeszcze powszechniej znane są doznania pojawiające się, kiedy kierowca samochodu wykonuje ostry zakręt – na przykład w prawo, jak to zostało przedstawione na Rysunku 6.24. Osoba kierująca czuje, jakby była wyrzucana w lewo względem samochodu i wciskana w drzwi auta. Z kolei fizyk obserwujący sytuację z zewnątrz ponownie stwierdziłby, że osoba kierująca porusza się po linii prostej, zaś to samochód porusza się w prawo.

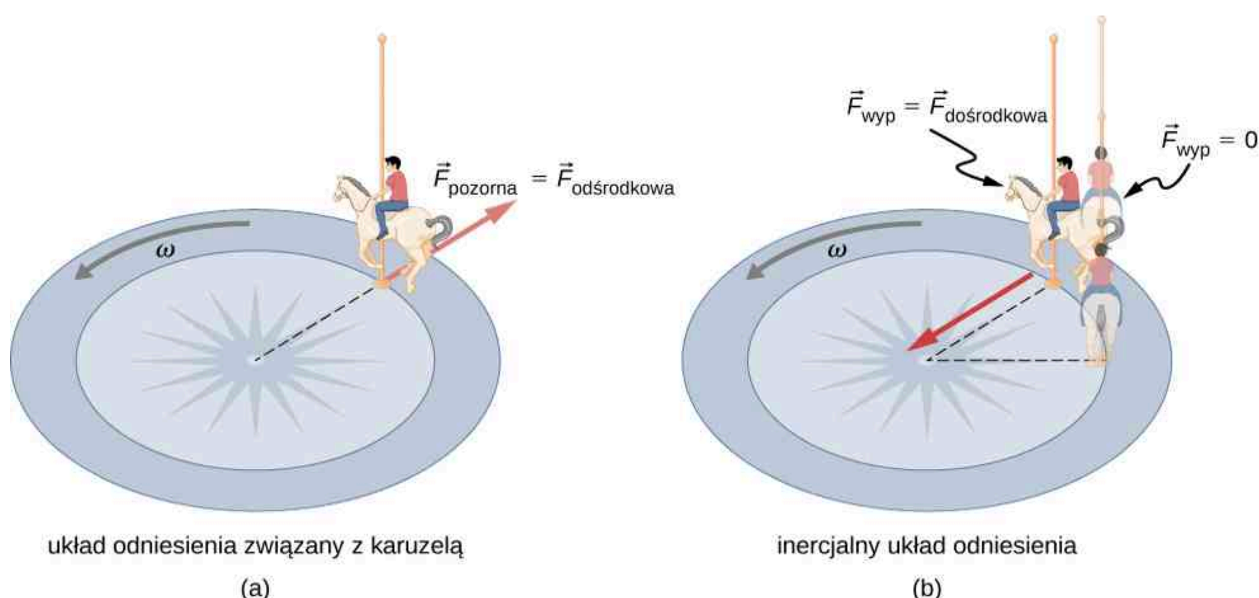


Rysunek 6.24 (a) Kierowca samochodu czuje, że jest pchany w lewo, kiedy wykonuje skręt w prawą stronę. Jest to siła inercjalna wynikająca z wybrania samochodu jako układu odniesienia. (b) W układzie odniesienia związanym z Ziemią, kierowca porusza się po linii prostej, przestrzegając pierwszej zasady dynamiki Newtona, zaś samochód porusza się w prawo. Nie występuje siła działająca na osobę kierującą skierowana w lewo w stosunku do Ziemi. Pojawia się za to siła skierowana w prawo, która powoduje, że samochód skręca.

Możemy pogodzić te punkty widzenia, sprawdzając użyte układy odniesienia. Skupmy się na osobie w aucie. Pasażerowie instynktownie używają samochodu jako układu odniesienia, a fizycy chętniej będą odnosić się do Ziemi. Fizyk dokonuje takiego wyboru, ponieważ Ziemia jest niemal inercjalnym układem odniesienia, w którym wszystkie siły mają zidentyfikowane pochodzenie fizyczne. W takim układzie odniesienia zasady dynamiki Newtona przyjmują formę przedstawioną w rozdziale Zasady dynamiki Newtona. Samochód stanowi **nieinercjalny układ odniesienia** (ang. **noninertial frame of reference**), ponieważ porusza się on z niezerowym przyspieszeniem względem układu inercjalnego (Ziemi). Siła wyczuwana przez pasażerów i skierowana w lewo nazywana jest **siłą bezwładności** (ang. **inertial force**), nie mającą fizycznego pochodzenia (jest spowodowana bezwładnością pasażera, a nie fizyczną przyczyną, taką jak napięcie, tarcie lub grawitacja). Samochód, a także kierowca, faktycznie przyspieszają w prawo.

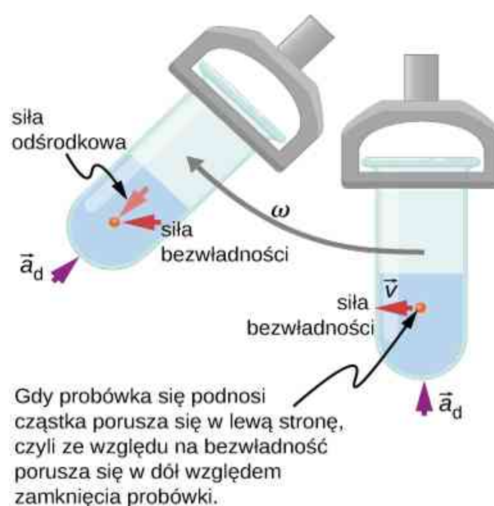
Fizyk wybiera dowolny układ odniesienia najbardziej dogodny dla analizowanej sytuacji. Może równie dobrze uwzględnić siły bezwładności i drugą zasadę dynamiki Newtona, jeśli takie podejście jest wygodniejsze, na przykład dla ciał fizycznych na karuzeli lub na obracającej się planecie. Nieinercjalne (przyspieszane) układy odniesienia stosuje się wówczas, gdy jest to użyteczne w odniesieniu do analizowanego zagadnienia. W dyskusji o ruchu astronauty w kosmosie, który przemieszcza się z prędkością zbliżoną do prędkości światła, należy rozważyć różne układy odniesienia, z czego zdasz sobie sprawę podczas rozważań na temat szczególnej teorii względności.

Wyobraźmy sobie jazdę na szybko obracającej się karuzeli (Rysunek 6.25). Wybieramy karuzelę jako układ odniesienia, ponieważ obraca się on razem z nami. W tym nieinercjalnym układzie odniesienia czujemy działanie siły bezwładności, która wyrzuca nas na zewnątrz. Często interpretuje się to jako efekt działania **siły odśrodkowej** (nie mylić z siłą dośrodkową). Siła odśrodkowa to pojęcie dość powszechnie używane, mimo że tak naprawdę siła ta wcale nie istnieje. W rzeczywistości trzeba się mocno trzymać karuzeli po to, aby przeciwdziałać sile bezwładności (którą ludzie często określają jako siłę odśrodkową). W układzie odniesienia związanym z Ziemią nie ma siły, która chciałaby cię wyrzucić na zewnątrz, gdyż siła odśrodkowa to twór czysto umowny. Owszem, musisz kurczowo trzymać się karuzeli, ale po to, by poruszać się po okręgu i nie wypaść z niego po linii prostej wprzód.



Rysunek 6.25 (a) Dziecko na karuzeli czuje, jakby było z niej wyrzucane. Siła bezwładności jest czasami mylnie nazywana siłą odśrodkową w celu wyjaśnienia ruchu jeźdźca w obracającym się układzie odniesienia. (b) W inercjalnym układzie odniesienia, zgodnie z zasadami dynamiki Newtona, bezwładność unosi jeźdźca po linii prostej stycznie do toru (cień jeźdźca pokazuje przypadek, gdy $F_{\text{wyp}} = 0$). Siła $F_{\text{dośrodkowa}}$ jest niezbędna, aby zakrzywiać tor ruchu.

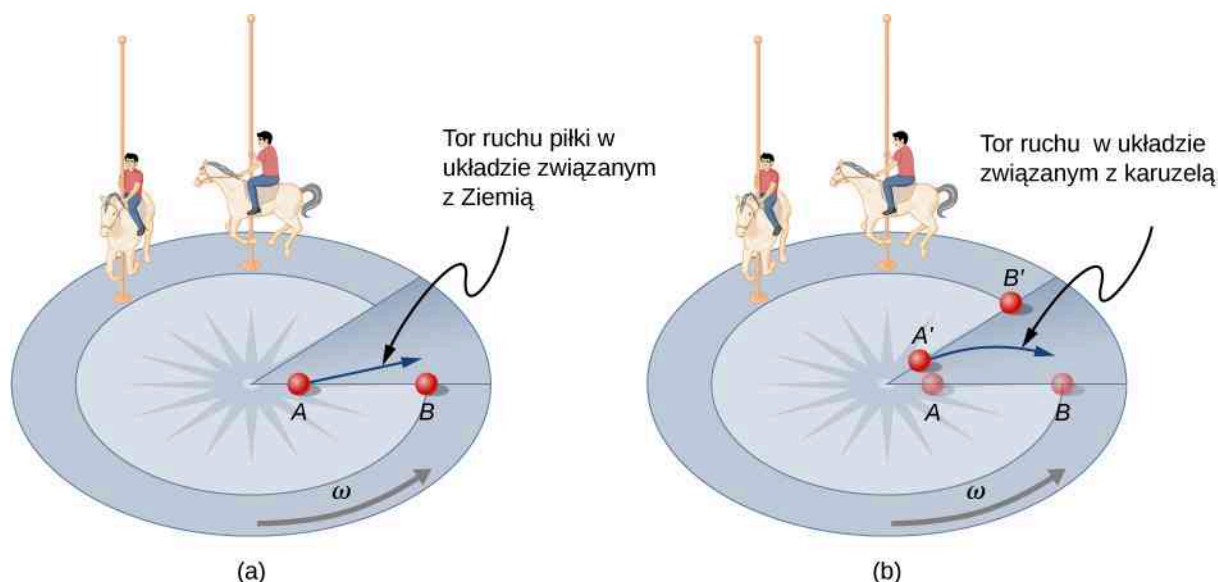
Ten efekt inercjalny, odsuwający nas od osi obrotu, jeśli nie ma siły odśrodkowej powodującej ruch kołowy, jest skutecznie wykorzystywany w wirówkach (Rysunek 6.26). **Wirówka** bardzo szybko obraca próbką w probówce. Z punktu widzenia obserwatora w obracającym się układzie odniesienia siła bezwładności wyrzuca cząstki na zewnątrz, przyspieszając ich osiadanie. Im większa jest prędkość kątowa, tym większa jest siła odśrodkowa. Jednakże tak naprawdę to bezwładność kieruje cząstki wzdłuż linii stycznej do okręgu, podczas gdy probówka jest kierowana po torze kołowym za pomocą siły odśrodkowej.



Rysunek 6.26 Wirówki wykorzystują bezwładność do wykonywania swoich zadań. Cząsteczki w osadach płynnych osadzają się, ponieważ ich bezwładność unosi je na zewnątrz od osi obrotu. Duża prędkość kątowa wirówki przyspiesza sedymentację. Ostatecznie cząstki stykają się z ściankami rurki testowej, które następnie dostarczają siłę dośrodkową potrzebną do poruszania się po okręgu o stałym promieniu.

Zastanówmy się teraz, co się stanie, jeśli ciało się porusza w obracającym się układzie odniesienia. Na przykład jeśli puścisz piłkę bezpośrednio ze środka karuzeli, jak przedstawiono na Rysunku 6.27. Piłka porusza się po linii prostej w stosunku do Ziemi (zakładając pomijalne tarcie) i po torze zakrzywionym w prawo w stosunku do karuzeli. Osoba stojąca obok karuzeli widzi piłkę poruszającą się prosto, zaś pod nią kręcącą się karuzelę. W układzie odniesienia związanym z karuzelą wyjaśniamy zakrzywienie toru piłki w prawo, stosując siłę bezwładności zwaną **siłą Coriolisa** (ang.

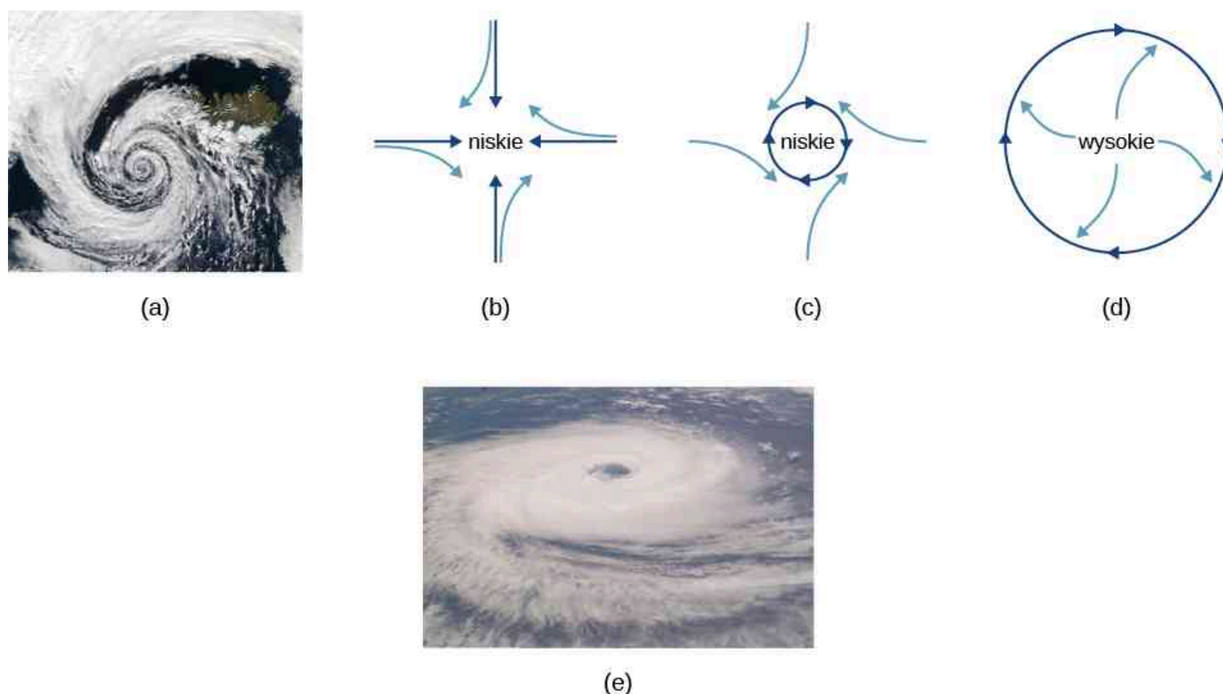
Coriolis force). Siła Coriolisa może być użyta w tym układzie odniesienia, aby wyjaśnić, dlaczego obiekty poruszają się po zakrzywionych torach i tym samym pozwala na stosowanie zasad dynamiki Newtona w nieinercjalnych układach odniesienia.



Rysunek 6.27 Gdy spoglądamy z góry na ruch obrotowy karuzeli w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, zauważamy, że piłka przesuwana prosto od środka w stronę krawędzi porusza się po torze zakrzywionym w prawo. Osoba przesuwa piłkę od punktu A do punktu B. Oba punkty obracają się do pozycji A' i B' w tym samym czasie, gdy piłka porusza się po zakrzywionym torze w obracającym się układzie odniesienia i po linii prostej w układzie odniesienia związanym z Ziemią.

Do tej pory uważaliśmy Ziemię za inercjalny układ odniesienia, nie troszcząc się wcale lub niewiele o skutki spowodowane jej obrotem. Istnieją jednak takie skutki i nie można ich pominąć - na przykład w stosunku do zjawisk pogodowych. Większość konsekwencji obrotu Ziemi może być jakościowo rozumiana przez analogię z karuzelą. Gdyby spojrzeć z góry na biegun północny, Ziemia obraca się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, podobnie jak karuzela na Rysunku 6.27. Podobnie jak na karuzeli, każdy ruch na półkuli północnej Ziemi doświadcza działania siły Coriolisa na prawo. Odwrotnie dzieje się na półkuli południowej. Tam siła jest skierowana w lewo. Ponieważ prędkość kątowa Ziemi jest mała, siła Coriolisa jest znikoma, ale dla ruchów w dużej skali, takich jak wiatr, prądy powietrzne, ten efekt jest znaczący.

Siła Coriolisa powoduje, że huragany na półkuli północnej obracają się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, podczas gdy cyklony tropikalne na półkuli południowej obracają się zgodnie z ruchem wskazówek zegara. (Określenia huragan, tajfun i tropikalna burza to specyficzne dla regionu nazwy cyklonów, które są systemami burzowymi charakteryzującymi się ośrodkami niskiego ciśnienia, silnymi wiatrami i deszczami). Rysunek 6.28 pomaga wyjaśnić, jak się to odbywa. Powietrze płynie w kierunku dowolnego obszaru niskiego ciśnienia. Jako że tropikalne cyklony zawierają szczególnie niskie ciśnienia, wiatr dociera do ich środka lub do centrum systemu pogodowego o niskim ciśnieniu. Na półkuli północnej te wewnętrzne wiatry są odchylane w prawo, jak pokazano na rysunku, wytwarzając obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara na powierzchni dowolnych stref niskiego ciśnienia. Niskie ciśnienie na powierzchni wiąże się z unoszącym się powietrzem, co powoduje również chłodzenie i tworzenie się chmur. Sprawia to, że charakterystyczne obrazy niskociśnieniowe są często dobrze widoczne z kosmosu. Z drugiej strony, cyrkulacja powietrza w strefach wysokiego ciśnienia jest zgodna z ruchem wskazówek zegara na półkuli południowej, ale jest mniej widoczna, ponieważ wysokie ciśnienie wiąże się z opadającym powietrzem, wywołując czyste, bezchmurne niebo.



Rysunek 6.28 (a) Obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara huraganu na półkuli północnej jest główną konsekwencją siły Coriolisa. (b) Bez siły Coriolisa powietrze wpłynęłoby prosto do strefy niskiego ciśnienia, jaka występuje w tropikalnych cyklonach. (c) Siła Coriolisa zakrzywia kierunek wiatru w prawo, powodując obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. (d) Wiatr wypływający ze strefy wysokiego ciśnienia jest również odchylany w prawo, powodując obrót zgodnie z ruchem wskazówek zegara. (e) Przeciwny kierunek obrotów jest wytwarzany przez siłę Coriolisa na półkuli południowej, co prowadzi do tropikalnych cyklonów. (rysunki a i e: zmodyfikowane na podstawie materiałów NASA).

Ruch obrotowy cyklonów tropikalnych i zakrzywiony tor ruchu piłki na karuzeli można wyjaśnić bezwładnością i obrotem układu, w którym te obiekty znajdują się pod spodem. Jeśli wykorzystywane są układy nieinercjalne, należy znaleźć siłę bezwładności, taką jak siła Coriolisa, aby wyjaśnić zakrzywiony tor ruchu. Nie ma żadnego możliwego do zidentyfikowania fizycznego źródła istnienia tych sił bezwładności. W inercjalnym układzie odniesienia bezwładność wyjaśnia tor ruchu, a żadna siła nie ma niezidentyfikowanego źródła. Każdy z tych poglądów pozwala opisać przyrodę, ale obserwacja prowadzona w inercjalnym układzie odniesienia jest najprostsza w tym sensie, że wszystkie siły mają swoje źródła i są łatwe do wyjaśnienia.

6.4 | Siła oporu i prędkość graniczna

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać siłę oporu za pomocą odpowiednich wyrażeń matematycznych;
- opisywać przykłady zastosowania siły oporu;
- definiować prędkość graniczną;
- obliczać prędkość graniczną ciała o znanej masie.

Innym przykładem interesującej siły, którą spotykamy w życiu codziennym, jest siła oporu wywierana na ciała poruszające się w płynie (czyli cieczy lub gazie). Na przykład czujesz działanie siły oporu, kiedy przesuwasz otwartą dłoń pod wodą. Podobny efekt odczuwasz, gdy próbujesz przesunąć otwartą dłoń w trakcie silnego wiatru. Im szybciej poruszasz ręką, tym trudniej jest wykonać ten ruch. Poczujesz mniejszą siłę oporu, jeśli obrócisz dłoń „na płasko”, tzn. tak, aby jak najmniejsza powierzchnia dłoni musiała przechodzić przez ośrodek (wodę, powietrze). Zmniejszysz wówczas powierzchnię zwróconą w kierunku ruchu.

Siły oporu

Podobnie jak tarcie, **siła oporu** (ang. **drag force**) zawsze przeciwstawia się ruchowi ciała. Jednakże w przeciwieństwie do tarcia siła oporu jest proporcjonalna do pewnej funkcji prędkości ciała w danym płynie. Funkcja ta jest skomplikowana i zależy od kształtu obiektu, jego wielkości, prędkości i płynu, w jakim obiekt się znajduje. Dla większości dużych obiektów, takich jak rowerzyści czy samochody, które nie poruszają się zbyt wolno, wartość siły oporu F_{op} jest proporcjonalna do kwadratu prędkości ciała. Zależność tą można zapisać matematycznie jako $F_{\text{op}} \propto v^2$. Jeśli uwzględnimy również inne czynniki, to pełne wyrażenie przyjmie postać:

$$F_{\text{op}} = \frac{1}{2} C \rho S v^2, \tag{6.5}$$

gdzie C współczynnikiem oporu ośrodka, S jest polem przekroju poprzecznego ciała (polem przekroju prostopadłego do kierunku wektora prędkości ciała), zaś ρ jest gęstością ośrodka (płynu). (Przypomnijmy, że gęstość jest ilorazem masy przez objętość.) Równanie to może również zostać zapisane w uogólnionej formie jako $F_{\text{op}} = bv^2$, gdzie b jest stałą równą $0{,}5 C \rho S$. Warto zwrócić uwagę, że wykładnik potęgi prędkości jest równy 2 wówczas, gdy zakładamy ruch ciała z dużą prędkością. Natomiast, jak to zostanie wykazane w rozdziale Mechanika płynów, dla małych cząstek poruszających się wolno w płynie wykładnik potęgi prędkości jest równy 1.

Siła oporu

Siła oporu F_{op} jest proporcjonalna do kwadratu prędkości ciała. Matematycznie można to zapisać następująco:

$$F_{\text{op}} = \frac{1}{2} C \rho S v^2,$$

gdzie C jest **współczynnikiem oporu**, S jest przekrojem poprzecznym ciała, zaś ρ jest gęstością cieczy.

Sportowcy oraz projektanci pojazdów wyścigowych dążą do tego, żeby zmniejszyć siłę oporu i w konsekwencji skrócić czas potrzebny na przejechanie okrążenia w wyścigu (Rysunek 6.29). W tym celu nadają swoim pojazdom aerodynamiczne (opływowe) kształty, które pomagają zredukować siłę oporu, a tym samym zmniejszyć zużycie paliwa w pojeździe.



Rysunek 6.29 Posiadanie aerodynamicznego kształtu jest kluczowym zagadnieniem dla wielu pojazdów: od samochodów wyścigowych po sanie bobslejowe, gdyż pomaga osiągnąć najwyższe prędkości. Na przykład bobsleje zazwyczaj mają kształt pocisku ze zwężającymi się statecznikami. (Źródło: “U.S. Army”/Wikimedia Commons)

Wartość współczynnika oporu C jest wyznaczana empirycznie, zazwyczaj przy użyciu **tunelu aerodynamicznego** (Rysunek 6.30).



Rysunek 6.30 Naukowcy NASA testują modele samolotów w tunelach aerodynamicznych. (Źródło: NASA/Ames)

Współczynnik oporu może się zmieniać wraz z prędkością, ale załóżmy tutaj, że jest stały. Tabela 6.2 prezentuje wartości przykładowych współczynników oporu dla wybranych obiektów. Zwróć uwagę, że jest to wielkość bezwymiarowa. Przy prędkościach autostradowych ponad 50% mocy samochodu jest zużywane do pokonywania oporu powietrza. Najbardziej oszczędna z punktu widzenia zużycia paliwa jest prędkość rzędu 70–80 km/h. Z tego powodu w latach 70-tych XX wieku podczas kryzysu paliwowego maksymalna prędkość na autostradach wynosiła 90 km/h.

Obiekt	C
Płat aerodynamiczny	0,05
Toyota Camry	0,28
Ford Focus	0,32
Honda Civic	0,36
Ferrari Testarossa	0,37
Dodge Ram Pickup	0,43
Sfera	0,45
Hummer H2 SUV	0,64
Spadochroniarz (spadający stopami do dołu)	0,70
Rower	0,90
Spadochroniarz (spadający płasko poziomo)	1,0
Okrągły płaski talerz	1,12

Tabela 6.2 Typowe wartości współczynników oporu C

W świecie sportu prowadzone są badania mające na celu zminimalizowanie oporu. Zmieniane są wymiary piłeczek do golfa, przeprojektowywane są ubrania dla sportowców. Rowerzyści, pływacy i niektórzy biegacze zakładają pełne kombinezony. Na olimpiadzie w Sydney w 2000 roku Australijka Cathy Freeman zdobyła złoty medal, biegając w kombinezonie na dystansie 400 m. Na olimpiadzie w Pekinie w 2008 roku wielu sportowców też używało takich kombi-

nezonów (Speedo). Mogą mieć one ogromne znaczenie dla bicia rekordów świata (Rysunek 6.31). Wielu czołowych pływaków i rowerzystów goli włosy na ciele. Ta pozornie mała zmiana może dać różnicę milisekund, które wpłyną na zdobycie złota zamiast srebra.



Rysunek 6.31 Kombinezony pływackie, takie jak LZR Racer Suit, kiedy udostępniono je do sprzedaży w 2008 roku, miały wpływ na ustanawianie wielu rekordów świata. Gładsza powierzchnia zewnętrzna oraz ściśnięta sylwetka zapewniają siłę oporu mniejszą o co najmniej 10%. (Źródło: NASA/Kathy Barnstorff)

Prędkość graniczna

Ciekawe obserwacje związane z drugą zasadą dynamiki Newtona można poczynić, gdy rozważa się ruch ciał, na które działa siła oporu. Na przykład rozważ ruch spadochroniarza spadającego pod wpływem siły ciężkości. Działają na niego dwie siły: grawitacji i oporu (pomijając znikomą siłę wyporu). Skierowana pionowo w dół siła ciężkości pozostaje stała, niezależnie od prędkości ruchu skoczka. Jednakże wraz ze wzrostem prędkości spadochroniarza rośnie siła oporu tak długo, dopóki nie zrówna się ona co do wartości z jego ciężarem. Wówczas siła wypadkowa będzie równa 0. Zgodnie z pierwszą zasadą dynamiki Newtona zerowa siła wypadkowa oznacza, że ruch spadochroniarza będzie jednostajny (nie występuje przyspieszenie). To z kolei oznacza, że skoczek osiągnął **prędkość graniczną** (ang. **terminal speed**) (v_{gr}). Jako że F_{op} jest proporcjonalna do kwadratu prędkości, to cięższy spadochroniarz musi spadać szybciej, aby siła oporu F_{op} zrównała się z ciężarem. Przeprowadźmy zatem przykładową analizę ilościową.

W momencie osiągnięcia prędkości granicznej

$$F_{\text{wyp}} = mg - F_{\text{op}} = ma = 0.$$

Zatem:

$$mg = F_{\text{op}}.$$

Wykorzystując wyrażenie na siłę oporu, otrzymujemy zależność:

$$mg = \frac{1}{2}C\rho S v_{\text{gr}}^2.$$

Przekształcając to równanie tak, aby obliczyć prędkość graniczą, otrzymujemy wzór:

$$v_{\text{gr}} = \sqrt{\frac{2mg}{\rho CS}}.$$

Przyjmijmy, że gęstość powietrza jest równa $\rho = 1{,}21\ \text{kg/m}^3$. Spadochroniarz o masie 75 kg spadający głową w dół ma średni przekrój poprzeczny równy $S = 0{,}18\ \text{m}^2$, zaś współczynnik oporu jest równy $C = 0{,}70$. Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy prędkość graniczną spadku skoczka spadochronowego:

$$v_{gr} = \sqrt{\frac{2 \cdot 75\,\text{kg} \cdot 9{,}80\,\text{m}/\text{s}^2}{1{,}21\,\text{kg}/\text{m}^2 \cdot 0{,}70 \cdot 0{,}18\,\text{m}^2}} = 98\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 350\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Oznacza to, że spadochroniarz o masie 75 kg pikujący głową w dół (minimalizujący powierzchnię, na którą działa siła oporu), osiąga prędkość graniczną równą ok. 350 km/h. W pozycji poziomej z rozpostartymi kończynami („na orła”) prędkość ta maleje do ok. 200 km/h, ponieważ większa jest powierzchnia działania siły oporu. Prędkość graniczna ponadto bardzo znacząco by zmalała, jeśli skoczek otworzyłby spadochron.

Przykład 6.17

Prędkość graniczna spadochroniarza

Znajdź prędkość graniczną skoczka spadochronowego o masie 85 kg spadającego poziomo z rozpostartymi kończynami („na orła”).

Strategia rozwiązania

Przy prędkości granicznej $F_{wyp} = 0$. Zatem siła oporu działająca na skoczka musi być równa sile ciężkości. Podstawiając wzór na siłę oporu, otrzymujemy $mg = \rho C S v^2 / 2$.

Rozwiązanie

Prędkość graniczna v_{gr} może zostać zapisana w postaci:

$$v_{gr} = \sqrt{\frac{2mg}{\rho C S}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 85\,\text{kg} \cdot 9{,}80\,\text{m}/\text{s}^2}{1{,}21\,\text{kg}/\text{m}^2 \cdot 1{,}0 \cdot 0{,}70\,\text{m}^2}} = 44\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Znaczenie

Wynik ten jest zgodny z wartością v_{gr} obliczoną wcześniej. Spadochroniarz o masie 75 kg pikujący głową w dół osiągnął prędkość graniczną $v_{gr} = 98\,\text{m}/\text{s}$. Ważył mniej, ale miał mniejszy przekrój poprzeczny, więc działająca na niego siła oporu powietrza była mniejsza.



6.10 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Oblicz prędkość graniczną spadochroniarza o masie 50 kg spadającego w pozycji „na orła”.

Analiza spadku obiektów o różnych rozmiarach pozwala zaobserwować kolejną zależność dla siły oporu powietrza. Jeśli spadniesz z gałęzi znajdującej się na wysokości 5 m nad powierzchnią ziemi najprawdopodobniej zrobisz sobie krzywdę (być może złamiesz kość). Jednak wiewiórka wykonuje takie spadki nieustannie – i nic jej się nie dzieje. Ty nie zdążysz osiągnąć prędkości granicznej na tak krótkim dystansie, podczas gdy wiewiórka da radę.

Ciekawy cytat na temat związku między rozmiarem ciała zwierzęcia a prędkością graniczną można znaleźć w eseju brytyjskiego biologa J. B. S. Haldane’a, zatytułowanym *On Being the Right Size* (pol. *Mając odpowiedni rozmiar*):

„Dla myszy i innych małych zwierząt [grawitacja] nie jest niebezpieczna. Możesz zrzucić myszkę w dół szybu kopalni o głębokości ok. 1000 m (1000 jardów), a ta po upadku dozna tylko lekkiego szoku i odejdzie, pod warunkiem, że ziemia będzie dość miękka. Szczur zginie, człowiek się połamie, koń zostanie rozsmarowany na ziemi. Opór stawiany przez powietrze podczas spadku jest proporcjonalny do powierzchni spadającego ciała. Podziel długość, szerokość i wysokość zwierzęcia na dziesięć. Wówczas jego ciężar zostanie pomniejszony 1000 razy, podczas gdy pole przekroju poprzecznego tylko 100 razy. Zatem opór spadania w przypadku małych zwierząt jest dziesięć razy większy niż siła napędowa spadku.”

Wykorzystywana przez nas wcześniej kwadratowa zależność siły oporu od prędkości nie sprawdza się, jeśli mamy do czynienia z obiektami bardzo małymi, poruszającymi się bardzo wolno lub jeśli ruch odbywa się w ośrodku gęstszym niż powietrze. Wówczas zauważymy, że siła oporu jest proporcjonalna do prędkości w pierwszej potędze (zależność liniowa). Zależność tę wyraża prawo Stokesa:

Prawo Stokesa

Na ciało o symetrii kulistej spadające w danym ośrodku działa siła oporu równa:

$$F_s = 6\pi r \eta v, \tag{6.6}$$

gdzie r jest promieniem kuli, η jest lepkością ośrodka, zaś v jest prędkością ruchu ciała.

Dobry przykład stosowalności prawa Stokesa stanowi ruch mikroorganizmów, pyłków i kurzu. Ponieważ obiekty te są bardzo małe, widzimy, że poruszają się one bez niczyjej pomocy ze stałą (graniczną) prędkością. Prędkość graniczna dla bakterii o rozmiarze ok. $1\ \mu\text{m}$ może wynosić ok. $2\ \mu\text{m/s}$. Aby poruszać się z większą prędkością wiele z bakterii używa wici, czyli organelli w kształcie małych ogonków napędzanych za pomocą małych „silniczków” wewnątrz komórki.

Osady jeziorne poruszają się z większą prędkością graniczną (równą ok. $5\ \mu\text{m/s}$), jednak dotarcie do dna po osadzeniu na powierzchni jeziora może w tym przypadku trwać kilka dni.

Jeśli porównamy zwierzęta lądowe z tymi, które żyją w wodzie, możemy zauważyć, jak bardzo siła oporu wpłynęła na ich rozwój ewolucyjny. Ryby, delfiny, nawet wieloryby mają opływowe kształty po to, by minimalizować działającą na nie siłę oporu. Ptaki, a szczególnie gatunki migrujące, które pokonują długie dystanse, również mają charakterystyczne, opływowe kształty, np. wydłużone szyje. Stada ptaków formują w locie figury na kształt ostrza (Rysunek 6.32). U ludzi opływowy kształt prezentują np. plemniki, które muszą pokonywać dalekie odcinki drogi przy małym nakładzie energii.



Rysunek 6.32 W trakcie długich lotów migracyjnych gęsi tworzą formacje w kształcie litery V. Kształt ten pomaga zmniejszyć opór powietrza i tym samym zredukować ilość energii zużywanej przez poszczególne ptaki. Ponadto kształt ten ułatwia komunikację między ptakami. (Źródło: “Julo”/Wikimedia Commons)

Obejrzyj film (https://openstax.org/l/21dragforce) prezentujący obiekty znajdujące się w jednorodnym strumieniu powietrza wytworzonym przez wentylator. Oblicz liczbę Reynoldsa oraz współczynnik oporu.

Analiza zależnych od prędkości sił oporu i tarcia

Kiedy ciało przesuwa się po powierzchni, siła tarcia jest w przybliżeniu stała i równa $\mu_k R$. Jednakże siła oporu działająca na ciało przesuwające się w cieczy lub gazie nie jest już tak prosta do opisania. W ogólności ta siła oporu będzie skomplikowaną funkcją prędkości ruchu ciała. Jednakże w uproszczonych sytuacjach, takich jak ruch ciała w cieczy po linii prostej z umiarkowaną prędkością, siła oporu może być przybliżona następującą zależnością:

$$T_{\text{op}} = -bv,$$

gdzie b jest stałą, której wartość zależy od kształtu i rozmiaru ciała oraz od właściwości cieczy, zaś v jest prędkością ciała. Empiryczne przykłady, dla których równanie to jest słuszne, to np. ruch motorówki po wodzie czy powolny spadek małych obiektów w wodzie.

Rozważmy spadek obiektu w cieczy. Rozkład sił działających na to ciało wraz z zaznaczonym kierunkiem ruchu w dół jest przedstawiony na Rysunku 6.33. Zastosowanie drugiej zasady dynamiki Newtona dla sił w kierunku pionowym (zakładamy, że siła wyporu jest znacznie mniejsza od siły grawitacji, dlatego możemy ją pominąć) prowadzi do równania różniczkowego:

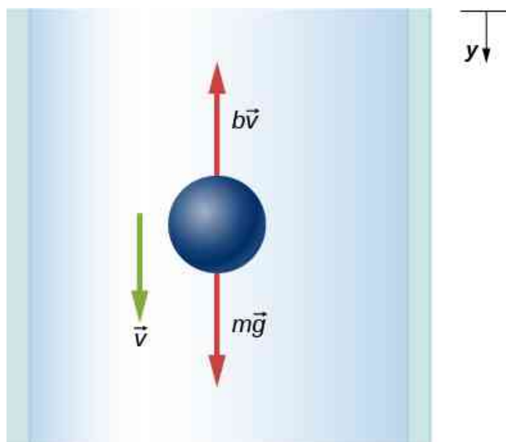
$$mg - bv = m\frac{\text{d}v}{\text{d}t},$$

gdzie $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ jest przyspieszeniem ciała. Gdy v rośnie, siła oporu $-bv$ również rośnie tak długo, aż zrównoważy się z mg . Wówczas nie będzie występowało przyspieszenie, a prędkość ruchu będzie stała i będzie to tzw. prędkość graniczna v_{gr} . Zatem z poprzedniego równania otrzymujemy zależność:

$$mg - bv_{\mathrm{gr}} = 0,$$

więc

$$v_{\mathrm{gr}} = \frac{mg}{b}.$$



Rysunek 6.33 Rozkład sił działających na ciało spadające w ośrodku stawiającym opór.

Możemy również wyprowadzić wzór prezentujący prędkość ruchu obiektu v w dowolnej chwili czasu. W tym celu musimy scałkować przedstawione uprzednio równanie różniczkowe:

$$\frac{\mathrm{d}v}{g - bv/m} = \mathrm{d}t.$$

Przy założeniu warunków brzegowych takich, że $v = 0$ w czasie $t = 0$, możemy określić granice całkowania:

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}\tilde{v}}{g - b\tilde{v}/m} = \int_0^t \mathrm{d}\tilde{t}.$$

Po scałkowaniu otrzymujemy zależność:

$$-\frac{m}{b}\ln\left(g - \frac{b}{m}\tilde{v}\right)\Big|_0^v = \tilde{t}\Big|_0^t,$$

gdzie $\tilde{v}$ i $\tilde{t}$ są nowymi zmiennymi całkowania. Podstawienie wartości do granic całkowania daje ostateczną zależność:

$$-\frac{m}{b}\left[\ln\left(g - \frac{b}{m}v\right) - \ln g\right] = t.$$

Z własności logarytmów wiemy, że $\ln A - \ln B = \ln(A/B)$, oraz że z równania $\ln(A/B) = x$ wynika zależność $e^x = A/B$. Po uwzględnieniu tych zależności równanie upraszcza się do postaci:

$$\frac{g - (bv/m)}{g} = e^{-bt/m},$$

a po przekształceniu:

$$v = \frac{mg}{b}(1 - e^{-bt/m}).$$

Zwróć uwagę, że gdy $t\rightarrow\infty$, $v\rightarrow mg/b = v_{\mathrm{gr}}$, czyli do prędkości granicznej.

Położenie ciała w dowolnej chwili czasu może zostać znalezione poprzez całkowanie wyrażenia na prędkość v. Pamiętając, że $v = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$, otrzymujemy:

$$\mathrm{d}y = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-bt/m}\right)\mathrm{d}t.$$

Przyjmując $y = 0$ w chwili czasu $t = 0$, uzyskujemy zależność:

$$\int_0^y d\tilde{y} = \frac{mg}{b}\int_0^t \left(1 - e^{-b\tilde{t}\,/\,m}\right) d\tilde{t},$$

która po obliczeniu wartości całki sprowadza się do postaci:

$$y = \frac{mg}{b}t + \frac{m^2 g}{b^2}(e^{-bt/m} - 1).$$

Przykład 6.18

Wpływ siły oporu na ruch motorówki

Motorówka porusza się po jeziorze z prędkością v_0, jednak jej silnik nagle przestaje pracować. W związku z tym motorówka stopniowo zwalnia pod wpływem siły oporu $T_{op} = -bv$.

a. Znajdź wyrażenie opisujące prędkość i położenie łódki w funkcji czasu.
b. Jeśli łódka zmniejsza prędkość od 4,0 m/s do 1,0 m/s w ciągu 10 s, to jak daleko zdąży ona popłynąć, zanim się zatrzyma?

Rozwiązanie

a. Gdy silnik przestaje pracować, jedyną siłą działającą na motorówkę w kierunku poziomym jest $T_{op} = -bv$, więc z drugiej zasady dynamiki Newtona wynika zależność:

$$m\frac{dv}{dt} = -bv,$$

którą po rozdzieleniu zmiennych możemy również zapisać jako

$$\frac{dv}{v} = -\frac{b}{m}dt.$$

Zakładając, że prędkość początkowa jest równa v_0 w czasie t równym 0 oraz że prędkość po czasie t jest równa v, możemy scałkować to wyrażenie:

$$\int_0^v \frac{d\tilde{v}}{\tilde{v}} = -\frac{b}{m}\int_0^t d\tilde{t}.$$

Zatem

$$\ln\frac{v}{v_0} = -\frac{b}{m}t.$$

Skoro z zależności $\ln A = x$ wynika $e^x = A$, możemy napisać

$$v = v_0 e^{-bt/m}.$$

Podstawiając do wzoru definicję prędkości chwilowej, otrzymujemy

$$\frac{dx}{dt} = v_0 e^{-bt\,/\,m},$$

a po przekształceniu mamy:

$$dx = v_0 e^{-bt\,/\,m} dt.$$

Zakładając położenie początkowe równe 0, możemy dokonać całkowania w następujących granicach:

$$\int_0^x \mathrm{d}\tilde{x} = v_0 \int_0^t e^{-b\tilde{t}/m} \mathrm{d}\tilde{t},$$

z czego wynika:

$$x = -\frac{mv_0}{b} e^{-b\tilde{t}/m} \Big|_0^t = \frac{mv_0}{b} \left(1 - e^{-bt/m}\right).$$

Gdy czas rośnie, $e^{-bt/m} \to 0$, motorówka dąży do osiągnięcia swojego położenia końcowego:

$$x_{\max} = \frac{mv_0}{b}.$$

Mimo że z wyrażenia tego wynika, że łódka potrzebuje nieskończonego czasu do osiągnięcia położenia $x_{\max}$, to w praktyce zatrzymuje się ona po rozsądnym czasie. Na przykład dla $t = 10m/b$, mamy

$$v = v_0 e^{-10} \approx 4{,}5 \cdot 10^{-5} v_0,$$

zaś położenie w tym przypadku jest równe

$$x = x_{\max} \left(1 - e^{-10}\right) \approx 0{,}99995 x_{\max}.$$

Stąd wniosek, że prędkość i położenie faktycznie osiągnęły swoje wartości maksymalne.

b. Przy prędkościach $v_0 = 4{,}0$ m/s i $v = 1{,}0$ m/s mamy $1{,}0\ \mathrm{m/s} = 4{,}0\ \mathrm{m/s} \cdot e^{-(b/m) \cdot 10\ \mathrm{s}}$, więc

$$\ln 0{,}25 = -\ln 4{,}0 = -\frac{b}{m} \cdot 10\ \mathrm{s}$$

i

$$\frac{b}{m} = \frac{1}{10} \ln 4{,}0\ \mathrm{s}^{-1} = 0{,}14\ \mathrm{s}^{-1}.$$

Teraz końcowe położenie motorówki, czyli takie, po którym łódź się zatrzyma, jest równe:

$$x_{\max} = \frac{mv_0}{b} = \frac{4{,}0\ \mathrm{m/s}}{0{,}14\ \mathrm{s}^{-1}} = 29\ \mathrm{m}.$$

Znaczenie

W obu poprzednich przykładach określaliśmy wartości końcowe. Prędkość graniczna jest taka sama jak prędkość końcowa, która odpowiada prędkości spadającego obiektu po relatywnie długim czasie. Podobnie położenie końcowe odpowiada drodze, jaką pokona ciało po relatywnie długim czasie. Ze względu na charakterystykę zaniku eksponencjalnego czas potrzebny na osiągnięcie którejkolwiek z tych wartości w rzeczywistości nie jest bardzo długi (a na pewno nie jest nieskończony).



6.11 Sprawdź, czy rozumiesz. Załóżmy, że siła oporu powietrza działająca na spadochroniarza może być wyrażona równaniem $T = -bv^2$. Jeśli graniczna wartość prędkości skoczka o masie 100 kg wynosi 60 m/s, to jaka jest wartość b?

PODSUMOWANIE ROZDZIAŁU 6

KLUCZOWE POJĘCIA

idealne nachylenie zakrętu (ang. ideal banking) takie nachylenie zakrętu, które umożliwia jego pokonanie przez wykorzystywanie siły tarcia; siła dośrodkowa równoważy wypadkową siłę działającą na ciało (ciało osiąga wtedy prędkość maksymalną)

pochylony zakręt (ang. banked curve) zakręt, który ma jeden z krańców podniesiony względem poziomu po to, by ułatwiać pojazdom pokonanie go bez wpadania w poślizg

prędkość graniczna (ang. terminal speed) stała prędkość osiągana przez spadające ciało wówczas, gdy ciężar tego ciała jest równoważony przez skierowaną przeciwnie siłę oporu

siła bezwładności (ang. inertial force) siła, która nie jest rzeczywista, a jedynie wprowadzono ją, aby można było rozważać zasady dynamiki Newtona w układach poruszających się z przyspieszeniem

siła Coriolisa (ang. Coriolis force) siła bezwładności wywołująca odchylenie toru ruchu obiektu z punktu widzenia obracającego się układu odniesienia

siła dośrodkowa (ang. centripetal force) każda wypadkowa siła wywołująca jednostajny ruch ciała po okręgu

siła oporu (ang. drag force) siła, która przeciwstawia się ruchowi ciała w płynie; w przeciwieństwie do zwykłego tarcia siła oporu zależy od prędkości ruchu ciała

tarcie (ang. friction) siła, która przeciwdziała względnemu ruchowi lub próbie ruchu między stykającymi się ciałami

tarcie kinetyczne (ang. kinetic friction) siła, która przeciwdziała względnemu ruchowi dwóch poruszających się, stykających się ciał

tarcie statyczne (ang. static friction) siła, która przeciwdziała względnemu ruchowi dwóch statycznych, stykających się ciał

układ nieinercjalny (ang. noninertial frame of reference) układ poruszający się z przyspieszeniem

NAJWAŻNIEJSZE WZORY

Wartość tarcia statycznego	$T_s \le \mu_s N$
Wartość tarcia kinetycznego	$T_k = \mu_k N$
Siła dośrodkowa	$F_d = m\frac{v^2}{r}$ lub $F_d = mr\omega^2$
Kąt nachylenia idealnie wyprofilowanego zakrętu	$\operatorname{tg}\theta = \frac{v^2}{rg}$
Siła oporu	$F_{op} = \frac{1}{2}C\rho S v^2$
Prawo Stokesa	$F_s = 6\pi r\eta v$

PODSUMOWANIE

6.1 Rozwiązywanie zadań związanych z zasadami dynamiki Newtona

- Zasady dynamiki Newtona mogą znaleźć szerokie zastosowanie w rozwiązywaniu zadań i problemów fizycznych.
- W niektórych zadaniach na obiekt działają różne siły skierowane pod różnymi kątami. Pamiętaj, aby narysować schemat sytuacyjny, nanieść wektory działających sił, rozłożyć je na składowe równoległe do osi przyjętego układu współrzędnych oraz aby narysować rozkład sił działających na analizowane ciało. Zawsze analizę prowadź wzdłuż kierunku, w którym obiekt przyspiesza, aby określić, czy $F_{wyp} = ma$ czy też $F_{wyp} = 0\,N$.
- Siła normalna działająca na obiekt nie zawsze jest równa co do wartości ciężarowi ciała. Jeśli obiekt porusza się z jakimś przyspieszeniem w kierunku pionowym, to siła normalna jest mniejsza lub większa od jego ciężaru. Podobnie, jeśli ciało znajduje się na równi pochyłej, to siła normalna jest zawsze mniejsza od ciężaru ciała.

- Niektóre zagadnienia wiążą ze sobą różne wielkości fizyczne, np. siłę, przyspieszenie, prędkość czy położenie. W celu rozwiązania tego typu zadań można zastosować metodologie stosowane zarówno w kinematyce, jak i dynamice.

6.2 Tarcie

- Tarcie jest siłą kontaktową, która przeciwdziała ruchowi pomiędzy dwoma ciałami. Jest ono proporcjonalne do siły normalnej R, jaką ciała na siebie oddziałują.
- Wartość siły tarcia statycznego pomiędzy dwoma nieruchomymi ciałami będącymi w kontakcie jest zależna od wartości współczynnika tarcia statycznego, który jest charakterystyczny dla rodzaju materiałów stykających się.
- Siła tarcia kinetycznego pomiędzy dwoma stykającymi się ciałami będącymi w ruchu względem siebie jest zależna od wartości współczynnika tarcia kinetycznego, który jest charakterystyczny dla rodzaju materiałów stykających się i jest zawsze mniejszy od wartości współczynnika tarcia statycznego.

6.3 Siła dośrodkowa

- Siła dośrodkowa $\vec{F}_{\text{d}}$ jest siłą skierowaną do środka toru kołowego, po którym porusza się ciało. Jest ona prostopadła do prędkości liniowej i ma wartość

$$F_{\text{d}} = ma_{\text{d}}.$$

- Obracające się i przyspieszane układy odniesienia nazywamy nieinercjalnymi. Siły bezwładności, takie jak siła Coriolisa, są niezbędne, aby wyjaśnić ruch w tego typu układach. Jednakże są tzw. siłami pozornymi, tzn. są pojęciami czysto teoretycznymi, pozwalającymi na rozważanie zasad dynamiki Newtona w układach poruszających się z przyspieszeniem.

6.4 Siła oporu i prędkość graniczna

- Siły oporu działające na ciało poruszające się w płynie przeciwstawiają się temu ruchowi. Dla większych obiektów (takich jak piłka baseballowa) poruszających się w powietrzu, siła oporu zależy od współczynnika oporu (typowe wartości znajdują się w Tabeli 6.2), przekroju poprzecznego i gęstości płynu.
- W przypadku małych obiektów (takich jak bakterie) poruszających się w ośrodku gęstszym (np. w wodzie), siła oporu jest wyrażona za pomocą prawa Stokesa.

PYTANIA

6.1 Rozwiązywanie zadań związanych z zasadami dynamiki Newtona

1. Aby zasymulować pozorną nieważkość występującą na orbicie, astronauci przechodzą treningi w specjalnych samolotach towarowych nurkujących z przyspieszeniem g. Dlaczego w tym przyspieszającym układzie odniesienia wydają się oni być nieważcy? Jakie jest wskazanie wagi łazienkowej w takich warunkach? Czy istnieje jakakolwiek różnica między pozorną nieważkością na orbicie a tą odczuwaną przez kosmonautów w samolocie treningowym?

6.2 Tarcie

2. Między klejem a substancją, która jest klejona taśmą klejącą działają siły. Czy siły te mogą być rodzajem tarcia? Wyjaśnij, biorąc pod uwagę, że taśma może trzymać się ścian pionowych, a nawet sufitów.

3. Kiedy jedziesz samochodem, zauważasz, że musisz naciskać lekko na pedał hamulca, gdy chcesz zatrzymać auto, albo auto będzie szarpać w trakcie hamowania. Wyjaśnij to pod względem relacji między tarciem statycznym a kinetycznym.

4. Kiedy piszesz, naciskając kawałkiem kredy na tablicę, ta czasami piszczy, ponieważ następuje szybka zmiana pomiędzy poślizgiem a przywarciem kredy do tablicy. Opisz ten proces bardziej szczegółowo, przede wszystkim wyjaśniając, jak to jest związane z faktem, że tarcie kinetyczne jest mniejsze od statycznego tarcia. (Ten sam proces ślizgania-przyczepiania odbywa się, gdy opony piszczą na chodniku.)

5. Fizyk gotuje śniadanie i zauważa, że siła tarcia między łopatką i patelnią pokrytą teflonem wynosi zaledwie 0,200 N. Znając współczynnik tarcia kinetycznego pomiędzy tymi dwoma materiałami (z tabeli), fizyk szybko oblicza wartość siły normalnej. Ile ona wynosi?

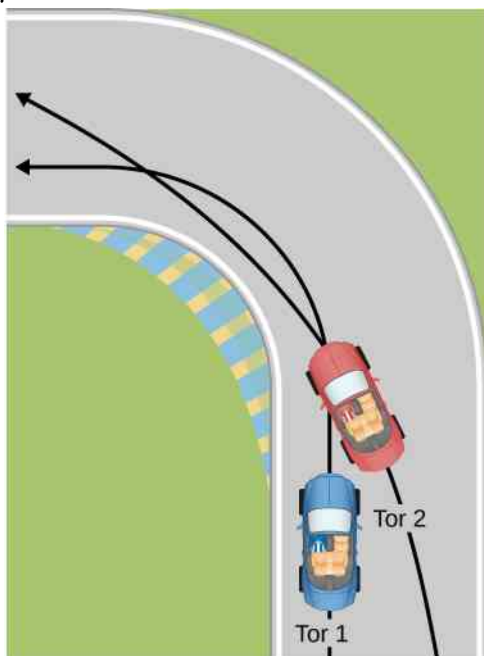
6.3 Siła dośrodkowa

6. Jeśli chcesz zmniejszyć naprężenia (związane z siłą dośrodkową) w oponach używanych do jazdy z dużą prędkością, użyjesz opon o dużej czy małej średnicy? Wyjaśnij swoją decyzję.

7. Zdefiniuj siłę dośrodkową. Czy dowolny typ siły (na przykład napięcie, siła grawitacji, tarcie itd.) może być siłą dośrodkową? Czy dowolna kombinacja tych sił może stanowić siłę dośrodkową?

8. Jeśli siła dośrodkowa skierowana jest „do środka”, to dlaczego czujesz „wyrzucanie” na zewnątrz, gdy samochód pokonuje zakręt? Wyjaśnij.

9. Kierowcy wyścigowi zazwyczaj „ścinają” zakręt, jak to zostało przedstawione poniżej (tor 2). Wyjaśnij, dlaczego pozwala to pokonywać zakręt z większą prędkością?



10. Wiele parków rozrywki ma kolejki górskie, których tory tworzą pionowe pętle, jak pokazano poniżej. Ze względów bezpieczeństwa wagoniki są mocowane do szyn w taki sposób, aby nie mogły spaść. Jeśli samochód wjedzie na szczyt z odpowiednią prędkością v_0, to sama grawitacja dostarczy siłę dośrodkową. Jaka inna siła działa i jaki jest jej kierunek, jeśli:

(a) wagonik pokonuje najwyższy punkt toru szybciej niż v_0?

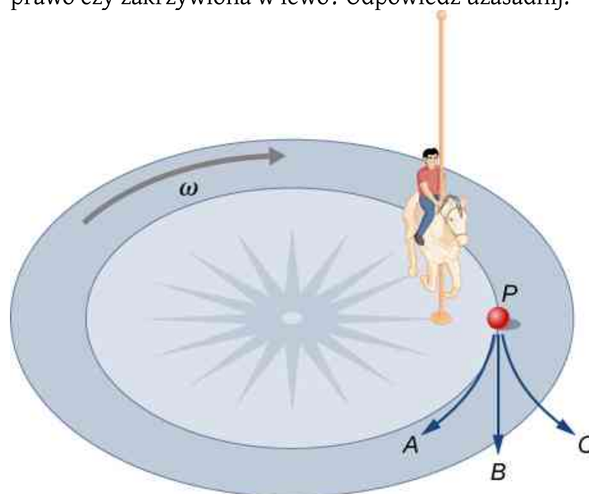
(b) wagonik pokonuje najwyższy punkt toru wolniej niż v_0?



11. Co powoduje, że woda jest usuwana z ubrań podczas wirowania?

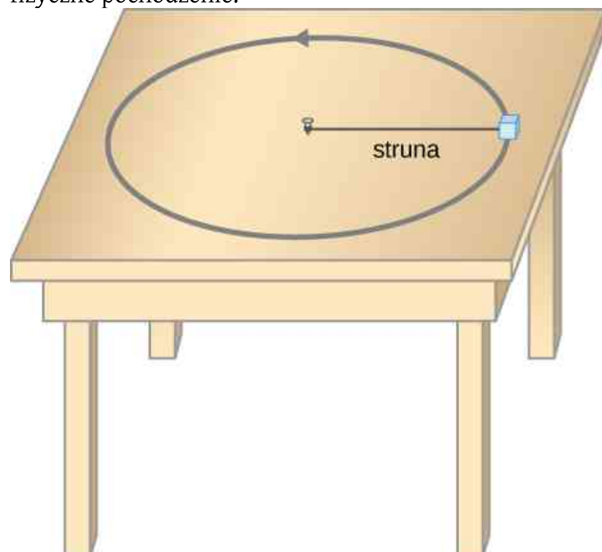
12. Narciarz zakreśla okrąg. Jaka siła odpowiada za zakrzywienie toru jego ruchu? Wykorzystaj diagram sił, aby uzasadnić odpowiedź.

13. Wyobraźmy sobie dziecko jeżdżące na karuzeli, siedzące na koniku w połowie odległości między środkiem karuzeli a jej brzegiem. Trzyma ono pojemnik śniadaniowy na woskowanym papierze, więc tarcie między papierem z pojemnikiem i karuzelą jest znikome. Po jakiej krzywej będzie poruszać się pojemnik, jeśli dziecko go upuści? Jeśli poruszający się pojemnik pozostawia ślad na kurzu leżącym na karuzeli, to która krzywa reprezentuje ten ślad: prosta, zakrzywiona w prawo czy zakrzywiona w lewo? Odpowiedź uzasadnij.



14. Czy czujesz, że jakaś siła „wyrzuca” cię na zewnątrz, kiedy pokonujesz zakręt, który jest idealnie wyważony dla twojego samochodu przy zadanej prędkości? Jaki jest kierunek siły, jaką fotel samochodowy wywiera na ciebie?

15. Załóżmy, że ciężarek porusza się po torze kołowym na gładkim stole, jak pokazano na rysunku. W układzie odniesienia związanym z Ziemią nie ma siły odśrodkowej wyrzucającej masę z dala od środka obrotu, ale jest siła rozciągająca strunę, za pomocą której masa jest przymocowana do gwoździa. Używając pojęć związanych z siłą dośrodkową i trzecią zasadą dynamiki Newtona, wyjaśnij, jaka siła napina strunę, identyfikując jej fizyczne pochodzenie.



16. Kiedy spłukujesz wodę w toalecie lub przepłukujesz zlewozmywak, woda (i inne materiały) obracają się wokół wewnątrz rury spustowej, przemieszczając się w dół. Zakładając brak początkowego ruchu obrotowego i przepływ początkowo po linii prostej w stronę rury, wyjaśnij, co powoduje obrót i jaki ma on kierunek na półkuli północnej. (Należy zwrócić uwagę, że jest to niewielki efekt, a w większości toalet obrót jest spowodowany przez kierunkowe dysze wodne.) Czy kierunek obrotów byłby odwrócony, gdyby woda została skierowana w górę rury spustowej?

17. Samochód pokonuje zakręt na oblodzonym fragmencie drogi o bardzo małym współczynniku tarcia kinetycznego. Samochód zjeżdża z drogi. Opisz tor ruchu samochodu, gdy opuszcza drogę.

18. Podczas korzystania z jednej z atrakcji w parku rozrywki śmiałkowie wchodzą do dużej pionowej beczki i stoją pod ścianą na poziomej podłodze. Beczka jest wprawiana w ruch obrotowy, a podłoga opada. Ludzie czują się tak, jakby przypięto ich do ściany. Nie opadają w pionie, mimo że podłoga uciekła im spod nóg. Jest to siła bezwładności wyczuwana i używana przez śmiałków do wyjaśnienia zjawiska w obracającym się układzie odniesienia związanym z beczką. Wyjaśnij w inercjalnym układzie odniesienia (Ziemia jest prawie takim układem), co przytrzymuje ludzi przy ścianie i zidentyfikuj wszystkie działające siły.

19. Dwaj przyjaciele toczą dyskusję. Anna mówi, że satelita na orbicie wykonuje spadek swobodny, ponieważ ciągle zbliża się do Ziemi. Tomek mówi, że satelita na orbicie nie wykonuje swobodnego spadku, ponieważ przyspieszenie grawitacyjne nie wynosi $9{,}80\,\mathrm{m/s^2}$. Z kim się zgadzasz i dlaczego?

20. Nieinercjalny układ odniesienia umieszczony w centrum Słońca jest prawie idealnym układem inercjalnym. Dlaczego prawie? Dlaczego nie jest to po prostu układ inercjalny?

6.4 Siła oporu i prędkość graniczna

21. Pływacy i rowerzyści startujący w zawodach ubierają się w specjalne kombinezony. Wymień zalety i wady takich kombinezonów.

22. Do opisu siły oporu działającej na obiekt poruszający się w płynie używaliśmy dwóch wyrażeń. W jednym siła oporu była wprost proporcjonalna do prędkości, a w drugim do kwadratu prędkości. Dla jakich rodzajów ruchu poszczególne wyrażenia znajdują zastosowanie?

23. Podczas ruchu samochodu olej i benzyna wyciekają na powierzchnię drogi. Jaki wpływ na możliwość kontrolowania ruchu samochodu będzie miał wyciek, a jaki padający delikatnie deszcz? Czy intensywny opad deszczu będzie stanowił jakąś różnicę?

24. Dlaczego wiewiórka jest w stanie zeskoczyć na ziemię z wysokiej gałęzi, nie robiąc sobie krzywdy, podczas gdy człowiek wykonując ten sam skok najparwdopodobniej złamie sobie którąś z kości?

ZADANIA

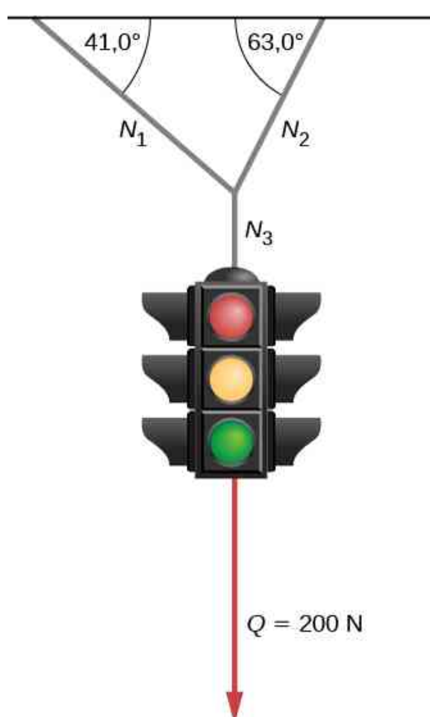
6.1 Rozwiązywanie zadań związanych z zasadami dynamiki Newtona

25. Dziewczyna o masie 30 kg buja się na huśtawce. Jest ona odchylana od pionu o 30° i utrzymywana w pozycji nieruchomej dzięki poziomej sile $\vec{F}$.

a. Oblicz siłę naciągu każdej z dwóch lin huśtawki.

b. Oblicz wartość siły $\vec{F}$.

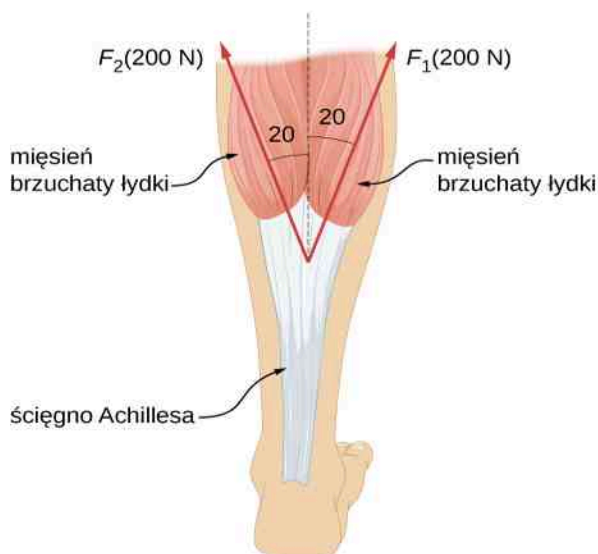
26. Oblicz siłę naciągu każdego z trzech kabli, na których wisi sygnalizacja świetlna o ciężarze $2 \cdot 10^2\ \mathrm{N}$.



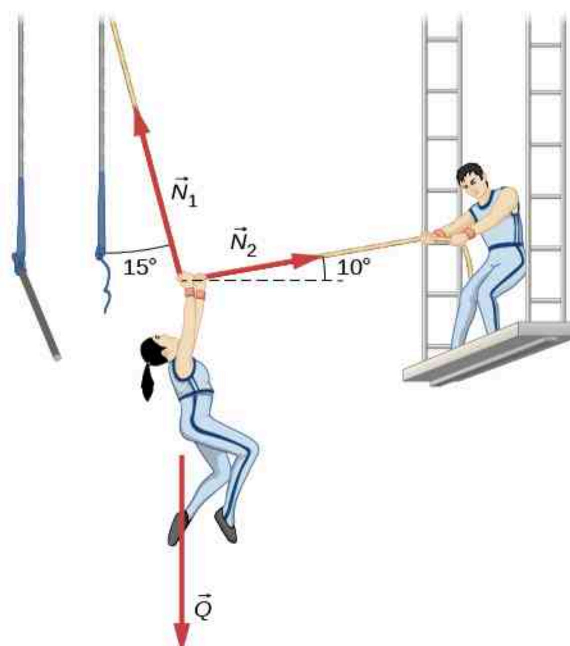
27. Trzy siły działają na cząstkę materialną, która porusza się ze stałą prędkością $v = \hat{i} \cdot 3\ \mathrm{m/s} - \hat{j} \cdot 2\ \mathrm{m/s}$. Dwie spośród tych sił to: $\vec{F}_1 = \hat{i} \cdot 3\ \mathrm{N} + \hat{j} \cdot 5\ \mathrm{N} - \hat{k} \cdot 6\ \mathrm{N}$ i $\vec{F}_2 = \hat{i} \cdot 4\ \mathrm{N} - \hat{j} \cdot 7\ \mathrm{N} + \hat{k} \cdot 2\ \mathrm{N}$. Znajdź trzecią siłę.

28. Pchła skacze, wywierając siłę $1{,}2 \cdot 10^{-5}$ N na ziemię. Wiatr wiejący równolegle do powierzchni ziemi wywiera na pchłę siłę $0{,}5 \cdot 10^{-6}$ N w momencie, gdy pchła jest jeszcze w kontakcie z ziemią. Znajdź kierunek i wartość przyspieszenia pchły, jeśli jej masa wynosi $6{,}0 \cdot 10^{-7}$ kg. Pamiętaj o działaniu siły grawitacji.

29. Dwa mięśnie łydki naciągają w górę ścięgno Achillesa, jak to zostało przedstawione na rysunku. Są to tzw. mięśnie brzuchate łydki (głowa przyśrodkowa i boczna). Znajdź wartość i kierunek działania wypadkowej siły wywieranej na ścięgno Achillesa. Jaki rodzaj ruchu można wykonywać dzięki działaniu tej siły?



30. W trakcie pokazu cyrkowego dochodzi do nieszczęśliwego wypadku. Zrywa się trapez, na którym gimnastyczka o masie 76 kg wykonywała akrobacje. Drugi cyrkowiec próbuje uratować koleżankę, ciągnąc linę, której akrobatka się trzyma, jak to zostało przedstawione na rysunku. Oblicz siły naciągu liny, na której wisi kobieta, przy założeniu, że jest ona chwilowo nieruchoma. Wykonaj schemat rozkładu sił działających na akrobatkę.



31. Delfin o masie 35 kg dogania innego delfina, zwalniając od prędkości 12,0 m/s do 7,5 m/s w ciągu 2,3 s. Jaka średnia siła musiała być wywierana na delfina, aby go spowolnić? (Siła ciężkości jest równoważona przez siłę wyporu wody.)

32. W momencie startu biegu sprinter o masie ciała 70 kg wywiera na ziemię średnią siłę 650 N przez 0,8 s. (a) Jaką prędkość osiągnie? (b) Jak daleko dobiegnie?

33. Rakieta ma masę $2{,}00 \cdot 10^6$ kg w momencie startu, a jej silniki wywołują siłę ciągu równą $3{,}50 \cdot 10^7$ N.
a. Znajdź początkowe przyspieszenie rakiety, jeśli startuje ona w kierunku pionowym.
b. Ile czasu rakieta będzie przyspieszać do osiągnięcia prędkości 120 km/h przy założeniu zachowania stałej masy i siły ciągu?

34. Koszykarz skacze w górę po piłkę. W tym celu ugina kolana zniżając się o 0,300 m, po czym prostuje je, gwałtownie przyspieszając na tym odcinku drogi. Następnie odrywa się od podłogi z prędkością wystarczającą, by mógł się wznieść na wysokość 0,900 m nad ziemią.
a. Oblicz prędkość, z jaką koszykarz odrywa się od podłogi.
b. Oblicz przyspieszenie jakie posiada jego środek masy w trakcie prostowania kolan. Pamiętaj, że jego prędkość zwiększa się od wartości równej zero do tej, którą obliczysz w punkcie (a) na dystansie równym 0,300 m.
c. Zakładając, że koszykarz waży 110 kg, oblicz siłę, jaką wywiera on na ziemię w trakcie tego ruchu.

35. Fajerwerk o masie 2,5 kg po wystrzale z moździerza osiąga wysokość 110 m.
a. Jeśli pominiemy wpływ oporu powietrza, to jaka jest prędkość fajerwerku w momencie opuszczania moździerza?
b. Moździerz ma postać rury o długości 0,450 m. Oblicz średnie przyspieszenie fajerwerku wewnątrz moździerza, jeśli jego prędkość zmienia się od zera do wartości obliczonej w punkcie (a).
c. Jaka średnia siła jest wywierana na fajerwerk wewnątrz moździerza? Wynik wyraź zarówno w niutonach, jak również w postaci stosunku tej siły do ciężaru fajerwerku.

36. Ziemniak o masie 0,5 kg jest wystrzeliwany pod kątem 80° względem poziomu z rury PCV służącej jako „działo ziemniaczane” i osiąga maksymalną wysokość równą 110,0 m.
a. Pomijając opór powietrza, oblicz prędkość ziemniaka w momencie opuszczania działa.
b. Działo ma postać rury o długości 0,450 m. Oblicz średnie przyspieszenie ziemniaka wewnątrz rury wiedząc, że jego prędkość zmienia się od zera do wartości wyliczonej w punkcie (a).
c. Jaka średnia siła jest wywierana na ziemniak wewnątrz działa? Wynik wyraź zarówno w niutonach, jak również w postaci stosunku tej siły do ciężaru ziemniaka.

37. Winda pełna pasażerów ma masę $1{,}70 \cdot 10^3$ kg.
a. Początkowo spoczywająca winda jedzie w górę z przyspieszeniem równym $1{,}20$ m/s^2 przez 1,50 s. Oblicz naciąg liny, na której umocowana jest winda.
b. Na dalszym etapie winda zaczyna poruszać się ruchem jednostajnym przez kolejne 8,50 s. Jaki jest wówczas naciąg liny utrzymującej windę?
c. Następnie winda zwalnia z opóźnieniem równym $0{,}600$ m/s^2 w czasie 3,00 s. Ile wynosi naciąg liny w trakcie hamowania?
d. Na jaką wysokość wzniosła się winda w trakcie całego ruchu i jaka jest jej prędkość końcowa?

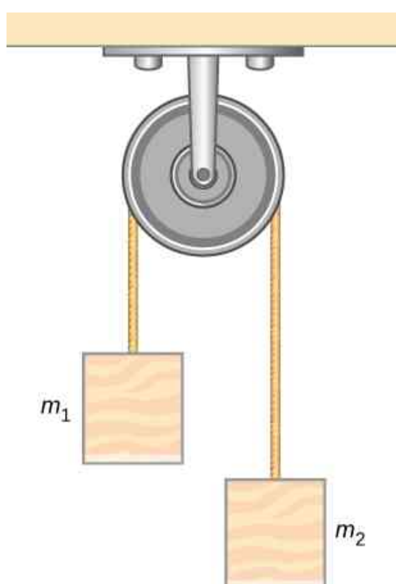
38. Piłka o masie 20,0 g wisi na strunie przymocowanej do dachu samochodu towarowego. Gdy samochód rusza, struna odchyla się o kąt 35° względem pionu.
a. Ile wynosi przyspieszenie samochodu?
b. Ile wynosi siła naciągu struny?

39. Plecak studenta wypełniony książkami zostaje zawieszony na dynamometrze przyczepionym do sufitu windy. Gdy winda porusza się w dół z przyspieszeniem $3{,}8$ m/s^2, odczyt na dynamometrze wynosi 60 N.
a. Jaka jest masa plecaka?
b. Jaki będzie odczyt na dynamometrze, jeśli winda będzie hamować, jadąc w górę z opóźnieniem $3{,}8$ m/s^2?
c. Jaki będzie odczyt na dynamometrze, jeśli winda będzie poruszała się w górę ze stałą prędkością?
d. Jaki byłby odczyt na dynamometrze, jeśli zerwałaby się lina podtrzymująca windę, przez co winda zaczęłaby spadać swobodnie?

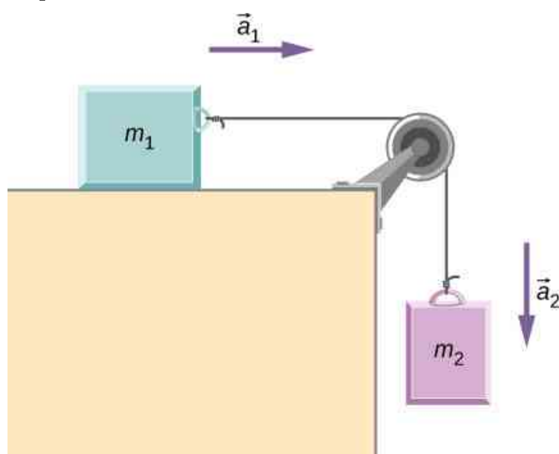
40. Winda towarowa transportuje 10,0 kg gruzu ze szczytu budowanego drapacza chmur na poziom ziemi z przyspieszeniem $1{,}2$ m/s^2. Oblicz wartość siły wywieranej przez gruz na podłogę windy.

41. Wózek kolejki górskiej startuje ze szczytu toru o długości 30,0 m nachylonego pod kątem 20° do poziomu. Tarcie pomijamy.
a. Ile wynosi przyspieszenie wózka?
b. Jak długo wózek będzie zjeżdżał do końca toru?

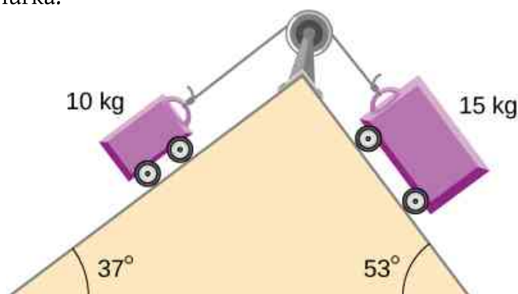
42. Na rysunku poniżej przedstawiona jest, ta sama co w Przykładzie 6.5, spadkownica Atwooda. Zakładając, że linka jest nieważka i nierozciągliwa, zaś bloczek jest nieważki i nieruchomy,
a. znajdź wyrażenie na przyspieszenie ciężarków zawieszonych na lince,
b. znajdź wyrażenie na siłę naciągu linki
c. oblicz przyspieszenie i siłę naciągu linki, jeśli dane są masy ciężarków równe odpowiednio 2,00 kg i 4,00 kg.



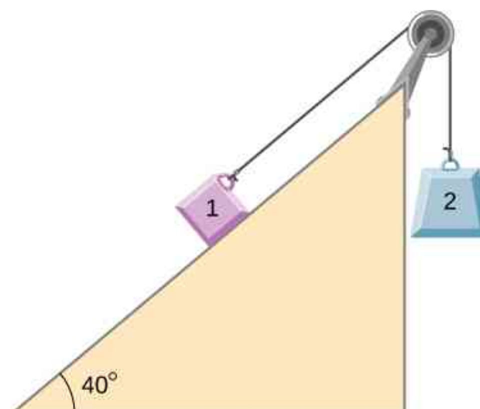
43. Dwa ciężarki połączone są nieważką nicią przerzuconą przez nieważki bloczek, tak jak to zostało przedstawione na rysunku. Masa ciężarka leżącego na poziomej powierzchni wynosi 4,0 kg, zaś masa ciężarka wiszącego na lince wynosi 1,0 kg.
a. Znajdź przyspieszenie układu.
b. Znajdź siłę naciągu nici.
c. Znajdź prędkość, z jaką ciężarek drugi uderzy w ziemię, jeśli rozpoczyna on swój ruch z wysokości 1,0 m nad podłożem.



44. Dwa wózki połączone są sznurkiem przerzuconym przez nieważki bloczek. Wózki mogą poruszać się bez tarcia. Oblicz przyspieszenie wózków i siłę naciągu sznurka.



45. Ciężarek o masie 2,00 kg i ciężarek o masie 4,00 kg są połączone za pomocą cienkiej linki przerzuconej przez nieważki bloczek znajdujący się na szczycie równi pochyłej o kącie nachylenia 40° . Tarcie pomijamy.
a. Ile wynosi przyspieszenie każdego z ciężarków?
b. Ile wynosi siła naciągu linki?



6.2 Tarcie

46. a. Podczas wykonywania remontu silnika fizyk musi wywrzeć siłę $3{,}00 \cdot 10^2$ N, aby wstawić suchy stalowy tłok do stalowego cylindra. Jaka jest siła normalna pomiędzy tłokiem a cylindrem?
b. Jaką siłę musiałby wywrzeć fizyk, jeśli części silnika byłyby pokryte olejem?

47. a. Jaka jest maksymalna siła tarcia w stawie kolanowym osoby, która podtrzymuje 66,0 kg swojej masy na tym kolanie?
b. Podczas intensywnych ćwiczeń możliwe jest wywieranie na stawy siły, która jest 10 razy większa niż podpierany ciężar. Jaka jest maksymalna siła tarcia w takich warunkach? Siły tarcia w stawach są stosunkowo małe we wszystkich okolicznościach, z wyjątkiem przypadków psucia się stawów, takich jak uszkodzenie ciała lub zapalenie stawów. Zwiększone siły tarcia mogą powodować dalsze dolegliwości i ból.

48. Wyobraź sobie skrzynię drewnianą o masie 120 kg leżącą na drewnianej podłodze, gdzie współczynnik tarcia statycznego pomiędzy tymi drewnianymi powierzchniami wynosi 0,500.
a. Jaką maksymalną siłę jesteś w stanie wywrzeć poziomo na skrzynię bez przesuwania jej?
b. Jeśli nadal będziesz wywierać tę siłę na skrzynię nawet wówczas, gdy już zacznie się poruszać, to jakie będzie wówczas przyspieszenie skrzyni? Współczynnik tarcia kinetycznego wynosi 0,300.

49. a. Jeśli połowa ciężaru auta dostawczego $1{,}00 \cdot 10^3$ kg jest obsługiwana przez jego dwa koła napędowe, to jakie przyspieszenie byłoby w stanie to auto osiągnąć na suchym betonie?
b. Czy metalowa szafka leżąca na drewnianej naczepie samochodu przesuwa się, jeśli auto przyspiesza w tym tempie?
c. Rozważ ponownie oba przypadki zakładając, że auto ma napęd na cztery koła.

50. Zaprzęg składający się z ośmiu psów ciągnie po

mokrym śniegu sanie, których płozy pokryte są woskiem. Psy mają średnią masę 19,0 kg, a ładunek sanek z maszerem (osobą kierującą saniami) ma masę 210 kg.

a. Oblicz przyspieszenie psów od momentu wyruszenia, jeśli każdy pies wywiera na śnieg średnią siłę 185 N.

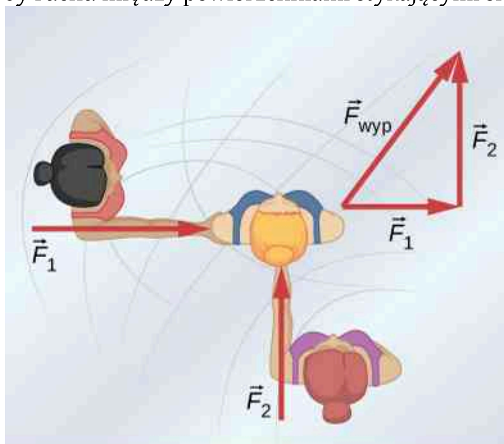
b. Oblicz siłę naciągu między psami a saniami.

51. Rozważ przypadek łyżwiarki o wadze 65 kg popychanej przez dwie inne łyżwiarki.

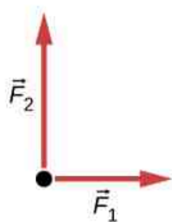
a. Oblicz kierunek i wartość siły wypadkowej F_{wyp}, która jest całkowitą siłą wywieraną przez pozostałe kobiety, zakładając, że wartości wywieranych sił F_1 i F_2 wynoszą odpowiednio 26,4 N i 18,6 N.

b. Jakie jest początkowe przyspieszenie łyżwiarki, jeśli najpierw stała ona w miejscu oraz ma na sobie łyżwy stalowe zwrócone w kierunku działania siły F_{wyp}?

c. Jakie jest przyspieszenie, zakładając, że porusza się ona w kierunku działania siły F_{wyp}? (Pamiętaj, że tarcie zawsze działa w kierunku przeciwnym do ruchu lub próby ruchu między powierzchniami stykającymi się.)

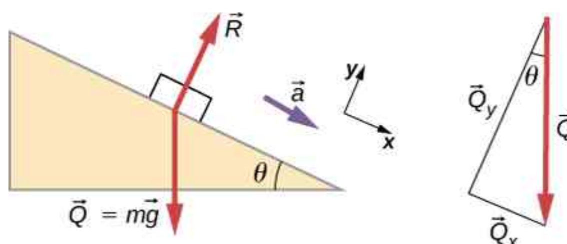


(a)

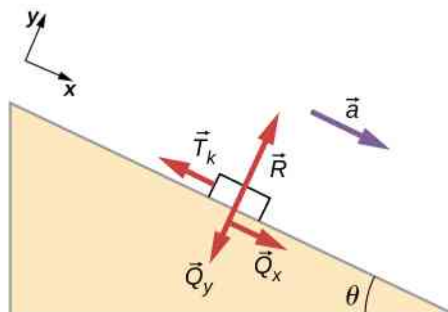


(b)

52. Wykaż, że przyspieszenie ciała poruszającego się bez tarcia w dół równi pochyłej nachylonej pod kątem θ do płaszczyzny poziomej jest równe $a = g \sin \theta$. (Zauważ, że przyspieszenie jest niezależnie od masy ciała)



53. Wykaż, że przyspieszenie dowolnego ciała poruszającego się z tarciem $T_{\text{k}} = \mu_{\text{k}} R$ w dół równi pochyłej wynosi $a = g(\sin\theta - \mu_{\text{k}} \cos\theta)$. Zwróć uwagę, że przyspieszenie jest niezależne od masy ciała i w sytuacji, gdy tarcie jest pomijalnie małe $(\mu_{\text{k}} = 0)$ zależność ta sprowadza się do równania znalezionego w poprzednim zadaniu.



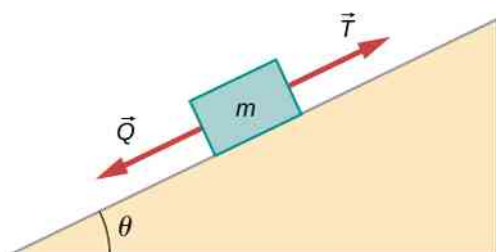
54. Oblicz opóźnienie snowboardzisty wjeżdżającego na stok o kącie nachylenia 5°, przyjmując współczynnik tarcia nawoskowanego drewna na mokrym śniegu. Wynik poprzedniego zadania może być przydatny, ale uważaj, aby wziąć pod uwagę fakt, że snowboardzista jedzie w górę.

55. Maszyna w urzędzie pocztowym wysyła paczki na pochylnię, z której trafiają one wprost do pojazdów dostawczych.

a. Oblicz przyspieszenie pudła zjeżdżającego w dół po pochylni pod kątem 10° do poziomu zakładając, że współczynnik tarcia z paczki na nawoskowanym drewnie jest równy 0,100.

b. Oblicz kąt nachylenia pochylni, przy którym pudło mogłoby zjeżdżać ze stałą prędkością. Pomiń wpływ oporu powietrza.

56. Jeśli ciało ma spoczywać na równi pochyłej, nie zsuwając się, to tarcie musi być równe co do wartości składowej ciężaru równoległej do równi. Wymaga to coraz większego tarcia dla coraz bardziej stromych zboczy. Wykaż, że maksymalny kąt nachylenia zbocza względem poziomu, przy którym ciało nie zacznie się zsuwać wynosi $\theta = \operatorname{arctg} \mu_{\text{s}}$. Możesz wykorzystać zależności wyliczone w poprzednich zadaniach. Załóż, że przyspieszenie $a = 0$ oraz że tarcie statyczne osiągnęło wartość maksymalną.



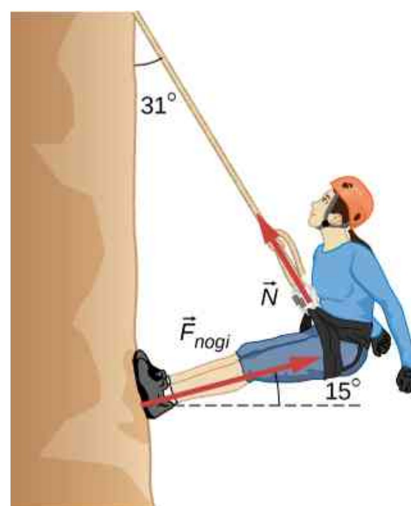
57. Oblicz maksymalne przyspieszenie auta, które zjeżdża swobodnie z górki o kącie nachylenia 6° względem poziomu. Załóż, że ciężar auta jest równo rozłożony na cztery koła oraz że występuje tarcie statyczne, czyli opony nie ślizgają się podczas hamowania (pomijamy toczenie). Obliczenia poprowadź w następujących przypadkach:
a. Na suchym betonie.
b. Na mokrym betonie.
c. Na lodzie przy założeniu, że $\mu_s = 0{,}100$, czyli jest taki sam, jak dla butów na lodzie.

58. Oblicz maksymalne przyspieszenie auta, które zjeżdża swobodnie z górki o kącie nachylenia 4° względem poziomu. Załóż, że połowa ciężaru auta jest podpierana przez dwa koła napędowe oraz że występuje tarcie statyczne, czyli opony nie ślizgają się podczas hamowania (pomijamy toczenie). Obliczenia poprowadź w następujących przypadkach:
a. Na suchym betonie.
b. Na mokrym betonie.
c. Na lodzie przy założeniu, że $\mu_s = 0{,}100$, czyli jest taki sam jak dla butów na lodzie.

59. Powtórz obliczenia z poprzedniego zadania dla samochodu z napędem na cztery koła.

60. Mający dwa silniki pociąg towarowy o masie $8{,}00 \cdot 10^5\ \mathrm{kg}$ wiezie 45 samochodów o średniej masie $5{,}50 \cdot 10^5\ \mathrm{kg}$.
a. Jaką siłę ciągu musi wywierać każdy z silników, aby pociąg mógł poruszać się z przyspieszeniem $5{,}00 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m/s^2}$ jeśli siła tarcia wynosi $7{,}50 \cdot 10^5\ \mathrm{N}$. Zakładamy, że każdy z silników wywiera taką samą siłę. Wspomniana siła tarcia jest niewielka jak dla tak masywnego systemu, co sprawia, że pociągi są bardzo efektywnymi energetycznie systemami transportowymi.
b. Ile wynosi siła kontaktowa (naciągu) wywierana między 37 i 38 samochodem, zakładając, że każdy z samochodów ma taką samą masę oraz, że siłą tarcia jest równomiernie rozłożona między wszystkie auta i silniki?

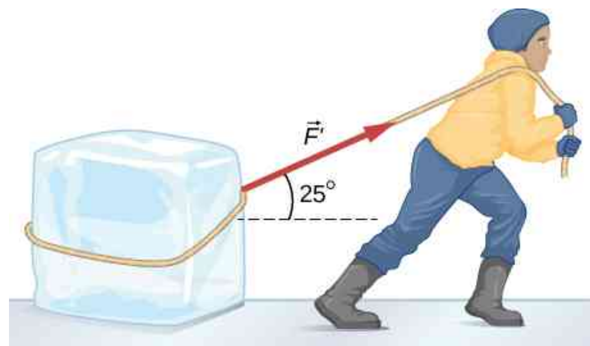
61. Rozważ przypadek alpinistki o wadze 52,0 kg, która wspina się po ścianie, jak przedstawiono na rysunku.
a. Znajdź siłę naciągu liny oraz siłę, jaką alpinistka musi za pomocą stóp wywierać na pionową ścianę, aby pozostać nieruchoma. Załóż, że siła jest wywierana równolegle do jej nóg oraz że siła wywierana przez jej ramiona jest pomijalnie mała.
b. Jaki jest minimalny współczynnik tarcia pomiędzy jej butami a ścianą?



62. Zawodnik startujący w zawodach zimowych pcha bryłę lodu o masie 45,0 kg przez zamarznięte jezioro, jak to zostało przedstawione na rysunku.
a. Oblicz minimalną siłę F, jaką musi on wywierać na bryłę, aby ją ruszyć.
b. Jakie będzie przyspieszenie bryły, jeśli po ruszeniu jej zawodnik będzie nadal pchał ją z tą samą siłą?



63. Zawodnik z poprzedniego zadania ciągnie bryłę lodu za pomocą liny przerzuconej przez ramię jak na rysunku.
a. Oblicz minimalną siłę F jaką musi on ciągnąć bryłę, aby ją ruszyć.
b. Jakie będzie przyspieszenie bryły, jeśli po ruszeniu zawodnik będzie nadal ciągnął ją z tą samą siłą?



64. Na poczcie paczka w postaci pudła o masie 20 kg zjeżdża po pochylni nachylonej pod kątem 30° do poziomu. Współczynnik tarcia kinetycznego między pudłem i pochylnią wynosi 0,0300.

a. Oblicz przyspieszenie pudła.
b. Oblicz prędkość pudła na końcu pochylni, jeśli ma ona długość 2 m, a prędkość początkowa pudła wynosi 0.

6.3 Siła dośrodkowa

65. a. Dziecko o masie 22 kg siedzi na karuzeli, która obraca się z prędkością 40 obr./min. Ile wynosi siła dośrodkowa wywierana na dziecko, jeśli siedzi ono w odległości 1,25 m od osi obrotu?
b. Ile wynosi siła dośrodkowa wywierana na dziecko, jeśli karuzela obraca się z prędkością 3 obr./min, a dziecko siedzi w odległości 8 m od osi obrotu?
c. Porównaj każdą z sił z ciężarem dziecka.

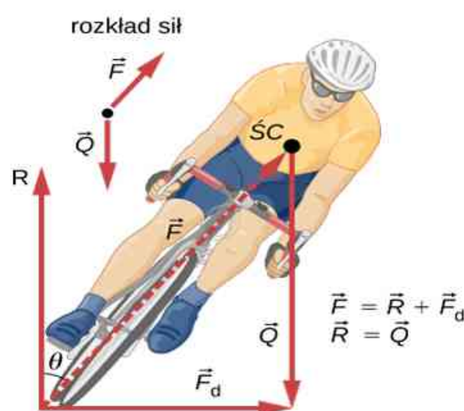
66. Oblicz siłę dośrodkową na końcu łopatki (o długości 100 m) w turbinie wiatrowej. Prędkość obrotowa łopatki wynosi 0,5 obr./s, zaś masa jest równa 4 kg.

67. Jaki jest idealny kąt nachylenia zakrętu na drodze szybkiego ruchu, którego promień krzywizny wynosi 1,2 km, a ograniczenie prędkości jest równe 105 km/h. Zakładamy, że wszystkie samochody jadą z taką właśnie prędkością.

68. Z jaką prędkością powinno się pokonywać zakręt o promieniu krzywizny 100 m nachylony pod kątem $20{,}0^\circ$?

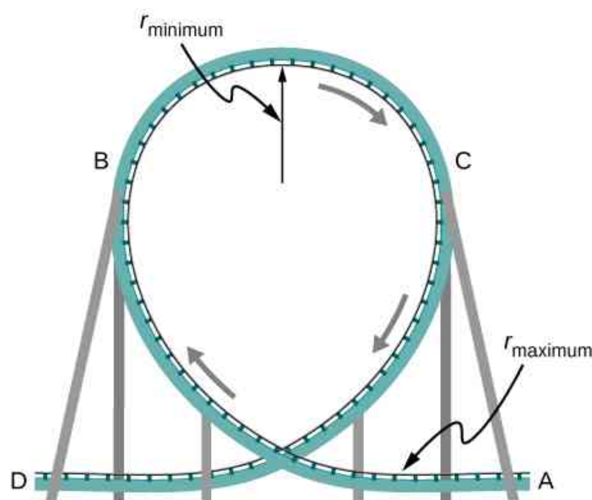
69. a. Jaki jest promień krzywizny zakrętu na torze bobslejowym nachylonego pod kątem $75{,}0^\circ$ i pokonywanego z prędkością 30,0 m/s, zakładając, że jest on idealnie wyprofilowany?
b. Oblicz przyspieszenie dośrodkowe.
c. Czy Twoim zdaniem jest ono duże?

70. Jazda na rowerze polega m.in. na pochyleniu się pod właściwym kątem przy pokonywaniu zakrętu, jak widać poniżej. By być stabilnym, siła wywierana przez ziemię musi leżeć na linii przechodzącej przez środek ciężkości. Siłę nacisku na koło rowerowe można rozłożyć na dwie prostopadłe składowe: tarcie równoległe do drogi (zapewnia siłę dośrodkową) i pionową siłę normalną (która musi równać się ciężarowi układu).
a. Wykaż, że θ (zdefiniowane jak na rysunku) jest związane z prędkością v i promieniem krzywizny r zakrętu w ten sam sposób, jak to było wykazane dla idealnie wyprofilowanego zakrętu: $\theta = \operatorname{arctg}(v^2/rg)$.
b. Oblicz θ podczas pokonywania zakrętu o promieniu krzywizny 30,0 m z prędkością 12,0 m/s.



71. Jeśli auto pokonuje zakręt z prędkością mniejszą niż wskazana dla danej geometrii zakrętu, konieczne jest istnienie tarcia, aby uchronić auto przed ześlizgnięciem się do wewnętrznej części zakrętu (problem ten występuje np. na oblodzonych, krętych, górskich drogach).
a. Oblicz, jaką prędkość powinien mieć samochód, by bez problemu przejechać przez zakręt o promieniu krzywizny 100,0 m nachylony pod kątem 15° .
b. Jaki jest minimalny współczynnik tarcia konieczny, by utrzymać auto na drodze, jeśli pokonuje ono ten sam zakręt z prędkością 20,0 km/h?

72. Nowoczesne kolejki górskie mają pętle o kształcie jak na rysunku poniżej. Promień krzywizny pętli jest mniejszy na górze pętli niż na bokach, więc skierowane w dół przyspieszenie dośrodkowe na górze pętli będzie większe niż przyspieszenie ziemskie. Dzięki temu pasażerowie będą mocno wciskani w fotele w tym miejscu.
a. Jaka jest prędkość kolejki górskiej na szczycie pętli, jeśli promień krzywizny wynosi 15,0 m, a skierowane w dół przyspieszenie dośrodkowe jest równe $1{,}5g$?
b. Z jak wysoka ponad szczytem pętli musi startować kolejka, jeśli pomijamy wpływ tarcia?
c. Jeśli w rzeczywistości kolejka startuje z miejsca położonego o 5,00 m wyżej, niż wynika to z odpowiedzi (b), to ile energii zostało utracone na pracę przeciwko sile tarcia? Masa kolejki wynosi $1{,}50 \cdot 10^3$ kg .



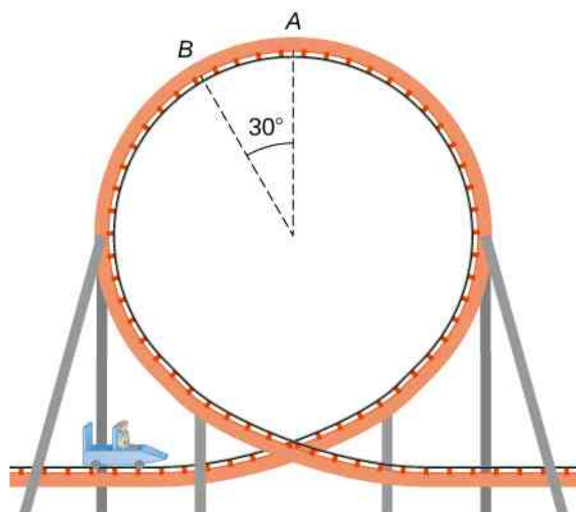
73. Dziecko o masie 40,0 kg siedzi w wagoniku kolejki

górskiej. Wagonik wjeżdża w górę pętli o promieniu 7,00 m. W punkcie A prędkość wagonika wynosi 10,0 m/s, zaś w punkcie B jest ona równa 10,5 m/s. Załóżmy, że dziecko nie trzyma się wagonika, ani nie zapięło pasów bezpieczeństwa.

a. Jaką siłę wywiera fotel w wagoniku na dziecko w punkcie A?

b. Jaką siłę wywiera fotel w wagoniku na dziecko w punkcie B?

c. Jaka minimalna prędkość jest potrzebna, aby utrzymać dziecko w wagoniku podczas przejeżdżania przez punkt A?



74. W modelu Bohra dla atomu wodoru w stanie podstawowym elektron porusza się po orbicie kołowej wokół jądra. Promień orbity wynosi $5{,}28 \cdot 10^{-11}$ m, a prędkość elektronu jest równa $2{,}18 \cdot 10^{6}$ m/s. Masa elektronu wynosi $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg. Jaka siła działa na elektron?

75. Tory kolejowe tworzą zakręt o promieniu krzywizny 500,0 m i są nachylone pod kątem $5{,}0°$. Dla pociągów jadących z jaką prędkością zostały te tory zaprojektowane?

76. Akcelerator cząstek w CERN-ie tworzy okrąg o obwodzie 7,0 km.

a. Ile wynosi przyspieszenie protonów ($m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg), które poruszają się w akceleratorze z prędkością stanowiącą 5% wartości prędkości światła? (Prędkość światła wynosi $v = 3{,}00 \cdot 10^{8}$ m/s.)

b. Jaka siła jest wywierana na protony?

77. Auto przejeżdża przez płaski zakręt o promieniu 65 m. Jeśli współczynnik tarcia statycznego między drogą i kołami samochodu wynosi 0,70, to z jaką maksymalną prędkością może to auto pokonać zakręt, nie wpadając w poślizg?

78. Pochylony zakręt na autostradzie jest wyprofilowany tak, aby móc go pokonać z prędkością 90,0 km/h. Promień krzywizny wynosi 310 m. Jaki jest kąt nachylenia zakrętu?

6.4 Siła oporu i prędkość graniczna

79. Prędkość graniczna człowieka spadającego w powietrzu zależy od jego masy i pola przekroju poprzecznego podczas spadania. Oblicz prędkość graniczną spadochroniarza o masie 80 kg pikującego głową w dół, jeśli jego pole przekroju poprzecznego wynosi $0{,}140\ \text{m}^2$. Wynik wyraź zarówno w m/s jak i km/h.

80. Dwóch skoczków spadochronowych – jeden o masie 60 kg i drugi o masie 90 kg wyskakują z samolotu na wysokości $6{,}00 \cdot 10^{3}$ m. Obaj pikują głową w dół. Sam przyjmij założenia dotyczące pola ich przekrojów poprzecznych, a następnie oblicz prędkość graniczną każdego z nich. Ile czasu będzie spadał każdy z nich do momentu kontaktu z ziemią (przyjmując, że czas potrzebny na osiągnięcie prędkości granicznej jest stosunkowo krótki). Wartości liczbowe w zadaniu wyrażaj z dokładnością do trzech miejsc znaczących.

81. Wiewiórka o masie 560 g i polu przekroju poprzecznego $930\ \text{cm}^2$ spada z drzewa o wysokości 5,0 m na ziemię. Oblicz jej prędkość graniczną (przyjmij współczynnik oporu dla skoczka spadochronowego spadającego poziomo). Jeśli z takiej samej wysokości spadłby człowiek o masie 56 kg, to jaka byłaby jego prędkość przed zderzeniem z ziemią (zakładamy brak wpływu oporu powietrza na tak krótkim dystansie)?

82. Aby utrzymać stałą prędkość, siła ciągu silnika musi równoważyć się oporu i siłę tarcia kół o podłoże (tarcie toczne). (a) Ile wynosi siła oporu działająca na Toyotę Camry odpowiednio przy prędkości 70 km/h i 100 km/h? Przyjmujemy, że pole przekroju poprzecznego jest równe $0{,}70\ \text{m}^2$) (b) Ile wynosi siła oporu działająca na Hummera H2 poruszającego się z tymi samymi prędkościami, tzn. 70 km/h lub 100 km/h? Pole przekroju poprzecznego wynosi $2{,}44\ \text{m}^2$. Wartości liczbowe w zadaniu wyrażaj z dokładnością do trzech miejsc znaczących.

83. Ile razy wzrośnie siła oporu działająca na samochód, jeśli zwiększy on prędkość od $65\ \text{km/h}$ do $110\ \text{km/h}$?

84. Oblicz prędkość, jaką mogą osiągnąć sferyczne krople deszczu spadające z wysokości 5,00 km w dwóch przypadkach:

a. z pominięciem wpływu oporu powietrza,

b. z uwzględnieniem oporu powietrza. Przyjmij średnicę kropli równą $4\ \text{mm}$ i gęstość równą $1 \cdot 10^{3}\ \text{kg/m}^3$.

85. Wychodząc z prawa Stokesa udowodnij, że jednostką lepkości jest $\text{kg/(m} \cdot \text{s)}$.

86. Oblicz prędkość graniczną, jaką osiągnie sferyczna bakteria o średnicy $2{,}00\ \mu\text{m}$ opadająca w wodzie. Przyjmij gęstość bakterii równą $1{,}10 \cdot 10^{3}\ \text{kg/m}^3$.

87. Prawo Stokesa opisuje proces sedymentacji cząstek w cieczy i można je wykorzystać do obliczania lepkości ośrodka. Cząsteczki w cieczy szybko osiągają prędkość graniczną. Można zatem obliczyć, ile czasu potrzeba, aby cząsteczki pokonały konkretną drogę, a następnie z prawa Stokesa obliczyć lepkość cieczy. Wyobraź sobie stalową kulkę z łożyska kulkowego (o gęstości $7{,}8 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$ i średnicy 3,0 mm) opadającą w oleju silnikowym. W ciągu 12 s pokonała ona dystans 0,60 m. Oblicz lepkość oleju.

88. Załóżmy, że siła oporu tarcia działająca na spadochroniarza może być opisana za pomocą wzoru $T_{\mathrm{op}} = -bv^2$. Jeśli prędkość graniczna skoczka o masie 50,0 kg wynosi 60,0 m/s, to jaka jest wartość b ?

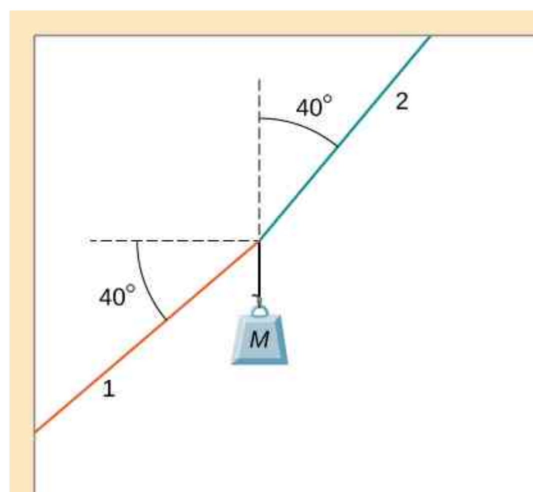
89. Mały diament o masie 10,0 g spada z ucha pływaczki i wpada do wody osiągając prędkość graniczną 2,0 m/s.
a. Zakładając, że siła oporu tarcia $T_{\mathrm{op}} = -bv$, ile wynosi b ?
b. Jaką drogę zdąży przebyć diament, zanim osiągnie prędkość równą 90% swojej prędkości granicznej?

90. a. Jaka jest prędkość końcowa samochodu początkowo jadącego z prędkością 50,0 km/h, który zwalnia z opóźnieniem $0{,}400\ \mathrm{m/s^2}$ przez 50 s? Załóż, że współczynnik tarcia jest równy 1,0.
b. Co jest nieracjonalnego w tym wyniku?
c. Która z przesłanek jest nieracjonalna lub które przesłanki są sprzeczne?

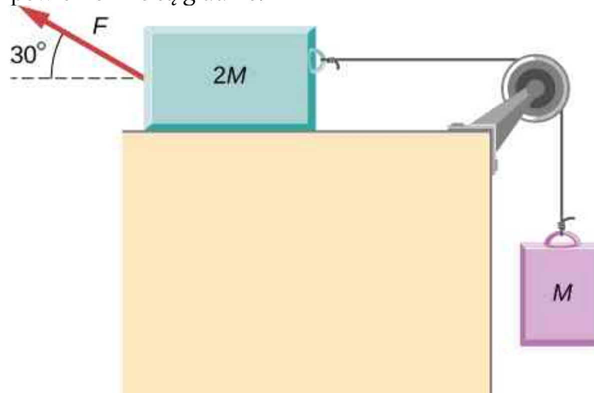
91. Kobieta o masie 75 kg stoi na wadze łazienkowej w windzie, która przyspiesza od prędkości równej 0 m/s do 30,0 m/s w ciągu 2,00 s.
a. Oblicz, jakie jest wskazanie wagi i porównaj wynik z ciężarem kobiety.
b. Co jest nieracjonalnego w tym wyniku?
c. Która z przesłanek jest nieracjonalna lub które przesłanki są sprzeczne?

92. a. Oblicz minimalny współczynnik tarcia potrzebny, aby auto mogło bezpiecznie pokonać płaski zakręt o promieniu krzywizny 50,0 m z prędkością 30,0 m/s.
b. Co jest nieracjonalnego w tym wyniku?
c. Która z przesłanek jest nieracjonalna lub które przesłanki są sprzeczne?

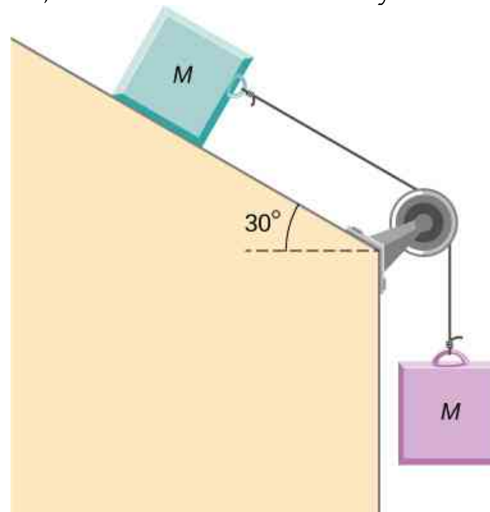
93. Jeśli masa ciała przedstawionego na rysunku poniżej jest równa 5,50 kg, to ile wynosi naciąg struny 1?



94. Jeśli w układzie przedstawionym na rysunku $F = 60{,}0\ \mathrm{N}$ oraz $M = 4{,}00\ \mathrm{kg}$, to ile wynosi przyspieszenie wiszącego ciała? Przyjmijmy, że wszystkie powierzchnie są gładkie.



95. Jeśli masa każdego z ciał przedstawionych na rysunku poniżej jest równa 6,0 kg, to ile wynosi naciąg struny łączącej te ciała? Wszystkie powierzchnie są gładkie, a bloczek nieważki i nieruchomy.



96. Mała sonda kosmiczna jest uwalniana ze stacji kosmicznej. Masa sondy jest równa 20,0 kg i zawiera 90,0 kg paliwa. Startuje ona z dalekiej przestrzeni kosmicznej, z początku układu współrzędnych ulokowanego na stacji kosmicznej i spala paliwo w tempie 3,00 kg/s. Siła

ciągu silnika jest stała i wynosi 120,0 N.
a. Znajdź wyrażenie na masę sondy w funkcji czasu pomiędzy 0 a 30 sekundą, zakładając, że silnik rozpoczyna spalanie paliwa w chwili t=0.
b. Jaka jest prędkość sondy po 15,0 sekundach?
c. Jakie jest położenie sondy po 15,0 sekundach, jeśli startowała ona z początku przyjętego układu współrzędnych?
d. Znajdź wyrażenie na położenie sondy w funkcji czasu dla t>30,0s.

97. Wypełniony do połowy kosz na śmieci o masie 3,0 kg jest pchany pod górkę o nachyleniu 40,0° ze stałą prędkością pod wpływem siły równej 26 N skierowanej w górę, równolegle do zbocza. Na górce występuje tarcie. Jaka musiałaby być wartość siły skierowanej w górę, równolegle do zbocza, aby podczas zjeżdżania w dół kosz poruszał się ze stałą prędkością?

98. Dziecko o masie 6,0 kg zjeżdża ze stałą prędkością ze zjeżdżalni o kącie nachylenia 35° przy działaniu siły 34 N skierowanej w górę, równolegle do powierzchni ślizgawki. Ile wynosi współczynnik tarcia kinetycznego pomiędzy dzieckiem a zjeżdżalnią?

ZADANIA DODATKOWE

99. Dwie barki są połączone za pomocą nieważkiej liny. Masa barki z przodu wynosi $2{,}00 \cdot 10^3$ kg, zaś masa barki z tyłu jest równa $3{,}00 \cdot 10^3$ kg. Holownik ciągnie barkę z przodu, używając poziomej siły równej $20{,}0 \cdot 10^3$ N. Siły tarcia działające na barki wynoszą $8{,}00 \cdot 10^3$ N i $10{,}0 \cdot 10^3$ N, odpowiednio dla barki z przodu i z tyłu. Oblicz wypadkowe przyspieszenie barek oraz siłę naciągu łączącej je liny.



100. Jeśli zamienilibyśmy miejscami barki z poprzedniego zadania, tzn. barka o masie $3{,}00 \cdot 10^3$ kg byłaby ciągnięta za pomocą holownika z siłą $20{,}0 \cdot 10^3$ N, to jakie byłoby przyspieszenie barek oraz siła naciągu łączącej je liny?

101. Obiekt o masie m porusza się wzdłuż osi x. Zależność jego położenia od czasu opisuje wyrażenie $x(t) = pt^3 + qt^2$ gdzie p i q są stałe. Znajdź siłę wypadkową działającą na ciało w dowolnej chwili czasu t.

102. Helikopter o masie $2{,}35 \cdot 10^4$ kg znajduje się w położeniu opisanym wektorem $\vec{r}(t) = \hat{i} \cdot 0{,}020t^3 + \hat{j} \cdot 2{,}2t - \hat{k} \cdot 0{,}060t^2$. Znajdź wypadkową siłę działającą na helikopter po $t = 3{,}0$ s.

103. Na początkowo stojący samochód elektryczny o masie m w chwili $t = 0$ zaczyna działać siła zmienna w czasie $\vec{F}(t)$. Składowe tej siły wynoszą $F_x(t) = p + nt$ i $F_y(t) = qt$, gdzie p, q i n są stałe. Znajdź położenie $\vec{r}(t)$ oraz prędkość $\vec{v}(t)$ jako funkcje zależne od czasu. Przyjmij początkowe położenie samochodu w początku układu współrzędnych.

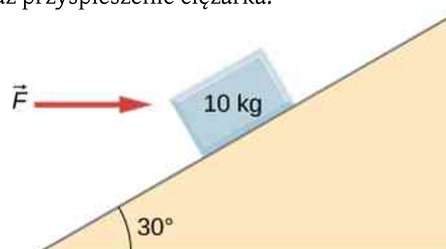
104. Cząstka o masie m spoczywa w początku przyjętego układu współrzędnych. Cząstka jest w równowadze. W chwili $t = 0$ do cząstki zostaje przyłożona siła $\vec{F}(t)$ zmienna w czasie, której składowe wynoszą $F_x(t) = pt$ i $F_y(t) = n + qt$, gdzie p, q i n są stałe. Znajdź położenie $\vec{r}(t)$ i prędkość $\vec{v}(t)$ jako funkcje zależne od czasu.

105. Ciało o masie 2,0 kg ma prędkość równą $\hat{i} \cdot 4{,}0\,\mathrm{m/s}$ w czasie $t = 0$. Na ciało zaczyna działać stała siła równa $\hat{i} \cdot 2{,}0\,\mathrm{N} + \hat{j} \cdot 4{,}0\,\mathrm{N}$ i działa nieprzerwanie przez 3,0 sekundy. Ile wynosi prędkość ciała po tym czasie?

106. Ciało o masie 1,5 kg ma przyspieszenie równe $\hat{i} \cdot 4{,}0\,\mathrm{m/s^2} + \hat{j} \cdot 3{,}0\,\mathrm{m/s^2}$. Działają na nie dwie siły. Jeśli jedna z tych sił jest równa $\hat{i} \cdot 2{,}0\,\mathrm{N} + \hat{j} \cdot 1{,}4\,\mathrm{N}$, to ile wynosi druga siła?

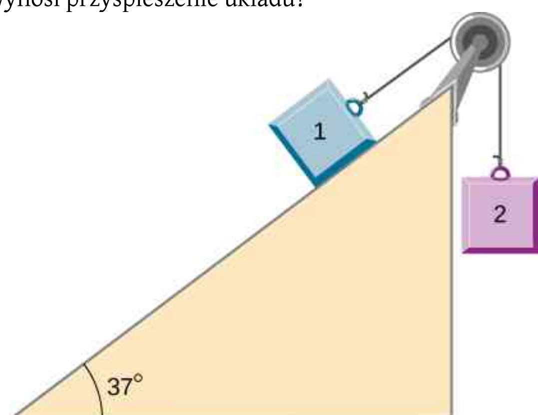
107. Pudło zostaje rzucone na taśmę transportową poruszającą się z prędkością 3,4 m/s. Jeśli współczynnik tarcia pomiędzy pudłem i taśmą wynosi 0,27, to jak długo potrwa, zanim pudło przesunie się bez poślizgu?

108. Na rysunku przedstawiono ciężarek o masie 10 kg, na który działa poziomo skierowana siła $\vec{F}$ o wartości 200,0 N. Współczynnik tarcia kinetycznego między powierzchniami będącymi w kontakcie wynosi 0,50. Znajdź przyspieszenie ciężarka.



109. Dwa ciężarki (jeden o masie $m_1 = 4{,}0$ kg, i drugi o masie $m_2 = 8{,}0$ kg są połączone nicią przerzuconą przez nieważki bloczek umieszczony na szczycie równi pochyłej. Współczynnik tarcia pomiędzy ciężarkiem o masie m_1 i równią pochyłą wynosi $\mu_k = 0{,}40$. Ile

wynosi przyspieszenie układu?

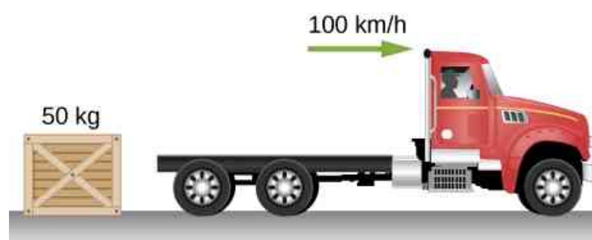


110. Student usiłuje przesunąć małą lodówkę o masie 30,0 kg do swojego pokoju w akademiku. W chwili nieuwagi lodówka ześlizguje się ze stałą prędkością w dół po powierzchni nachylonej pod kątem 35° do poziomu, podczas gdy student działa siłą równą 25 N skierowaną w górę równolegle do nachylenia powierzchni. Ile wynosi współczynnik tarcia kinetycznego pomiędzy lodówką i powierzchnią pochyłą?

111. Skrzynia o masie $100\,\text{kg}$ leży na chropowatej powierzchni równi pochyłej nachylonej pod kątem 37° do poziomu. Do skrzyni przymocowana jest nieważka lina, której drugi koniec sięga do szczytu równi. W pewnym momencie skrzynia zaczyna się ześlizgiwać w dół równi. Współczynnik tarcia kinetycznego stanowi 80% współczynnika tarcia statycznego.
a. Ile wynosi współczynnik tarcia statycznego?
b. Z jaką maksymalną siłą można ciągnąć linę, aby nie poruszyć skrzyni?
c. Jeśli przyłożymy choć odrobinę większą siłę, to skrzynia zacznie wjeżdżać w górę równi. Z jakim przyspieszeniem będzie się wówczas poruszać? Jaka musiałaby być siła naciągu liny, aby skrzynia poruszała się ze stałą prędkością?
d. Jeśli skrzynia zostanie bardzo delikatnie pchnięta i zacznie się zsuwać w dół równi, to jakie będzie jej przyspieszenie w tym kierunku?
e. Jaką siłą trzeba ciągnąć skrzynię w górę równi, aby nie zjechała w dół, gdy została delikatnie pchnięta?

112. Samochód jedzie z dużą prędkością na autostradzie, gdy nagle kierowca gwałtownie hamuje. Koła zostają zablokowane (przestają się obracać), na skutek czego na jezdni pozostaje ślad hamowania o długości 32,0 m. Jeśli współczynnik tarcia kinetycznego pomiędzy oponami i drogą jest równy 0,550, a przyspieszenie było stałe w trakcie hamowania, to jak szybko poruszał się samochód, zanim koła zostały zablokowane na skutek hamowania?

113. Skrzynia o masie 50 kg zsuwa się poziomo z naczepy samochodu ciężarowego jadącego z prędkością 100 km/h. Znajdź wartość współczynnika tarcia kinetycznego pomiędzy drogą i skrzynią, jeśli skrzynia po upadku na drogę sunie się jeszcze przez 50 m, po czym się zatrzymuje. Prędkość początkowa skrzyni jest taka sama jak prędkość ciężarówki, czyli 100 km/h.



114. Sanki o masie 15 kg są ciągnięte poziomo po pokrytej śniegiem powierzchni za pomocą siły przyłożonej do liny nachylonej pod kątem 30° do poziomu. Współczynnik tarcia kinetycznego sanek i śniegu wynosi 0,20.
a. Jeśli przyłożona siła ma wartość 33 N, to jakie jest przyspieszenie poziome sanek?
b. Ile musiałaby wynosić ta siła, aby sanki poruszały się ze stałą prędkością?

115. Kulka o masie 30 g zawieszona na końcu struny wykonuje obroty w płaszczyźnie pionowej. Promień zataczanego okręgu wynosi 25,0 cm. Prędkość kulki jest równa 200,0 cm/s. Znajdź siłę naciągu struny:
a. w najwyższym położeniu,
b. w najniższym położeniu,
c. w odległości 12,5 cm od osi obrotu ($r = 12{,}5$ cm).

116. Kulka o masie 0,50 kg zaczyna poruszać się po okręgu w płaszczyźnie xy. Jej położenie opisuje wektor $\vec{r}\,(t) = \hat{i} \cdot 4\cos(3t) + \hat{j} \cdot 4\sin(3t)$ gdzie r jest wyrażone w metrach, a t w sekundach.
a. Znajdź wyrażenia na prędkość i przyspieszenie kulki w funkcji czasu.
b. Wykaż, że wektor przyspieszenia w każdym momencie jest skierowany do środka okręgu (i tym samym reprezentuje przyspieszenie dośrodkowe).
c. Znajdź wyrażenie na siłę dośrodkową w funkcji czasu.

117. Kaskader jeździ na rowerze po wewnętrznej stronie cylindra o promieniu 12 m. Współczynnik tarcia statycznego między oponami i ścianą wynosi 0,68. Znajdź najmniejszą wartość prędkości kaskadera konieczną, aby bezpiecznie wykonać pokaz kaskaderski.

118. Kiedy ciało o masie 0,25 kg jest przyłączane do pionowej, nieważkiej sprężyny, ta rozciąga się o 5,0 cm względem statycznej długości (4,0 cm). Ciało i sprężyna są umieszczone na poziomej, gładkiej powierzchni i wprawione w ruch obrotowy względem osi obrotu znajdującej się na drugim końcu sprężyny. Prędkość obrotowa wynosi 2,0 obr./s. Jakie będzie teraz rozciągnięcie sprężyny?

119. Wagony kolejowe muszą pokonać zakręt o promieniu krzywizny równym 500,0 m nachylony pod kątem 5°. Dla pociągów jadących z jaką prędkością został ten zakręt zaprojektowany?

120. Ciężarek wisi pionowo na lince przyczepionej do sufitu wagonu kolejowego. Wagon zaczyna poruszać się po torze krzywoliniowym o promieniu 300,0 m z pręd-

kością 90,0 km/h. O jaki kąt względem położenia równowagi odchyli się ciężarek z linką?

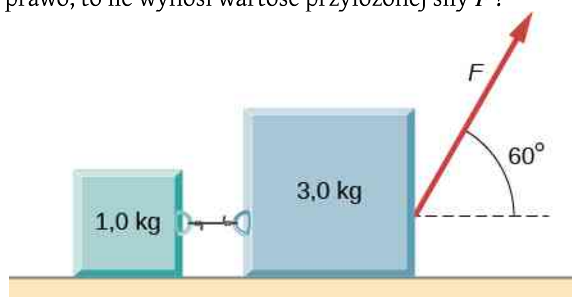
121. Samolot leci z prędkością 120 m/s i w celu wykonania skrętu pochyla się pod kątem $30°$. Jego masa wynosi $2{,}50 \cdot 10^3$ kg.

a. Ile wynosi siła nośna?

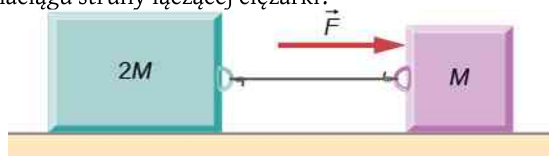
b. Jaki jest promień skrętu samolotu?

122. Położenie cząstki jest dane za pomocą wyrażenia: $\vec{r}(t) = A(\hat{i}\cos\omega t + \hat{j}\sin\omega t)$, gdzie ω jest stałe. (a) Wykaż, że cząstka porusza się po okręgu o promieniu A. (b) Oblicz $\mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t$ i wykaż, że szybkość cząstki jest stała i równa $A\omega$. (c) Określ $\mathrm{d}^2\vec{r}/\mathrm{d}t^2$ i wykaż, że przyspieszenie a jest równe $A\omega^2$. (d) Oblicz siłę dośrodkową działającą na cząstkę. *Wskazówka*: W przykładach (b) i (c) pomocne będzie użycie zależności $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\cos\omega t = -\omega\sin\omega t$ i $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\sin\omega t = \omega\cos\omega t$.

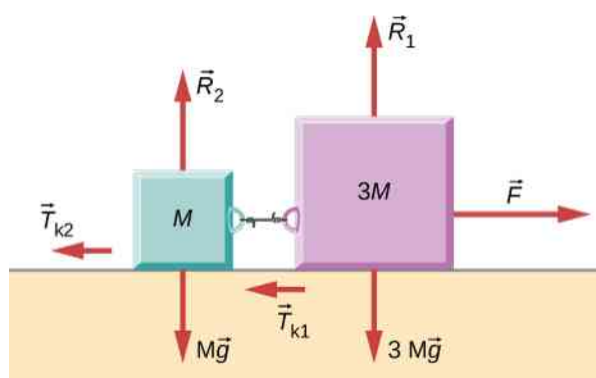
123. Dwa ciężarki połączone struną są ciągnięte po poziomej powierzchni za pomocą siły przyłożonej do jednego z ciężarków, jak przedstawiono na rysunku poniżej. Współczynnik tarcia kinetycznego pomiędzy ciężarkami a powierzchnią jest równy 0,25. Jeśli każdy z ciężarków ma przyspieszenie $2{,}0\ \mathrm{m/s^2}$ skierowane w prawo, to ile wynosi wartość przyłożonej siły F?



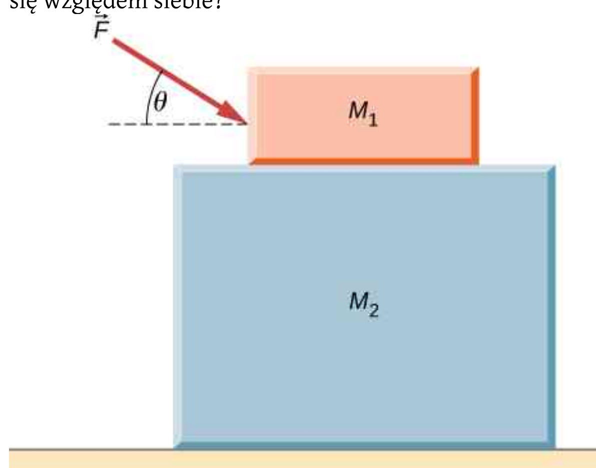
124. Rozważ sytuację przedstawioną na rysunku poniżej. Współczynnik tarcia kinetycznego pomiędzy powierzchnią i większym ciężarkiem jest równy 0,20, a współczynnik tarcia kinetycznego pomiędzy powierzchnią i mniejszym ciężarkiem wynosi 0,30. Jeśli siła $F = 10\ \mathrm{N}$, a masa $M = 1{,}0\ \mathrm{kg}$, to ile wynosi siła naciągu struny łączącej ciężarki?



125. Współczynnik tarcia kinetycznego pomiędzy powierzchnią i ciężarkami na rysunku wynosi μ_k. Jeśli masa $M = 1{,}0\ \mathrm{kg}$, znajdź przyspieszenie każdego z ciężarków.

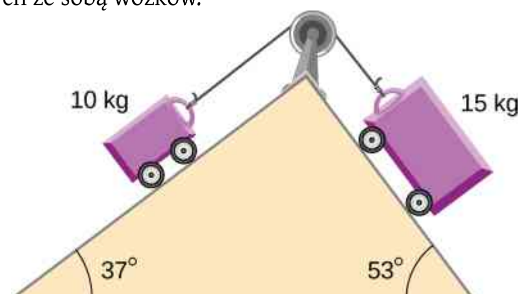


126. Dwa ciężarki położone jeden na drugim, jak przedstawiono na rysunku, spoczywają na gładkiej powierzchni. Pomiędzy ciężarkami działa tarcie (współczynnik tarcia równy μ). Do górnego ciężarka przyłożona jest zewnętrzna siła działająca pod kątem θ do poziomu. Ile maksymalnie może wynosić siła F, aby ciężarki mogły być pchane jednocześnie, a nie przesuwały się względem siebie?



127. Pudło spoczywa na poziomej naczepie samochodu dostawczego. Współczynnik tarcia pomiędzy pudłem a naczepą jest równy 0,24. Jak daleko zdąży odjechać samochód w ciągu 3,0 s od momentu startu, jeśli porusza się ze stałym, poziomym przyspieszeniem, a skrzynia podczas tego ruchu się nie przesunie?

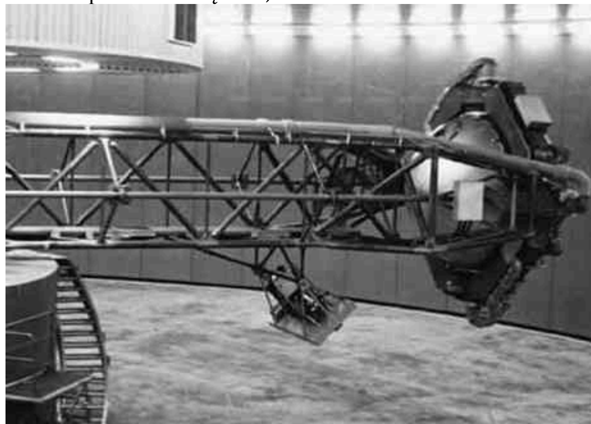
128. Na rysunku przedstawiono podwójną równię pochyłą, na szczycie której umieszczono bloczek. Współczynnik tarcia na równi po lewej wynosi 0,30, zaś na równi po prawej 0,16. Oblicz przyspieszenie połączonych ze sobą wózków.



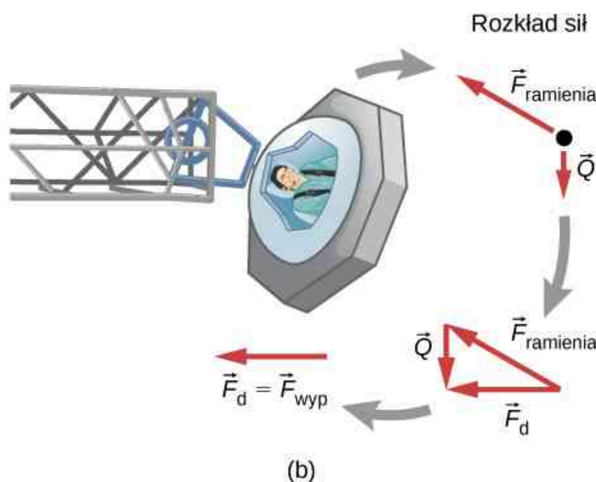
ZADANIA TRUDNIEJSZE

129. W jednym z kolejnych rozdziałów dowiesz się, że ciężar ciała zmienia się w zależności od wysokości zgodnie z równaniem: $Q = mgr_0^2 / r^2$, gdzie r_0 jest promieniem Ziemi, a r jest odległością od środka Ziemi. Jeśli ciało zostaje wystrzelone z powierzchni Ziemi pionowo z prędkością v_0, to jak wygląda wyrażenie na prędkość ciała w zależności od jego położenia r ? (*Wskazówka:* skorzystaj z przekształconej zależności: $a\mathrm{d}r = v\mathrm{d}v$.)

130. Duża wirówka, jak ta przedstawiona na zdjęciu, używana jest do poddawania kandydatów na astronautów działaniu przyspieszenia podobnego do tego, jakie powstaje podczas startu rakiety i jej powrotu do atmosfery. (a) Przy jakiej prędkości kątowej wartość przyspieszenia dośrodkowego osiąga $10g$, jeśli astronauta znajduje się w odległości 15,0 m od osi obrotu? (b) Kapsuła astronauty wisi na osi przegubu na końcu ramienia, dzięki czemu kapsuła może się odchylać na zewnątrz podczas obrotu (jak na zdjęciu). O jaki kąt θ względem poziomu odchyli się kapsuła, jeśli przyspieszenie dośrodkowe wynosi $10g$? (*Wskazówka:* Ramię przykłada siłę dośrodkową i utrzymuje ciężar kapsuły. Narysuj rozkład sił działających na kapsułę, aby prawidłowo zlokalizować położenie kąta θ.)



(a)



(b)

131. Samochód o masie 1000,0 kg jedzie po poziomej drodze z prędkością 100,0 km/h, po czym gwałtownie hamuje. Oblicz długość drogi hamowania, jeśli współczynnik tarcia kinetycznego opon o asfalt wynosi 0,500. Pomiń wpływ oporu powietrza. (*Wskazówka:* skoro interesuje nas przebyta droga, a nie czas hamowania, to x będzie zmienną niezależną, a nie t. W celu wykonania obliczeń przekształć następujące zależności: $\mathrm{d}v / \mathrm{d}t = (\mathrm{d}v / \mathrm{d}x) \cdot (\mathrm{d}x / \mathrm{d}t) = v\mathrm{d}v / \mathrm{d}x$.)

132. Samolot lecący z prędkością $200\,\mathrm{m/s}$ wykonuje zakręt w czasie 4,0 min. Jaki powinien być kąt przechylenia samolotu? O ile procent wzrośnie subiektywny ciężar pasażerów?

133. Spadochroniarz znajduje się na wysokości 1520 m. Po 10 sekundach swobodnego spadku otwiera spadochron i stwierdza, że działająca na niego siła oporu powietrza F_{op} jest wprost proporcjonalna do prędkości $F_{\text{op}} = -bv$, gdzie b jest stałe i v jest prędkością spadku. Jeśli $b = 0{,}750$, a masa skoczka wynosi 82,0 kg, znajdź:

a. prędkość skoczka w momencie otwarcia spadochronu,
b. drogę przebytą przez skoczka do momentu otwarcia spadochronu,
c. prędkość graniczną po otwarciu spadochronu,
d. czas spadania skoczka do momentu otwarcia spadochronu.

134. Mała kulka o masie 4,00 g zaczyna poruszać się pod wpływem siły grawitacji w czasie $t = 0$ w butelce wypełnionej szamponem. Prędkość graniczna wynosi 2 cm/s. Znajdź

a. wartość współczynnika b w równaniu $v = \frac{mg}{b}(1 - e^{-bt/m})$,
b. wartość siły oporu w momencie, gdy kulka osiąga prędkość graniczną.

135. Kierujący łódką motorową wraz z motorówką są w spoczynku na jeziorze. Ich łączna masa wynosi 200,0 kg. Siła ciągu silnika motorówki wynosi 40,0 N w kierunku ruchu pojazdu, a siła oporu wody jest równa $2v$, gdzie v jest prędkością motorówki. Oblicz:

a. prędkość motorówki po czasie t ;
b. prędkość końcową (prędkość po bardzo długim czasie).

7 | PRACA I ENERGIA KINETYCZNA



Rysunek 7.1 Sprinterka wyzwala swoją maksymalną moc, aby wykonać jak największą pracę w jak najkrótszym czasie, kiedy jej stopa dotyka podłoża. Dzięki temu nie zwalnia w trakcie wyścigu. Odpychanie się od twardego podłoża powoduje powstanie siły reakcji, która umożliwia jej wygraną. (Źródło: modyfikacja pracy Marie-Lan Nguyen)

Treść rozdziału

Wstęp

W tym rozdziale omawiamy podstawowe pojęcia fizyczne oraz prawa, które są związane z dowolnym ruchem we Wszechświecie. Nie będziemy mówili tylko o pojęciu siły czy o ruchu zmiennym jak w rozdziałach poprzednich 4 i 5, lecz o innych pojęciach fizycznych. Tymi pojęciami będą: praca, energia kinetyczna oraz moc. Wyjaśnimy, jak te wielkości fizyczne zależą wzajemnie od siebie i czym jest zasada zachowania energii.

Zastosowanie zasad dynamiki Newtona zwykle wymaga użycia rachunku różniczkowego, który opisuje zależność pomiędzy siłą działającą na ciało a jego przyspieszeniem. Często rozwiązanie analityczne takiego układu równań jest trudne bądź wręcz niemożliwe do znalezienia; wymaga długich obliczeń matematycznych lub symulacji komputerowych. W takim przypadku najbardziej odpowiednim podejściem jest zastosowanie bardziej ogólnych praw, takich jak zasada zachowania energii, które mogą dostarczyć odpowiedzi na wiele pytań, jednocześnie upraszczając obliczenia. Na przykład zastosowanie zasady zachowania energii w przypadku wyznaczenia siły działającej na cząstkę poruszającą się po dowolnej trajektorii w dowolnym jej punkcie jest możliwe bez większych problemów.

7.1 | Praca

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- określać pracę wykonaną przez daną siłę;
- wyznaczać wartość wykonanej pracy.

W fizyce **praca** (ang. **work**) oznacza jedną z możliwych form energii. O pracy mówimy wtedy, gdy siła działająca na dane ciało powoduje jego przemieszczenie. Siła może zależeć od przemieszczenia, a przemieszczenie może następować na dowolnej drodze pomiędzy dwoma punktami. Na początku zdefiniujmy nieskończenie mały przyrost pracy (energii) $\mathrm{d}W$ związany z działaniem siły $\vec{F}$ na nieskończenie małej drodze (odpowiadającej nieskończenie małemu przemieszczeniu) $\mathrm{d}\vec{r}$. Wówczas możemy zapisać iloczyn skalarny tych dwóch wektorów w następujący sposób:

$$\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \left|\vec{F}\right| \left|\mathrm{d}\vec{r}\right| \cos\theta. \tag{7.1}$$

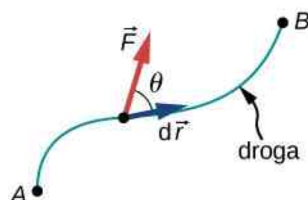
W celu wyznaczenia całkowitej wartości pracy działającej na całkowitej drodze, odpowiadającej całkowitemu przemieszczeniu, należy dodać do siebie wszystkie dyskretne wartości pracy odpowiadające nieskończenie małym przyrostom przemieszczenia.

Praca wykonana przez działającą siłę

Pracę całkowitą wyraża całka w postaci:

$$W_{\mathrm{AB}} = \int_{\mathrm{droga}AB} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}. \tag{7.2}$$

Wektory odpowiedzialne za wykonanie pracy przedstawiono na Rysunku 7.2.



Rysunek 7.2 Wektory związane z wykonaniem pracy pomiędzy punktami A i B. Nieskończenie mała wartość pracy może zostać wyznaczona jako iloczyn skalarny nieskończenie małego przemieszczenia oraz działającej siły.

Najprościej jest zapisać w tym przypadku iloczyn skalarny jako iloczyn długości wektorów oraz *cosinus* kąta pomiędzy nimi. Oczywiście możemy równie dobrze rozpisać ten iloczyn za pomocą zależności z rozdziału Wektory. W prostokątnym układzie współrzędnych wykonamy to przy zastosowaniu współrzędnych kartezjańskich x i y, zaś we współrzędnych biegunowych użyjemy r i φ. Z kolei w układzie trójwymiarowym pracę trzeba będzie wyrazić za pomocą składowych x, y, z. Podsumowując, równanie dla dowolnej wykonywanej przez siłę pracy można zapisać za pomocą dowolnych składowych, gdyż z punktu widzenia matematyki nie ma znaczenia, jaki układ wybierzesz. Wynik będzie zawsze taki sam.

Przypomnijmy, że wartość wektora siły pomnożona przez *cosinus* kąta pomiędzy tym wektorem a kierunkiem przemieszczenia stanowi składową wektora siły w tym kierunku. Składowa ta może być dodatnia, ujemna bądź wynosić zero zależnie od kąta pomiędzy wektorem siły a kierunkiem przemieszczenia. W rezultacie praca również może

przyjmować wartości dodatnie, ujemne bądź być równa zero zależnie od kierunku przyłożenia siły i jej zwrotu. Maksymalna praca jest wykonywana wtedy, kiedy wektor siły jest równoległy do wektora przemieszczenia ($\cos\theta = \pm 1$), a wynosi zero, kiedy jest on do przemieszczenia prostopadły ($\cos\theta = 0$).

Jednostka pracy może być zdefiniowana jako iloczyn jednostki siły (niutona) i przemieszczenia (metra), $\mathrm{N \cdot m}$. Jednostkę tę nazywamy **dżulem** (ang. **joule**), oznaczamy ją literą J.

Praca stałej siły oraz praca sił kontaktowych

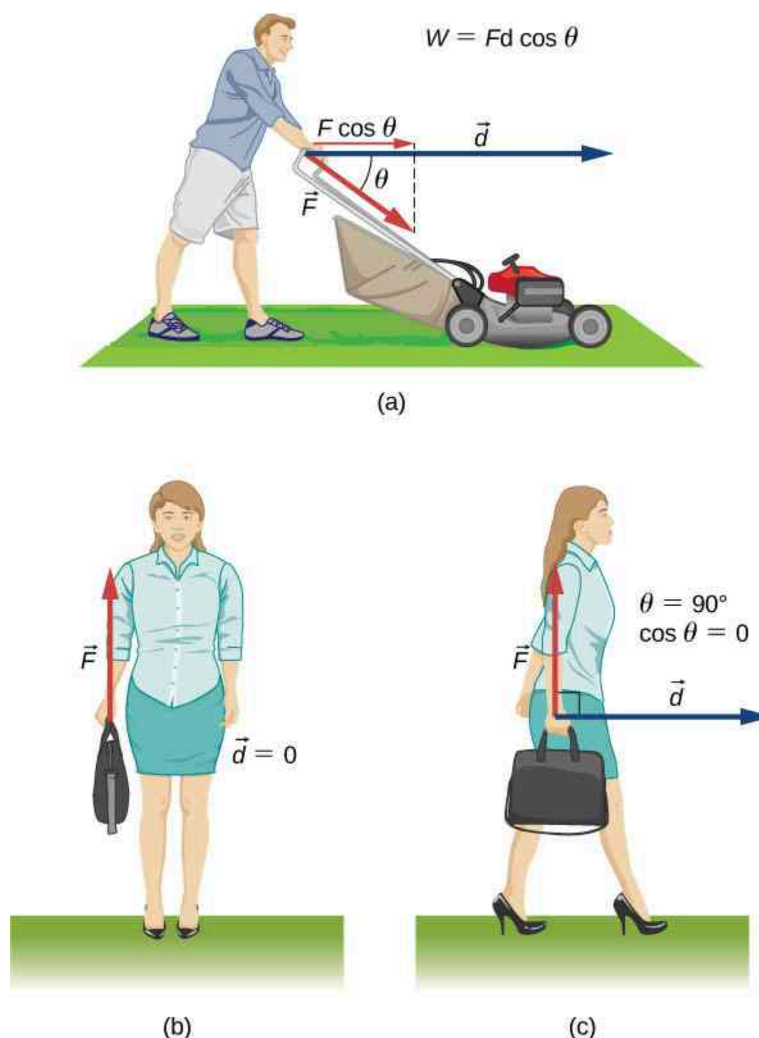
Najprostszym przypadkiem pracy jest praca wykonana przez siłę o stałej wartości, zwrocie i kierunku. W tym przypadku siłę jako stałą możemy wyciągnąć przed znak całki i wyliczyć całkę tylko z przemieszczenia, które jest zależne wyłącznie od punktu początkowego A i końcowego B, a nie od drogi, na której działała siła. Możemy zapisać takie równanie jako:

$$W_{AB} = \vec{F} \cdot \int_A^B \mathrm{d}\vec{r} = \vec{F} \cdot \left(\vec{r}_B - \vec{r}_A\right) = \left|\vec{F}\right| \left|\vec{r}_B - \vec{r}_A\right| \cos\theta.$$

Można to również zapisać we współrzędnych kartezjańskich (przyjmując siłę jako stałą):

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \int_{\mathrm{droga}AB} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\mathrm{droga}AB} \left(F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z\right) = F_x \int_A^B \mathrm{d}x + F_y \int_A^B \mathrm{d}y + F_z \int_A^B \mathrm{d}z \\ &= F_x\,(x_B - x_A) + F_y\,(y_B - y_A) + F_z\,(z_B - z_A) = \vec{F} \cdot \left(\vec{r}_B - \vec{r}_A\right). \end{aligned}$$

Rysunek 7.3 (a) pokazuje osobę przykładającą stałą siłę $\vec{F}$ do rączki kosiarki do trawy, która tworzy kąt θ z poziomem. Poziome przemieszczenie kosiarki jest równe $\vec{d}$. Praca wykonana przez kosiarkę jest równa $W = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd\cos\theta$ (wartość poziomej siły skalarnie pomnożona przez przemieszczenie).



Rysunek 7.3 Praca siły stałej. (a) Osoba popycha kosiarkę ze stałą siłą. Składowa siły równoległa do przemieszczenia wykonuje pracę zgodnie z równaniem. (b) Osoba trzyma walizkę, nie wykonuje pracy, ponieważ przemieszczenie jest równe zero. (c) Osoba trzyma walizkę w ręce i przemieszcza się, praca jest również równa zero, ponieważ $\cos\theta$ wynosi zero.

Rysunek 7.3 (b) ukazuje osobę trzymającą walizkę. Osoba ta musi przykładać siłę skierowaną w górę równą sile ciężkości działającej na walizkę. Pomimo działania siły praca w tym wypadku jest równa zeru, ponieważ nie ma żadnego przemieszczenia. Dlaczego więc czujemy się zmęczeni, trzymając jakiś obiekt w miejscu, jeżeli nie wykonujemy pracy? Odpowiedzią na to pytanie jest fakt, że w naszej ręce dochodzi do skurczu włókien mięśniowych, chociaż mięśnie nie wykonują zewnętrznej pracy. Ponadto mięśnie inne niż mięśnie ręki działają, aby utrzymać daną pozycję ręki, a część obciążenia przenosi się również na kości i ścięgna.

Osoba na Rysunku 7.3 (c) porusza się w kierunku poziomym ze stałą prędkością. Praca działającej siły również wynosi zero, ponieważ kąt pomiędzy wektorem przemieszczenia a działającą siłą wynosi 90° $(\vec{F}$ jest prostopadłe do $\vec{d}$), a więc $\cos 90^\circ = 0$.

Przykład 7.1

Obliczanie pracy potrzebnej do przesunięcia kosiarki

Ile pracy zostaje wykonane przy pchaniu kosiarki do trawy (Rysunek 7.3 (a)) jeżeli mężczyzna przykłada siłę 75,0 N pod kątem 35° do poziomu na odcinku 25,0 m ?

Strategia rozwiązania

Obliczamy pracę podstawiając wartości do wzoru na pracę $W = Fd\cos\theta$. Siła, kąt i przemieszczenie są dane, więc tylko W jest niewiadomą.

Rozwiązanie

Równanie, z którego obliczamy pracę, zapisujemy w postaci:

$$W = Fd\cos\theta.$$

Podstawiając dane wartości:

$$W = 75{,}0\,\mathrm{N} \cdot 25{,}0\,\mathrm{m} \cdot \cos 35{,}0^\circ = 1{,}54 \cdot 10^3\ \mathrm{J}.$$

Znaczenie

Pomimo tego, że wartość ta wydaje się duża, w rozdziale Energia potencjalna i zasada zachowania energii zobaczymy, że odpowiada to spaleniu ledwie 1/6 grama tłuszczu.

Kiedy kosisz trawę, poza siłą wywieraną przez ciebie, na kosiarkę działają jeszcze inne siły: siła reakcji podłoża i siła ciężkości. Weźmy pod uwagę te siły. Dla każdego ciała poruszającego się przemieszczenie $\mathrm{d}\vec{r}$ jest styczne do powierzchni. Siła reakcji podłoża (siła nacisku) $\vec{R}$ jest prostopadła do podłoża, stąd praca wykonywana przez tę siłę jest równa zeru.

$$\mathrm{d}W_\mathrm{R} = \vec{R} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0.$$

W takim przypadku siła reakcji podłoża nigdy nie wykonuje pracy. Zauważ, że jeżeli przemieszczenie $\mathrm{d}\vec{r}$ miałoby składową prostopadłą do podłoża, to obiekt albo by się oderwał od niego, albo przez nie przebił. Oczywiście w przypadku, kiedy ciało nie jest bryłą sztywną bądź pojedynczą cząstką, powierzchnia może spowodować jego odkształcenie, ale o tym dowiesz się w kolejnym rozdziale.

Jedną z sił działających na ciało przy kontakcie z podłożem jest tarcie, $\vec{T}$. Dla ciał poruszających się po płaszczyźnie wektor siły tarcia kinetycznego $\vec{T}_\mathrm{k}$ ma zwrot przeciwny do zwrotu wektora $\mathrm{d}\vec{r}$, więc praca wykonywana przez tę siłę jest ujemna. Jeżeli wartość siły $\vec{T}_\mathrm{k}$ jest stała, **praca siły** (ang. **work done by a force**) tarcia jest dana dzięki zależności:

$$W_\mathrm{k} = \int_A^B \vec{T}_\mathrm{k} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -T_\mathrm{k} \int_A^B \mathrm{d}r = -T_\mathrm{k}\,|l_{AB}|\,, \tag{7.3}$$

gdzie $|l_{AB}|$ jest drogą przebytą przez ciało (przy założeniu ruchu prostoliniowego). Zauważ, że jeżeli praca wykonywana przez siłę ma wartość ujemną, często mówimy, że jest wykonywana przeciw danej sile. Jednakże w przypadku siły tarcia statycznego praca wykonywana przez tę siłę może mieć wartość zarówno dodatnią, jak i ujemną. Kiedy chodzisz, na twoją stopę działają siły tarcia, na skutek czego stopa doznaje przyspieszenia. W przypadku kiedy jedziesz samochodem, siła tarcia kinetycznego czy oporów powietrza powoduje zmniejszenie jego przyspieszenia, a z kolei siła tarcia statycznego działająca na koła powoduje ich ruch obrotowy. Dzięki siłom tarcia możesz w taki sposób wyciągnąć dywan spod jakiegoś przedmiotu, że przedmiot będzie się poruszał do tyłu względem dywanu, za to do przodu względem podłogi - w tym przypadku wektor siły tarcia kinetycznego ma taki sam zwrot jak wektor przemieszczenia, więc praca w układzie współrzędnych związanych z podłogą będzie dodatnia. Ważne jest, aby każdy przypadek przeanalizować oddzielnie.

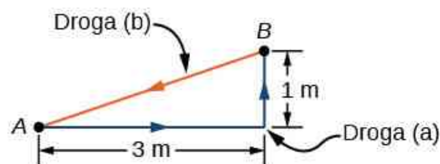
Przykład 7.2

Przesuwanie kanapy

Zdecydowałeś się na przeniesienie kanapy w inne miejsce w pokoju. Siła przyłożona do kanapy wynosi 1 kN, a współczynnik tarcia wynosi 0,6.

a. Najpierw przesuwasz kanapę 3 m równolegle do ściany, a następnie 1 m prostopadle do ściany (z A do B na Rysunku 7.4). Ile wyniosła w tym przypadku praca siły tarcia kinetycznego?

b. Nie spodobało ci się nowe miejsce kanapy i przesuwasz ją do jej początkowego położenia (z B do A na Rysunku 7.4). Ile w tym przypadku wynosiła wykonana praca?



Rysunek 7.4 Schemat zmian położenia kanapy.

Strategia rozwiązania

Wartość siły tarcia kinetycznego możemy wyznaczyć jako iloczyn siły normalnej do podłoża i współczynnika tarcia, $T_k = \mu_k R$. Zatem wykonana praca wynosi: $W_T = -T_k d$, gdzie d jest odcinkiem, o który przesunięto kanapę.

Rozwiązanie

a. Praca siły tarcia wynosi:

$$W = -0.6 \cdot 1\,\text{kN} \cdot (3\,\text{m} + 1\,\text{m}) = -2{,}4\,\text{kJ}.$$

b. Długość przeciwprostokątnej trójkąta utworzonego przez odcinki, o które przesuwano kanapę, jest równa $\sqrt{10}\,\text{m}$, więc całkowita wartość pracy przeciw sile tarcia kinetycznego wynosi:

$$W = 0{,}6 \cdot 1\,\text{kN} \cdot \left(3\,\text{m} + 1\,\text{m} + \sqrt{10}\,\text{m}\right) = 4{,}3\,\text{kJ}.$$

Znaczenie

Pomimo tego, że kanapa znalazła się z powrotem w tym samym miejscu, praca wykonana nie wyniosła zero. Dlaczego? Ponieważ siła tarcia jest tzw. siłą niezachowawczą; o takich siłach będziemy mówić w kolejnym rozdziale.


7.1 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Czy siła tarcia jest stała dla każdej wybranej drogi, na której działała?

Inną siłą wspomnianą w przykładzie z kosiarką była siła ciężkości mg, która ma stałą wartość izawsze jest skierowana pionowo w dół. Zatem praca siły ciężkości może zostać wyznaczona jako iloczyn skalarny jej wektora i wektora przemieszczenia. Czasami warto zapisać wektor siły za pomocą jej składowych wzdłuż poszczególnych osi x, y i z. W prostokątnym prawoskrętnym układzie współrzędnych zapisujemy ją jako $-mg\hat{j}$, więc praca siły ciężkości na drodze od A do B wynosi:

$$W_{\text{graw}AB} = -mg\hat{j} \cdot \left(\vec{r}_B - \vec{r}_A\right) = -mg\left(y_B - y_A\right). \tag{7.4}$$

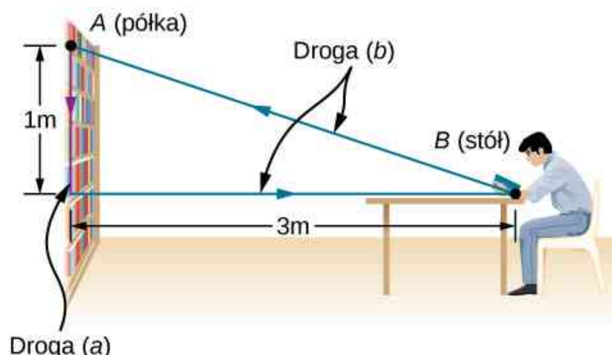
Praca wykonana przez stałą siłę grawitacji zależy tylko od ciężaru ciała oraz różnicy wysokości (przemieszczenia), na której ta siła działa. Wartość pracy siły grawitacji przy ruchu w górę jest ujemna ($y_B > y_A$), innymi słowy to ty wykonujesz prace podnosząc przedmiot. W przypadku ruchu w dół praca jest dodatnia ($y_B < y_A$).

Przykład 7.3

Zdejmowanie książki z półki

Rozważmy sytuację, w której (a) zdejmujesz książkę o ciężarze 20 N z półki znajdującej się na wysokości

1m powyżej blatu stołu, następnie przenosisz ją poziomo 3 m i odkładasz na stół (Rysunek 7.5). Jaką pracę wykonała siła grawitacji w tym ruchu? (b) Po skończonym czytaniu odkładasz książkę na półkę. Jaką pracę przeciw sile grawitacji wykonujesz?



Rysunek 7.5 Rzut pokazujący tor ruchu książki w zadaniu.

Strategia rozwiązania

Musimy wiedzieć, że wartość pracy zależy tylko od ciężaru książki i od różnicy wysokości $W_{AB} = -mg\,(y_B - y_A)$. Teraz przeanalizujmy zmianę wysokości w (a) i (b).

Rozwiązanie

a. Jako że książka leży na półce i ruch odbywa się w dół, to $y_B - y_A = -1\ \text{m}$, a stąd wynika, że:

$$W = -20\,\text{N} \cdot (-1\ \text{m}) = 20\,\text{J}.$$

b. Jako że książka wróciła na półkę, różnica wysokości wynosi zero, a zatem $W = 0\,\text{J}$.

Znaczenie

W przeciwieństwie do tarcia z Przykładu 7.2, praca siły grawitacji działającej na krzywej zamkniętej wynosi zero. Takie siły nazywamy siłami zachowawczymi.



7.2 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Czy siła grawitacji jest zawsze stała?

Praca zmiennej siły

W ogólności siła i jej wartość może zmieniać się w różnych punktach przestrzeni. Infinitezymalna (nieskończenie mała) praca wykonana przez zmienną siłę może być opisana za pomocą składowych tej siły oraz odpowiadających im przemieszczeń zgodnie z zależnością:

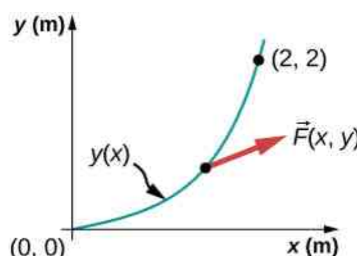
$$\text{d}W = F_x\,\text{d}x + F_y\,\text{d}y + F_z\,\text{d}z.$$

W tym przypadku siła jest wyrażana jako funkcja położenia, natomiast przemieszczenie zależy od równania opisującego drogę, na której dana siła działa. (W tym przypadku pracę $\text{d}W$ wyrażamy za pomocą współrzędnych kartezjańskich, ale w wielu przypadkach inne układy współrzędnych mogą lepiej opisywać daną sytuację). Równanie 7.2 opisuje pracę jako całkę liniową i tak też potraktujemy ją w omawianym przypadku.

Przykład 7.4

Praca siły działającej na torze krzywoliniowym

Ciało porusza się po paraboli o równaniu $y = 0{,}5\ \mathrm{m}^{-1} \cdot x^2$ od punktu w początku układu współrzędnych $A = (0\ \mathrm{m},\ 0\ \mathrm{m})$ do punktu o współrzędnych $B = (2\ \mathrm{m},\ 2\ \mathrm{m})$ na skutek działania siły $\vec{F} = 5\ \mathrm{N/m} \cdot y\hat{i} + 10\ \mathrm{N/m} \cdot x\hat{j}$ (Rysunek 7.6). Oblicz wykonaną pracę.



Rysunek 7.6 Paraboliczny tor ruchu ciała.

Strategia rozwiązania

Składowe siły są dane jako funkcje odpowiednio x i y. Wyrażamy zatem funkcję przemieszczenia y i $\mathrm{d}y$ w zależności od x i $\mathrm{d}x$.

$$y = 0{,}5\ \mathrm{m}^{-1} \cdot x^2 \Rightarrow \mathrm{d}y = 2 \cdot 0{,}5\ \mathrm{m}^{-1} \cdot x\,\mathrm{d}x.$$

Teraz możemy wykonać całkowanie tylko po zmiennej x.

Rozwiązanie

Nieskończenie mała wartość pracy wynosi:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}W &= F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y = 5\ \mathrm{N/m} \cdot y\mathrm{d}x + 10\ \mathrm{N/m} \cdot x\mathrm{d}y \\ &= 5\ \mathrm{N/m} \cdot 0{,}5\ \mathrm{m}^{-1} \cdot x^2\mathrm{d}x + 10\ \mathrm{N/m} \cdot 2 \cdot 0{,}5\ \mathrm{m}^{-1} \cdot x^2\mathrm{d}x \\ &= 12{,}5\ \mathrm{N/m}^2 \cdot x^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Całka z x^2 to $x^3/3$, więc:

$$W = \int_{0\ \mathrm{m}}^{2\ \mathrm{m}} 12{,}5\ \mathrm{N/m}^2 \cdot x^2\mathrm{d}x = 12{,}5\ \mathrm{N/m}^2 \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_{0\ \mathrm{m}}^{2\ \mathrm{m}} = 12{,}5\ \mathrm{N/m}^2 \cdot \frac{8\ \mathrm{m}^3}{3} = 33{,}3\ \mathrm{J}.$$

Znaczenie

Takie całkowanie nie jest trudne. Pamiętaj, żeby jak w powyższym przykładzie wyrażać pracę za pomocą odpowiednich funkcji, dla których łatwo policzyć daną całkę.



7.3 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Wyznacz pracę, tak jak w przypadku Przykładu 7.4, ale dla drogi opisanej funkcją $y = (0{,}25\ \mathrm{m}^{-2})x^3$, wykonaną pomiędzy punktami $A = (0{,}0)$ i $B = (2\ \mathrm{m},\ 2\ \mathrm{m})$.

W Przykładzie 7.4 podano, że aby wyznaczyć pracę, najłatwiej sprowadzić równanie do równania jednej zmiennej. Zwykle jest więcej niż jeden sposób, żeby to zrobić. Dla Przykładu 7.4 najłatwiej przeprowadzić całkowanie po zmiennej x, ale równie dobrze można to zrobić po zmiennej y. Otrzymujemy wtedy następującą zależność:

$$x = \sqrt{y/\left(0{,}5\ \mathrm{m}^{-1}\right)} = \sqrt{(2\ \mathrm{m})y} \text{ i } \mathrm{d}x = \sqrt{(2\ \mathrm{m})} \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y/\sqrt{y} = \mathrm{d}y/\sqrt{\left(2\ \mathrm{m}^{-1}\right)y}.$$

Składowe siły są opisane za pomocą zmiennej y:

$$F_x = (5\,\text{N/m})y \text{ i } F_y = (10\,\text{N/m})x = (10\,\text{N/m})\sqrt{(2\,\text{m})y},$$

wtedy nieskończenie mała praca wynosi:

$$\begin{aligned} dW &= F_x\,dx + F_y\,dy \\ &= \frac{5\,\text{N / m} \cdot y}{\sqrt{2{,}0\,\text{m}^{-1} \cdot y}}\,dy + 10\,\text{N / m} \cdot \sqrt{2\,\text{m} \cdot y}\,dy \\ &= 5\,\text{N} \cdot \text{m}^{-1/2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}\right)\sqrt{y}\,dy = 17{,}7\,\text{N} \cdot \text{m}^{-1/2} \cdot y^{1/2}\,dy \end{aligned}$$

Całka z $y^{1/2}$ wynosi $2y^{3/2}/3$, wartość pracy na drodze z A do B wynosi:

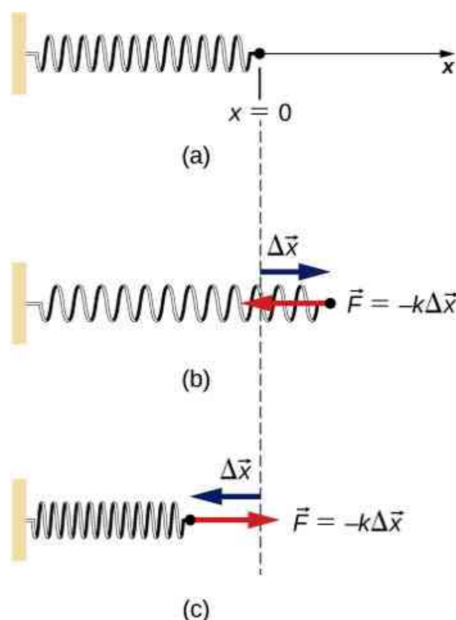
$$W = \int_{0\,\text{m}}^{2\,\text{m}} 17{,}70\,\text{N} \cdot \text{m}^{-1/2} \cdot y^{1/2}\text{d}y = 17{,}7\,\text{N} \cdot \text{m}^{-1/2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (2\,\text{m})^{3/2} = 33{,}3\,\text{J}.$$

Tak jak można było oczekiwać, wynik przy takim podejściu okazuje się identyczny jak wcześniejszy.

Jeden z ważnych i często omawianych rodzajów siły stanowi siła sprężystości dla idealnej sprężyny spełniającej **prawo Hooke'a** (ang. **Hooke's law**) $\vec{F} = -k\Delta\vec{x}$, gdzie k jest stałą sprężystości sprężyny, a $\Delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_{\text{równ}}$ jest odkształceniem liniowym sprężyny (Zasady dynamiki Newtona). Pamiętaj, że punkt równowagi tylko wówczas jest tym samym punktem co położenie dla nierozciągniętej sprężyny, gdy nie działają na nią żadne siły bądź działające siły się równoważą.

Gdy chcemy obliczyć pracę wykonaną przez siłę sprężystości, wybieramy oś x wzdłuż sprężyny w taki sposób, aby jej wydłużenie przyjmowało dodatnią wartość (jak pokazano na Rysunku 7.7), początek układu obieramy w położeniu równowagi $x_{\text{równ}} = 0$. Tak przyjęty układ współrzędnych pozwala nam opisać siłę tylko za pomocą składowej x, czyli $F_x = -kx$. Wówczas praca przy rozciąganiu sprężyny z x_A do x_B wynosi:

$$W_{\text{spr}AB} = \int_A^B F_x\text{d}x = -k\int_A^B x\text{d}x = -k\left[\frac{x^2}{2}\right]_A^B = -\frac{1}{2}k\left(x_B^2 - x_A^2\right). \tag{7.5}$$

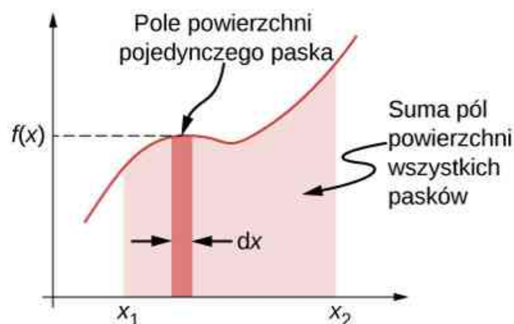


Rysunek 7.7 (a) Sprężyna w położeniu równowagi, (b) przy wydłużaniu i (c) przy ściskaniu.

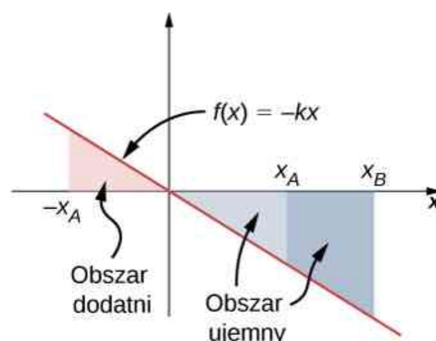
Zauważ, że W_{AB} zależy tylko od punktu końcowego i początkowego A i B, natomiast nie zależy od drogi pomiędzy tymi punktami.

Kolejną interesującą informacją na temat Równania 7.5 jest to, że dla jednowymiarowego przypadku wykonana

praca jest równa polu powierzchni pod krzywą dla zależności $F(x)$. Pamiętamy, że dla przypadku jednowymiarowego całka odpowiada sumie nieskończenie małych przyrostów $f(x)\mathrm{d}x$, co może być zaprezentowane graficznie, jak na Rysunku 7.8. Natomiast w przypadku siły sprężystości równanie $F = -kx$ przedstawia funkcję liniową ze współczynnikiem sprężystości $-k$, zależną od zmiennej x (patrz Rysunek 7.9).



Rysunek 7.8 Krzywa reprezentująca funkcję $f(x)$, na której zaznaczono pole odpowiadające nieskończenie małemu przyrostowi $f(x)\mathrm{d}x$ oraz pole odpowiadające sumie tych przyrostów – całce z $f(x)$ od x_1 do x_2.



Rysunek 7.9 Wykres zależności siły sprężystości od wydłużenia $x f(x) = -kx$, na którym zaznaczono obszary pod krzywą odpowiadające wartościom pracy dla przemieszczeń x_A i x_B przy różnych zwrotach siły sprężystości.

Przykład 7.5

Praca siły sprężystości

Praca potrzebna do rozciągnięcia idealnej sprężyny o 6 cm wynosi 0,54 J (zgodnie z równaniem z Rysunku 7.7 (b)).

a. Ile wynosi stała sprężystości k dla tej sprężyny?
b. Jaką pracę trzeba wykonać, aby rozciągnąć sprężynę o kolejne 6 cm?

Strategia rozwiązania

Praca potrzebna do rozciągnięcia sprężyny jest wykonywana *przeciwko* sile sprężystości w Równaniu 7.5, więc:

$$W = \frac{1}{2}k\left(x_B^2 - x_A^2\right).$$

Dla (a) $x_A = 0\text{ cm}$ i $x_B = 6\text{ cm}$, dla (b) $x_A = 6\text{ cm}$ i $x_B = 12\text{ cm}$. W (a) wykorzystujemy znaną pracę i wyznaczamy k, które w części (b) wykorzystujemy do wyznaczenia pracy.

Rozwiązanie

a. $W = 0{,}54\text{ J} = \frac{1}{2}k\left[(6\text{ cm})^2 - (0\text{ cm})^2\right]$, więc $k = 3\text{ N/cm}$.
b. $W = \frac{1}{2}\cdot 3\text{ N/cm}\cdot\left[(12\text{ cm})^2 - (6\text{ cm})^2\right] = 1{,}62\text{ J}$.

Znaczenie

Praca nie zależy od drogi, lecz od różnicy wartości wyrażenia $kx^2/2$ dla położenia początkowego i końcowego. Zauważ, że praca potrzebna do rozciągnięcia sprężyny od 0 do 12 cm jest cztery razy większa od pracy potrzebnej do rozciągnięcia sprężyny od 0 do 6 cm, ponieważ praca jest zależna od kwadratu wydłużenia: $kx^2/2$.



7.4 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Sprężyna w Przykładzie 7.5 została ściśnięta o 6 cm (względem położenia równowagi).

a. Czy praca wykonana przez sprężynę jest dodatnia czy ujemna?

b. Jaka jest jej wartość?

7.2 | Energia kinetyczna

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- wyznaczać energię kinetyczną dla ciała o znanej prędkości bądź pędzie;
- wyznaczać energię kinetyczną w różnych układach odniesienia.

Możemy przypuszczać, że im większa prędkość ciała, w tym większym stopniu dane ciało może oddziaływać na inne. Nie zależy to od kierunku wektora prędkości, a tylko od jego wartości. W końcu XVII wieku została wprowadzona w fizyce wielkość opisująca idealnie sprężyste zderzenie dwóch ciał w przypadku, gdy jedno przed zderzeniem jest w spoczynku. Pierwsze ciało się zatrzymuje, natomiast drugie porusza się z taką samą prędkością, z jaką poruszało się pierwsze (takie samo zjawisko możecie zaobserwować, grając w bilard lub obserwując kołyskę Newtona). Pojęcie opisujące takie zderzenie nazwano energią ruchu. W XVIII wieku wprowadzono określenie **energia kinetyczna** (ang. **kinetic energy**) do opisu energii ciał pozostających w ruchu.

Pamiętając ten historyczny opis możemy teraz zdefiniować w ujęciu klasycznym energię kinetyczną jako pojęcie fizyczne. Kiedy mówimy o ujęciu „klasycznym”, mamy na myśli takie, które nie bierze pod uwagę zależności relatywistycznych, tzn. właściwych dla prędkości bliskich prędkości światła. Opis takich zjawisk znajdziecie w rozdziale Teoria względności (https://cnx.org/content/m65887/latest/) .

Jako że omawiane przez nas ciała (lub układy) mają różny stopień skomplikowania, zacznijmy od zdefiniowania energii kinetycznej dla cząstki o masie m.

Energia kinetyczna

Energia kinetyczna ruchu postępowego jest równa iloczynowi masy m i kwadratu prędkości v podzielonemu przez 2:

$$E = \frac{1}{2}mv^2. \tag{7.6}$$

Jeśli mamy więcej niż jedną cząstkę, to energia kinetyczna układu jest równa sumie energii kinetycznej wszystkich cząstek:

$$E = \sum \frac{1}{2}mv^2. \tag{7.7}$$

Możemy zapisać równanie opisujące energię kinetyczną również za pomocą pędu ($\vec{p} = m\vec{v}$), zamiast za pomocą masy i prędkości. Skoro $v = p/m$, uzyskujemy zależność:

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 = \frac{p^2}{2m},$$

która opisuje energię kinetyczną dla jednej cząstki o pędzie p. Czasem taki zapis jest bardziej wygodny niż ten z Równania 7.6.

Jednostką energii kinetycznej jest, tak jak w przypadku innych form energii, dżul (J).

Przykład 7.6

Energia kinetyczna ciała

(a) Jaka jest energia kinetyczna sportowca o masie ciała 80 kg, biegnącego z prędkością 10 m/s? (b) Krater Chicxulub znajdujący się na półwyspie Jukatan jest największym na Ziemi kraterem powstałym podczas zderzenia. Najprawdopodobniej powstał na skutek uderzenia asteroidy z prędkością 22 km/s, które uwolniło $4{,}2 \cdot 10^{23}$ J energii kinetycznej. Jaka była masa tej asteroidy? (c) W reaktorach jądrowych neutrony termiczne poruszają się z prędkością około 2,2 km/s. Jaka jest energia kinetyczna takich cząstek?

Strategia rozwiązania

Aby rozwiązać zadanie, wykorzystamy Równanie 7.6. Masę neutronu można znaleźć w tablicach fizycznych.

Rozwiązanie

Nie zapomnij o zamianie jednostek na podstawowe jednostki układu SI!

a. $E = \frac{1}{2} \cdot 80\ \text{kg} \cdot (10\ \text{m/s})^2 = 4{,}0\ \text{kJ}$,

b. $m = \frac{2E}{v^2} = \frac{2 \cdot 4{,}2 \cdot 10^{23}\ \text{J}}{(22\ \text{km/s})^2} = 1{,}7 \cdot 10^{15}\ \text{kg}$,

c. $E = \frac{1}{2} \cdot 1{,}68 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot (2{,}2\ \text{km/s})^2 = 4{,}1 \cdot 10^{-21}\ \text{J}$.

Znaczenie

W tym przykładzie pokazaliśmy, że energia kinetyczna zależy od masy i prędkości, oraz że energia ta może przyjmować bardzo różne wartości. W zależności od tego, jak duża jest wartość energii, stosujemy różne jednostki. Energia wyznaczona w punkcie (b) może być porównana do energii wyzwalanej w eksplozji dynamitu (TNT) czy też nuklearnej, przy czym $1\ \text{megatona} = 4{,}18 \cdot 10^{15}\ \text{J}$. W przypadku powstania krateru Chicxulub energia kinetyczna to sto milionów megaton. Z kolei w przypadku energii cząstek elementarnych wyrażamy ją w elektronowoltach $1\ \text{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$. Energia termiczna w przypadku (c) wynosi 1/40 elektronowolta.



7.5 Sprawdź, czy rozumiesz.

a. Samochód i ciężarówka poruszają się z taką samą energią kinetyczną. Przyjmijmy, że ciężarówka ma masę większą niż samochód. Które ma większą prędkość?

b. Jeśli poruszają się z tą samą prędkością, to które ma większą energię kinetyczną?

Jako że prędkość jest wielkością względną, zależną od przyjętego układu odniesienia, wartość energii kinetycznej również zależy od przyjętego układu. Musimy o tym pamiętać, ponieważ często tylko od dobrania odpowiedniego układu odniesienia zależy, czy nasze obliczenia będą proste, czy też trudne. Możemy wybrać układ związany z poruszającym się ciałem bądź układ związany z nieruchomym obserwatorem. Opis równań ruchu w różnych układach odniesienia możecie znaleźć w rozdziale Ruch w dwóch i trzech wymiarach.

Przykład 7.7

Energia kinetyczna w różnych układach odniesienia

Człowiek ważący 75 kilogramów porusza się w wagonie kolejowym z prędkością 1,5 m/s względem wagonu, zaś pociąg porusza się z prędkością 15 m/s względem torów.

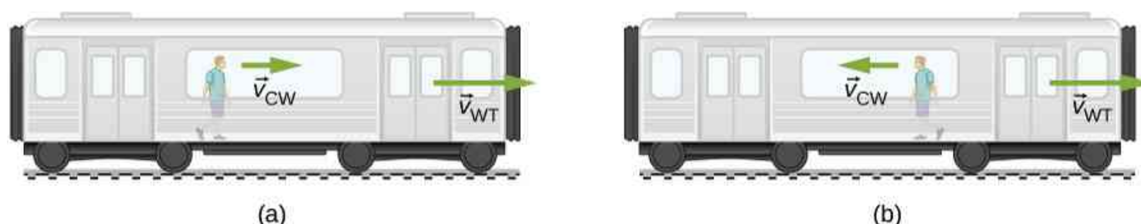
a. Ile wynosi energia kinetyczna człowieka w układzie odniesienia związanym z wagonem?

b. Ile wynosi ona w układzie związanym z torami?

c. Ile wynosi ona w układzie poruszającym się wraz z człowiekiem?

Strategia rozwiązania

Jako że mamy dane wartości prędkości, możemy wykorzystać zależność $\frac{1}{2}mv^2$, aby wyznaczyć wartość energii kinetycznej w poszczególnych przypadkach. Jednakże musimy pamiętać, że w przypadku (a) prędkość człowieka jest podana względem wagonu, w przypadku (b) względem torów, zaś w (c) wynosi zero. Jeśli oznaczymy układ odniesienia związany z wagonem jako W, związany z torami jako T, a z człowiekiem jako C, to otrzymamy zależność w postaci: $\vec{v}_{CT} = \vec{v}_{CW} + \vec{v}_{WT}$. Zakładamy, że przejście w wagonie leży w tej samej linii co tory, ale zwrot wektorów prędkości nie został podany w zadaniu, więc przeanalizujmy wszystkie przypadki (Rysunek 7.10). $v_{CT} = v_{WT} \pm v_{CW}$.



Rysunek 7.10 Możliwe zwroty prędkości człowieka poruszającego się w wagonie: (a) w stronę przodu wagonu i (b) w stronę tyłu wagonu.

Rozwiązanie

a. $E = \frac{1}{2} \cdot 75{,}0\,\text{kg} \cdot (1{,}50\,\text{m/s})^2 = 84{,}4\,\text{J}$,

b. $v_{CT} = 15{,}0\,\text{m/s} \pm 1{,}50\,\text{m/s}$. W związku z tym mamy dwie poprawne odpowiedzi:

$$E = \frac{1}{2} \cdot 75{,}0\,\text{kg} \cdot (13{,}5\,\text{m/s})^2 = 6{,}83\,\text{kJ},$$

i

$$E = \frac{1}{2} \cdot 75{,}0\,\text{kg} \cdot (16{,}5\,\text{m/s})^2 = 10{,}2\,\text{kJ},$$

c. W tym układzie prędkość człowieka $v_C = 0\,\text{m/s}, E = 0\,\text{J}$.

Znaczenie

Jak mogliśmy zauważyć, wartość energii kinetycznej zależy od układu odniesienia, w którym jest rozpatrywana. Jednakże musimy pamiętać o tym, że nie może ona nigdy przyjąć wartości ujemnych (ponieważ prędkość podniesiona do kwadratu nie może przyjąć wartości ujemnej).



7.6 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Płyniesz łodzią wiosłową wzdłuż brzegów rzeki. Twoja energia kinetyczna w układzie odniesienia związanym z brzegami rzeki ma mniejszą wartość niż wyznaczona w układzie związanym z płynącą wodą. Czy wiosłujesz zgodnie, czy przeciwnie do prądu rzeki?

Energia kinetyczna pojedynczej cząstki ma charakter jednostkowy, ale energia kinetyczna układu cząstek może być podzielona na wiele różnych rodzajów w zależności od analizowanego układu oraz sposobu, w jaki się on porusza. Przykładem może być układ cząstek, które poruszają się z tą samą prędkością. Jako że porusza się on ruchem postępowym, to jego energia kinetyczna też ma taki charakter. Jeżeli obiekt bądź cząstka wykonuje ruch obrotowy, ich energia kinetyczna jest również energią kinetyczną ruchu obrotowego, a w przypadku ruchu drgającego – energią kinetyczną ruchu drgającego. Energia kinetyczna chaotycznego ruchu atomów może być nazywana również energią termiczną. Pojęcia te będą pojawiały się w kolejnych rozdziałach książki, ale bez względu na nazwę musimy pamiętać, że są to różne rodzaje energii kinetycznej, tj. energii związanej ściśle z ruchem.

Przykład 7.8

Określenia opisujące energię kinetyczną

a. Gracz wykonuje podanie ze środka pola. Piłka do koszykówki waży 624 gramy. Podanie trwało 2 sekundy i zostało wykonane na odległość 15 metrów. Jaka jest wartość energii kinetycznej piłki?

b. Powietrze w piłce ma średnią masę atomową 29 u i średnią prędkość 500 m/s (względem piłki). Średnia ilość cząsteczek w piłce wynosi $3 \cdot 10^{23}$. Cząsteczki poruszają się ruchem losowym. Ile wynosi średnia energia kinetyczna ruchu postępowego cząstek względem piłki?

c. Jak szybko musiałaby się poruszać piłka względem boiska, aby mieć taką samą energię kinetyczną jak cząsteczki powietrza w podpunkcie (b)?

Strategia rozwiązania

W punkcie (a) wykorzystaj znaną prędkość i masę, aby wyznaczyć wartość energii kinetycznej $E = \frac{1}{2}mv^2$. W punkcie (b) zamień jednostki atomowe na kilogramy i ponownie wykorzystaj znany wzór $E = \frac{1}{2}mv^2$, aby wyznaczyć średnią energię cząstki gazu względem piłki. Potem pomnóż wynik przez liczbę cząstek. W punkcie (c) podstaw wartość energii wyznaczonej w punkcie (b) i masę piłki w punkcie (a) do wzoru $E = \frac{1}{2}mv^2$, a następnie wyznacz v .

Rozwiązanie

a. Prędkość piłki w kierunku poziomym jest równa 7,5 m/s, zatem energia kinetyczna jej ruchu postępowego wynosi:

$$\frac{1}{2} \cdot 0{,}624\,\text{kg} \cdot (7{,}5\,\text{m/s})^2 = 17{,}6\,\text{J}.$$

b. Średnia energia cząsteczki gazu w piłce:

$$\frac{1}{2} \cdot 29\,\text{u} \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\text{kg/u} \cdot (500\,\text{m/s})^2 = 6{,}02 \cdot 10^{-21}\,\text{J}.$$

Całkowita energia kinetyczna układu cząsteczek:

$$3 \cdot 10^{23} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{-21}\,\text{J} = 1{,}80\,\text{kJ}.$$

c. $v = \sqrt{2 \cdot \frac{1{,}8\,\text{kJ}}{0{,}624\,\text{kg}}} = 76{,}0\,\text{m/s}.$

Znaczenie

W części (a) wyznaczyliśmy energię kinetyczną ruchu postępowego obiektu, którym była piłka względem otoczenia – boiska. Gdyby piłka się obracała, musielibyśmy uwzględnić również energię kinetyczną ruchu obrotowego. W części (b) wyznaczyliśmy tak naprawdę energię wewnętrzną (termiczną) gazu znajdującego się w piłce. Zauważ, że wartość tej energii jest 100 razy większa niż energii kinetycznej ruchu postępowego piłki z punktu (a). Żeby piłka przy takiej samej masie osiągnęła tak dużą energię kinetyczną jak w punkcie (b) musiałaby ona poruszać się niemal 10 razy szybciej.

7.3 | Zasada zachowania energii mechanicznej

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- wykorzystywać zasadę zachowania energii do opisu ruchu ciała, na które działają siły zewnętrzne;
- wykorzystywać zasady zachowania energii do wyznaczania sił działających na ciało w ruchu.

Omówiliśmy sposoby obliczania pracy wykonanej przez siły działające na cząstkę, ale jak praca przekłada się na ruch cząstki? Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona suma wszystkich sił działających na ciało określa jego pęd (jego ruch). W związku z tym powinniśmy wziąć pod uwagę wszystkie siły działające na ciało czy też po prostu wprowadzić pojęcie **pracy wypadkowej** (ang. **net work**), a następnie ocenić, jak będzie ona wpływać na ruch ciała.

Rozważmy pracę wypadkową będącą wynikiem działania siły wypadkowej, powodującą nieskończenie małe przemieszczenie cząstki: $\mathrm{d}W_{\text{wyp}} = \vec{F}_{\text{wyp}} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$. Z drugiej zasady dynamiki Newtona wiemy, że: $\vec{F}_{\text{wyp}} = m\left(\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t\right)$, więc $\mathrm{d}W_{\text{wyp}} = m\left(\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t\right) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$. W celu dokonania opisu matematycznego musimy wyrazić pracę poprzez odpowiednią różniczkę (np. dt) w następujący sposób:

$$\mathrm{d}W_{\text{wyp}} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = m\mathrm{d}\vec{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = m\vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{v}.$$

W powyższym równaniu za prędkość podstawiliśmy pierwszą pochodną przemieszczenia po czasie, zapisując w ten sposób iloczyn skalarny w bardziej czytelny sposób (Równanie 2.30). W celu ułatwienia obliczeń, zamiast wykonywać całkowanie wielkości wektorowych, zapiszmy wartość iloczynu skalarnego za pomocą składowych oraz wykonajmy całkowanie od A do B (punkty na trajektorii cząstki). Wynik tej całki wyznacza nam wartość pracy wypadkowej:

$$W_{\text{wyp}AB} = \int_A^B \left(mv_x \mathrm{d}v_x + mv_y \mathrm{d}y + mv_z \mathrm{d}z\right) = \frac{1}{2}m\left|v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right|_A^B = \left|\frac{1}{2}mv^2\right|_A^B = E_B - E_A. \tag{7.8}$$

W trzecim kroku wykorzystaliśmy fakt, że suma kwadratów składowych wektora odpowiada kwadratowi długości wektora. Na koniec wykorzystaliśmy definicję energii kinetycznej. Równanie to opisuje w sposób matematyczny **zasadę równoważności pracy i energii** (ang. **work–energy theorem**) (Rysunek 7.11), która jest szczególnym przypadkiem zasady zachowania energii.

Równoważność pracy i energii

Praca wypadkowa jest równa różnicy energii kinetycznych ciała:

$$W_{\text{wyp}} = E_B - E_A. \tag{7.9}$$



Rysunek 7.11 Konie ciągną obciążenie podczas zawodów w ramach festynu. Praca wykonywana przez konie jest wykorzystywana do zmiany energii kinetycznej ciągniętego obiektu. (Źródło: “Jassen”/ Flickr)

Zgodnie z zasadą zachowania energii, kiedy dane ciało zwalnia, zmniejsza się jego energia kinetyczna, co odpowiada ujemnej wartości pracy, która została wykonana przez siły działające na to ciało. Kiedy ciało przyspiesza, praca ma wartość dodatnią. Kiedy wyznaczamy wartość pracy wypadkowej, musimy uwzględnić wszystkie siły działające na ciało, a nie brać pod uwagę tych, które nie działają na ciało. W przeciwnym wypadku dostaniemy błędny wynik.

Dzięki zastosowaniu prawa o równoważności pracy i energii (oraz ogólnej formy zasady zachowania energii)

jesteśmy w stanie rozwiązywać zadania/problemy w dużo prostszy sposób niż za pomocą rozwiązywania równań opartych na drugiej zasadzie dynamiki Newtona. Na przykład w rozdziale Zasady dynamiki Newtona wyznaczyliśmy prędkość ciała ślizgającego się bez tarcia przy użyciu drugiej zasady dynamiki Newtona (poprzez wykorzystanie przyspieszenia ciała w postaci g).

$$v_{\text{końc}}^2 = v_{\text{pocz}}^2 + 2g(s_{\text{końc}} - s_{\text{pocz}})\sin\theta,$$

gdzie s jest przemieszczeniem.

Możemy to samo zagadnienie rozwiązać przy pomocy zasady zachowania energii. Jako że tylko dwie siły działają na ciało – siła grawitacji oraz siła sprężystości podłoża (która nie wykonuje żadnej pracy), cała praca jest wykonywana przez siłę grawitacji. Zatem:

$$W_{\text{wyp}} = W_{\text{graw}} = -mg(y_{\text{końc}} - y_{\text{pocz}}),$$

gdzie y ma wartość dodatnią w przyjętym układzie odniesienia. Praca, zgodnie z zasadą zachowania energii, będzie równa energii kinetycznej nabytej przez ciało:

$$-mg(y_{\text{końc}} - y_{\text{pocz}}) = \frac{1}{2}m(v_{\text{końc}}^2 - v_{\text{pocz}}^2).$$

Z zależności trygonometrycznych mamy: $(y_{\text{końc}} - y_{\text{pocz}}) = (s_{\text{końc}} - s_{\text{pocz}})\sin\theta$. Zatem widać, że wyznaczona obydwoma sposobami prędkość jest taka sama.

Co zyskujemy dzięki wykorzystaniu zasady zachowania energii przy rozwiązywaniu zadań? Dla ruchu bez tarcia na płaszczyźnie może niewiele, ale w przypadku kiedy tor ruchu jest krzywą, bądź kiedy działa tarcie, zastosowanie zasady zachowania energii w rozwiązywaniu zadań znacznie upraszcza rachunki. Często zastosowanie równań wynikających z drugiej zasady Newtona może prowadzić do obliczeń matematycznie bardzo skomplikowanych.

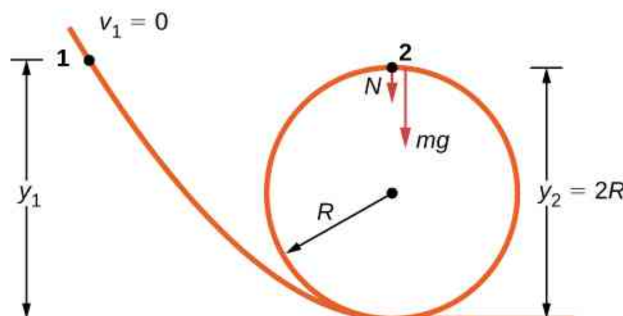
Strategia rozwiązywania zadań: zasada zachowania energii mechanicznej

1. Zaznacz siły działające na ciało w danym układzie odniesienia.
2. Uwzględniając odpowiednie znaki, wyznacz pracę wykonywaną przez wszystkie siły działające na ciało w tym układzie odniesienia.
3. Zsumuj wszystkie wartości pracy wyznaczone w poprzednim punkcie.
4. Przyrównaj wyznaczoną pracę całkowitą do końcowej energii kinetycznej ciała w omawianym układzie odniesienia. Wyznacz wartość szukaną.
5. Sprawdź poprawność swojej odpowiedzi. Jeżeli praca wykonana nad ciałem będzie wynosiła zero, znaczy to, że ciało będzie poruszać się ze stałą prędkością bądź będzie pozostawać w spoczynku. Jeżeli wykonana nad ciałem praca ma wartość dodatnią, to ciało poruszać się będzie ruchem przyspieszonym z przyspieszeniem dodatnim, jeżeli ujemną, to z przyspieszeniem ujemnym (tzn. ruchem jednostajnie opóźnionym).

Przykład 7.9

„Pętla śmierci”

Zabawkowy samochodzik porusza się bez tarcia po tzw. ”pętli śmierci” o promieniu R. Z jakiej wysokości (względem podstawy pętli) musi rozpocząć ruch samochodzik, aby przebyć całą pętlę, nie odrywając się od niej w żadnym jej punkcie?



Rysunek 7.12 Ruch bez tarcia na tzw. „pętli śmierci”. Na jakiej wysokości musi rozpocząć się ruch, aby ciało nie oderwało się od toru?

Strategia rozwiązania

Na Rysunku 7.12 oznaczono siły działające na ciało. Jedyną siłą wykonującą pracę w tym układzie jest siła grawitacji – wykonuje ona pracę dodatnią. Z zasady zachowania energii prędkość ciała w punkcie znajdującym się na wysokości 2R będzie zależna od początkowej wysokości:

$$mg\left(y_1 - y_2\right) = \frac{1}{2}mv_2^2.$$

Zapisując siły działające na ciało w najwyższym punkcie pętli otrzymujemy zależność w postaci:

$$a_{2\mathrm{R}} = \frac{F}{m} = \frac{N + mg}{m} = \frac{v_2^2}{R}.$$

Aby ciało nie oderwało się od toru, musi na nie działać siła o dodatniej wartości $N > 0$. Podstawiając v_2^2 i N do poprzednio opisanej zależności, otrzymamy rozwiązanie.

Rozwiązanie

Otrzymujemy zależność:

$$N = \frac{-mgR + mv_2^2}{R} = \frac{-mgR + 2mg\left(y_1 - 2R\right)}{R} > 0 \implies y_1 > \frac{5}{2}R.$$

Znaczenie

Źródłem siły dośrodkowej pojawiającej się w ruchu ciała w pętli jest siła grawitacji oraz siła reakcji podłoża (toru). Odpowiednia składowa siły grawitacji powoduje spowolnienie bądź przyspieszenie ruchu ciała. Kiedy dziecko bawi się samochodzikami na takim torze, ustala wysokość, z której należy wystartować samochodzik, metodą prób i błędów. My teraz możemy to wyznaczyć za pomocą zasady zachowania energii i to bez wykorzystywania rachunku różniczkowego.



7.7 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Załóżmy, że promień pętli w Przykładzie 7.9 wynosi 15 cm, a ruch rozpoczyna się na wysokości 45 cm. Jaką prędkość będzie miał samochodzik w najwyższym punkcie pętli?



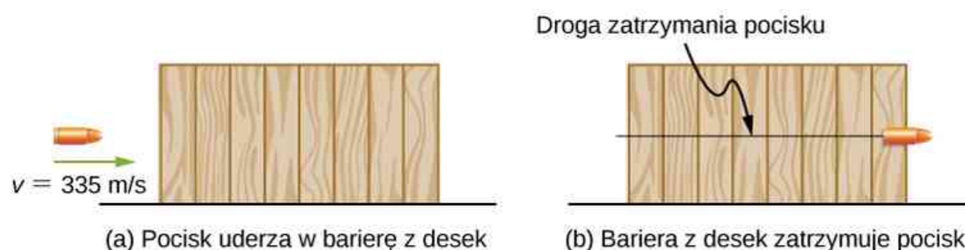
Sprawdź na stronie Carleton College (https://openstaxcollege.org/l/21carcollvidrol) , jak wygląda kolejka górska (tzw. rollercoaster) z „pętlą śmierci”.

W sytuacji, w której rodzaj ruchu ciała jest znany, ale jedna bądź więcej sił działających na ciało nie ma podanej wartości, możesz wykorzystać zasadę zachowania energii, aby je wyznaczyć. Praca zależy od siły oraz przesunięcia, więc na ich podstawie możemy znaleźć szukane wielkości.

Przykład 7.10

Wyznaczenie siły oporów ruchu

Pocisk kalibru 0,22 LR ma masę 2,60 g i prędkość wylotową 335 m/s. Może on przebić osiem sosnowych desek, których grubość wynosi 1,90 cm. Ile wynosi średnia siła oporów ruchu pocisku (patrz: Rysunek 7.13)?



Rysunek 7.13 Opory ruchu spowodowane oddziaływaniem z deską wpływają na energię kinetyczną pocisku.

Strategia rozwiązania

Możemy przyjąć, że opory ruchu działające na pocisk powodują zmianę jego energii kinetycznej odpowiadającej pracy siły oporów ruchu, tj. wartości iloczynu siły oporów ruchu pomnożonej przez odległość, na którą wbił się pocisk. Całkowita grubość układu ośmiu desek będzie równa $8 \cdot 1{,}90\ \text{cm} = 15{,}2\ \text{cm}$.

Rozwiązanie

Wykorzystując zasadę zachowania energii:

$$W_{\text{wyp}} = -F_{\text{śr}} \Delta s_{\text{stop}} = -E_{\text{pocz}},$$

więc:

$$F_{\text{śr}} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\Delta s_{\text{stop}}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2{,}6 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot (335\ \text{m/s})^2}{0{,}152\ \text{m}} = 960\ \text{N}.$$

Znaczenie

Moglibyśmy wykorzystać do rozwiązania tego zadania równania wynikające z zasad dynamiki Newtona, ale zastosowanie zasady zachowania energii jest w tym wypadku dużo prostsze. Opis fizyki zderzenia pocisku z drewnianym klockiem można znaleźć w anglojęzycznym artykule Asifa Shakura [“Bullet-Block Science Video Puzzle.” *The Physics Teacher* (January 2015) 53(1): 15–16]. Jeżeli pocisk jest wystrzelony bezpośrednio w środek klocka, wytraca całą energię kinetyczną i wbija się na większą głębokość niż w przypadku strzału w inne miejsce. Zgodne z zasadą zachowania energii im mniejsza strata energii kinetycznej pocisku, tym mniejsza głębokość, na którą się wbija. Więcej na ten temat dowiesz się z rozdziału Moment siły.


Wybróbuj aplikację PhET simulation (https://openstaxcollege.org/l/21PhETSimRamp) nazywającą się *the ramp*, czyli pochylnia. Sprawdź, jak zmiana działającej siły wpływa na energię kinetyczną ciała.

7.4 | Moc

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- jak powiązać pracę z czasem, w którym została ona wykonana, poprzez wyznaczenie mocy;
- jak wyznaczyć moc wyzwoloną na skutek działania siły.

Pojęcie pracy jest związane z siłą oraz przemieszczeniem, natomiast zasada równoważności pracy i energii kinetycznej wiąże ze sobą pracę wykonaną nad ciałem i jego energię kinetyczną. Żadne ze wspomnianych pojęć bezpośrednio nie wiąże się z czasem, jednakże wiemy z doświadczenia, że czasami ważne jest, w jakim czasie wykonana jest dana praca. We wstępie do rozdziału umieszczono zdjęcie sprinterek, z których każda wykonuje taką samą pracę na tym samym odcinku, ale w różnym czasie – i to czas właśnie jest w tym przypadku najistotniejszy.

Aby powiązać ze sobą pracę i czas, w którym została wykonana, używamy nowego pojęcia – mocy. Jako że praca może być funkcją czasu, wprowadzono termin **mocy średniej** (ang. **average power**) jako skończoną wartość pracy wykonanej w skończonym czasie:

$$P_{\text{śr}} = \frac{\Delta W}{\Delta t}. \quad (7.10)$$

Możemy więc zdefiniować pojęcie mocy chwilowej, często określanej po prostu jako **moc** (ang. **power**).

Moc

Moc jest definiowana jako nieskończenie mała praca wykonana w nieskończenie krótkim czasie:

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}. \quad (7.11)$$

Jeżeli moc jest stała w danym przedziale czasu, to średnia moc jest równa mocy chwilowej. Wtedy pracę możemy zapisać jako $W = P\Delta t$. Jeżeli praca ma wartość zmienną w czasie, to jej wartość jest wyrażana jako całka w postaci:

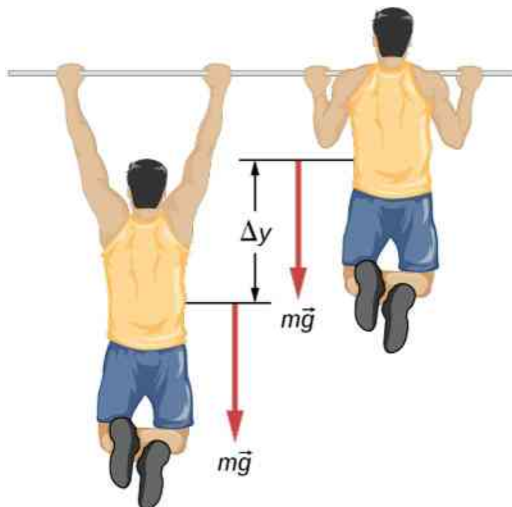
$$W = \int P dt.$$

Zasada równoważności pracy i energii kinetycznej opisuje zamianę jednej formy energii na drugą. Analogicznie pojęcie mocy opisuje szybkość takiej zamiany. Jednostką energii (pracy) w układzie SI jest dżul (1 J), więc zgodnie z definicją mocy jednostką mocy jest dżul na sekundę czyli wat: $1 \text{ J/s} = 1 \text{ W}$. Inną często spotykaną (szczególnie w technice) jednostką jest koń mechaniczny: $1 \text{ KM} = 746 \text{ W}$.

Przykład 7.11

Podciąganie się na drążku

Rekrut ważący 80 kg wykonuje 10 podciągnięć na drążku w 10 sekund (Rysunek 7.14). Jaka jest średnia moc uwalniana przez jego mięśnie? (*Wskazówka:* Aby rozwiązać to zadanie, musisz dokonać rozsądnych przybliżeń.)



Rysunek 7.14 Jaka moc wyzwalana jest w przypadku wykonania przez rekruta 10 podciągnięć w 10 sekund?

Strategia rozwiązania

Praca przeciwko sile grawitacji przy ruchu z góry w dół na odcinku Δy może zostać zapisana w postaci $mg\Delta y$. (Jeśli będziesz wykonywał w trakcie podciągania ruch w dół ze stałą prędkością, siła Twoich mięśni będzie działała również przeciwko sile grawitacji.) Zatem praca wykonana podczas całego ruchu (w górę i w dół) wynosi: $2mg\Delta y$. Przyjmijmy, że $\Delta y = 2\ \text{ft} \approx 60\ \text{cm}$. Przyjmijmy również, że ręce stanowią 10% masy ciała i nie są podnoszone w trakcie podciągania się. Przy tych założeniach możemy wyznaczyć pracę wykonaną w trakcie 10 podciągnięć i wyznaczyć moc wyzwoloną w ciągu 10 sekund.

Rozwiązanie

Uwzględniając wcześniejsze założenia otrzymujemy:

$$P_{\text{śr}} = \frac{10 \cdot 2 \cdot (0{,}9 \cdot 80\ \text{kg}) \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}6\ \text{m}}{10\ \text{s}} = 850\ \text{W}.$$

Znaczenie

Wynik ten odpowiada mocy wydzielonej przy standardowych ćwiczeniach wysiłkowych. Odpowiada to mocy trochę większej niż jeden koń mechaniczny ($1\ \text{KM} = 746\ \text{W}$).


7.8 Sprawdź, czy rozumiesz: Oszacuj moc wydzielaną przy podnoszeniu sztangi o masie 150 kg na wysokość 2 m w czasie 3 s.

Moc związaną z wprowadzeniem ciała w ruch można wyrazić poprzez siłę działają na to ciało. Jeżeli siła $\vec{F}$ działa na ciało, które zostaje przemieszczone o $\mathrm{d}\vec{r}$ w czasie $\mathrm{d}t$, to moc będzie równa:

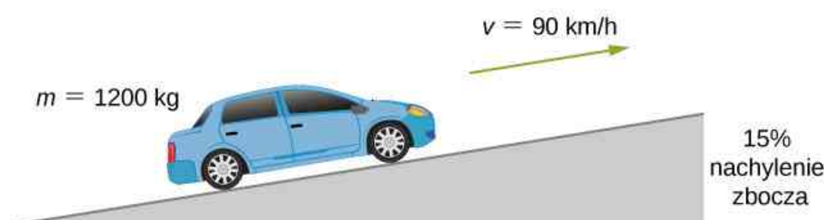
$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v}, \tag{7.12}$$

gdzie $\vec{v}$ jest prędkością ciała. Zależność jest prawdziwa przy założeniu, że siła $\vec{F}$ jest stała w czasie.

Przykład 7.12

Moc samochodu poruszającego w górę zbocza

Jaka musi być minimalna moc silnika samochodu o masie 1200 kg, aby wjechać pod górę zbocza o nachyleniu 15% z prędkością 90 km/h (Rysunek 7.15)? Przyjmij, że 25% mocy samochodu jest wykorzystywane do przeciwdziałania siłom oporu ruchu.



Rysunek 7.15 Chcemy obliczyć moc silnika samochodu wjeżdżającego pod górę ze stałą prędkością.

Strategia rozwiązania

Przy stałej prędkości zmiana energii kinetycznej równa jest zero, w związku z tym cała wykonana praca jest wykorzystywana do przeciwdziałania sile grawitacji i siłom oporu ruchu. Z założeń zadania wiemy, że 75% mocy jest wykorzystywane tylko do przeciwdziałania sile grawitacji. Moc ta jest równa $m\vec{g} \cdot \vec{v} = mgv \sin\theta$, gdzie θ jest kątem nachylenia zbocza. Nachylenie zbocza odpowiada zależności $\text{tg}\,\theta = 0{,}15$.

Rozwiązanie

Na podstawie wcześniej prowadzonych zależności otrzymujemy:

$$0{,}75P = mgv \sin(\text{arctg}\, 0{,}15),$$

lub

$$P = \frac{1200 \cdot 9{,}8\text{N}/3{,}6\text{s} \cdot \sin 8{,}53°}{0{,}75} = 58\,\text{kW},$$

co odpowiada 78 KM.

Znaczenie

Wartość obliczona odpowiada mocy silnika małego samochodu. Zauważ jednak, że wyznaczona wartość odpowiada tylko i wyłącznie ruchowi samochodu, a nie uwzględnia mocy traconej np. na ciepło. Aby samochód faktycznie mógł poruszać się w świecie rzeczywistym, moc jego silnika musiałaby być znacznie większa.

PODSUMOWANIE ROZDZIAŁU 7

KLUCZOWE POJĘCIA

energia kinetyczna (ang. kinetic energy) energia ciał będących w ruchu, równa połowie iloczynu masy ciała i kwadratu jego prędkości

moc (ang. power) (także: moc chwilowa) stosunek nieskończenie małej wartości pracy do nieskończenie małego czasu, w którym została wykonana

praca (ang. work) jest wykonywana wtedy, kiedy działająca siła powoduje przemieszczenie ciała

praca siły (ang. work done by a force) całka z iloczynu skalarnego siły działającej i nieskończenie małego przemieszczenia

praca wypadkowa (ang. net work) praca wszystkich sił działających na ciało

zasada równoważności pracy i energii (ang. work–energy theorem) praca wypadkowa sił działających na ciało jest równa zmianie energii kinetycznej tego ciała

średnia moc (ang. average power) stosunek pracy do czasu, w którym została wykonana

NAJWAŻNIEJSZE WZORY

Praca wykonana przez siłę na nieskończenie małym odcinku	$\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \left\lvert\vec{F}\right\rvert \left\lvert\mathrm{d}\vec{r}\right\rvert \cos\theta$
Praca wykonana na odcinku z A do B	$W_{AB} = \int_{\mathrm{droga}AB} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$
Praca stałej siły tarcia	$W_\mathrm{T} = -mg\mu_\mathrm{k} \lvert l_{AB}\rvert$
Praca wykonana przeciwko sile grawitacji na odcinku z A do B	$W_{\mathrm{grav}AB} = -mg\left(y_B - y_A\right)$
Praca ściskania/rozciągania sprężyny od długości A do B	$W_{\mathrm{spręż}AB} = -\frac{1}{2}k\left(x_B^2 - x_A^2\right)$
Energia kinetyczna (nierelatywistyczna)	$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$
Równoważność pracy i energii kinetycznej	$W_\mathrm{wyp} = E_B - E_A$
Definicja mocy	$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$
Moc jako iloczyn skalarny prędkości i siły	$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

PODSUMOWANIE

7.1 Praca

- Nieskończenie mały przyrost pracy jest wyznaczany jako iloczyn skalarny siły wykonującej pracę i nieskończenie małego przemieszczenia.
- Praca siły działającej na skończonej drodze jest równa całce z nieskończenie małych przyrostów pracy na tej drodze.
- Praca wykonana *przeciwko* danej sile jest ujemna.
- Praca siły grawitacji jest równa iloczynowi ciężaru ciała i różnicy wysokości odpowiadającej przemieszczeniu ciała.
- Praca siły sprężystości zależy tylko od stałej sprężystości i zmiany długości sprężyny.

7.2 Energia kinetyczna

- Dla ciał poruszających się z prędkościami nierelatywistycznymi energia kinetyczna ruchu postępowego jest wyrażana jako 0,5 razy iloczyn masy i kwadratu prędkości ciała.
- Całkowita energia kinetyczna układu ciał poruszających się jest równa sumie energii kinetycznych wszystkich ciał w tym układzie.

- Wartość energii kinetycznej zależy od obranego układu odniesienia, zawsze przyjmuje wartości dodatnie i może być określana różnymi pojęciami w zależności od rodzaju ruchu ciała.

7.3 Zasada zachowania energii mechanicznej

- Ze względu na to, że siła wypadkowa, zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona, jest równa iloczynowi masy i przyspieszenia, tj. pierwszej pochodnej prędkości po czasie, całkowita praca wykonana nad cząstką w ruchu będzie odpowiadać zmianie jej energii kinetycznej. Jest to zasada równoważności pracy i energii kinetycznej - szczególny przypadek zasady zachowania energii mechanicznej.
- Możesz wykorzystać tę zasadę do rozwiązywania zadań w sposób dużo prostszy niż z wykorzystaniem zasad dynamiki Newtona.

7.4 Moc

- Moc wyraża szybkość zmian pracy w czasie. Wyznaczamy ją jako pochodną pracy po czasie.
- Z kolei aby wyznaczyć pracę, znając wartość mocy, musimy obliczyć całkę z mocy w funkcji czasu.
- Moc możemy też wyznaczyć jako iloczyn skalarny prędkości i siły działającej na ciało.

PYTANIA

7.1 Praca

1. Podaj przykład, kiedy coś, co nazywamy pracą w życiu codziennym, nie jest nią w sensie fizycznym. Czy w tym przypadku energia jest przekazywana lub zmieniana w inną formę? Jeżeli tak, wyjaśnij, jak to możliwe bez wykonywania pracy.

2. Podaj przykład, w którym zachodzi zmiana położenia przedmiotu oraz działa siła, a nie jest to praca. Wyjaśnij, czemu tak jest.

3. Opisz sytuację, kiedy pomimo przyłożonej siły nie jest wykonywana praca. Wyjaśnij dlaczego.

4. Czy w ruchu po okręgu (dla v=const) siła dośrodkowa wykonuje pracę?

5. Podrzucasz piłkę i łapiesz ją dokładnie na tej samej wysokości, z której ją wyrzuciłeś. Jaką pracę wykonała w tym przypadku siła grawitacji?

6. Dlaczego trudniej robić „brzuszki” na pochyłej ławeczce niż na prostej? (Zobacz rysunek.)





7. Jako młody człowiek Tarzan wspinał się do swojego domu na drzewie. Kiedy się zestarzał, postanowił zbudować schody. Skoro praca siły grawitacji jest niezależna od drogi, co zyskał na zbudowaniu schodów?

7.2 Energia kinetyczna

8. Cząstka o masie m porusza się z prędkością daną zależnością $v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$. Czy jej energia kinetyczna jest dana zależnością w postaci: $m\left(v_x^2\hat{i} + v_y^2\hat{j} + v_z^2\hat{k}\right)/2$? Jeśli nie, to jakie jest prawidłowe wyrażenie opisujące jej energię kinetyczną?

9. Jedna cząstka ma masę m, natomiast druga masę $2m$. Prędkość drugiej cząstki wynosi v, a pierwszej $2v$. Jaki jest stosunek energii kinetycznych tych cząstek?

10. Człowiek upuszcza kulkę o masie m_1 z wysokości h, kulka uderza o podłoże, mając energię E. Następnie upuszczona zostaje kulka o masie m_2 z wysokości $2h$ i uderza w ziemię, mając taką samą energię jak pierwsza kulka. Jaki jest stosunek masy kulek?

7.3 Zasada zachowania energii mechanicznej

11. Człowiek pokazany na rysunku kosi trawnik, przykładając siłę do kosiarki. Jakie warunki muszą być spełnione, aby pchanie kosiarki zwiększało energię kinetyczną kosiarki, a jakie, aby zmniejszało?



12. Praca wykonana nad układem zwiększa jego energię całkowitą. Praca wykonana przez układ zmniejsza jego energię. Podaj przykłady ilustrujące te twierdzenia.

13. Dwie kulki o masach m i $2m$ zostają upuszczone z wysokości h. Porównaj ich energie kinetyczne w momencie uderzenia w ziemię. Załóż, że praca wykonana przez siły oporu ruchu wynosi zero.

14. Porównaj pracę potrzebną do przyspieszenia ciała o masie 2000 kg z 30,0 do 40,0 km/h z pracą potrzebną do zmiany jego prędkości z 50,0 do 60,0 km/h.

15. Biegniesz ze stałą prędkością. Czy wykonujesz jakąś pracę względem środowiska cię otaczającego i *vice versa*?

16. Dwie siły zwiększają dwukrotnie prędkość cząstki o początkowej energii kinetycznej 1 J. Jedna z tych sił wykonuje pracę równą 4 J. Jaką pracę wykonuje druga siła?

7.4 Moc

17. Większość sprzętów gospodarstwa domowego jest oceniana za pomocą poboru mocy w watach. Czy zaklasyfikowanie pod tym względem zależy od tego, czy sprzęty te są włączone, czy też nie zależy? (Czy jeżeli są wyłączone, to znaczy, że mają moc równą zero?) Odpowiedz na to pytanie uwzględniając definicję mocy.

18. Wyjaśnij, czemu zużycie energii jest wyrażane w kilowatogodzinach? Jaki jest związek pomiędzy tą jednostką a dżulem?

19. W trakcie wyładowania elektrostatycznego, takiego jak przy zdejmowaniu poliestrowego swetra czy przy grze w koszykówkę, moc może sięgnąć kilkuset kilowatów. Jak to możliwe, że nie dzieje nam się przy tym większa krzywda?

20. Czy praca potrzebna do podniesienia przedmiotu zależy od czasu, w którym to zrobimy? A moc?

21. Czy moc może przyjmować wartości ujemne?

22. Czy żarówka o mocy 50 W może zużywać więcej energii niż kuchenka o mocy 1000 W? Odpowiedź uzasadnij.

ZADANIA

7.1 Praca

23. Pracę o jakiej wartości wykonuje sprzedawca, przesuwając poziomo po stole puszkę z groszkiem na odcinku 0,600 m, używając siły 5,00 N?

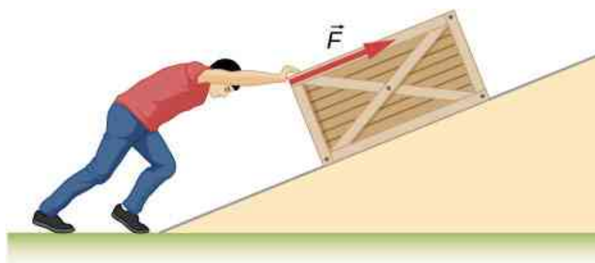
24. Osoba ważąca 75,0 kg wspina się po schodach na wysokość 2,50 m. Wyznacz wykonaną pracę.

25. a. Oblicz pracę wykonywaną przy wciąganiu windy o masie 1500 kg na wysokość 40 m ze stałą prędkością, jeśli siła oporów ruchu wynosi 100N.
b. Jaką pracę wykonuje siła grawitacji?
c. Jaka praca jest wykonywana przy wciąganiu windy?

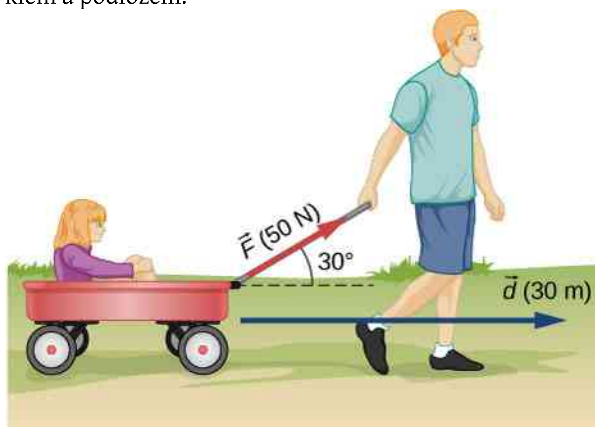
26. Samochód przejeżdża 108 km z prędkością 30,0 m/s, zużywając 8 litrów benzyny. Tylko 30% energii paliwa jest używane na utrzymanie stałej prędkości. (Wartość opałowa benzyny wynosi 35 MJ/l.)

a. Ile wynosi siła napędowa samochodu?
b. Jeżeli siła jest wprost proporcjonalna do prędkości, to jaką ilość paliwa spalimy na trasie 108 km utrzymując prędkość 28,0 m/s?

27. Oblicz pracę, którą wykona mężczyzna o masie $85{,}0\,\text{kg}$, wpychając pudło na odległość 4,00 m w górę pochylni o kącie nachylenia $20{,}0°$ względem płaszczyzny poziomej (patrz rysunek). Mężczyzna przykłada siłę 500 N wzdłuż równi i wpycha pudło ze stałą prędkością. Pamiętaj, aby uwzględnić pracę wpychania pudła oraz pracę wspinania się po pochylni.



28. Jaką pracę wykonuje chłopiec, ciągnąc wózek na odległość 30 m? Przyjmij brak siły tarcia pomiędzy wózkiem a podłożem.

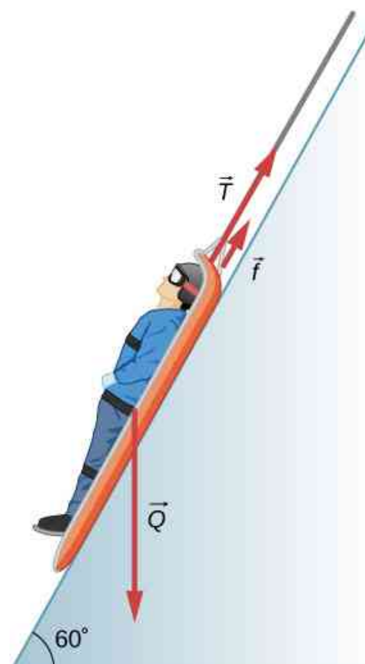


29. Klient pcha wózek na zakupy na odcinku 20,0 m ze stałą prędkością. Siła tarcia wynosi 35,0 N. Wózek jest pchany siłą pod kątem $25{,}0^{\circ}$ względem poziomu.

a. Jaką pracę wykonuje siła tarcia?
b. Jaką pracę wykonuje siła grawitacji?
c. Jaką pracę wykonuje klient?
d. Wykorzystując zasadę zachowania energii, wyznacz siłę, jaką działa klient na wózek.
e. Jaka jest całkowita praca wykonana „nad” wózkiem?

30. Ekipa ratunkowa opuszcza ocalonego człowieka o masie 90,0 kg ze stałą prędkością w dół zbocza o nachyleniu $60,0^{\circ}$ (jak pokazano na rysunku). Współczynnik tarcia wynosi 0,1.

a. Ile pracy wykonano przy opuszczaniu ocalonego o 30 metrów?
b. Ile pracy wykona lina, na której jest opuszczany?
c. Jaką pracę wykonuje siła grawitacji?
d. Ile wynosi całkowita praca?



31. Ze stałą siłą 20 N na odcinku 5 m popychana jest mała kulka. Ile wynosi wykonana praca?

32. Zabawka jest ciągnięta 6 metrów wzdłuż prostoliniowego toru. Siła działająca wynosi 20 N i jest skierowana pod kątem 37° względem poziomu. Ile wynosi praca w tym ruchu?

33. Pudło o masie 5 kg leży na poziomym stole. Współczynnik tarcia kinetycznego wynosi $\mu_{\mathrm{K}} = 0{,}50$. Ciągnięto pudło na odcinku 10 cm. Znajdź pracę:

a. siły, z którą ciągnięto pudełko,
b. siły tarcia,
c. siły wypadkowej.

34. Pudło o masie 3,5 kg leży na poziomym stole. Współczynnik tarcia kinetycznego wynosi $\mu_{\mathrm{K}} = 0{,}7$. Ciągnięto pudło na odcinku 45 cm. Znajdź pracę:

a. siły, z którą ciągnięto pudełko,
b. siły tarcia,
c. siły wypadkowej.

35. Sanie o całkowitej masie 50 kg ciągnięte są na odcinku 20 metrów ($\mu_{\mathrm{K}} = 0{,}20$) ze stałą prędkością skierowaną pod kątem 25° względem poziomu. Oblicz:

a. pracę przyłożonej siły,
b. pracę siły tarcia,
c. pracę całkowitą.

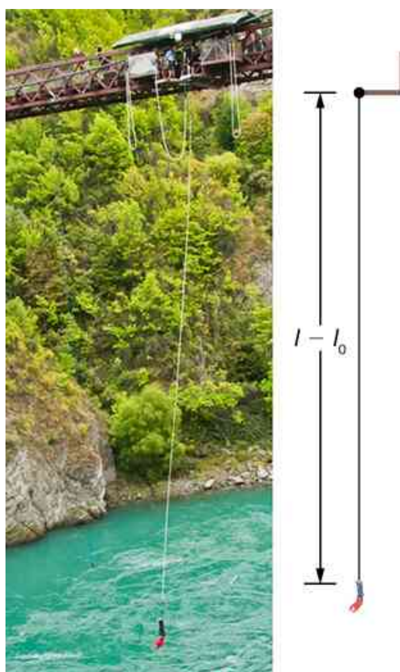
36. Jaką pracę wykonuje siła $F(x) = (-2{,}0/x)$ N przy ruchu cząstki z $x = 2{,}0$ m do $x = 5{,}0$ m

37. Jaką pracę przeciwko sile grawitacji wykona się przy wnoszeniu walizki o masie 5 kg na dach Empire State Building? Budynek ten ma wysokość 380 metrów.

38. Przy rozciągnięciu sprężyny o 10 cm wykonuje się pracę 500 J. Jaka jest stała sprężystości tej sprężyny?

39. Lina do bungee jest to w zasadzie gumowy pas, który może rozciągnąć się czterokrotnie w stosunku do swojej początkowej długości. Współczynnik sprężystości takiej taśmy jest zmienny w zależności do tego, jak jest rozciągnięta (sprawdź artykuł: Paul G, Menz, *The Physics of Bungee Jumping*, "The Physics Teacher", nr 31, listopad 1993, s. 483–487). Przyjmijmy, że długość początkowa (nierozciągniętej liny) wynosi l_0, a jej wydłużenie $x = l - l_0$ (patrz rysunek). Przyjmijmy, że dla $0 \leqslant x \leqslant 4{,}88\ \text{m}$, współczynnik sprężystości wynosi $k_1 = 204\ \text{N/m}$, a dla $4{,}88\ \text{m} \leqslant x$ $k_2 = 111\ \text{N/m}$ (pamiętaj, że funkcja $F(x)$ jest liniowa).
a. Jakie jest naprężenie liny rozciągniętej o 16,7 m (maksymalne rozciągnięcie dla danego skoku)?
b. Jaka praca została wykonana przy takim skoku?

Śródło ilustracji: Graeme Churchard



40. Lina jest rozciągana pod wpływem działania siły $F(x) = k_1 x + k_2 x^3$, gdzie x jest długością, o którą rozciąga się lina, $k_1 = 204\ \text{N/m}$ i $k_2 = -0{,}233\ \text{N/m}$. Ile pracy musi zostać wykonane, aby rozciągnąć linę o 16,7 m?

41. Inżynierowie modelują wartość siły sprężystości dla liny bungee równaniem:$F(x) = a\left[\frac{x+9\ \text{m}}{9\ \text{m}} - \left(\frac{9\ \text{m}}{x+9\ \text{m}}\right)^2\right]$, gdzie x wyraża wzdłużne rozciągnięcie liny, zaś a jest stałą. Jeżeli potrzeba 22 kJ, aby rozciągnąć linę o 16,7 m, wyznacz wartość stałej a.

42. Cząstka porusza się na płaszczyźnie xy pod działaniem siły $\vec{F}(x,\ y) = 50\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \frac{x\hat{i}+y\hat{j}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, gdzie x i y wyrażone są w metrach. Oblicz pracę, którą wykona ta siła na odcinku pomiędzy punktami $(3\ \text{m},\ 4\ \text{m})$ i $(8\ \text{m},\ 6\ \text{m})$.

43. Cząstka porusza się po krzywej $y(x) = 10\ \text{m} \cdot \left[1 + \cos\left(0{,}1\ \text{m}^{-1} \cdot x\right)\right]$, od punktu $x = 0\ \text{m}$ do $x = 10\pi\ \text{m}$, pod wpływem stycznej siły o zmiennej wartości $F(x) = 10\ \text{N} \cdot \sin\left(0{,}1\ \text{m}^{-1} \cdot x\right)$. Jaką pracę wykonała siła?

7.2 Energia kinetyczna

44. Porównaj wartość energii kinetycznej ciężarówki o masie 20 ton, poruszającej się z prędkością 110 km/h i ważącego 80 kg astronauty poruszającego się po orbicie z prędkością 27 500 km/h.

45. Jak szybko musi się poruszać słoń o masie 3 ton, aby mieć taką samą energię kinetyczną jak ważący 65 kg sprinter poruszający się z prędkością 10 m/s?

46. Oszacuj wartość energii kinetycznej lotniskowca o masie 90 000 ton, poruszającego się z prędkością 30 węzłów. (Wskazówka: 1 węzeł to 1 mila morska na godzinę.)

47. Oblicz energię kinetyczną:
a. samochodu o masie 2 ton poruszającego się z prędkością 100,0 km/h;
b. biegacza o masie 80 kg poruszającego z prędkością 10 m/s;
c. elektronu o masie $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg poruszającego się z prędkością $2{,}0 \cdot 10^7\ \text{m/s}$.

48. Ciało o masie 5 kg posiada energię kinetyczną taką samą, jak inne ciało o masie 8 kg. Jaki jest stosunek prędkości tych ciał?

49. Pocisk ważący 8 gramów porusza się z prędkością 800m/s.
a. Wyznacz energię kinetyczną pocisku.
b. Ile wynosiłaby energia kinetyczna pocisku, gdyby jego prędkość zmalała o połowę?

7.3 Zasada zachowania energii mechanicznej

50.
a. Oblicz siłę potrzebną do zatrzymania na odcinku 120 metrów samochodu o masie 950 kg poruszającego się z prędkością 90 km/h.
b. Jaka będzie ta siła, jeżeli zatrzymanie nastąpi na odcinku 2 metrów, na skutek zderzenia z betonową ścianą? Jaki będzie stosunek tych dwóch sił?

51. Zderzaki samochodowe są tak zaprojektowane, aby przeciwdziałać siłom działającym przy zderzeniu z nieruchomym obiektem z prędkością 4 km/h (1,1 m/s). Wyznacz, jaka średnia siła działa na zderzak, który ulega odkształceniu o 0,2 metra w trakcie zderzenia samochodu o masie 900 kg ze ścianą, jeśli samochód ma początkową prędkość 1,1 m/s.

52. Rękawice bokserskie są wyścielone miękkim materiałem, aby zmniejszyć siłę uderzenia.

a. Wyznacz siłę działającą przy uderzeniu w twarz przeciwnika, jeżeli rękawica ulega w jego trakcie odkształceniu o 7,50 cm przy ciosie zadanym ręką o masie 7 kg poruszającą się z prędkością 10 m/s.
b. Oblicz, ile wynosiłaby siła uderzenia, gdyby nie stosowano rękawic, a pięść uległaby odkształceniu tylko o 2 cm. Przyjmij, że masa rękawicy w pierwszym przypadku była pomijalna.
c. Przeanalizuj wpływ rękawic na siłę uderzenia. Czy przy zastosowaniu rękawic wyrządzamy mniejszą krzywdę przeciwnikowi niż bez nich?

53. Stosując podejście uwzględniające zasady dotyczące energii, wyznacz średnią siłę, jaką działa sprinter o masie 60 kg na tor, aby przyspieszyć z 2 do 8 m/s na odcinku 25 metrów, jeżeli całkowite siły oporu wiatru, którym się przeciwstawia, wynoszą 30 N.

54. Pudło o masie 5,0 kg jest ciągnięte z przyspieszeniem $2{,}0\,\mathrm{m/s^2}$ po płaszczyźnie; współczynnik tarcia pomiędzy pudłem a podłożem wynosi $\mu_\mathrm{k} = 0{,}50$ Wyznacz pracę, jaką na odcinku 10 cm wykonuje:
a. siła przyłożona do pudła,
b. siła tarcia,
c. siła wypadkowa.
d. Jaka jest zmiana energii kinetycznej pudła w tym ruchu?

55. Stała pozioma siła o wartości 10 N działa na wózek o masie 20 kg. Jaka będzie prędkość wózka po przejechaniu 8,0 m? Zakładamy, że wózek porusza się bez tarcia.

56. Ile będzie wynosiła prędkość w poprzednim zadaniu, jeżeli siła będzie przyłożona do wózka pod kątem 45° względem poziomu?

57. Porównaj pracę potrzebną do zatrzymania skrzyni o masie 100 kg, zsuwającej się z prędkością 1,0 m/s i pocisku o masie 8,0 g przemieszczającego się z prędkością o prędkości 500 m/s.

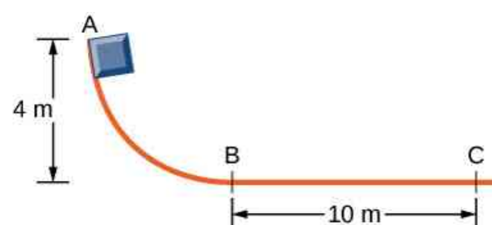
58. Wóz wraz z pasażerami stoi na szczycie wzgórza. Zostaje popchnięty i zsuwa się 100 metrów wzdłuż zbocza, które jest nachylone pod kątem 10° w stosunku do poziomu. Jaka jest prędkość wozu po przejechaniu 100 metrów? Przyjmij, że ruch odbywa się bez tarcia.

59. Pocisk o masie 8 g poruszający się z prędkością 800 m/s wbija się w drewniany klocek na głębokość 20 cm. Jaka jest średnia siła oporów ruchu? Przyjmij, że masa klocka jest dużo większa niż masa pocisku (po zderzeniu pozostaje on w spoczynku).

60. Klocek o masie 2 kg zostaje wepchnięty na równię pochyłą o kącie nachylenia 37° względem poziomu z prędkością 10 m/s. Współczynnik tarcia klocka o równię wynosi $\mu_\mathrm{k} = 0{,}30$.
a. Oblicz, jaką odległość od początku równi przebędzie klocek do momentu zatrzymania.
b. Po zatrzymaniu się klocek zaczął się zsuwać w dół równi. Jaką uzyska prędkość u podnóża równi? (*Wskazówka:* Zauważ, że dla ruchu w górę i w dół tylko siła tarcia wykonuje pracę.)

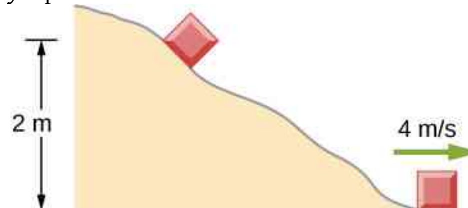
61. 3-kilogramowy klocek dociska o 8,0 cm nieważką sprężynę o współczynniku sprężystości $4{,}5 \cdot 10^3\,\mathrm{N/m}$. Po uwolnieniu klocka przesuwa się o 2 m i zatrzymuje na skutek działania sił tarcia. Jaki jest współczynnik tarcia klocka o podłoże?

62. Klocek o masie 200 g zsuwa się z punktu A do punktu B, gdzie uzyskana prędkość wynosi $v_B = 8{,}0\,\mathrm{m/s}$, a następnie porusza się po poziomej płaszczyźnie i zatrzymuje się w punkcie C. (Patrz rysunek.)
a. Ile wynosi w tym ruchu praca sił tarcia?
b. Ile wynosi współczynnik tarcia klocka o podłoże na odcinku poziomym?



63. Ciało zsuwa się z równi pochyłej bez tarcia, a następnie po zjechaniu z niej porusza się z tarciem po torze poziomym i zatrzymuje się po 5 sekundach ruchu, przebywszy 60 metrów.
a. Jaka jest prędkość ciała na dole równi pochyłej?
b. Jaka jest wysokość równi?

64. Ciało o masie 100 g zsuwa się ze zbocza pokazanego na rysunku, uzyskując na samym dole prędkość $4\mathrm{m/s}$. Jaka była praca sił tarcia?



65. Pocisk z Przykładu 7.10 przebija na wylot drzwi o grubości jednej deski. Jaka jest prędkość pocisku po przebiciu drzwi?

66. Sanie zsuwają się z górki o kącie nachylenia 22° względem poziomu. Po zsunięciu się o 75 metrów wzdłuż zbocza ich prędkość wynosiła 14 m/s. Jaki był współczynnik tarcia sanek o podłoże?

7.4 Moc

67. Człowiek o dobrej sprawności fizycznej może wytworzyć do 100 W mocy, np. zasilając silnik elektryczny przez pedałowanie jak na rowerze. Zakładając,

że taki silnik przetwarzałby energię bezstratnie:
a. ile osób byłoby potrzebnych, aby zasilić suszarkę o mocy 4 kilowatów do ubrań?
b. ile osób byłoby potrzebnych, aby zastąpić elektrownię wytwarzającą 800 MW mocy?

68. Jaki jest koszt pracy zegara o mocy 3 W przez rok, zakładając cenę 0,50 zł za kWh?

69. Klimatyzator zużywa 15,0 kW mocy. Jaki jest koszt użytkowania klimatyzatora w Kalifornii przez 3,00 h dziennie przez 30,0 dni jeżeli koszt kWh wynosi 0,50 zł?

70. a. Jaki jest roczny koszt użytkowania urządzenia, które zużywa 100 kWh mocy dziennie?
b. Jaką ilość energii zużywa ono rocznie (w dżulach)?

71.
a. Jaka jest średnia moc człowieka który wykonuje pracę $6{,}00 \cdot 10^6\text{ J}$ przez 8,00 h?
b. Ile czasu zajmie takiemu człowiekowi podniesienie 2000 kg cegieł na platformę znajdującą się na wysokości 1,50 m? (Pomiń masę człowieka.)

72. Motocykl o masie 500 kg przyspiesza od zera do 110m/s na odcinku 400 metrów. Średnia siła tarcia na tym odcinku wynosiła 1200 N. Jaka jest średnia moc silnika motocykla, jeżeli przyspieszenie do 110m/s zajęło mu 7,3 sekundy?

73.
a. Ile czasu będzie potrzebował samochód o masie 850 kg i mocy 40 KM, aby uzyskać prędkość 15 m/s przy założeniu, że zaniedbujemy tarcie?
b. Ile czasu zajmie przyspieszenie do tej prędkości, jeżeli samochód będzie wjeżdżał pod górkę o wysokości 3 metrów?

74.
a. Znajdź moc silnika windy, która unosi ciężar 2500 kg na wysokość 35,0 m w 12,0 s, jednocześnie przyspieszając od 0 do 4,00 m/s. Dla tej windy przeciwwaga wynosi 10 000 kg, więc pomimo tego, że tylko 2500 kg jest podnoszone na wysokość h, to przyspieszenie dotyczy również przeciwwagi.
b. Jaki jest koszt pracy windy, jeżeli jednostkowy koszt kWh wynosi 0,50 zł?

75.
a. Jak długo zajmie samolotowi o masie $1{,}50 \cdot 10^5\text{ kg}$ i mocy silników 100 MW uzyskanie prędkości 250 m/s i wysokości 12,0 km, jeżeli opory ruchu są pomijalnie małe?
b. Jeżeli zajęłoby to 900 s, to jaka byłaby moc silników?
c. Zakładając, że moc się nie zmieniła, ile wynosiły siły oporów ruchu, jeżeli zajęłoby to aż 1200 s? (*Wskazówka:* Musisz wyznaczyć odcinek, który przebędzie samolot ze stałym przyspieszeniem przez 1200 sekund.)

76. Oblicz moc potrzebną, aby 950-kilogramowy samochód wjechał pod górkę o kącie nachylenia wynoszącym $2{,}00°$ ze stałą prędkością 30,0 m/s, przeciwstawiając się sile wiatru wynoszącej 600 N.

77. a. Mężczyzna o masie 80 kg wbiega po schodach na wysokość 20 metrów w czasie 10 sekund. Jaka była moc potrzebna, żeby tego dokonać?
b. Jeżeli wydajność ciała mężczyzny wynosiła 25%, to jaka była jego moc całkowita?

78. Człowiek z poprzedniego zadania wykorzystuje w przybliżeniu energię równą $1{,}05 \cdot 10^7\text{ J}$ (2500 kalorii) dziennie, zachowując stałą masę ciała. Jaka jest średnia moc człowieka w ciągu dnia? Porównaj to z mocą potrzebną do wbiegania po schodach.

79. Elektron w lampie kineskopowej przyspiesza od zera do prędkości $8{,}4 \cdot 10^7\text{ m/s}$ na odcinku 2,5 cm. Jaka moc jest dostarczana do elektronu w czasie potrzebnym na przemieszczenie się elektronu o 1,0 cm?

80. Węgiel jest wywożony z kopalni na powierzchnię z głębokości 50 metrów przez windę wyposażoną w silnik o mocy 500 W. Ile węgla wywożone jest w ciągu minuty na powierzchnię? Zaniedbaj opory ruchu.

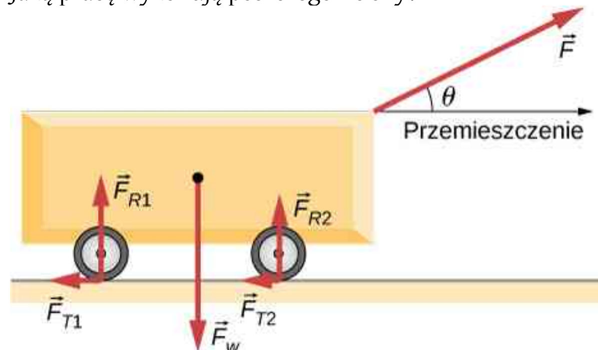
81. Dziewczynka ciągnie wózek o masie 15 kg po płaskim chodniku, przykładając siłę o wartości 10 N pod kątem $37°$ do poziomu. Przyjmij, że tarcie zaniedbujemy, a prędkość początkowa wynosi zero.
a. Jaka jest moc wyzwolona w tym ruchu w ciągu 2,0 s?
b. Jaka jest jej **moc chwilowa** (ang. **instantaneous power**) dla $t = 2{,}0\text{ s}$?

82. Typowy silnik samochodowy ma sprawność wynoszącą 25%. Przyjmij średnią moc ważącego 1000 kg samochodu jako 140 KM. Jaki jest maksymalny kąt nachylenia wzgórza, pod które taki samochód podjedzie ze stałą prędkością wynoszącą 50 km/h, jeżeli siły oporu ruchu wynosiły 300 N?

83. Biegnąc z prędkością 13 km/h, osoba ważąca 70 kg zużywa mniej więcej 850 W mocy. Zakładając, że proces konwersji mocy ma sprawność 25%, ustal, jaką moc musi zużyć człowiek wbiegający ze stałą prędkością pod górę o kącie nachylenia $5{,}0°$ względem poziomu. Załóż, że w obu przypadkach działają takie same opory ruchu.

ZADANIA DODATKOWE

84. Wózek przebywa odległość D po płaskiej, poziomej powierzchni na skutek działania siły F skierowanej pod kątem θ względem poziomu. Na wózek działają również siły grawitacji (Q), reakcji podłoża (F_{R1}) i (F_{R2}) oraz tarcia tocznego F_{T1} i F_{T2} (jak pokazano na rysunku). Jaką pracę wykonują poszczególne siły?



85. Na cząstkę działają różne siły, z których jedna (stała w czasie) może być opisana zależnością: $\vec{F}_1 = 3\,\mathrm{N} \cdot \hat{i} + 4\,\mathrm{N} \cdot \hat{j}$. W rezultacie przemieszcza się ona wzdłuż osi x od $x = 0\,\mathrm{m}$ do $x = 5\,\mathrm{m}$ w pewnej chwili czasu. Jaką pracę wykonała siła $\vec{F}_1$ w tym czasie?

86. Na cząstkę działają różne siły, z których jedna (stała w czasie) może być opisana zależnością: $\vec{F}_1 = 3\,\mathrm{N} \cdot \hat{i} + 4\,\mathrm{N} \cdot \hat{j}$. W rezultacie przemieszcza się ona wzdłuż osi x od $x = 0\,\mathrm{m}$ do $x = 5\,\mathrm{m}$, a następnie wzdłuż osi y od $y = 0\,\mathrm{m}$ do $y = 6\,\mathrm{m}$. Jaką pracę wykonała siła $\vec{F}_1$ w tym czasie?

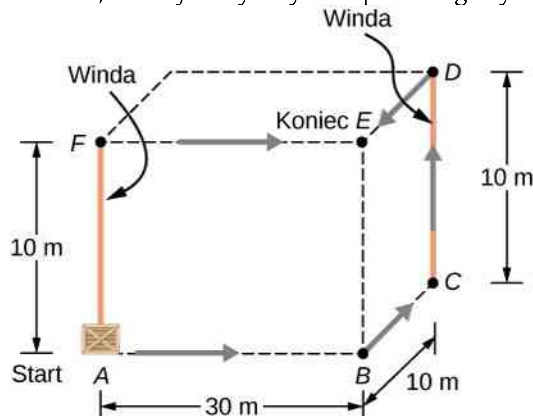
87. Na cząstkę działa siła, której wartość zależy od punktu położenia. Siła ta dana jest zależnością: $\vec{F}_1 = 2y \cdot \hat{i} + 3x \cdot \hat{j}$. Oblicz pracę, jaką wykona ta siła przy przesunięciu cząstki o 5 metrów w prawo w stosunku do punktu przecięcia osi współrzędnych.

88. Chłopiec ciągnie wózek o masie 5 kg przez pewną chwilę czasu, przykładając siłę 20 N pod kątem 30° względem poziomu. Wózek przebywa odległość 12 metrów.

a. Oblicz pracę, jaką wykonał chłopiec.

b. Jaka byłaby praca wykonana przez chłopca, gdyby siła była przyłożona poziomo, a nie pod kątem? Ruch odbywa się bez tarcia.

89. Skrzynia o masie 200 kg musi zostać przetransportowana z parteru na trzecie piętro. Tragarze najpierw mogą wjechać windą na trzecie piętro, a następnie przesunąć skrzynię po podłodze do właściwego mieszkania lub najpierw przesunąć skrzynię do punktu C, użyć windy, a następnie przesunąć skrzynię o krótszy niż wcześniej odcinek do mieszkania. Problemem jest to, że podłoga na trzecim piętrze jest dużo bardziej chropowata niż na parterze. Zakładając, że współczynnik tarcia pomiędzy skrzynią a podłogą na parterze wynosi 0,1, a na trzecim piętrze 0,3, znajdź pracę potrzebną do przetransportowania skrzyni z punktu A do E. Przyjmij, że tragarze muszą użyć takiej siły, aby skrzynia poruszała się ze stałą prędkością. *Uwaga:* Praca wykonywana przez windę przeciwko sile grawitacji nie wlicza się do rachunków, bo nie jest wykonywana przez tragarzy.



90. Krążek hokejowy o masie 0,17 kg porusza się po powierzchniach o różnym współczynniku tarcia, zależnym od położenia. Dla ruchu wzdłuż osi x współczynnik tarcia dany jest zależnością: $\mu(x) = 0{,}1 + 0{,}05x$. Znajdź pracę siły tarcia na odcinku (a) od $x = 0\,\mathrm{m}$ do $x = 2\,\mathrm{m}$, i (b) od $x = 2\,\mathrm{m}$ do $x = 4\,\mathrm{m}$.

91. Pionowa siła o wartości 20 N pozwala na podnoszenie ze stałą prędkością pudełka o masie 5 kg po równi pochyłej. Ruch odbywa się bez tarcia, a zmiana wysokości, na której znajduje się pudełko wynosiła 3 metry.

a. Jaką pracę wykonała siła grawitacji przy tym ruchu?

b. Jaką pracę wykonała praca wypadkowa?

c. Jaką pracę wykonała siła działająca na klocek?

92. Pudło o masie 7 kg jest przesuwane bez tarcia po poziomej podłodze z prędkością 1,7 m/s i zderza się z nieważką sprężyną, która na skutek zderzenia ulega ściśnięciu o 23 cm.

a. Jaka jest energia kinetyczna pudła przed zderzeniem?

b. Oblicz pracę wykonaną przez siłę sprężystości sprężyny.

c. Wyznacz współczynnik sprężystości sprężyny.

93. Samochód porusza się po poziomej drodze. Współczynnik tarcia pomiędzy oponami a podłożem wynosi 0,55. Kawałek gruzu nagle spada przed samochodem, na skutek czego kierowca nagle wciska hamulec. To z kolei powoduje nagłe zatrzymanie się go na drodze 30,5 metrów, co można zaobserwować za pomocą śladów na jezdni. Kiedy policjant obejrzał ślady, dał kierowcy mandat za przekroczenie dozwolonej prędkości 13,4 m/s. Czy miał rację?

94. Skrzynia jest pchana po poziomej chropowatej powierzchni. Kiedy działające na nią siły przestaną działać, zwolni i w końcu się zatrzyma. Jeżeli skrzynia o

masie 50 kg poruszająca się z prędkością początkową 8 m/s zatrzyma się po czasie 10 sekund, to jaka jest moc siły tarcia w tym ruchu?

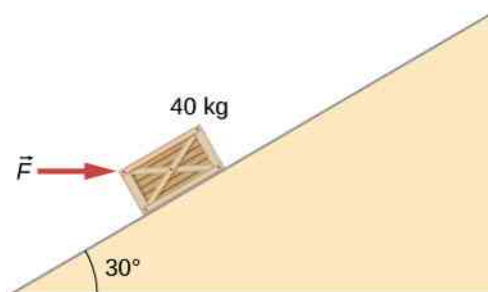
95. Przyjmijmy, że pozioma siła o wartości 20 N jest potrzebna, aby skrzynia o masie 50 kg poruszała się ze stałą prędkością 8 m/s.
a. Jaka jest moc działającej siły?
b. Przyspieszenie w tym ruchu wynosi zero pomimo tego, że na skrzynię działa siła 20 N. Co się w takim układzie dzieje z pracą siły działającej na skrzynię?

96. Nasiona spadają pionowo w dół z szybkością nasypową 10 kg/s na pas transmisyjny poruszający się z prędkością 2 m/s.
a. Jaka siła jest potrzebna, aby pas poruszał się ze stałą prędkością?
b. Jaka jest minimalna moc uzyskiwana z silnika napędzającego ten pas?

97. Rowerzysta wjeżdża pod górkę o kącie nachylenia 5° z prędkością 8 m/s. Jeżeli jego masa wraz z rowerem wynosi 80 kg, to jaką musi on generować moc, aby to zrobić?

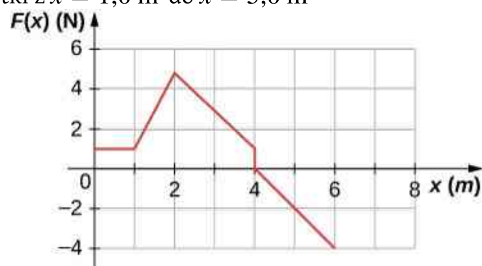
ZADANIA TRUDNIEJSZE

98. Rysunek pokazuje 40 kilogramową skrzynię wpychaną na odległość 8 metrów po równi pochyłej o kącie nachylenia 30° pod działaniem siły $\vec{F}$ działającej równoległe względem podstawy równi. Współczynnik tarcia skrzyni o równię wynosi $\mu_\mathrm{k} = 0{,}40$. Oblicz pracę
a. siły przyłożonej do skrzyni,
b. siły tarcia,
c. siły grawitacji oraz
d. siły wypadkowej.



99. Jaka byłaby praca siły tarcia w poprzednim zadaniu, jeżeli współczynnik tarcia skrzyni o powierzchnię równi zmalałby w taki sposób, że pod działaniem takiej samej poziomo skierowanej siły po przebyciu 8 metrów jej prędkość wynosiłabym 5 m/s?

100. Siła $F(x)$ zależy od położenia tak jak pokazano na rysunku. Znajdź pracę tej siły przy zmianie położenia cząstki z $x = 1{,}0\ \mathrm{m}$ do $x = 5{,}0\ \mathrm{m}$



101. Wyznacz pracę siły z Przykładu 7.4 wykonaną pomiędzy tymi samymi punktami $A = (0\ \mathrm{m},\ 0\ \mathrm{m})$ i $B = (2\ \mathrm{m},\ 2\ \mathrm{m})$ wzdłuż łuku o promieniu 2 m i środku promienia krzywizny w punkcie $(0\ \mathrm{m},\ 2\ \mathrm{m})$. Oblicz całkowitą drogę, używając współrzędnych kartezjańskich. (*Wskazówka:* Będziesz potrzebować tablicy całek.)

102. Rozwiąż poprzednie zadanie, korzystając ze współrzędnych biegunowych.

103. Wyznacz pracę siły z Przykładu 7.4, wykonaną pomiędzy tymi samymi punktami $A = (0\ \mathrm{m},\ 0\ \mathrm{m})$ i $B = (2\ \mathrm{m},\ 2\ \mathrm{m})$, wzdłuż łuku o promieniu 2 m i środku promienia krzywizny w punkcie $(2\ \mathrm{m},\ 0\ \mathrm{m})$. Oblicz całkowitą drogę, używając współrzędnych kartezjańskich. (*Wskazówka:* Będziesz potrzebować tablicy całek.)

104. Rozwiąż poprzednie, zadanie korzystając ze współrzędnych biegunowych.

105. Stała moc P dostarczana jest przez silnik do samochodu o masie m. Wykaż, że w przypadku gdy zaniedbujemy siły oporów ruchu, odległość, którą pokonuje on od momentu rozpoczęcia ruchu w czasie t, jest dana wyrażeniem $s = (8P/9m)^{1/2} t^{3/2}$.

106. Załóżmy, że opór powietrza nie zależy od prędkości samochodu. Kiedy samochód porusza się z prędkością 15 m/s, silnik dostarcza do jego kół moc 20 KM.
a. Ile wynosi moc dostarczana do kół przy prędkości 30 m/s?
b. Ile energii jest potrzebne, aby przejechać $10\ \mathrm{km}$ tym samochodem z prędkością 15 m/s, a ile z prędkością 30 m/s? Możemy założyć, że silnik posiada sprawność 25%.
c. Odpowiedz na pytanie (b), nie uwzględniając pierwszego założenia i przyjmując, że opór powietrza jest wprost proporcjonalny do prędkości.

107. Założ, że sprężyna z Rysunku 7.7(a) ma masę M (gęstość liniowa sprężyny jest stała). Lewy koniec sprężyny jest zamocowany na stałe do ściany, natomiast prawy w pozycji równowagi $x = 0\ \mathrm{m}$ porusza się z prędkością v na kierunku x. Jaka jest całkowita energia kinetyczna sprężyny? (*Wskazówka:* Najpierw napisz wyrażenie opisujące energię kinetyczną nieskończenie małej masy sprężyny $\mathrm{d}m$ w odniesieniu do masy całej sprężyny i jej długości w położeniu równowagi oraz długości sprężyny, a następnie oblicz odpowiednią całkę.)

8 | ENERGIA POTENCJALNA I ZASADA ZACHOWANIA ENERGII



Rysunek 8.1 Zdjęcie przedstawia fragment rzeźby „Kulkowa Machina” autorstwa George'a Rhoadsa. Kulka w tym układzie jest podnoszona, kręci się, spada, odbija i zderza z różnymi elementami toru. W trakcie tej podróży energia kinetyczna kulki zmienia się w określony, przewidywalny sposób, który zależy od jej położenia i oddziaływania z innymi obiektami. (Źródło: modyfikacja pracy Rolanda Tanglao)

Treść rozdziału

Wstęp

W dziele George'a Rhoadsa ruch kulek jest bezpośrednim wynikiem spełnienia zasady zachowania energii. Zasada zachowania energii łączy interakcje pomiędzy kulkami ze zmianą energii kinetycznej oraz jej konwersją na inne formy energii. W tym rozdziale wprowadzimy pojęcie energii potencjalnej i wyjaśnimy jego znaczenie w kontekście ruchu mechanicznego. Pozwoli nam to na sformułowanie zasady zachowania energii i zastosowanie jej w prostych układach, co w znaczącym stopniu ułatwia ich rozwiązanie. Końcowa część rozdziału dotycząca różnych źródeł energii pozwoli nam zrozumieć reguły konwersji jednego rodzaju energii w drugą. W dalszych częściach książki zasada zachowania będzie, wraz z rosnącą złożonością poruszanych zagadnień, stosowana w coraz bardziej szczegółowy sposób.

8.1 | Energia potencjalna układu

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

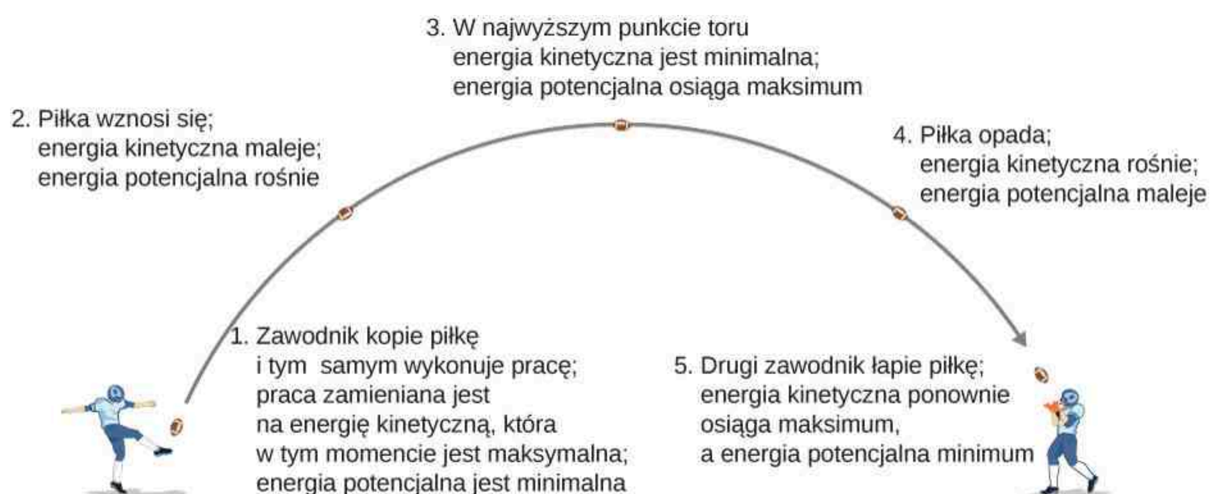
- wiązać różnicę energii potencjalnej z pracą wykonaną nad ciałem w układzie pozbawionym tarcia oraz oporu powietrza;
- wyjaśniać znaczenie zerowej energii potencjalnej w danym układzie;
- obliczać i stosować energię potencjalną grawitacji ciała znajdującego się w pobliżu powierzchni Ziemi, a także energię potencjalną sprężystości w układzie z masą na sprężynie.

W podrozdziale Praca pokazaliśmy, że praca wykonana przez siłę grawitacji działającą na ciało znajdujące się w pobliżu powierzchni Ziemi nie jest zależna od toru ruchu, a zależy jedynie od różnicy położeń: końcowego i początkowego. Istnienie takiej zależności pozwala nam na wprowadzenie nowego, innego niż kinetyczna rodzaju energii – **energii potencjalnej** (ang. **potential energy**). W kolejnych sekcjach tego rozdziału będziemy rozważać różne formy energii potencjalnej.

Energia potencjalna: podstawy

W rozdziale Ruch w dwóch i trzech wymiarach analizowaliśmy ruch ciała w rzucie ukośnym podobny do tego przedstawionego na Rysunku 8.2, gdzie zawodnik kopie piłkę. W tym przykładzie zignorujemy siły tarcia i opór powietrza. Podczas wznoszenia się piłki praca sił grawitacji ma znak ujemny, ponieważ przesunięcie pionowe piłki jest dodatnie (piłka się unosi), natomiast siła grawitacji jest skierowana w dół. Zauważmy, że piłka spowalnia w trakcie ruchu w górę, aż do momentu osiągnięcia najwyższego punktu swojego lotu. Ta „utracona” energia kinetyczna jest zamieniana na energię potencjalną grawitacji układu piłka-Ziemia.

Gdy piłka opada w kierunku Ziemi, praca ma znak dodatni, ponieważ zarówno siła, jak i przesunięcie są skierowane w dół. Piłka przyspiesza, co przekłada się na wzrost energii kinetycznej. Energia jest zatem zamieniana z energii potencjalnej grawitacji z powrotem na kinetyczną.



Rysunek 8.2 W trakcie lotu piłki w górę i w dół energia kinetyczna zamienia się w energię potencjalną grawitacji i na odwrót.

W oparciu o ten przykład możemy zdefiniować różnicę energii potencjalnej w punktach A i B jako pracę wykonaną przez pewną siłę wziętą ze znakiem minus:

$$\Delta E_{pAB} = E_{pB} - E_{pA} = -W_{AB}. \tag{8.1}$$

Wzór definiuje **różnicę energii potencjalnej** (ang. **potential energy difference**), a nie wartość bezwzględną energii. W związku z tym, aby wyznaczyć energię potencjalną w danym punkcie, powinniśmy porównać ją z wartością energii w punkcie, w którym jest ona znana. Punkt ten nazywamy punktem odniesienia. Oznaczając punkt odniesienia przez $\vec{r}_0$ możemy powyższy wzór zapisać następująco:

$$\Delta E_p = E_p\left(\vec{r}\right) - E_p\left(\vec{r}_0\right). \tag{8.2}$$

Punkt odniesienia $\vec{r}_0$, w którym energia potencjalna ma znaną, standardową wartość, jest dobierany w taki sposób, aby jak najbardziej uprościć rozpatrywane zagadnienie. Należy pamiętać, że niezależnie od tego, w jaki sposób go określono w trakcie rozwiązywania danego problemu fizycznego, należy konsekwentnie trzymać się tego wyboru. Istnieje kilka ogólnie przyjętych sposobów wyboru wartości odniesienia dla energii potencjalnej. Na przykład najniższe położenie w danym układzie jest zazwyczaj uznawane za zero dla energii potencjalnej grawitacji. Innym sposobem określenia zerowej energii jest umieszczenie ciała w punkcie jak najbardziej (nieskończenie) oddalonym, gdzie wartość siły oddziaływania można przyjąć za równą zero. Przy takim wyborze, przyjmując energię równą zero w $\vec{r}_0$, zmianę energii potencjalnej można po prostu wyrazić jako energię potencjalną w danym punkcie $\Delta E_p = E_p\left(\vec{r}\right)$.

Jeśli nie ma sił tarcia ani oporu powietrza, to zmiana energii kinetycznej piłki jest równa zmianie energii potencjalnej grawitacji. To stwierdzenie można uogólnić na dowolny typ energii potencjalnej:

$$\Delta E_{kAB} = \Delta E_{pAB}. \tag{8.3}$$

Przeanalizujmy następujące przykłady, w których przyjęliśmy zero energii potencjalnej grawitacji w różnych punktach.

Przykład 8.1

Podstawowe właściwości energii potencjalnej

Cząstka porusza się wzdłuż osi x pod wpływem siły przyciągającej określonej równaniem $F = -ax^2$, gdzie $a = 3\ \text{N/m}^2$. (a) Jaka jest różnica energii potencjalnej przy przemieszczeniu cząstki z $x_A = 1\ \text{m}$ do $x_B = 2\ \text{m}$? (b) Oblicz energię potencjalną cząstki w $x = 1\ \text{m}$, wiedząc, że energia potencjalna w $x = 0\ \text{m}$ wynosi 0,5 J.

Strategia rozwiązania

(a) Różnica energii potencjalnej jest równa wartości wykonanej pracy wziętej ze znakiem minus, tak jak określa to Równanie 8.1. W poprzednim rozdziale praca została zdefiniowana poprzez iloczyn skalarny siły i wektora przemieszczenia. Cząstka porusza się w kierunku dodatnim x, zatem iloczyn skalarny sprowadza się się do zwykłego iloczynu wartości wektorów $(\hat{i} \cdot \hat{i} = 1)$. Żeby wyznaczyć pracę, musimy obliczyć całkę w określonych granicach. Po scałkowaniu możemy określić pracę oraz energię kinetyczną. (b) Energia potencjalna (w stosunku do znanej energii odniesienia w $x = 0$) to całka nieoznaczona, taka sama jak ta przedstawiona w części (a), ze stałą całkowania określoną poprzez Równanie 8.3. Następnie, poprzez wstawienie wartości x do wzoru na energię potencjalną obliczamy jej wartość w $x = 1\ \text{m}$.

Rozwiązanie

a. Praca wykonana przez siłę podczas przesunięcia cząstki z położenia x do $x + \text{d}x$ w jednym wymiarze wynosi:

$$\text{d}W = \vec{F} \cdot \text{d}\vec{r} = F\text{d}x = -ax^2\text{d}x.$$

Podstawiając to wyrażenie do Równania 8.1, otrzymujemy:

b. $\Delta E_p = -W = \int_{x_1}^{x_2} ax^2\text{d}x = \frac{1}{3} \cdot 3\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \left[x^3\right]_{1\ \text{m}}^{2\ \text{m}} = 7\ \text{J}.$

c. Całka nieoznaczona pozwalająca wyznaczyć energię potencjalną z przykładu (a) jest równa:

$$E_p(x) = \frac{1}{3}ax^3 + \text{const.},$$

zakładamy, że stała całkowania wynosi

$$E_p(0) = 0{,}5\ \text{J}.$$

Stąd energia potencjalna w odniesieniu do zera w punkcie $x = 0$ wyrażona jest jako

$$E_p(x) = \frac{1}{3}ax^3 + 0{,}5\ \text{J}.$$

Energia potencjalna w $x = 1\ \text{m}$ wynosi:

$$E_p(1\ \text{m}) = \frac{1}{3} \cdot 3\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot (1\ \text{m})^3 + 0{,}5\ \text{J} = 1{,}5\ \text{J}.$$

Znaczenie

W tym jednowymiarowym przykładzie każda funkcja, którą możemy scałkować niezależnie od drogi, jest zachowawcza. Zauważ, w jaki sposób zastosowaliśmy definicję różnicy energii potencjalnej w celu wyznaczenia energii potencjalnej w odniesieniu do zera w wybranym punkcie. Przeanalizuj też wartości energii, które można wyznaczyć na podstawie podpunktu (b) (np. $E_p(1\ \text{m}) = 1\ \text{J}$ oraz $E_p(2\ \text{m}) = 8\ \text{J}$) w odniesieniu do różnicy wyznaczonej na podstawie (a).



8.1 Sprawdź, czy rozumiesz. W Przykładzie 8.1 ile będzie wynosić wartość energii potencjalnej w $x = 1\ \text{m}$ oraz $x = 2\ \text{m}$, jeśli zero energii przyjmiemy w $x = 1{,}5\ \text{m}$? Wykaż, że różnica energii potencjalnych w tych dwóch punktach ciągle wynosi 7 J.

Układy wielu cząstek

Rozpatrywany układ może zawierać wiele cząstek (lub w ogólności ciał fizycznych). Różnica energii potencjalnej będzie wtedy wyrażona poprzez wziętą z minusem pracę, wykonaną przez siły grawitacyjne lub sprężystości, które, jak to zobaczymy w następnych częściach rozdziału, są siłami zachowawczymi. Różnica energii potencjalnej zależy tylko i wyłącznie od końcowej różnicy położenia cząstek i od pewnych parametrów charakteryzujących oddziaływanie (np. masa w przypadku grawitacji albo stała sprężystości występująca w prawie Hooke'a).

Zapamiętaj, że energia potencjalna jest właściwością związaną z oddziaływaniami pomiędzy różnymi ciałami w układzie, a nie własnością pojedynczego obiektu. Jest to szczególnie istotne w przypadku rozpatrywania sił elektrostatycznych. Natomiast w przykładach rozpatrywanych poniżej elementy układu są tak olbrzymie (jak Ziemia w porównaniu do ciała znajdującego się na jej powierzchni) albo małe (jak nieważka sprężyna), że zmiany, którym ulegają, są nieistotne w naszych rozważaniach.

Rodzaje energii potencjalnej

Dla każdego rodzaju oddziaływania zachowawczego w układzie możesz wprowadzić odpowiadającą mu energię potencjalną. Całkowita energia potencjalna układu jest równa sumie wszystkich rodzajów energii potencjalnej. Można je do siebie dodawać, ponieważ są to wielkości skalarne. Przeanalizujmy teraz pewne wybrane zagadnienia dla szczególnych rodzajów energii omawianej w rozdziale Praca. Najpierw rozważmy każdą z działających sił oddzielnie, a potem łącznie.

Energia potencjalna grawitacji w pobliżu powierzchni Ziemi

Rozważmy układ składający się z Ziemi oraz jednej lub większej liczby cząsteczek w pobliżu jej powierzchni (albo innego rodzaju ciał, których masa jest znikoma w porównaniu do masy planety). Siła grawitacji działająca na każdą cząsteczkę (albo ciało) na powierzchni jest skierowana pionowo w dół, a jej wartość obliczamy ze wzoru $F_g = mg$. Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki Newtona każda cząstka, na którą działa siła grawitacji, wynikająca z przyciągania cząstki przez Ziemię, działa na Ziemię siłą o takiej samej wartości, ale o przeciwnym zwrocie. Na podstawie drugiej

zasady dynamiki Newtona możemy wyznaczyć przyspieszenie związane z siłą, z jaką każda cząstka działa na Ziemię. Przyspieszenie Ziemi jest równe sile oddziaływania (czyli w tym przypadku ciężarowi cząstki mg) podzielonej przez masę Ziemi. Masa planety jest bardzo duża w porównaniu do masy cząsteczki, a więc przyspieszenie Ziemi jest bardzo małe. Ruch Ziemi wynikający z tego oddziaływania może zostać pominięty. W rozpatrywanym układzie (grupy cząstek znajdujących się w pobliżu powierzchni Ziemi) na wszystkie cząstki działa jednorodna siła grawitacji naszej planety.

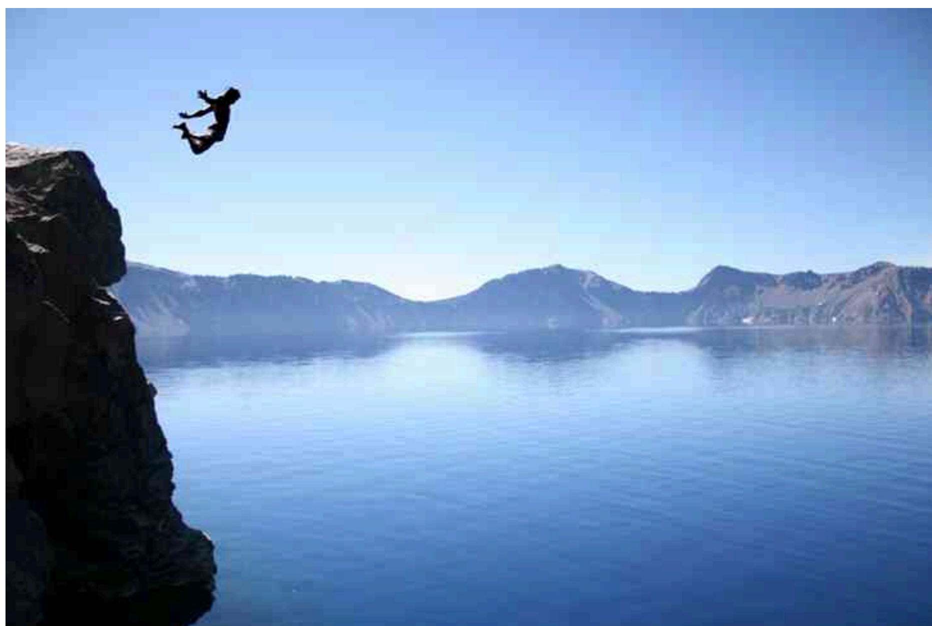
W podrozdziale Praca pokazaliśmy, że praca wykonywana nad ciałem przez siłę grawitacyjną Ziemi (w pobliżu jej powierzchni) zależy od jego masy, przyspieszenia ziemskiego i różnicy wysokości, którą ciało pokonało podczas swojego ruchu (tak jak przedstawiono to w Równaniu 7.4). Z definicji, praca jest różnicą energii potencjalnej w polu grawitacyjnym Ziemi, wziętą ze znakiem minus, opisaną poniższym wzorem:

$$\Delta E_{p_{\text{graw}}} = -W_{\text{graw}_{AB}} = mg(y_B - y_A). \tag{8.4}$$

Zatem **energia potencjalna grawitacji** (ang. **gravitational potential energy**) w pobliżu powierzchni Ziemi jest opisana wzorem:

$$E_p(y) = mgy + \text{const.} \tag{8.5}$$

W powyższym równaniu wybór stałej jest dowolny (może być taki jak ten opisany w Równaniu 8.2), jednakże najwygodniej jest przyjąć zero energii potencjalnej w $y = 0$, czyli w najniższym możliwym położeniu rozpatrywanego układu.



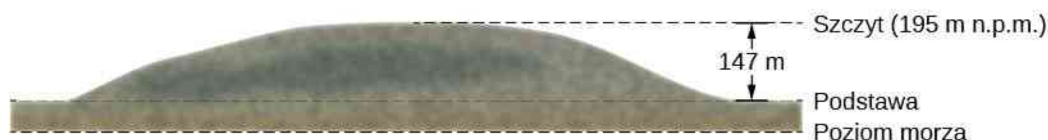
Rysunek 8.3 Nie skacz – masz ogromny potencjał (w postaci energii potencjalnej)! (Źródło: Andy Spearing)

Przykład 8.2

Energia potencjalna grawitacji turysty

Szczyt wzgórza Great Blue Hill w Milton (Massachusetts) ma wysokość 195 m, licząc od poziomu morza, a od podstawy – 147 m (Rysunek 8.4) (Przez rdzennych Amerykanów szczyt jest określany mianem *Massachusett* i tego słowa osadnicy europejscy zaczęli używać jako nazwy dla okolicznych obszarów). Turysta o masie 75 kg wspina się na szczyt wzgórza. Jaka jest energia potencjalna turysty (w odniesieniu do energii, jaką miałby on znajdując się na wysokości podstawy wzgórza, którą traktujemy jako poziom odniesienia) w momencie, gdy turysta znajduje się:

a. na wysokości podstawy wzgórza;
b. na szczycie;
c. na wysokości poziomu morza?



Rysunek 8.4 Szkic profilu wzgórza Great Blue Hill w Milton (Massachusetts). Na rysunku zaznaczono rozpatrywane poziomy.

Strategia rozwiązania

Najpierw musimy przyjąć początek osi y i określić wartość odniesienia dla energii potencjalnej. W tym przypadku za początek układu współrzędnych należy przyjąć podstawę wzgórza oraz założyć, że energia potencjalna wynosi zero dla $y = 0$. Następnie energię potencjalną turysty na danej wysokości należy obliczyć w odniesieniu do przyjętego punktu.

Rozwiązanie

a. Wybierzmy początek osi y na wysokości podstawy. W tym punkcie przyjmiemy energię potencjalną równą zero. Takie założenie sprawi, że stała całkowania ze wzoru na energię potencjalną będzie równa zero:

$$E_p(\text{podstawa}) = E_p(0) = 0\,\text{kJ}.$$

b. Szczyt znajduje się na wysokości $y = 147\text{ m}$ nad podstawą, więc:

$$E_p(\text{szczyt}) = E_p(147\text{ m}) = mgh = 75\,\text{kg} \cdot 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 147\text{ m} = 108\,\text{kJ}.$$

c. Poziom morza znajduje się na wysokości $y = 147\text{ m} - 195\text{ m} = -48\text{ m}$, a zatem:

$$E_p(\text{poziom morza}) = E_p(-48\text{ m}) = mgh = 75\,\text{kg} \cdot 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (-48\text{ m}) = -35{,}3\,\text{kJ}.$$

Znaczenie

Przedstawiliśmy użyteczność Równania 8.4 oraz Równania 8.5, a także wyznaczyliśmy wartości energii potencjalnej, które są racjonalne z fizycznego punktu widzenia. Energia potencjalna grawitacji jest największa na szczycie oraz najmniejsza na poziomie morza. Siła grawitacji wykonuje pracę – również kiedy się wspinasz! Praca sił grawitacji ma wtedy wartość ujemną i w porównaniu do pracy wykonywanej przez twoje mięśnie jest nieznacząca. Niemniej jednak ta praca istnieje! Podobnie w drodze w dół – twoje mięśnie też wykonują pracę, ale o ujemnym znaku. Wartości liczbowe energii potencjalnej zależą od punku odniesienia, natomiast różnica energii potencjalnej, która ma większy sens fizyczny, już nie. Zauważ, że Równanie 8.2 przedstawia różnicę, której wartości liczbowe nie zależą od początku układu współrzędnych.



8.2 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Jakie są wartości energii potencjalnej grawitacji turysty na wysokości szczytu, podstawy wzgórza i poziomu morza w sytuacji, gdy zero energii potencjalnej przyjmiemy na poziomie morza?

Energia potencjalna sprężystości

W podrozdziale Praca wykazaliśmy, że praca wykonana przez idealną sprężynę, w jednym wymiarze, zależy wyłącznie od stałej sprężystości i kwadratu przemieszczenia (w odniesieniu do nierozciągniętej sprężyny), tak jak przedstawia to Równanie 7.5. Wyznaczona praca jest wynikiem własności prawa Hooka, a nie cech charakterystycznych

sprężyny (z wyjątkiem stałej sprężystości) czy ciała, które do niej dołączono. W związku z tym możemy zdefiniować pojęcie różnicy **energii potencjalnej sprężystości** (ang. **elastic potential energy**) jako pracę wykonaną przez siłę sprężystości wziętą ze znakiem minus. Wyrażenie możemy wyprowadzić już teraz, zanim poddamy analizie układ, w którym takie oddziaływania występują:

$$\Delta E_p = -W_{AB} = \frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2). \tag{8.6}$$

W powyższym równaniu A oznacza punkt, z którego ciało rozpoczęło ruch, a B końcowy punkt ruchu. Energia potencjalna związana z tą różnicą opisana jest wzorem:

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \text{const}. \tag{8.7}$$

Jeśli siła sprężystości jest jedyną siłą działającą w rozpatrywanym układzie, to najprościej jest przyjąć zero energii potencjalnej w $x = 0$, czyli wtedy, gdy sprężyna jest nierozciągnięta. W takiej sytuacji stała z Równania 8.7 wynosi zero. (W przypadku gdy na ciało działa więcej sił, przyjęcie innego punktu zerowego może być wygodniejsze.)

Przykład 8.3

Energia potencjalna sprężyny

Układ składa się ze sprężyny o długości wynoszącej w stanie nierozciągniętym 20 cm i stałej sprężystości 4 N/cm. (a) Jaką energię potencjalną posiada rozciągnięta sprężyna o długości 23 cm? (b) Jaką energię potencjalną posiada rozciągnięta sprężyna o długości 26 cm?

Strategia rozwiązania

Energia potencjalna nierozciągniętej sprężyny wynosi zero, a więc możemy użyć Równania 8.7 ze stałą równą zero. Przyjmijmy, że x to odkształcenie, czyli różnica pomiędzy długością sprężyny rozciągniętej i sprężyny nierozciągniętej. Zatem dla sprężyny rozciągniętej możemy użyć wartości x, aby obliczyć wartość energii potencjalnej.

Rozwiązanie

a. Odkształcenie sprężyny wynosi $x = 23\text{ cm} - 20\text{ cm} = 3\text{ cm}$, więc związana z nim energia potencjalna jest równa $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \cdot 4\,\frac{\text{N}}{\text{cm}} \cdot (3\text{ cm})^2 = 0{,}18\text{ J}$.

b. Sprężyna jest odkształcona na długość $x = 26\text{ cm} - 20\text{ cm} = 6\text{ cm}$, zatem energia potencjalna wynosi $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \cdot 4\,\frac{\text{N}}{\text{cm}} \cdot (6\text{ cm})^2 = 0{,}72\text{ J}$. Wzrost energii w porównaniu do podpunktu (a) jest równy 0,54 J.

Znaczenie

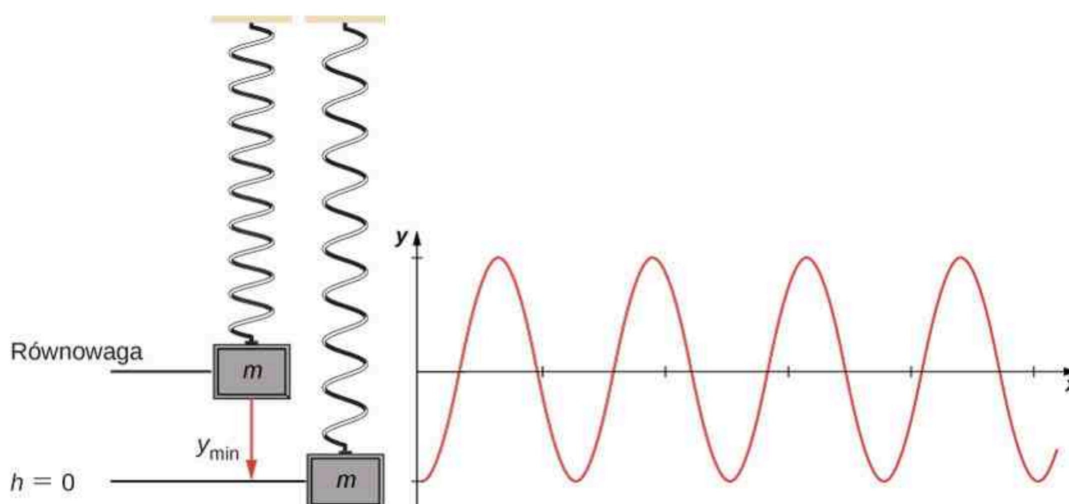
Obliczenie energii potencjalnej sprężystości na podstawie Równania 8.7 wymaga rozwiązania równania dla danych długości sprężyny. Skoro energia potencjalna zależy od x^2, to jej wartość dla ściskania (ujemny x) jest taka sama jak dla rozciągania (dodatni x) sprężyny.



8.3 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Kiedy długość sprężyny w Przykładzie 8.3 zmienia się z 22,0 cm do pewnej wartości końcowej, energia potencjalna sprężystości zmienia się o $-0{,}0800\text{ J}$. Znajdź długość końcową.

Energia potencjalna grawitacji i sprężystości

Masa zawieszona na sprężynie to przykład prostego, jednowymiarowego układu, uwzględniającego zarówno oddziaływania sprężyste, jak i grawitacyjne. Drugi koniec sprężyny jest przymocowany tak, jak to przedstawiono na Rysunku 8.5.



Rysunek 8.5 Układ pionowy masa-sprężyna; oś y jest skierowana w górę. Początkowo masa znajduje się w położeniu równowagi, a następnie odciągnięta zostaje w dół do położenia y_{min}. Po uwolnieniu sprężyny rozpoczyna się ruch drgający wokół położenia równowagi.

Rozpocznijmy od rozważenia energii potencjalnej grawitacji tego układu. Załóżmy, że sprężyna jest nieważka, a jedynie układ ciężarek – Ziemia uzyskuje lub traci energię potencjalną. Musimy zdefiniować punkt odniesienia dla funkcji energii potencjalnej przedstawionej w Równaniu 8.5. Poziom podłoża w zadaniach związanych z polem grawitacyjnym Ziemi jest często uznawany za najwygodniejszy wybór. Jednakże w tym przypadku przyjęcie zera energii w najniższym punkcie ruchu, czyli $h = 0$, będzie bardziej korzystne. Zauważ, że wybór jest dowolny i dla innego punktu odniesienia rozwiązanie zadania i tak dałoby ten sam wynik.

Musimy też zdefiniować punkt odniesienia dla energii potencjalnej sprężystości zgodnie z Równaniem 8.7. Położenie równowagi jest punktem matematycznie najdogodniejszym do przyjęcia zera energii potencjalnej sprężystości.

Przyjmując powyższe założenia, każdą z energii potencjalnych oraz energię kinetyczną możemy zapisać w odniesieniu do trzech punktów krytycznych układu: (1) najniższe położenie ciężarka, (2) położenie równowagi układu masa-sprężyna oraz (3) najwyższy punkt osiągany przez ciało. Zauważmy, że energia całkowita układu musi być zachowana, a zatem poszczególne postacie energii przekształcają się w siebie nawzajem. Wynik rozważań przedstawiono w Tabeli 8.1.

	Energia potencjalna grawitacji	**Energia potencjalna sprężystości**	**Energia kinetyczna**
(3) Najwyższy punkt	$2mgy_{\text{min}}$	$\frac{1}{2}ky^2{}_{\text{min}}$	0
(2) Równowaga	mgy_{min}	0	$\frac{1}{2}mv^2$
(1) Najniższy punkt	0	$\frac{1}{2}ky^2{}_{\text{min}}$	0

Tabela 8.1 Energie składowe w układzie pionowym masa-sprężyna



Rysunek 8.6 **Skoczek na bungee** (ang. **bungee jumper**) zamienia swoją energię potencjalną grawitacji na początku ruchu na energię potencjalną sprężystości na końcu.

Przykład 8.4

Energia potencjalna układu pionowego masa-sprężyna

Ciężarek o ciężarze 12 N jest zawieszony na sprężynie o stałej sprężystości $6{,}0 \text{ N/m}$, tak jak przedstawiono na Rysunku 8.5. Następnie ciężarek jest odchylony na odległość $5{,}0 \text{ cm}$ od położenia równowagi i puszczony swobodnie.

a. Jaka jest różnica energii potencjalnej sprężystości pomiędzy nowym położeniem i położeniem równowagi?
b. Jaka jest różnica energii potencjalnej grawitacji pomiędzy tymi położeniami?
c. Jaka jest energia kinetyczna ciężarka, kiedy przechodzi on przez położenie równowagi?

Strategia rozwiązania

W części (a) i (b) musimy znaleźć różnicę energii potencjalnej, więc możemy skorzystać odpowiednio z Równania 8.6 i Równania 8.4. Każde z tych równań pozwala obliczyć energię w odniesieniu do określonego położenia, co podkreśla fakt, że energia potencjalna zawsze jest obliczana w stosunku do jakiegoś punktu odniesienia. Wybierając punkty odniesienia, takie jak omawiano poprzednio, czyli minimum energii potencjalnej grawitacji w najniższym punkcie ruchu, a minimum energii sprężystości w położeniu równowagi układu masa-sprężyna, możemy obliczyć odpowiednie różnice energii. W części (c) należy zwrócić uwagę na różnicę dwóch rodzajów energii potencjalnej: grawitacji i sprężystości. Dzięki niej możemy obliczyć energię kinetyczną, ponieważ w rozważanym układzie nie ma tarcia, a energia całkowita musi zostać zachowana.

Rozwiązanie

a. Punkt odniesienia dla energii potencjalnej sprężystości znajduje się w położeniu równowagi, zatem różnicę energii potencjalnej sprężystości wyznaczamy jako

$$\Delta E_{p_{\text{spr}}} = 0 - \frac{1}{2}ky^2_{\text{min}} = -\frac{1}{2} \cdot 6{,}0 \, \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (5{,}0 \text{ cm})^2 = -0{,}75 \text{ J}.$$

b. W związku z tym, że minimum energii potencjalnej grawitacji przypada w najniższym położeniu, możemy ją wyznaczyć w następujący sposób:

$$\Delta E_{p_{\text{graw}}} = mgy - 0 = 12\,\text{N} \cdot 5{,}0\,\text{cm} = 0{,}60\,\text{J}.$$

c. Ciężarek odciągnięto w dół, nadając mu energię potencjalną sprężystości, równą $0{,}75\,\text{J}$. Energia potencjalna grawitacji potrzebna do wzniesienia go na wysokość 5,0 cm wynosi 0,60 J. Pozostała energia musi być zatem równa energii kinetycznej w położeniu równowagi. Możemy znaleźć jej wartość poprzez Równanie 8.2:

$$\Delta E_k = -(\Delta E_{p_{\text{spr}}} + \Delta E_{p_{\text{graw}}}) = -(-0{,}75\,\text{J} + 0{,}60\,\text{J}) = 0{,}15\,\text{J}.$$

Znaczenie

Chociaż energia potencjalna jest zawsze liczona względem jakiegoś punktu, rozwiązanie powyższego problemu jest niezależne od wyboru tego punktu.



8.4 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Załóżmy, że masa w Przykładzie 8.4 jest w równowadze, a ty odciągasz ciężarek w dół o 3 cm więcej niż w rozważanym uprzednio przykładzie (czyli całkowite wydłużenie wynosi $8{,}0\,\text{cm}$). Energia potencjalna sprężystości wzrasta, ponieważ rozciągasz ją bardziej, ale energia potencjalna grawitacji maleje, ponieważ ciężarek znajduje się dalej od położenia równowagi niż poprzednio. Czy sumaryczna energia potencjalna rośnie, maleje czy pozostaje bez zmian?



Wyświetl symulację (https://openstaxcollege.org/l/21conenerskat) , aby dowiedzieć się więcej o zasadzie zachowania energii na przykładzie skatera. Buduj tory, rampy i skocznie dla skatera, wyświetlaj wskazania energii kinetycznej, potencjalnej oraz tarcia w trakcie jego ruchu. Możesz zabrać skatera na inne planety, a nawet w przestrzeń kosmiczną!

Zestawienie wartości różnych energii występujących we wszechświecie zebrano w Tabeli 8.2 po to, by pokazać przykłady typowych wartości energii związanych z pewnymi zjawiskami. Część wartości obliczono na podstawie energii kinetycznej, a inne bazują na różnego rodzaju wielkościach energii potencjalnej (ale nie będziemy ich omawiać w tym miejscu).

Obiekt lub zjawisko	Energia w dżulach
Wielki Wybuch	$1{,}0 \cdot 10^{68}$
Roczne światowe zużycie energii	$4{,}0 \cdot 10^{20}$
Duża fuzyjna bomba atomowa (9 megaton)	$3{,}8 \cdot 10^{16}$
Niewielka rozszczepieniowa bomba atomowa (np. jak ta zrzucona na Hiroszimę; 10 kiloton)	$4{,}2 \cdot 10^{13}$
1 baryłka ropy naftowej	$5{,}9 \cdot 10^{9}$
1 tona trotylu	$4{,}2 \cdot 10^{9}$
1 galon benzyny (ok. 4 litry)	$1{,}2 \cdot 10^{8}$
Zalecana dzienna dawka spożycia dla dorosłego człowieka	$1{,}2 \cdot 10^{7}$
Samochód o masie 1000 kg i prędkości 90 km/h	$3{,}1 \cdot 10^{5}$
Piłka tenisowa o prędkości 100 km/h	22
Komar (10^{-2} g o prędkości 0,5 m/s)	$1{,}3 \cdot 10^{-6}$
Pojedynczy elektron w kineskopie telewizora	$4{,}0 \cdot 10^{-15}$
Energia potrzebna do zerwania jednego łańcucha DNA	$1{,}0 \cdot 10^{-19}$

Tabela 8.2 Energie różnych obiektów i zjawisk

8.2 | Siły zachowawcze i niezachowawcze

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać siły zachowawcze na kilka sposobów;
- podawać warunki, które muszą być spełnione przez siły zachowawcze;
- wiązać siły zachowawcze oddziałujące między cząsteczkami z ich energią potencjalną;
- obliczać składowe siły zachowawczej w różnych przypadkach.

Do tej pory w rozdziale Energia potencjalna i zasada zachowania energii każdorazowa konwersja energii kinetycznej i potencjalnej spełniała zasadę zachowania energii. Prawo działało niezależnie od drogi przebytej przez ciało, tzn. mogliśmy analizować ciało w dowolnych dwóch punktach ruchu i suma jego energii potencjalnej i kinetycznej w obu punktach była sobie równa. Jest to cecha charakterystyczna **sił zachowawczych** (ang. **conservative force**). W zagadnieniach analizowanych w poprzedniej sekcji mieliśmy do czynienia właśnie z takimi siłami, przykładami których są siły grawitacji i sprężystości. W analizie ruchu piłki na Rysunku 8.2 całkowita energia mechaniczna nigdy się nie zmieniała, zarówno wtedy, gdy ciało zwiększało swoją energię potencjalną podczas wznoszenia, jak i odwrotnie, gdy zmniejszało ją podczas lotu opadającego. **Siły niezachowawcze** (ang. **non-conservative force**) mają inne właściwości. Są to siły rozpraszające (dyssypatywne), których przykładami są tarcie oraz opory powietrza. Oddziaływania takiego rodzaju prowadzą do rozproszenia energii, czyli nieodwracalnej przemiany energii, której potem nie można odzyskać. Praca sił niezachowawczych jest zależna od przebytej drogi.

Siła zachowawcza

Praca wykonana przez siłę zachowawczą nie zależy od drogi. Innymi słowy praca siły zachowawczej jest taka sama dla każdej drogi biegnącej pomiędzy dwoma położeniami:

$$W_{AB_{\text{droga 1}}} = \int\limits_{AB_{\text{droga 1}}} \vec{F}_{\text{zach}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = W_{AB_{\text{droga 2}}} = \int\limits_{AB_{\text{droga 2}}} \vec{F}_{\text{zach}} \cdot \mathrm{d}\vec{r}. \tag{8.8}$$

Natomiast praca siły niezachowawczej zależy od drogi przebytej przez ciało.

Można zatem powiedzieć, że praca wykonana przez siły zachowawcze na drodze zamkniętej (pętli) jest równa zero:

$$W_{\text{droga zamk.}} = \oint \vec{E}_{\text{zach}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0. \tag{8.9}$$

W Równaniu 8.9 korzystamy z notacji, w której okrąg w znaku całki oznacza całkowanie po krzywej zamkniętej – jest to sposób zapisu często spotykany w podręcznikach z zakresu fizyki i techniki. Równanie 8.8 oraz Równanie 8.9 są równoważne, ponieważ każda droga zamknięta jest sumą dwóch dróg: przebytą z punktu A do B oraz w drugą stronę od B do A. Praca obliczona wzdłuż drogi od B do A to ujemna wartość pracy obliczonej wzdłuż drogi od A do B, gdzie A i B to dowolne dwa punkty leżące na konturze drogi zamkniętej:

$$\begin{aligned} 0 = \int \vec{F}_{\text{zach}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} &= \int\limits_{AB\,\text{droga 1}} \vec{F}_{\text{zach}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int\limits_{BA\,\text{droga 2}} \vec{F}_{\text{zach}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \\ &= \int\limits_{AB\,\text{droga 1}} \vec{F}_{\text{zach}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} - \int\limits_{AB\,\text{droga 2}} \vec{F}_{\text{zach}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0. \end{aligned}$$

Definicja siły zachowawczej zakłada, że wykonana przez nią praca po dowolnej drodze pomiędzy A i B jest taka sama, ale w celu obliczenia całki trzeba dokonać wyboru jakiejś konkretnej drogi. Jak w takim razie ustalić, czy siła jest zachowawcza, czy nie? Aby tego dokonać, musimy zauważyć, że praca jest niezależna od drogi, jeśli przyczynek (czyli bardzo mały przyrost danej wielkości) do pracy $\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ jest taki, że jego **różniczka zupełna** (ang. **exact differential**) jest równa różniczce zupełnej energii kinetycznej $\mathrm{d}W_{\text{wyp}} = m\vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{v} = \mathrm{d}(mv^2/2)$. Podobna zależność obowiązuje dla równoważności pracy i energii, co zostało pokazane w podrozdziale Zasada zachowania ener-

gii mechanicznej. Istnieje aparat matematyczny, który pozwala sprawdzić, czy przyczynek do pracy wynikający z działania danej siły jest równy różniczce zupełnej energii kinetycznej, i tym samym wykazać, że siła jest zachowawcza. Zastosowanie tego aparatu wymaga jedynie różniczkowania, co jest względnie prostą operacją matematyczną. Przy rozpatrywaniu zagadnienia w dwóch wymiarach, warunki, które muszą być spełnione, aby równanie $\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y$ było różniczką zupełną energii kinetycznej, są następujące:

$$\frac{\mathrm{d}F_x}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}F_y}{\mathrm{d}x}. \tag{8.10}$$

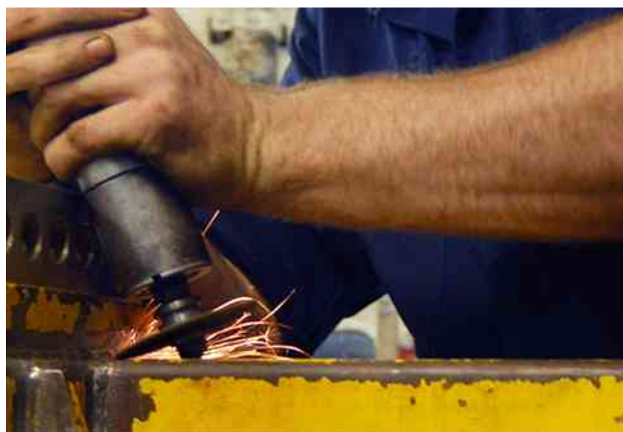
Praca wykonana przez siłę opisaną w Przykładzie 7.4 jest zależna od drogi. Zatem siła

$$F_x = 5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot y \quad \text{oraz} \quad F_y = 10\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot x.$$

Stąd:

$$\frac{\mathrm{d}F_x}{\mathrm{d}y} = 5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \neq \frac{\mathrm{d}F_y}{\mathrm{d}x} = 10\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}},$$

co świadczy o tym, że mamy do czynienia z siłą niezachowawczą. Czy jesteśmy w stanie zaproponować, co należałoby zmienić, aby sprawić, by omawiana siła była siłą zachowawczą?



Rysunek 8.7 Siła wytworzona przez koło cierne jest niezachowawcza, ponieważ praca przez nią wykonana zależy od liczby wykonanych obrotów, a zatem jest zależna od drogi.

Przykład 8.5

Zachowawcza czy niezachowawcza?

Która z następujących sił działających w dwóch wymiarach jest zachowawcza, a która nie? Załóż, że a i b to stałe o odpowiednich jednostkach:

a. $axy^3 \cdot \hat{i} + ayx^3 \cdot \hat{j}$,

b. $a[(y^2/x) \cdot \hat{i} + 2y \ln(x/b) \cdot \hat{j}]$,

c. $\frac{ax \cdot \hat{i} + ay \cdot \hat{j}}{x^2 + y^2}$

Strategia rozwiązania

Zastosuj warunek opisany w Równaniu 8.10, czyli oblicz pochodne cząstkowe każdej z sił. Jeśli pochodna po

x składowej y danej siły jest równa pochodnej po y składowej x, to siła jest zachowawcza. Dzieje się tak, ponieważ przy spełnieniu tego warunku niezależnie od drogi energia potencjalna tej siły przy danym przesunięciu zawsze zapewni taki sam wynik.

Rozwiązanie

a. $\frac{dF_x}{dy} = \frac{d(axy^3)}{dy} = 3axy^2$ i $\frac{dF_y}{dx} = \frac{d(ayx^3)}{dx} = 3ayx^2$ – ta siła nie jest zachowawcza.

b. $\frac{dF_x}{dy} = \frac{d(ay^2/x))}{dy} = \frac{2ay}{x}$ i $\frac{dF_y}{dx} = \frac{d(2ay\ln(x/b))}{dx} = \frac{2ay}{x}$ – więc jest to siła zachowawcza.

c. $\frac{dF_x}{dy} = \frac{d(ax/(x^2+y^2))}{dy} = -\frac{ax(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{dF_y}{dx} = \frac{d(ay/(x^2+y^2))}{dx}$ – tu także jest to siła zachowawcza.

Znaczenie

Warunki przedstawione w Równaniu 8.10 bazują na pochodnych funkcji po dwóch zmiennych. W trzech wymiarach można wprowadzić podobne warunki, ale wymagają one obliczenia większej liczby pochodnych.



8.5 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Dwuwymiarowa siła zachowawcza przyjmuje wartość zero na osi x i y oraz spełnia warunek $dF_x/dy = dF_y/dx = (4\ \mathrm{N/m^3})xy$. Jaka jest wartość siły w punkcie $x = y = 1$ m?

Zanim skończymy rozważania w tej sekcji, zauważmy, że siły niezachowawcze nie są związane z istnieniem żadnej energii potencjalnej, ponieważ przemiana energetyczna związana z ich działaniem dąży do bezpowrotnego rozproszenia (utraty) energii, która nie może zostać zamieniona z powrotem na pracę. Natomiast energia potencjalna jest zdefiniowana poprzez pracę sił zachowawczych. Równanie 8.1 zawiera pracę wyrażoną jako całkę z iloczynu skalarnego siły i przemieszczenia. W wyniku całkowania otrzymuje się pracę oraz różnicę energii potencjalnej. Przypomnijmy, że całkowanie jest działaniem przeciwnym do różniczkowania. Równie dobrze możemy obliczyć pochodną energii potencjalnej po przesunięciu, aby otrzymać siłę. Przyczynek do energii potencjalnej jest to iloczyn skalarny siły zachowawczej i przyczynku przemieszczenia.

$$dE_p = -\vec{F}\cdot d\vec{l} = -F_l\,dl.$$

W powyższym równaniu dokonaliśmy wyboru reprezentacji przemieszczenia w dowolnym kierunku poprzez $d\vec{l}$, ponieważ nie chcieliśmy ograniczać się do żadnego wyróżnionego układu odniesienia. Następnie przekształciliśmy wzór tak, aby wyrazić iloczyn skalarny jako iloczyn składowej siły F_l działającej w kierunku l i minimalnego przyrostu przemieszczenia dl. Obie wielkości są skalarami, więc możemy podzielić równanie obustronnie przez dl, by otrzymać:

$$F_l = -\frac{dE_p}{dl}. \qquad (8.11)$$

Na podstawie tego równania widzimy zależność pomiędzy siłą i energią potencjalną z nią związaną. Składowa siły zachowawczej w wyróżnionym kierunku jest równa ujemnej pochodnej energii potencjalnej po przemieszczeniu. W przypadku jednowymiarowym, np. wzdłuż osi x, Równanie 8.11 przyjmuje postać $\vec{F} = F_x\cdot\hat{i} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\cdot\hat{i}$.

W dwóch wymiarach:

$$\vec{F} = F_x\cdot\hat{i} + F_y\cdot\hat{j} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\cdot\hat{i} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\cdot\hat{j}.$$

W omawianym równaniu zastosowano pochodne cząstkowe. Jeśli funkcja jest zależna od wielu zmiennych, aby znaleźć jej różniczkę zupełną należy obliczyć pochodne cząstkowe po każdej zmiennej. Obliczając pochodną cząstkową po danej zmiennej, pozostałe zmienne traktujemy jako stałe. W przypadku trójwymiarowym do powyższego równania dodajemy trzeci, analogiczny człon dla składowej z i w efekcie otrzymujemy równanie, w którym siła jest to ujemny gradient energii potencjalnej. Na razie nie będziemy analizować układów trójwymiarowych.

Przykład 8.6

Siła wynikająca z energii potencjalnej będącej funkcją przemieszczenia do potęgi czwartej

Energia potencjalna cząstki poruszającej się wzdłuż osi x dana jest wzorem:

$$E_p = \frac{1}{4}cx^4,$$

gdzie $c = 8\ \mathrm{N/m^3}$. Całkowita energia cząstki w położeniu $x = 0\ \mathrm{m}$ wynosi $2\ \mathrm{J}$ i nie podlega działaniu żadnej siły niezachowawczej. Znajdź:

a. położenia, w których energia kinetyczna wynosi zero oraz
b. wartości siły w tych położeniach.

Strategia rozwiązania

a. Stosunkowo łatwo jest znaleźć położenia, w których $E_k = 0\ \mathrm{J}$, jeśli zauważymy, że zgodnie z zasadą zachowania energii całkowita energia mechaniczna w tej sytuacji składa się tylko i wyłącznie z energii potencjalnej.
b. Możemy użyć Równania 8.11, aby wyznaczyć siłę w położeniach wyznaczonych w poprzednim podpunkcie.

Rozwiązanie

a. Całkowita energia mechaniczna układu jest równa 2 J i w położeniu, w którym energia kinetyczna wynosi zero, jest równa energii potencjalnej

$$2\ \mathrm{J} = \frac{1}{4} \cdot 8\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^3}} \cdot x_f^4.$$

Rozwiązując równanie, znajdziemy $x_\mathrm{f} = \pm 1\ \mathrm{m}$.

b. Z Równania 8.11,

$$F_x = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = -cx^3.$$

Stąd obliczając siłę w punktach $\pm 1\ \mathrm{m}$, otrzymujemy

$$\vec{F} = -8\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^3}} \cdot (\pm 1\ \mathrm{m})^3 \cdot \hat{i} = \pm 8\ \mathrm{N} \cdot \hat{i}.$$

W obu położeniach wartość siły wynosi 8 N i jest zwrócona w kierunku początku układu współrzędnych. Wynika to z tego, że potencjał ma charakter siły zawracającej.

Znaczenie

Obliczanie siły na podstawie energii potencjalnej jest matematycznie prostsze niż wyprowadzenie energii potencjalnej przy znanej sile, ponieważ różniczkowanie funkcji jest zazwyczaj prostsze niż całkowanie.



8.6 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Wyznacz siły działające na cząstkę w Przykładzie 8.6, przyjmując, że energia kinetyczna jest równa 1 J w $x = 0$.

8.3 | Zasada zachowania energii

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- formułować zasadę zachowania energii mechanicznej z uwzględnieniem siły niezachowawczej lub bez niej;
- stosować zasadę zachowania energii mechanicznej do obliczania wartości różnych rodzajów energii w prostym układzie fizycznym.

W tej części rozwiniemy i przeanalizujemy to, co wyprowadziliśmy w sekcji Energia potencjalna układu, gdzie przekształciliśmy zasadę równoważności pracy i energii w opis przemiany energii kinetycznej w potencjalną i na odwrót. Doprowadzi nas to do dyskusji nad fundamentalnym prawem fizyki, jakim jest zasada zachowania energii mechanicznej. W dalszych częściach książki, w których będziecie zmagać się z różnymi problemami fizyki, zobaczycie, jak można uogólnić to prawo na więcej typów energii i przemian pomiędzy nimi. Ostatnia część tego rozdziału będzie wstępem do rozważań o różnych rodzajach energii.

Pojęcia takie jak „wielkości zachowane” oraz „zasady zachowania” mają szczególne znaczenie w fizyce, ale znaczenie tych słów różni się od potocznego rozumienia (podobnie można stwierdzić o powszechnym i naukowym znaczeniu pojęcia „praca”). Potocznie możemy powiedzieć, że pewną ilość wody „zachowujemy”, gdy jej nie używamy lub oszczędzamy. Woda jest zbudowana z cząsteczek składających się z dwóch atomów wodoru oraz jednego tlenu. Połącz te trzy atomy, a uzyskasz wodę, natomiast rozerwanie wiązania doprowadzi do jej zniszczenia. W świecie nauki **wielkość zachowana** (ang. **conserved quantity**) to taka, która – jeśli jest rozpatrywana dla całego układu fizycznego – pozostaje niezmienna i/lub jest zamieniana na inną formę danej wielkości w takiej samej ilości. Wielkość zachowana może też być przekazywana do innego układu (wtedy jej ilość się zmieni), ale zawsze odbywa się to w mierzalnych, kontrolowanych ilościach. Wielkość zachowana może ulec przemianie w inną postać, ale nie może być tworzona lub anihilowana. Stąd wynika, że nie ma zasady zachowania wody w fizyce.

Układ z pojedynczą cząsteczką lub ciałem

Rozważmy układ z jedną cząsteczką lub ciałem. Wracając do Równania 8.2 przypomnijmy, że najpierw rozdzieliliśmy wszystkie siły działające na cząstkę na zachowawcze i niezachowawcze, a następnie zapisaliśmy pracę dla każdej z nich zgodnie z założeniami zasady równoważności pracy i energii. Zamieniliśmy pracę wykonywaną przez siły zachowawcze na zmianę energii potencjalnej cząstki i powiedzieliśmy, że możemy ją zamienić na energię kinetyczną, z czego uzyskaliśmy Równanie 8.2. Zapiszmy zatem omawiane uprzednio równanie, pomijając środkowy krok. Zdefiniujmy sumę energii kinetycznej i potencjalnej ($E_k + E_p = E$) jako **energię mechaniczną** (ang. **mechanical energy**) cząsteczki.

Zasada zachowania energii

Energia mechaniczna E cząsteczki jest stała dopóty, dopóki nie pojawi się siła zewnętrzna (spoza układu) lub siła wewnętrzna niezachowawcza, która na nią oddziałuje. W przypadku sił niezachowawczych zmiana energii mechanicznej jest równa pracy wykonanej przez te siły:

$$W_{\text{niezach}_{AB}} = \Delta(E_k + E_p)_{AB} = \Delta E_{AB}. \tag{8.12}$$

Pierwsze z powyższych stwierdzeń definiuje pojęcie **zasady zachowania energii** (ang. **energy conservation**) cząstki, na którą nie działają siły niezachowawcze. Klasyczna cząstka (omawiana tutaj) stanowi punkt masowy, który jest nierelatywistyczny i podlega zasadom dynamiki Newtona. W podrozdziale Teoria względności (https://cnx.org/content/m65887/latest/) zobaczymy, że zasada zachowania energii jest prawdziwa także dla cząstek relatywistycznych, ale do wyjaśnienia tego potrzebne są pewne poprawki do definicji energii.

W niektórych przypadkach wygodniej jest przyjąć, że praca wykonywana przez siły niezachowawcze jest równa zeru, ponieważ albo zakładamy, że nie ma takich sił, albo przesunięcie jest równoległe do powierzchni. Zapisujemy zatem:

$$W_{\text{niezach}_{AB}} = \Delta(E_k + E_p)_{AB} = \Delta E_{AB}. \tag{8.13}$$

W takim przypadku zasada zachowania energii jest wyrażona w następujący sposób: energia mechaniczna cząsteczki nie ulega zmianie, jeśli siły niezachowawcze, które mogą na nią oddziaływać, wykonują zerową pracę. Zrozumienie idei zasady zachowania energii jest o wiele ważniejsze niż zapamiętanie konkretnego równania, które ją wyraża.

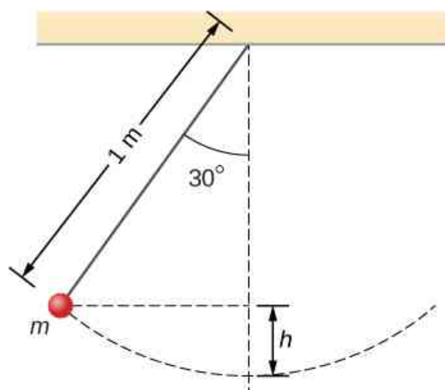
Strategia rozwiązywania zadań: zasada zachowania energii

1. Zidentyfikuj ciało lub ciała, które należy rozpatrzeć (czyli układ fizyczny). Często w zagadnieniach związanych z wykorzystaniem zasady zachowania energii rozpatruje się więcej niż jedno ciało.
2. Znajdź wszystkie siły działające na ciało (lub ciała).
3. Określ, czy siły wykonujące pracę są zachowawcze. Jeśli siła niezachowawcza wykonuje pracę, to energia mechaniczna nie jest zachowana. Układ musi zostać przeanalizowany pod kątem pracy sił niezachowawczych, tj. Równaniem 8.13.
4. Dla każdej siły zachowawczej wykonującej pracę przyjmij odpowiedni punkt odniesienia dla energii potencjalnej. Punkty odniesienia dla różnych rodzajów energii potencjalnej nie muszą być wyznaczone w tym samym miejscu.
5. Zastosuj zasadę zachowania energii mechanicznej, przyjmując, że suma energii kinetycznej i potencjalnej jest stała w każdym punkcie układu.

Przykład 8.7

Wahadło matematyczne

Punkt materialny o masie m jest zawieszony na nieważkiej nici o długości 1,0 m przyczepionej jednym końcem do sufitu, tworząc wahadło matematyczne, tak jak przedstawiono na Rysunku 8.8. Wahadło odchylono od położenia równowagi o $30°$, po czym puszczono swobodnie. Jaka jest prędkość punktu w momencie, w którym przekracza ono najniższy punkt toru ruchu?



Rysunek 8.8 Punkt materialny zawieszony na nieważkiej nici tworzy wahadło matematyczne. Układ przedstawiono w momencie uwolnienia wahadła oraz zaznaczono pewne wielkości przydatne w analizie ruchu.

Strategia rozwiązania

Zaczynając od kroku pierwszego przedstawionej wcześniej strategii rozwiązywania zadań, musimy rozpocząć od określenia, ilu ciał dotyczy zagadnienie. Rozważany problem dotyczy jedynie układu cząstka-Ziemia. Następnie zauważamy, że siła grawitacji, która jest zachowawcza, jest jedyną działającą na cząstkę. W zagadnieniu pomijamy opory powietrza, a siła naciągu nici jest prostopadła do przemieszczenia, a zatem jej praca jest równa zero. Wynika z tego, że energia mechaniczna w układzie jest zachowana i na podsta-

wie Równania 8.13 dana wzorem $0 = \Delta(E_k + E_p)$. Ruch rozpoczyna się poprzez wytrącenie ciała ze stanu spoczynku (wahadło puszczono swobodnie), a więc wzrost energii kinetycznej jest równy energii kinetycznej w najniższym punkcie albo, ujmując to inaczej, zmianie energii potencjalnej (którą możemy obliczyć, bazując na geometrii). W kroku czwartym dokonujemy wyboru punktu odniesienia dla energii potencjalnej w najniższym punkcie toru ruchu. Ostatni krok polega na przyrównaniu sumy energii w najwyższym punkcie do sumy w najniższym punkcie i obliczeniu prędkości.

Rozwiązanie

Pomijając siły niezachowawcze, zasadę zachowania energii z uwzględnieniem jedynie punktów startowego i końcowego możemy zapisać jako:

$$E_{k\mathrm{p}} + E_{pp} = E_{k\mathrm{k}} + E_{p\mathrm{k}}.$$

Ruch rozpoczyna się od spoczynku, a zatem początkowa energia kinetyczna jest równa zeru. Natomiast w najniższym punkcie toru przyjmujemy, że energia potencjalna jest zerowa. Nasze równania upraszczają się do postaci:

$$\begin{aligned} 0 + mgh &= \frac{1}{2}mv^2 + 0 \\ v &= \sqrt{2gh}. \end{aligned}$$

Wysokość, na jakiej znajduje się punkt materialny na początku ruchu, nie jest dana bezpośrednio w treści zadania. Można ją wyprowadzić poprzez zastosowanie zasad trygonometrii i dwóch danych: długości wahadła oraz kąta wychylenia początkowego. Na rysunku pionową przerywaną linią oznaczono długość wahadła, a wysokość, na jakiej znajduje się ciało – poprzez h. Pozostałą część długości wahadła $x = L - h$ można obliczyć, korzystając z zależności trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym, poprzez:

$$\cos\theta = \frac{x}{L}, \quad x = L\cos\theta.$$

Z powyższych ustaleń można wyprowadzić równanie na h :

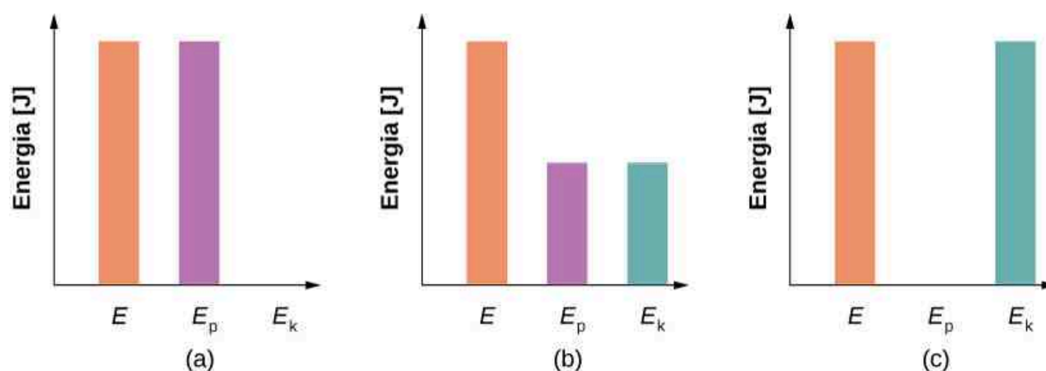
$$\begin{aligned} x + h &= L \\ L\cos\theta + h &= L \\ h &= L - L\cos\theta = L(1 - \cos\theta). \end{aligned}$$

Uzyskaną wielkość podstawiamy do równania wynikającego z początkowych rozważań dotyczących energii i możemy wyznaczyć prędkość:

$$v = \sqrt{2gL(1 - \cos\theta)} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1\ \mathrm{m} \cdot (1 - \cos 30^\circ)} = 1{,}62\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Znaczenie

Wyznaczyliśmy prędkość, korzystając bezpośrednio z zasady zachowania energii, bez potrzeby rozwiązywania równania różniczkowego dla ruchu wahadła (zobacz Drgania). Inaczej możemy to przedstawić poprzez **wykresy słupkowe energii całkowitej** (ang. **bar graphs of total energy**). Na początku punkt materialny ma jedynie energię potencjalną, ponieważ znajduje się w najwyższym położeniu. W momencie gdy ciało przechodzi przez położenie najniższe, cała energia potencjalna jest zamieniana na kinetyczną. Możemy zatem wyobrazić sobie, jakim przemianom podlega energia, gdy ciało przechodzi przez położenia pośrednie (Rysunek 8.9). Zmiany energii w trakcie ruchu punktu z najniższego położenia i z powrotem do najwyższego możemy odczytać na poniższych diagramach od (c), poprzez (b), do (a).



Rysunek 8.9 Wykresy słupkowe przedstawiające energię całkowitą (E), potencjalną (E_p) oraz kinetyczną (E_k) ciała w różnych położeniach. (a) Całkowita energia układu równa się energii potencjalnej, a energia kinetyczna jest równa zero, co jest charakterystyczne dla maksymalnego wychylenia. (b) Punkt materialny jest w połowie drogi pomiędzy maksymalnym i minimalnym położeniem, a więc energia kinetyczna jest równa potencjalnej, a ich suma – energii całkowitej. (c) Ciało jest w najniższym położeniu, energia kinetyczna osiąga maksimum i jest równa energii całkowitej, natomiast energia potencjalna jest zerowa.

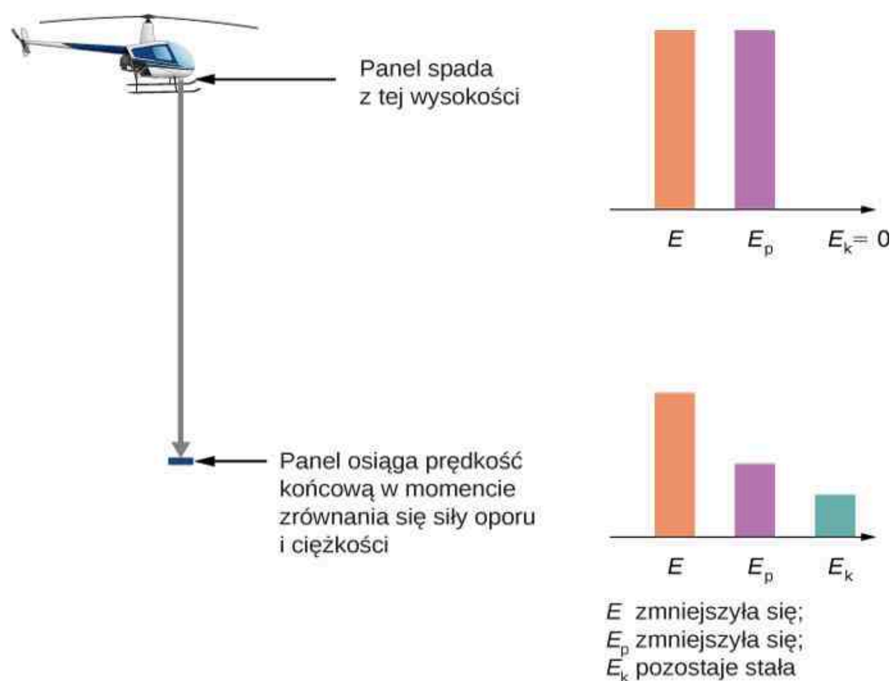


8.7 **Sprawdź, czy rozumiesz.** W jakiej odległości od położenia równowagi znajduje się wahadło z poprzedniego przykładu, jeśli jego prędkość jest równa $0{,}81\ \text{m/s}$?

Przykład 8.8

Opór powietrza spadającego ciała

W momencie, gdy helikopter unosi się na wysokości $1\ \text{km}$, odrywa się od niego panel spodni i pikuje w kierunku ziemi (Rysunek 8.10). Masa panelu wynosi $15\ \text{kg}$, a podczas zderzenia z podłożem jego prędkość wynosi$45\ \text{m/s}$. Ile energii mechanicznej ulega rozproszeniu w wyniku działania oporów powietrza podczas opadania panelu?



Rysunek 8.10 Panel helikoptera odrywa się i spada swobodnie, aż do momentu, w którym osiąga prędkość maksymalną 45 m/s. Ile energii zostało rozproszone na skutek występowania oporów powietrza?

Strategia rozwiązania

Krok 1: W układzie jest rozpatrywane tylko jedno ciało.

Krok 2: Zarówno siła grawitacji, jak i oporu powietrza działają na ciało, tak jak określono to w treści zadania.

Krok 3: Siła grawitacji jest zachowawcza, jednakże niezachowawcze siły oporu również wykonują pracę nad spadającym panelem. W związku z tym musimy użyć zasady zachowania energii wyrażonej Równanie 8.12, aby wyznaczyć wartość rozproszonej energii:

$$\Delta E_{\text{rozp}} = |W_{\text{niezach}}| = |\Delta(E_k + E_p)_{\text{sf}}|.$$

Krok 4: Początkowa energia kinetyczna w $y_{\text{s}} = 1\text{ km}$ wynosi zero. Przyjmijmy zero energii potencjalnej na wysokości podłoża.

Krok 5: Praca sił niezachowawczych, czyli energia rozproszona przez opory powietrza, jest równa różnicy całkowitej energii mechanicznej początku i końca ruchu.

Rozwiązanie

Energia mechaniczna, która uległa rozproszeniu przez opory powietrza, jest sumą algebraiczną przyrostu energii kinetycznej i straty energii potencjalnej. Zatem możemy obliczyć tę sumę poprzez:

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{rozp}} &= |E_{k\text{k}} - E_{k\text{p}} + E_{p\text{k}} - E_{p\text{p}}| \\ &= \left|\frac{1}{2} \cdot 15\text{ kg} \cdot \left(45\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - 0 + 0 - 15\text{ kg} \cdot 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1000\text{ m}\right| = 130\text{ kJ}.\end{aligned}$$

Znaczenie

Znaczna część początkowej energii mechanicznej panelu (E_{ps}), 147 kJ, została rozproszona. Zauważ, że zdołaliśmy wyznaczyć energię rozproszoną, nie znając sił oporu, a jedynie wiedząc, że są dyssypatywne.



8.8 Sprawdź, czy rozumiesz. Pewnie sobie przypominasz, że pomijając opory powietrza, w rzucie pionowym czas, jaki potrzebuje wyrzucone ciało, aby osiągnąć maksimum położenia, jest równy czasowi, jaki potrzebuje ciało aby spaść do punktu wyrzutu. Załóżmy teraz, że nie możemy pominąć oporów, tak jak w Przykładzie 8.8. Czy czas, w którym ciało się wznosi, jest (a) większy, (b) mniejszy czy (c) taki sam jak czas opadania? Wyjaśnij.

W powyższych przykładach za pomocą zasady zachowania energii byliśmy w stanie obliczyć prędkość ciała jedynie we wskazanych punktach ruchu. Należy zauważyć, że metoda analizy ruchu ciał bazująca na zachowaniu energii jest o wiele potężniejszym narzędziem. Bardziej zaawansowane metody teorii mechaniki pozwalają obliczyć pełną zależność czasową ruchu cząstki. Często lepszym modelem matematycznym ruchu jest model opierający się na analizie energii kinetycznej i potencjalnej niż ten bazujący na rozpisaniu sił działających na ciało (jest to widoczne szczególnie dobrze w przypadku opisu kwantowo-mechanicznego cząstek takich jak elektrony czy atomy).

Możemy przedstawić najprostsze cechy takiego podejścia energetycznego do ruchu za pomocą analizy cząstki poruszającej się w jednym wymiarze i posiadającej energię potencjalną $E_p(x)$, na którą nie działają siły niezachowawcze. Równanie 8.12 oraz definicja prędkości mówią nam, że:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = E - E_p(x)$$
$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2(E - E_p(x))}{m}}.$$

Rozdzielmy zmienne x oraz t i obliczmy całkę w granicach od czasu początkowego $t = 0$ do dowolnie przyjętego momentu czasu t:

$$t = \int_0^t \mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2(E - E_p(x))/m}}. \tag{8.14}$$

Jeśli obliczymy całkę z Równania 8.14, to będziemy mogli wyrazić x w funkcji t.

Przykład 8.9

Stałe przyspieszenie

Zastosuj energię potencjalną opisaną wzorem $E_p(x) = -E(x/x_0)$, gdzie $E > 0$, w Równaniu 8.14, aby obliczyć położenie x ciała w funkcji czasu t.

Strategia rozwiązania

Wiemy jak energia potencjalna zmienia się wraz ze zmianą x, a więc możemy podstawić $E_p(x)$ w Równaniu 8.14 i obliczyć całkę po to by znaleźć x. W wyniku takiej procedury otrzymujemy wyrażenie na x w funkcji energii E, masy m oraz położenia początkowego x_0.

Rozwiązanie

Po wykonaniu dwóch pierwszych kroków z powyższej strategii, uzyskamy:

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(2E/mx_0)(x_0 - x)}} = \frac{1}{\sqrt{(2E/mx_0)}}\left|-2\sqrt{(x_0 - x)}\right|_{x_0}^{x} = -\frac{2\sqrt{(x_0 - x)}}{\sqrt{(2E/mx_0)}}.$$

Rozwiązawszy równanie ze względu na x, otrzymujemy $x(t) = x_0 - (E/mx_0)t^2/2$.

Znaczenie

Położenie jako funkcja czasu, dla założonego potencjału, wyraża jednowymiarowy ruch ze stałym przyspieszeniem $a = (E/mx_0)$ rozpoczynający się w x_0. Otrzymany wynik nie jest zaskakujący, ponieważ przedstawiona energia potencjalna odpowiada działaniu stałej siły $F = -\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}x = E/x_0$ odpowiadającej przyspieszeniu $a = F/m$.



8.9 Sprawdź, czy rozumiesz. Jaką wartość energii potencjalnej $E_p(x)$ należy wstawić do Równania 8.13, aby ciało o masie 1 kg i energii mechanicznej 1 J poruszało się ze stałą prędkością?

Przeanalizujemy jeszcze inny, bardziej adekwatny przykład zastosowania Równania 8.13, gdy rozpatrzymy pozostałe wnioski wypływające z wyrażenia opisującego energię potencjalną cząstki.

Układy wielu ciał

Układy fizyczne zazwyczaj zawierają więcej niż jedno ciało. Niemniej jednak zasada zachowania energii, na przykład taka jak w Równaniu 8.12 albo Równaniu 8.13, jest podstawowym prawem fizyki i jest prawdziwa dla każdego układu. Musimy jedynie pamiętać o uwzględnieniu energii kinetycznych i potencjalnych wszystkich cząstek oraz pracy wszystkich sił niezachowawczych działających na nie. Lepiej jest odłożyć dalszą dyskusję na tę chwilę, gdy nauczymy się więcej na temat dynamiki układów zbudowanych z wielu cząstek, np. w rozdziałach Pęd i zderzenia, Obroty wokół stałej osi czy Moment pędu.

8.4 | Wykresy energii potencjalnej

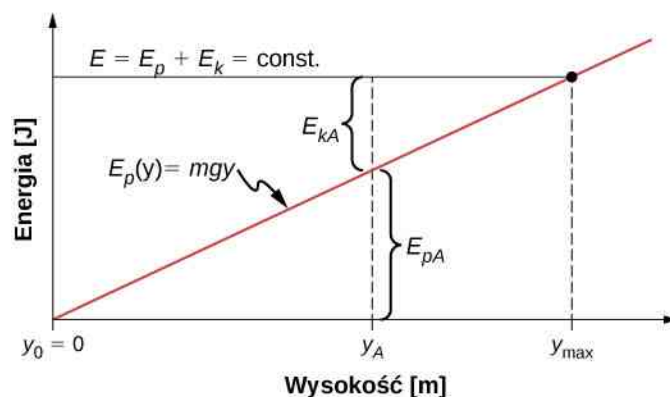
Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- tworzyć i interpretować wykresy energii potencjalnej;
- wyjaśniać związek pomiędzy równowagą i energią potencjalną.

Interpretacja **wykresów energii potencjalnej** (ang. **potential energy diagram**) w funkcji położenia jest źródłem wielu przydatnych informacji na temat właściwości mechanicznych układu. Najprostszym przykładem jest przypadek jednowymiarowy, gdzie energia może być przedstawiona w postaci prostego wykresu, np. $E_p(x)$ w funkcji x. W układach, w których ruch odbywa się w więcej niż jednym wymiarze, procedura jest bardziej skomplikowana, ale analogiczna. Nasze rozważania ograniczymy do ruchu w jednym wymiarze.

Rozważania zaczniemy od ciała spadającego swobodnie w pobliżu powierzchni Ziemi, pomijając przy tym siły oporu. Energia mechaniczna układu jest zachowana, $E = E_k + E_p$, a energia potencjalna, przyjmując zero na poziomie podłoża, jest dana wzorem $E_p(y) = mgy$ (zauważ, że jest to równanie linii prostej o nachyleniu mg). Na wykresie przedstawionym na Rysunku 8.11 oś odciętych reprezentuje wysokość y nad poziomem gruntu, a rzędnych energię ciała.



Rysunek 8.11 Wykres energii ciała spadającego swobodnie.

Linia pozioma oznaczona dla energii E reprezentuje stałą, całkowitą energię mechaniczną ciała, podczas gdy przykładową energię kinetyczną i potencjalną dla wybranej wysokości y_A oznaczono odpowiednio E_{kA} i E_{pA}. Zauważmy, że energia całkowita dzieli się na kinetyczną i potencjalną, a proporcja ich podziału zmienia się wraz z wysokością. Energia kinetyczna nie może przyjmować wartości ujemnych, a więc energia potencjalna osiąga maksimum dla najwyższego położenia, gdzie uzyskuje wartość energii całkowitej, której nie może przekroczyć. Zatem:

$$E_k = E - E_p \geq 0$$

$$E_p \leq E.$$

Jeśli przyjmiemy punkt odniesienia dla energii potencjalnej równej zero w y_0, to możemy wyrazić energię potencjalną E_p jako mgy. Przekształcając równanie względem y otrzymujemy:

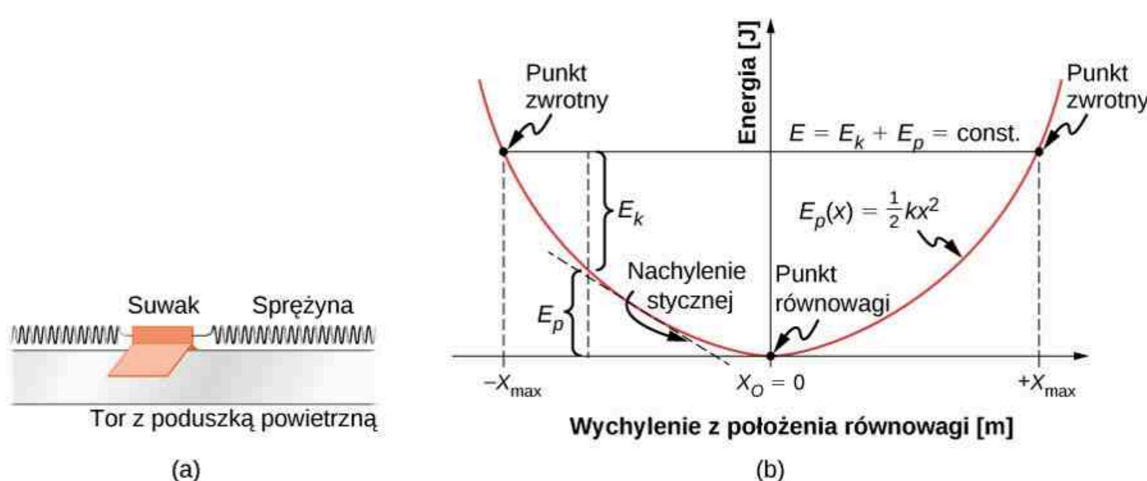
$$y \le \frac{E}{mg} = y_{\max}.$$

Za pomocą tego wyrażenia pokazaliśmy, że całkowita energia podzielona przez ciężar ciała (mg) określa maksymalną wysokość $y_{\max}$. W najwyższym położeniu energia kinetyczna oraz prędkość wynoszą zero, więc jeśli ciało przemieszczało się w górę, to w tym punkcie jego prędkość zmieni wartość z dodatniej na ujemną, zatem $y_{\max}$ to punkt zwrotny opisywanego ruchu. Na wysokości podłoża, $y_0 = 0$, energia potencjalna jest równa zero, natomiast energia kinetyczna oraz prędkość osiągają maksimum:

$$E_{p0} = 0 = E - E_{k0}$$
$$E = E_{k0} = \frac{1}{2}mv_0^2$$
$$v_0 = \pm\sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

Prędkość maksymalna $\pm v_0$ oznacza prędkość początkową potrzebną do wzniesienia się na wysokość $y_{\max}$ oraz prędkość końcową, po upadku z tej wysokości. Wszystkie te informacje można odczytać z wykresu przedstawionego powyżej.

Rozważmy układ masa-sprężyna umieszczony na nieruchomej, poziomej płaszczyźnie, po której układ porusza się bez tarcia, w taki sposób, że siła grawitacji oraz siła reakcji podłoża nie wykonują żadnej pracy (Rysunek 8.12). Jest to układ jednowymiarowy, w którym energia mechaniczna E jest stała. Energia potencjalna jest obliczana względem położenia równowagi nierozciągniętej sprężyny, czyli dla $x = 0$, zatem $E_p(x) = kx^2/2$.



Rysunek 8.12 (a) Suwak umieszczony pomiędzy dwoma sprężynami na torze z poduszką powietrzną jako przykład poziomego układu masa-sprężyna. (b) Wykres energii potencjalnej sporządzony dla omawianego układu.

Z przedstawionego powyżej wykresu możemy odczytać takie same informacje, jak w przypadku spadku swobodnego. Niemniej jednak w układzie masa-sprężyna siła działająca na ciało ma zmienną wartość, co pozwoli nam poszerzyć wiedzę. Dla spadku swobodnego jesteśmy w stanie przewidzieć część informacji, jak na przykład zakres ruchu oraz maksima przesunięć czy prędkości, analizując graniczne wartości energii kinetycznej $0 \le E_k \le E$. **Punkt zwrotny** (ang. **turning point**) ruchu występuje, gdy $E_k = 0$ lub $E_p = E$. Oznacza to, że dla układu, w którym mamy do czynienia z energią potencjalną sprężystości, istnieją dwa takie położenia:

$$x_{\max} = \pm\sqrt{\frac{2E}{k}}.$$

Ruch suwaka jest zatem ograniczony pomiędzy punktami zwrotnymi $-x_{\max} \le x \le x_{\max}$. To stwierdzenie jest prawdziwe dla dowolnej (dodatniej) wartości E, ponieważ funkcja energii potencjalnej nie jest ograniczona ze względu na x. Z tego względu oraz z uwagi na swój kształt, krzywa $E_p(x)$ jest nazywana nieskończoną studnią potencjału. Na dnie studni potencjału $x = 0$, $E_p = 0$, natomiast energia kinetyczna osiąga maksimum, czyli $E_k = E$, a więc $v_{\max} = \pm\sqrt{2E/m}$.

Z analizy nachylenia stycznej do krzywej energii potencjalnej można również uzyskać informacje o siłach działających na suwak oraz o jego przyspieszeniu. Pokazaliśmy wcześniej, że nachylenie stycznej do krzywej (czyli

pochodna tej funkcji) wzięte ze znakiem minus jest równe sile sprężystości, co w tym przypadku jest tożsame z siłą wypadkową, a więc wielkością proporcjonalną do przyspieszenia ciała. Dla $x = 0$ nachylenie stycznej, a zatem zarówno siła, jak i przyspieszenie są równe zero, więc jest to **punkt równowagi** (ang. **equilibrium point**). Pochodna ze znakiem minus, obliczona po obu stronach równowagi, określa siłę, która będzie dążyć do przywrócenia ciała do położenia równowagi. W tym przypadku wyznaczona w ten sposób siła jest dana wzorem $F = \pm kx$, a więc położenie równowagi jest stabilne; taką siłę nazywamy przywracającą. Oznacza to, że $E_p(x)$ osiąga minimum w punkcie równowagi. Jeśli siła po dowolnej stronie równowagi ma kierunek zgodny z przesunięciem liczonym od tego położenia, to równowaga jest niestabilna, a krzywa $E_p(x)$ posiada w tym miejscu punkt przegięcia albo lokalne maksimum.

Przykład 8.10

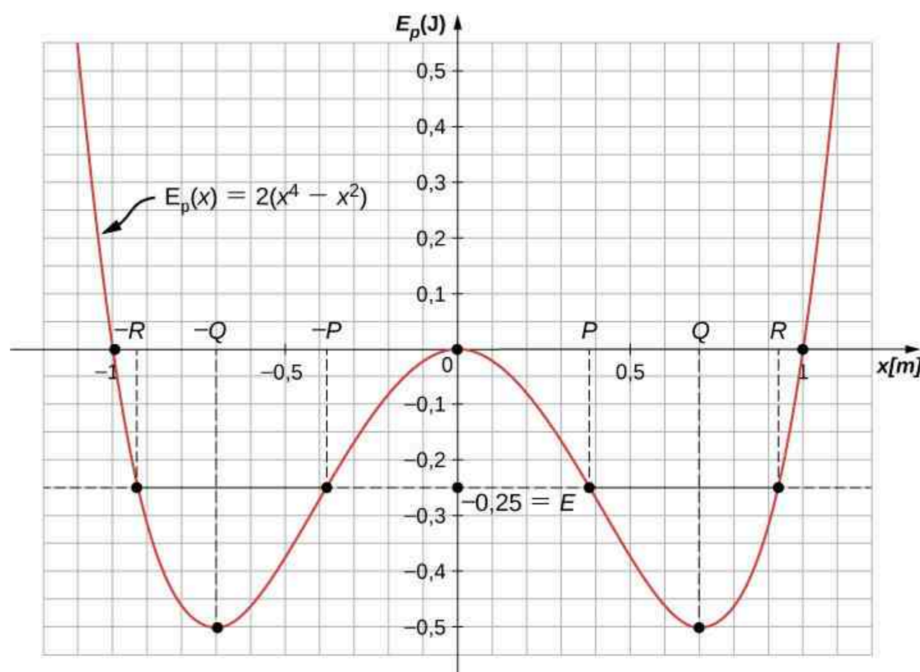
Wykres energii potencjalnej zależnej od wyższych potęg przemieszczenia

Energia potencjalna cząstki poruszającej się wzdłuż osi x jest dana relacją $E_p(x) = 2(x^4 - x^2)$, w której E_p wyrażono w dżulach (J), a x w metrach. Na cząstkę nie działają żadne siły niezachowawcze, więc ich energia mechaniczna jest stała i wynosi $E = -0{,}25$ J.

a. Czy ruch cząstki jest ograniczony i jeśli tak, to w jakim zakresie wartości x?
b. Czy istnieją jakiekolwiek położenia równowagi i jeśli tak, to czy są one stabilne, czy nie?

Strategia rozwiązania

Rozwiązanie najlepiej zacząć od wykreślenia energii potencjalnej w funkcji x. Funkcja przyjmuje wartość zero w początku układu współrzędnych i początkowo maleje zarówno dla dodatnich, jak i ujemnych wartości x (x^2 jest większe niż x^4 dla $x < 1$). Po osiągnięciu pewnej wartości funkcja zaczyna rosnąć i dla odpowiednio dużych wartości bezwzględnych położenia przechodzi przez zero i zaczyna przybierać wartości dodatnie. Nasz wykres, tak jak przedstawiono na Rysunku 8.13, powinien przypominać podwójną studnię potencjału, gdzie położenie zerowe znaleziono z warunku $E_p(x) = 0$ i z ekstremami ustalonymi na podstawie pochodnych pierwszego i drugiego rzędu.



Rysunek 8.13 Wykres energii potencjalnej w ruchu jednowymiarowym, w którym energia jest funkcją położenia do czwartej oraz do drugiej potęgi.

Dozwolone wartości x dla przykładu (a) możemy odnaleźć, jeśli wiemy, że energia kinetyczna nie przyjmuje wartości ujemnych, oraz znamy wartość energii całkowitej. Położenia równowagi w przykładzie (b) i ich stabilność wyznaczamy poprzez badanie własności funkcji energii potencjalnej w pobliżu ekstremów. Musimy przy tym określić zwrot sił działających w pobliżu ekstremum (pamiętajmy, że punkt równowagi jest stabilny, tylko jeśli funkcja posiada w nim lokalne minimum).

Wystarczy rzut oka na wykres, żeby jakościowo odpowiedzieć na pytania. To właśnie dlatego wykresy

energii potencjalnej są tak przydatne. Zauważmy, że istnieją dwa zakresy, w których ruch jest dozwolony ($E > E_p$) oraz trzy punkty równowagi (nachylenie $\mathrm{d}E_p / \mathrm{d}x = 0$), z których jedno jest niestabilne ($\mathrm{d}^2 E_p / \mathrm{d}x^2 < 0$), a dwa stabilne ($\mathrm{d}^2 E_p / \mathrm{d}x^2 > 0$).

Rozwiązanie

a. Aby znaleźć dozwolony zakres x, stosujemy warunek:

$$E_k = E - E_p = -\frac{1}{4} - 2(x^4 - x^2) \geq 0.$$

Jeśli równanie zapiszemy w taki sposób, aby otrzymać kwadrat różnicy, rachunek uprości się do rozwiązania nierówności $2(x^2 - 1/2)^2 \leq 1/4$, której rozwiązanie przyjmuje postać:

$$\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{8}} \leq x^2 \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{8}}.$$

Stąd uzyskamy zakresy $x_p \leq x \leq x_R$ oraz $-x_R \leq x \leq -x_p$, gdzie $x_p = 0{,}38$ i $x_R = 0{,}92$ (w metrach).

b. W celu znalezienia położeń równowagi musimy rozwiązać równanie:

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = 8x^3 - 4x = 0$$

i znajdujemy punkty $x = 0$ oraz $x = \pm x_Q$, gdzie $x_Q = 1/\sqrt{2} = 0{,}707$ (metry). Druga pochodna ma następującą postać:

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2} = 24x^2 - 4$$

i osiąga wartość ujemną dla $x = 0$, co określa lokalne maksimum funkcji, czyli równowaga jest niestabilna. Natomiast w punktach $x = \pm x_Q$ druga pochodna przyjmuje wartość dodatnią, co oznacza, że jest to lokalne minimum, a więc mamy do czynienia z równowagą stabilną.

Znaczenie

Cząstka w omawianym przykładzie może oscylować w jednym z dwóch dozwolonych zakresów ruchu, ale nie ma wystarczającej energii, by opuścić studnię potencjału, w której początkowo się znalazła. Zasada zachowania energii mechanicznej w powiązaniu z zależnościami pomiędzy energią kinetyczną i prędkością oraz energią potencjalną i siłą umożliwiają nam pozyskanie bardzo wielu zarówno jakościowych, jak i ilościowych informacji na temat ruchu cząstki. Wystarczy nam do tego odpowiednio przygotowany wykres energii potencjalnej.



8.10 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Powtórz Przykład 8.10 przyjmując całkowitą energię mechaniczną ciała równą $+0{,}25$ J.

Przed zakończeniem tej sekcji poćwiczmy jeszcze trochę metodę odnajdywania zależności położenia od czasu na podstawie energii potencjalnej cząstki dla przypadku jednowymiarowego układu masy na sprężynie przedstawionego w poprzednich częściach działu.

Przykład 8.11

Drgania sinusoidalne

Znajdź $x(t)$ poruszającej się cząstki o energii mechanicznej $E > 0$ i energię potencjalnej danej poprzez $E_p(x) = kx^2/2$. Załóż, że cząstka zaczyna ruch ze spoczynku w czasie $t = 0$.

Strategia rozwiązania

Podejmujemy takie same kroki jak w Przykładzie 8.9. Podstaw E_p do Równania 8.14 i wyłącz stałe takie jak m czy k. Oblicz całkę funkcji i rozwiąż równanie ze względu na położenie, które jest teraz funkcją czasu.

Rozwiązanie

Podstawmy energię potencjalną do Równania 8.14 i oblicz całkę, korzystając z aplikacji znalezionej w Internecie:

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(k/m)(2E/k - x^2)}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \left[\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2E/k}} \right) - \arcsin\left(\frac{x_0}{\sqrt{2E/k}} \right) \right].$$

Z warunków brzegowych wynika, że dla $t = 0$ energia kinetyczna jest równa zero, a potencjalna wynosi $kx_0^2/2 = E$. Na podstawie tego równania widzimy, że $x_0/\sqrt{2E/k} = \pm 1$, czyli $\arcsin(\pm 1) = \pm 90^\circ$. Teraz możemy rozwiązać równanie ze względu na x:

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t \pm 90^\circ \right) = \pm \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t \right).$$

Znaczenie

We wcześniejszej części działu określiliśmy układ masa-sprężyna jako przykład oscylatora harmonicznego. Tutaj wykazaliśmy, że oscylator harmoniczny drga sinusoidalnie, a jego maksymalne wychylenie jest równe $\sqrt{2E/k}$ (takie krańcowe wychylenie nazywamy amplitudą drgań). Możemy również zauważyć, że ilość pełnych cykli drgań na jednostkę czasu wynosi $(1/2\pi)\sqrt{k/m}$ (ten parametr nazywamy częstotliwością). Dalsze rozważania na temat ruchu drgającego przeprowadzimy w rozdziale Drgania.



8.11 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Znajdź $x(t)$ układu masa-sprężyna przedstawionego w Przykładzie 8.11, zakładając, że ciało zaczyna ruch w $x_0 = 0$ dla $t = 0$. Jaka jest prędkość początkowa ciała?

8.5 | Źródła energii

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać podstawowe aspekty transferu i konwersji energii;
- wyjaśniać różnicę pomiędzy odnawialnymi i nieodnawialnymi źródłami energii.

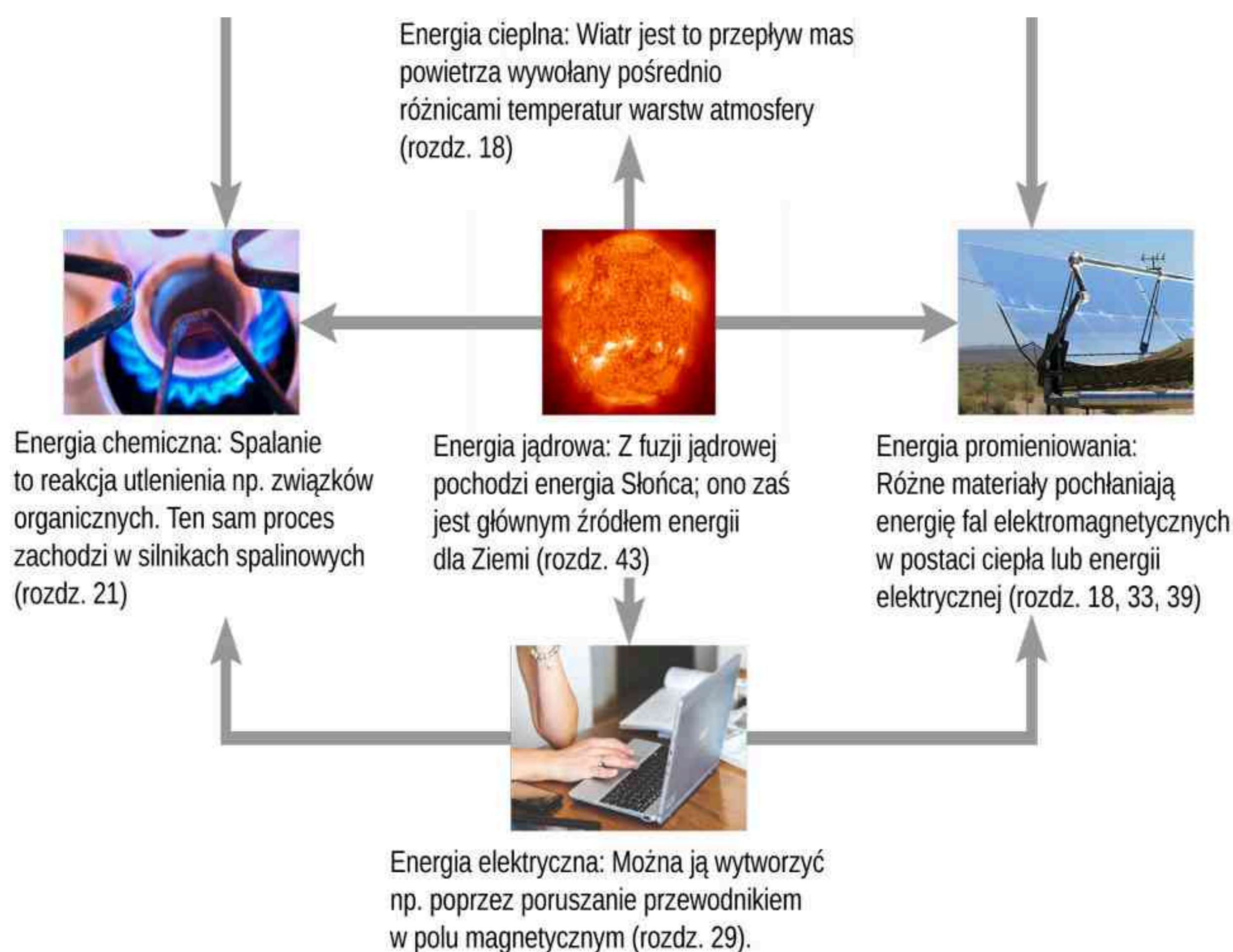
W tym rozdziale zajmowaliśmy się energią. Nauczyliśmy się, że może ona przyjąć różne formy i ulegać przemianom. Temat energii jest poruszany bardzo często, zarówno w kontekście spraw codziennych, jak i w naukowym. Dzieje się tak, ponieważ energia występuje we wszystkich procesach fizycznych. Powinno być już jasne, że wiele problemów najłatwiej zrozumieć albo przedstawić za pomocą rozważań energetycznych. Żaden z dotychczasowych uznanych eksperymentów fizycznych nie podważa zasady zachowania energii. Prace eksperymentalne, które początkowo zdawały się przeczyć tej regule, w ostateczności prowadziły do odkrycia nowych form energii.

Jakie są rodzaje energii? Większość z nich omówimy w dalszych rozdziałach (zobacz także Rysunek 8.14), ale kilka przypadków rozważymy już teraz:

- Cząstki i atomy będące składowymi wszystkich ciał są w ciągłym ruchu. Polega on na złożeniu losowych drgań, a energia kinetyczna związana z tym ruchem nazywana jest **energią cieplną** (ang. **thermal energy**). Jak

sama nazwa wskazuje, jest ona związana z temperaturą ciała. Zauważmy, że energia cieplna może być przenoszona z miejsca na miejsce, np. poprzez przewodnictwo cieplne, konwekcję lub radiację. W takich przypadkach mówimy o transporcie *ciepła*.

- **Energia elektryczna** (ang. **electrical energy**) jest bardzo popularnym rodzajem energii i wykorzystujemy ją do wykonania pracy w wielu praktycznych zastosowaniach.
- Paliwa, czyli na przykład benzyna lub jedzenie, zawierają w sobie **energię chemiczną** (ang. **chemical energy**). Jest to forma energii potencjalnej wynikającej z wiązań i budowy cząsteczkowej danej substancji. Energia chemiczna może zostać zamieniona na cieplną, np. poprzez utlenienie. Reakcje chemiczne mogą też prowadzić do powstawania energii elektrycznej, tak jak ma to miejsce w bateriach. Natomiast energia elektryczna może być zamieniona na cieplną lub świetlną w urządzeniach takich jak grzejnik elektryczny czy żarówka.
- Światło widzialne jest jedną z form fali elektromagnetycznych, które są związane z pewną **energią promieniowania** (ang. **radiant energy**). Do tego rodzaju energii zaliczamy fale radiowe, podczerwone (IR), nadfioletowe (UV), rentgenowskie oraz gamma. Wszystkie ciała posiadające energię cieplną wypromieniowują energię w postaci fal elektromagnetycznych.
- **Energia jądrowa** (ang. **nuclear energy**) powstaje w wyniku reakcji i procesów, w których dochodzi do zamiany masy na energię. Energia jądrowa ulega przemianie w energię promieniowania Słońca czy cieplną w reaktorach jądrowych, która potem jest zamieniana na elektryczną w turbinach parowych. Wszystkie rodzaje energii mogą ulegać przemianie jedna w drugą i, do pewnego stopnia, mogą być zamieniane na pracę mechaniczną.

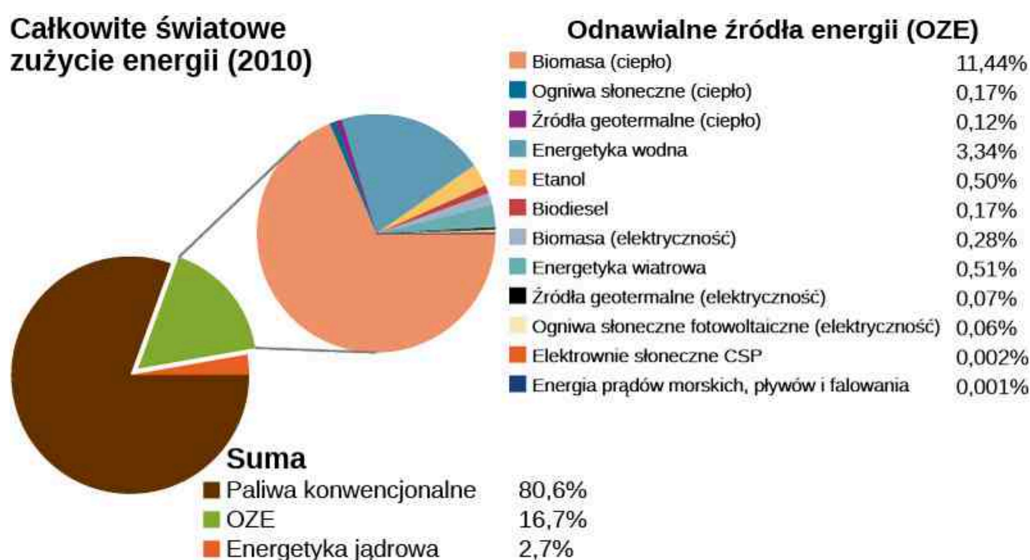


Rysunek 8.14 Energia, którą zużywamy, ma różne formy. Możemy je zamieniać na inne poprzez odpowiednie procesy. Będziemy analizować wiele z tych procesów w następnych rozdziałach. (Źródło: „Słońce" EIT SOHO Consortium, ESA, NASA; Źródło: „ogniwa słoneczne" „kjkolb"/Wikimedia Commons; źródło: „palnik gazowy" Steven Depolo)

Procesy przemiany energii z jednego rodzaju w drugi zachodzą nieustannie w otaczającym nas świecie. Energia chemiczna pożywienia jest zamieniana na energię cieplną poprzez metabolizm, a energia świetlna – w chemiczną poprzez fotosyntezę. Inny rodzaj konwersji energii ma miejsce w ogniwach fotowoltaicznych. Światło słoneczne

padające na ogniwa podlega przemianie na elektryczność, która potem może być wykorzystana do napędzania silników lub ogrzewania wody. W innym przykładzie energia chemiczna zgromadzona w węglu jest przekształcana podczas spalania w piecu na energię cieplną, którą potem wykorzystuje się do zamiany wody w parę wodną. Para wodna ulega rozprężeniu wraz ze wzrostem temperatury, a zatem część energii cieplnej zamienia się w mechaniczną. Energia mechaniczna gazu napędza turbinę, która w ten sposób wytwarza prąd elektryczny. W omawianych przykładach niecałą energię początkową udaje się zamienić w formę końcową, ponieważ część energii jest zawsze przekazywana otoczeniu (np. poprzez rozproszenie).

Energia jest bardzo ważna w każdym aspekcie życia ludzkiego. Żyjemy w świecie pełnym współzależności i dostęp do odpowiedniej ilości niezawodnych zasobów energetycznych jest kluczowy dla wzrostu ekonomicznego i utrzymania jakości życia ludzkiego na odpowiednim poziomie. Podstawowe rodzaje źródeł energii przedstawiono na Rysunku 8.15. Rozróżniono na nim dwa podstawowe rodzaje źródeł: **odnawialne** (ang. **renewable energy source**) oraz **nieodnawialne** (ang. **non-renewable energy source**), a także przedstawiono dalszy, bardziej szczegółowy ich podział. Odnawialne źródła energii (OŹE) są uzupełniane poprzez procesy naturalnie przebiegające w środowisku w czasie dużo krótszym niż czas trwania cywilizacji, która zamierza z nich korzystać. Nieodnawialne źródła energii są zużywane i nie mogą zostać odnowione, bądź czas do tego potrzebny jest zbyt długi.



Rysunek 8.15 Światowe zużycie energii z podziałem na jej źródła. Udział odnawialnych źródeł energii (OŹE) stale rośnie i osiąga już 19% całkowitej produkcji.

Najważniejszym źródłem energii nieodnawialnej dla naszej cywilizacji są **paliwa kopalne** (ang. **fossil fuels**), takie jak węgiel, ropa naftowa czy gaz ziemny. Z tego źródła powstaje około 81% zużywanej globalnie energii. Podczas spalania paliwa zachodzą reakcje chemiczne, które przekształcają energię potencjalną wiązań chemicznych w energię cieplną oraz nowe związki chemiczne będące produktami reakcji. Powstałe ciepło może zostać wykorzystane do ogrzewania budynków lub do zasilania maszyn i instalacji parowych. Silniki spalinowe oraz odrzutowe zamieniają część energii spalania, poprzez gwałtowne rozprężanie gazów, w energię mechaniczną. Do wytworzenia energii elektrycznej zazwyczaj wykorzystuje się energię związaną z rozprężaniem pary wodnej, która np. w silnikach turbinowych transformowana jest w pracę mechaniczną. Uzyskanej energii mechanicznej używa się potem do obracania uzwojeń przewodnika w polu magnetycznym, co prowadzi do powstania prądu przemiennego. Energia jądrowa to inny rodzaj energii nieodnawialnej pokazanej na Rysunku 8.15, która dostarcza 3% światowego zapotrzebowania. Reakcje jądrowe uwalniają energię poprzez zamianę energii potencjalnej jądra atomowego na energię cieplną, podobnie jak w przypadku reakcji chemicznych. Uzyskane ciepło może być przekazywane lub przekształcane na inne formy w sposób analogiczny, jak w przypadku paliw kopalnych.

Niepożądanym skutkiem ubocznym spalania paliw kopalnych jest uwalniany do atmosfery dwutlenek węgla, jeden z czynników wywołujących globalne ocieplenie. Natomiast wyzwaniem dla energii jądrowej są zagadnienia związane z bezpieczeństwem eksploatacji i utylizacji materiałów promieniotwórczych. Kolejny problem związany z energią nieodnawialną wiąże się z faktem, że jej źródła są ograniczone. Co więcej, obserwacja procesów rozwoju cywilizacyjnego pozwala przewidywać dalsze zwiększenie ich zużycia, tak, że może zabraknąć ich w ciągu następnych kilkuset lat. Aby przeciwdziałać tym zagrożeniom, duży nacisk kładzie się na badania i rozwój OŹE. W prace te zaangażowanych jest wielu naukowców z całego świata.

Cztery z wymienionych na Rysunku 8.15 źródeł energii odnawialnej bazują na surowcu pochodzenia roślinnego

(ciepło i elektryczność z biomasy, etanol oraz biodiesel). Konwersja energii z tych źródeł opiera się na takich samych procesach, jak w przypadku paliw kopalnych. Pozostałe najważniejsze rodzaje OŹE to: energetyka wodna, wiatrowa, słoneczna oraz źródła geotermalne.

Energetyka wodna (ang. **hydropower**) bazuje na przemianie energii potencjalnej grawitacji mas wody na energię kinetyczną, która towarzyszy spadkowi z wysokości. Spadająca woda wykonuje pracę, napędzając przeznaczone do tego celu turbiny, które energię mechaniczną zamieniają na elektryczną. Inny rodzaj energetyki związanej z poruszającymi się masami wody, energia prądów morskich, pływów i falowania, znajduje się na wczesnym etapie rozwoju i nie jest wykorzystywany na szeroką skalę. **Energia wiatrowa** (ang. **wind power**) natomiast również wykorzystuje energię kinetyczną przepływu mas powietrza do zasilania młynów, napędzania żaglówek albo do zamiany na energię elektryczną.

Wnętrze Ziemi skrywa skumulowane ogromne zasoby energii cieplnej, której część jest pozostałością procesu formowania się planety (energia potencjalna grawitacji zamieniona na ciepło), a część pochodzi z promieniowania występującego w pewnego rodzaju minerałach (jest to forma naturalnej energii jądrowej). Minie bardzo długi czas, zanim ta **energia geotermalna** (ang. **geothermal energy**) zostanie oddana do otaczającej nas przestrzeni kosmicznej, a z uwagi na długość trwania cywilizacji ludzkiej oraz jej zapotrzebowanie na energię – to źródło uznawane jest za trwałe i niemalże nieskończone.

Źródłem **energii słonecznej** (ang. **solar power**) są fale elektromagnetyczne wypromieniowywane przez naszą gwiazdę. Większość tej energii występuje w postaci światła widzialnego i podczerwonego. Odpowiednio dobrane materiały mogą absorbować fale elektromagnetyczne i zamieniać ich energię, na przykład na ciepło, które może być wykorzystane do ogrzania wody albo, w formie skoncentrowanej, do produkcji pary wodnej i wytwarzania z niej energii elektrycznej (Rysunek 8.15). W innym procesie fizycznym, zwanym efektem fotoelektrycznym, energia fali elektromagnetycznej może być zamieniana bezpośrednio na elektryczność. Stosuje się w tym celu materiały fotowoltaiczne (zob. ogniwa słoneczne fotowoltaiczne na Rysunku 8.16). Niektóre instalacje solarne wykorzystują soczewki albo lustra do skupiania wiązki światła i konwersji skupionej wiązki na energię – są to elektrownie słoneczne CSP przedstawione na Rysunku 8.15.



Rysunek 8.16 Instalacje ogniw fotowoltaicznych w skali przemysłowej są budowane w rejonach świata o dużym nasłonecznieniu po to, by wytwarzać energię elektryczną. (Źródło: Sarah Swenty)

Ważne jest, żeby na zakończenie tego rozdziału powiedzieć kilka słów o głównych aspektach rozważań energetycznych. Tak jak wspomnieliśmy wcześniej, zasada zachowania energii jest bardzo przydatnym prawem stosowanym w analizie zagadnień fizycznych. Nie można jej udowodnić na podstawie podstawowych praw fizyki, ale jest to dobre narzędzie, jako że odstępstw od niej nigdy nie udało się wykazać naukowo. Zasada zachowania energii mówi nam, że całkowita energia izolowanego układu pozostaje stała. Należy przy tym pamiętać, że w dyskursie publicznym o energii mówi się w trochę inny sposób, w szczególności jeśli chodzi o kwestię oszczędzania energii. O oszczędzaniu energii mówi się wtedy, kiedy chcemy zmniejszyć ilość energii zużywanej przez odbiorcę indywidualnego lub ich grupę (np. poprzez obniżenie temperatury w pokojach, rzadsze korzystanie z transportu samochodowego). Innym aspektem tego zjawiska jest próba bardziej skutecznej przemiany energii w danym procesie (np. efektywniejsze systemy ogrzewania, samochody spalające mniej benzyny, bardziej oszczędne oświetlenie).

Natomiast zgodnie z zasadą zachowania energii w układzie zamkniętym energia nigdy nie jest niszczona ani wytwarzana. Nie możemy jej zatem w tym sensie „oszczędzić” ani nawet „wytworzyć”. Zagadnienie dotyczy głównie

efektywności konwersji i wykorzystania form energii, które są dla nas przydatne. Z punktu widzenia fizycznego problem dotyczy bardziej energii rozproszonej, np. ciepła, którego nie można wykorzystać w postaci pracy. Szerzej zagadnienia związane z przemianami energii i ciepła omówimy w rozdziałach dotyczących termodynamiki.

PODSUMOWANIE ROZDZIAŁU 8

KLUCZOWE POJĘCIA

energia mechaniczna (ang. mechanical energy) suma energii kinetycznej i potencjalnej

energia potencjalna (ang. potential energy) jest to funkcja położenia, energia posiadana przez ciało w odniesieniu do rozpatrywanego układu fizycznego

nieodnawialne źródło energii (ang. non-renewable energy source) źródło energii, które nie może zostać odnowione i jest zużywane przez działalność ludzką

odnawialne źródło energii (ang. renewable energy source) źródło energii, które jest uzupełniane przez procesy naturalne w czasie dużo krótszym niż czas trwania cywilizacji ludzkiej

punkt równowagi (ang. equilibrium point) położenie, w którym siła zachowawcza, będąca w założeniu siłą wypadkową, wyznaczona na podstawie nachylenia stycznej do krzywej energii potencjalnej jest równa zero

punkt zwrotny (ang. turning point) położenie, w którym prędkość cząstki, w przypadku ruchu w jednym wymiarze, zmienia znak

różnica energii potencjalnej (ang. potential energy difference) praca wzięta z minusem wykonana podczas przemieszczenia ciała pomiędzy dwoma punktami w przestrzeni

różniczka zupełna (ang. exact differential) to różniczka, w której oblicza się sumę pochodnych funkcji po wszystkich zmiennych

siła niezachowawcza (ang. non-conservative force) siła, której praca zależy od drogi przebytej przez ciało

siła zachowawcza (ang. conservative force) siła, której praca nie zależy od drogi przebytej przez ciało

wielkość zachowana (ang. conserved quantity) to taka, która nie może być tworzona lub anihilowana, ale może ulegać przemianom pomiędzy różnymi formami

wykres energii potencjalnej (ang. potential energy diagram) wykres energii potencjalnej cząstki w funkcji położenia

zasada zachowania energii (ang. energy conservation) energia całkowita odizolowanego układu jest stała

NAJWAŻNIEJSZE WZORY

Różnica energii potencjalnej	$\Delta E_{pAB} = E_{pB} - E_{pA} = -W_{AB}$
Energia potencjalna w odniesieniu do punktu o zerowej energii potencjalnej	$\Delta E_p = E_p(\vec{r}) - E_p(\vec{r}_0)$
Energia potencjalna grawitacji w pobliżu powierzchni Ziemi	$E_p(y) = mgy + \text{const.}$
Energia potencjalna sprężystości	$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \text{const.}$
Praca wykonana przez siły zachowawcze po drodze zamkniętej	$W_{\text{droga zamk.}} = \oint \vec{F}_{\text{zach}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$
Warunek dla siły zachowawczej rozpatrywanej w dwóch wymiarach	$\frac{\mathrm{d}F_x}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}F_y}{\mathrm{d}x}$
Siła zachowawcza jako ujemna pochodna energii potencjalnej	$F_l = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}l}$
Zasada zachowania energii przy braku sił niezachowawczych	$0 = W_{\text{niezach}\,AB} = \Delta(E_k + E_p)_{AB} = \Delta E_{AB}$

PODSUMOWANIE

8.1 Energia potencjalna układu

- W układzie z pojedynczym ciałem różnica energii potencjalnej jest równa ujemnej pracy wykonanej przez siły działające na cząstkę w trakcie jej przemieszczania się z jednego miejsca na drugie.

- Skoro jedynie różnica energii potencjalnej ma sens fizyczny, to zero energii może być przyjęte w dowolnym, wygodnym dla obliczeń punkcie odniesienia.
- Energia potencjalna w polu grawitacyjnym Ziemi, w pobliżu powierzchni planety oraz energia potencja sprężystości wynikająca z prawa Hooke'a są odpowiednio liniową i kwadratową funkcją położenia.

8.2 Siły zachowawcze i niezachowawcze

- Siła zachowawcza to taka, której praca nie jest zależna od drogi. Równoważnie: siła jest zachowawcza, jeśli praca po krzywej zamkniętej jest równa zero.
- Siła niezachowawcza to siła, której praca zależy od drogi.
- Przyczynek do pracy wykonanej przez siłę zachowawczą jest różniczką zupełną energii kinetycznej. Z tej zależności wynika równanie różniczkowe, które muszą spełniać siły zachowawcze.
- Każda składowa siły zachowawczej w wyróżnionym kierunku jest równa ujemnej pochodnej energii potencjalnej po danej współrzędnej kierunkowej.

8.3 Zasada zachowania energii

- Wielkość zachowana to wielkość fizyczna, która pozostaje stała, niezależnie od przebytej drogi.
- Jednym ze sposobów wyrażenia równoważności pracy i energii jest stwierdzenie, że zmiana całkowitej energii mechanicznej cząstki jest równa pracy wykonanej na niej przez siły niezachowawcze.
- Jeśli siła niezachowawcza nie wykonuje pracy i nie działają siły zewnętrzne, to energia mechaniczna cząstki pozostaje stała. Jest to twierdzenie zachowania energii mechanicznej i oznacza, że całkowita energia mechaniczna cząstki nie zmienia się.
- W ruchu w jednym wymiarze, w którym energia mechaniczna jest stała, a energia potencjalna znana, położenie cząstki w funkcji czasu może zostać wyznaczone na podstawie zasady zachowania energii.

8.4 Wykresy energii potencjalnej

- Interpretacja wykresu energii potencjalnej dla ruchu w jednym wymiarze pozwala nam otrzymać jakościowe oraz, w niektórych przypadkach, ilościowe informacje o ruchu.
- Punkt zwrotny to taki, w którym energia potencjalna zrównuje się z energią całkowitą, a energia kinetyczna jest zerowa, co oznacza, że w tym punkcie dochodzi do zmiany zwrotu wektora prędkości.
- Ujemne nachylenie stycznej do krzywej energii potencjalnej ciała jest równe składowej siły zachowawczej działającej na ciało w tym kierunku. W położeniu równowagi nachylenie stycznej wynosi zero, a o równowadze mówimy, że jest stabilna, jeśli w tym punkcie funkcja energii potencjalnej ma lokalne minimum.

8.5 Źródła energii

- Energia może być przekazywana pomiędzy układami oraz przekazywana lub zamieniana z jednego rodzaju na inny. Podstawowymi formami energii są: kinetyczna, potencjalna, cieplna oraz elektromagnetyczna.
- Odnawialne źródła energii, jak sama nazwa wskazuje, mogą zostać odnowione przez naturalne procesy w krótkim czasie. Przykładami są wiatr, woda, źródła geotermalne oraz energia słoneczna.
- Nieodnawialne źródła energii to takie, które są zużywane i nie mogą zostać odnowione lub ich regeneracja trwa bardzo długo (w porównaniu do np. życia ludzkiego). Przykładami są: paliwa kopalne oraz energia jądrowa.

PYTANIA

8.1 Energia potencjalna układu

1. Energia kinetyczna układu musi zawsze być większa lub równa zeru. Czy ta zasada obowiązuje również w przypadku energii potencjalnej? Odpowiedź uzasadnij.

2. Siła uzyskana dzięki trampolinie jest zachowawcza przy założeniu, że tarcie wewnętrzne jest pomijalne. Przyjmując to założenie, opisz zmiany energii potencjalnej pływaka, który się z niej wybija. Swoje rozważania przeprowadź od momentu wejścia pływaka na skocznię do momentu, w którym jego stopy odrywają się od trampoliny tuż przed skokiem do wody.

3. Opisz zmianę energii potencjalnej grawitacji i przemiany energii oszczepu, zaczynając od momentu, w którym lekkoatleta podnosi oszczep, do momentu wbicia się oszczepu w ziemię po prawidłowo wykonanym rzucie.

4. Dwie piłki nożne o tej samej masie zostały wyrzucone z poziomu powierzchni Ziemi z tą samą prędkością, ale pod różnymi kątami. Piłka A została kopnięta pod bardzo małym kątem względem powierzchni, a piłka B niemalże pod kątem prostym. Porównaj dla piłek A i B: (a) początkową energię kinetyczną, (b) zmianę energii potencjalnej grawitacji od poziomu gruntu do najwyższego punktu. Czy energia w części (a) ma inną wartość niż w (b)? Wyjaśnij, dlaczego tak jest.

5. Jaki jest główny czynnik mający wpływ na prędkość ciała, które zsuwa się bez tarcia z równi pochyłej przy założeniu, że jedyna praca wykonana została przez siły grawitacji?

6. Dwie osoby obserwują liść spadający z drzewa. Pierwsza stoi na drabinie, a druga na ziemi. Jeśli każda z tych osób miałaby porównać energię liścia, to czy te dwie osoby podałyby taką samą, czy różną wartość poszczególnych energii w trakcie lotu? Rozważ:

a. energię kinetyczną liścia,
b. zmianę energii potencjalnej grawitacji,
c. końcową wartość energii potencjalnej.

8.2 Siły zachowawcze i niezachowawcze

7. Jaki jest sens fizyczny siły niezachowawczej?

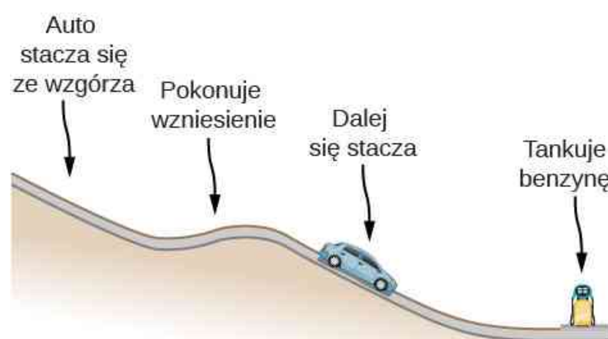
8. Zabawkowa rakieta zrobiona z butelki została wystrzelona pionowo w górę z prędkością początkową 30 m/s. Zakładając, że opory powietrza można pominąć, butelka uniosłaby się na wysokość około 46 m. Jednakże rakieta wznosi się jedynie na wysokość 35 m, po czym spada na ziemię. Co jest tego przyczyną? Wyjaśnij, dając jedynie jakościową odpowiedź.

9. Zewnętrzna siła działa na cząsteczkę podczas jej przemieszczania się z jednego punktu do drugiego i z powrotem. Na cząstkę działają jedynie siły zachowawcze. Czy energia potencjalna i kinetyczna cząsteczki zmieni się w wyniku tego przemieszczenia?

8.3 Zasada zachowania energii

10. Czy podczas zsuwania się ciała po równi pochyłej praca sił tarcia zależy od prędkości początkowej ciała? Podaj odpowiedź także dla przypadku, w którym ciało zsuwa się po zakrzywionej powierzchni.

11. Przeanalizuj następujący przypadek. Samochód znajdujący się w stanie spoczynku zaczyna swój ruch, przy czym działa na niego siła tarcia. W początkowej fazie ruchu samochód przyspiesza, jadąc w dół. Po pokonaniu krótkiego odcinka (patrz poniżej) kończy się mu benzyna, więc kierowca pozwala samochodowi staczać się na luzie w dół. W trakcie swojej trasy pojazd pokonuje niewielkie wzniesienie. Następnie samochód dotacza się do stacji benzynowej, gdzie zatrzymuje się, żeby zatankować. Określ rodzaje energii oraz ich przemiany w trakcie ruchu pojazdu.

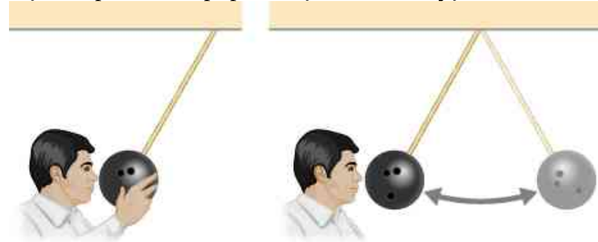


12. Upuszczona piłka odbija się do połowy wysokości, z której została puszczona. Omów przemiany energii zachodzące w tym ruchu.

13. „Równanie $E = E_p + E_k$ to szczególny przypadek zasady równoważności pracy i energii.” Wyjaśnij to stwierdzenie.

14. Pokazy, w których prezentuje się ruch drgający kuli zawieszonej na linie przyczepionej na suficie, są często prezentowane podczas wykładów z fizyki.

Profesor wychyla kulę z położenia równowagi i przytrzymuje ją tuż przy swoim nosie, tak jak pokazano poniżej. Następnie puszcza kulę swobodnie, a ona zaczyna poruszać się w tę i z powrotem. Czy kula uderzy go w nos w swojej drodze powrotnej? Co profesor stara się nam przekazać poprzez tę demonstrację?



15. Dziecko podskakuje na łóżku, osiągając coraz większą wysokość z każdym skokiem. Wyjaśnij, w jaki sposób dziecko zwiększa swoją maksymalną energię potencjalną po każdym wyskoku.

16. Czy siła niezachowawcza może zwiększać energię mechaniczną układu?

17. Pomijając opory powietrza, o ile wyżej musimy wznieść ciało, aby dwukrotnie zwiększyć prędkość, z jaką zderzy się z ziemią?

18. Pudełko zrzucono na sprężynę w stanie równowagi. Sprężyna ulega ściśnięciu pod wpływem ciężaru pudełka, po czym pozostaje w spoczynku. Załóżmy, że układ masa-sprężyna jest w pozycji pionowej. Czy musimy w rozważaniach tego układu uwzględnić zmianę energii potencjalnej grawitacji pudełka, jeżeli rozpatrujemy proces ściskania sprężyny?

ZADANIA

8.1 Energia potencjalna układu

19. Korzystając z danych z Tabeli 8.2, oblicz, ile łańcuchów DNA można rozerwać, wykorzystując energię jednego elektronu z telewizora kineskopowego. (Obecność elektronów w telewizorze dawnego typu powodowała powstawanie promieniowania rentgenowskiego, które miało działanie kancerogenne. Późniejsze wersje telewizorów kineskopowych posiadały specjalne ekranowanie, które pochłaniało promieniowanie, zanim mogło ono dotrzeć do odbiorców.)

20. Jeśli możliwe byłoby wykorzystanie energii bomb fuzyjnych do zasilenia światowych systemów energetycznych, to ile 9-megatonowych bomb byłoby potrzeba, aby zaspokoić roczne zapotrzebowanie świata na energię elektryczną (użyj danych z Tabeli 8.1)?

21. Kamera o ciężarze 10 N odpadła z drona unoszącego się na wysokości 20 m i spada swobodnie. Jaka jest zmiana energii potencjalnej związana z upadkiem kamery, jeśli za punkt zera energii potencjalnej przyjmiemy
a. poziom gruntu?
b. poziom, na jakim unosi się dron?
c. Jaka jest wartość energii potencjalnej kamery, zanim odpadnie z drona?
d. Jaka jest wartość energii potencjalnej kamery po tym, jak zderza się z ziemią?

Dla dwóch ostatnich podpunktów przyjmij zero energii potencjalnej w punkcie, w którym przebywa obserwator, czyli w budynku na wysokości 30 m nad ziemią.

22. Pasażer upuścił kamień o masie 50 g z pokładu statku na wysokości 70,0 m od poziomu lustra wody. Osoba stojąca na pomoście 3,0 m nad poziomem wody trzyma sieć, w którą zamierza złapać kamień.
a. Jaką pracę wykonują siły grawitacji na kamieniu w trakcie jego lotu?
b. Jaka jest zmiana energii potencjalnej grawitacji podczas lotu?
c. Jeśli przyjmiesz punkt odniesienia z zerową energią potencjalną na poziomie lustra wody, jaka będzie wartość energii potencjalnej w momencie upuszczenia kamienia?
d. Jaka będzie jej wartość w chwili, gdy kamień wpadnie w sieć? Co się stanie, jeśli przyjmiemy, że energia potencjalna na poziomie lustra wody wynosi 30,0 J?
e. Oblicz wartości dla pytań postawionych w (c) oraz (d), przyjmując nowy punkt odniesienia.

23. Kocia zabawka w kształcie kulki ma masę 15 g i zostaje wyrzucona prosto w górę z prędkością początkową 3 m/s. Przyjmij, że opór powietrza jest pomijalny.
a. Ile wynosi energia kinetyczna kulki w momencie wyrzutu?
b. Ile wynosi praca wykonana przez siły grawitacji podczas lotu wznoszącego zabawki?
c. Jaka jest zmiana energii potencjalnej grawitacji w tej części ruchu?
d. Jeśli zero energii potencjalnej jest przyjęte na wysokości wyrzucającej ręki, jaka jest energia potencjalna w momencie, kiedy zabawka osiąga maksymalną wysokość?
e. Jeśli punkt odniesienia dla energii przyjmiemy w punkcie maksymalnej wysokości, to jaka będzie energia potencjalna w momencie, gdy zabawka opuszcza rękę?
f. Oblicz maksymalną wysokość, na jaką może wznieść się kulka.

8.2 Siły zachowawcze i niezachowawcze

24. Siła $F(x) = 3{,}0\,\mathrm{Nm} \cdot x^{-1}$ działa na cząstkę podczas jej ruchu w dodatnim kierunku osi x. (a) Ile wynosi praca tej siły podczas przemieszczenia z $x = 2{,}0$ m do $x = 5{,}0$ m? (b) Przyjmując typowy punkt odniesienia dla energii potencjalnej, czyli zero dla $x = \infty$, oblicz energię potencjalną tej siły.

25. Siła $F(x) = -5{,}0\,\mathrm{N/m^2} \cdot x^2 + 7{,}0\,\mathrm{N/m} \cdot x$ działa na cząstkę. (a) Jaka praca zostanie wykonana przy przesunięciu z $x = 2{,}0$ m do $x = 5{,}0$ m? (b) Przyjmując typowy punkt odniesienia dla energii potencjalnej, czyli zero dla $x = \infty$, oblicz energię potencjalną tej siły.

26. Oblicz siłę związaną z energią potencjalną daną wzorem $E_p(x) = -a/x + b/x^2$.

27. Energia potencjalna oddziaływań pomiędzy dwoma atomami w cząsteczce dwuatomowej jest zazwyczaj wyrażona funkcją $E_p(x) = -a/x^{12} + b/x^6$, gdzie przez x wyrażono odległość pomiędzy atomami. (a) Jaka jest odległość separacji atomów, czyli taka, w której energia potencjalna przyjmuje lokalne minimum (nie w $x = \infty$)? (b) Jaka jest wartość siły działającej na atomy znajdujące się w tym położeniu? (c) W jaki sposób zmienia się siła wraz ze zmianą położenia?

28. Cząstka o masie 2,0 kg porusza się pod wpływem działania siły $F(x) = 3\,\mathrm{Nm}^{1/2}/\sqrt{x}$. Jeśli prędkość cząstki dla $x = 2{,}0$ m wynosi $v = 6{,}0$ m/s, to ile wynosi prędkość dla $x = 7{,}0$ m?

29. Cząstka o masie 2,0 kg porusza się pod wpływem działania siły $F(x) = -5{,}0\,\mathrm{N/m^2} \cdot x^2 + 7{,}0\,\mathrm{N/m} \cdot x$. Jeśli prędkość cząstki dla $x = -4{,}0$ m wynosi $v = 20{,}0$ m/s, to ile wynosi prędkość dla $x = 4{,}0$ m?

30. Skrzynia na kółkach jest pchana bez strat energii wynikających z tarcia pomiędzy podłogą wagonu a skrzynią (patrz rysunek). Wagon porusza się – dla obserwatora stojącego na zewnątrz – w prawo ze stałą pręd-

kością v_0. Jeśli w momencie przyłożenia siły F (na początku ruchu) skrzynia znajdowała się w stanie spoczynku względem wagonu, to bazując na zasadzie równoważności pracy i energii, możemy stwierdzić, że $Fd = mv^2/2$, gdzie d i v to odpowiednio przemieszczenie i prędkość końcowa skrzyni liczone względem wagonu.

a. Jakie przemieszczenie d' skrzyni zaobserwuje obserwator znajdujący się na zewnątrz pociągu?

b. Ile wynosi prędkość początkowa i końcowa skrzyni, v'_0 oraz v', zmierzona przez obserwatora?

c. Wykaż, że $Fd' = m(v')^2/2 - m(v'_0)^2/2$ oraz że praca jest równa zmianie energii kinetycznej w obu układach odniesienia.



8.3 Zasada zachowania energii

31. Chłopiec wyrzuca pionowo w górę kulkę o masie $0{,}25\text{ kg}$ z prędkością początkową 20 m/s. Kiedy piłka wraca do chłopca, ma prędkość równą 17 m/s. Jaką pracę wykonały siły oporu powietrza w trakcie trwania tego ruchu?

32. Mysz o masie 200 g wpada do sztolni o głębokości 100 m osiągając prędkość końcową 8,0 m/s. Jaką pracę wykonały siły oporu w trakcie spadku myszy?

33. Wykorzystując tylko zasadę zachowania energii i zakładając brak sił oporu, wykaż, że kamień rzucony pionowo z mostu na wysokości 20 m nad poziomem wody z prędkością początkową 15,0 m/s uderzy w taflę z prędkością 24,8 m/s niezależnie od zwrotu prędkości początkowej. (*Podpowiedź:* pokaż, że $E_{ks} + E_{ps} = E_{kf} + E_{pf}$.)

34. Piłka o masie 1,0 kg buja się na linie o długości 2,0 m. W najniższym położeniu piłka porusza się z prędkością 10 m/s.

a. Ile wynosi prędkość w najwyższym położeniu?

b. Ile wynosi siła naprężenia liny w najniższym i najwyższym położeniu?

35. Pomijając zagadnienia związane z tarciem, dodatkową siłą mięśni rąk i nóg oraz inne czynniki, skok o tyczce możemy rozważyć jako konwersję energii kinetycznej biegnącego atlety w energię potencjalną podczas skoku. Jeśli skoczek ma wznieść się na wysokość 4,8 m, to jaką prędkość musi osiągnąć w trakcie rozbiegu?

36. Tarzan biegnący z prędkością $9{,}0\text{ m/s}$ łapie lianę zwisającą swobodnie z drzewa.

a. Jak wysoko może wznieść się na lianie?

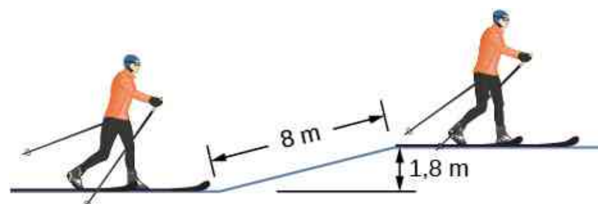
b. Czy długość pnącza ma znaczenie w tym rozważaniu?

37. Załóż, że cięciwa w łuku oddziałuje na strzałę siłą sprężystości (taką samą jak w prawie Hooke'a). Podczas celowania łucznik naciąga cięciwę, cofając strzałę o 50 cm, i trzyma ją w tej pozycji z siłą 150 N. Jeśli masa pocisku wynosi 50 g, a cięciwę uznajemy za nieważką, jaką prędkość osiągnie strzała zaraz po wystrzeleniu?

38. Narciarz o masie 100kg biegnie po poziomym gruncie z prędkością $8{,}0\text{ m/s}$, po czym trafia na wzniesienie o wysokości 1,8 m, tak jak przedstawiono to na rysunku poniżej.

a. Jeśli narciarz postanowi pokonać górkę siłą rozpędu, to jaka będzie jego prędkość na szczycie? Siły tarcia można pominąć.

b. Ile będzie wynosić jego prędkość, jeśli uwzględnimy siłę tarcia wynoszącą 80 N?



39. Sanie o masie 70 kg zsuwają się w dół równi o długości 80 m nachylonej pod kątem $10°$ do poziomu. Po zjeździe sanie pokonują 20 m w poziomie i zaczynają ruch pod górę pod kątem $8°$. Sanie przemieszczają się o dalsze 80 m, po czym zatrzymują się. Ile wyniesie praca wykonana przez siły tarcia?

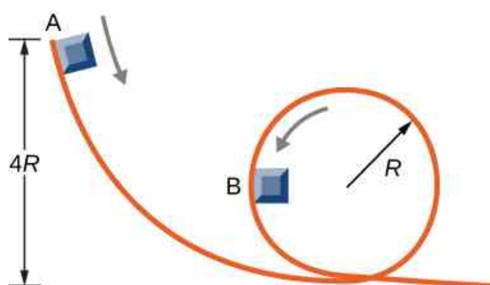
40. Dziewczynka na desce skateboardowej (masa całkowita 40 kg) porusza się z prędkością 10 m/s u podstawy rampy. Rampa jest nachylona pod kątem $20°$ do podłoża. Jeśli dziewczynka wjechała 14,2 m pod górę, zanim się zatrzymała, to ile wynosiła wypadkowa siła tarcia?

41. Piłeczka baseballowa o masie 0,25 kg w wyniku uderzenia kijem uzyskała prędkość 40 m/s. Gdy wpada na trybuny w odległości 120 m od bazy, ma prędkość 30 m/s. Przy założeniu, że piłka wylądowała 20 m ponad poziomem boiska, oblicz, jaką pracę wykonały siły oporu powietrza.

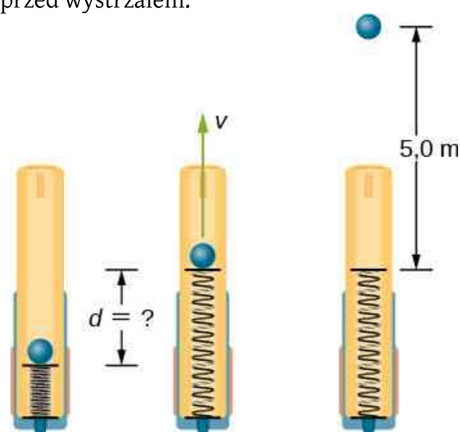
42. Mały ciężarek o masie m przesuwa się bez tarcia po trasie z pętlą przedstawioną na rysunku poniżej.

a. Jeśli prędkość początkowa ciężarka wynosi A, to jaka jest prędkość B ?

b. Ile wynosi siła nacisku ciężarka na tor w punkcie B ?



43. Nieważka sprężyna w działku sprężynowym ma stałą sprężystości równą $k = 12$ N/cm. Pocisk o masie 15 g zostaje wystrzelony pionowo w górę na wysokość 5,0 m ponad lufę. Oblicz, jak mocno ściśnięta była sprężyna przed wystrzałem.



44. Piłeczka jest przywiązana do nitki i wprowadzona w pionowy ruch obrotowy, bez tarcia. Wykaż, że naprężenie nici w najniższym położeniu przewyższa naprężenie w położeniu najwyższym o ośmiokrotność ciężaru piłki. Załóż, że prędkość piłki w najwyższym położeniu jest prawie równa zeru i że układ nie zawiera dodatkowych, zewnętrznych źródeł energii.

8.4 Wykresy energii potencjalnej

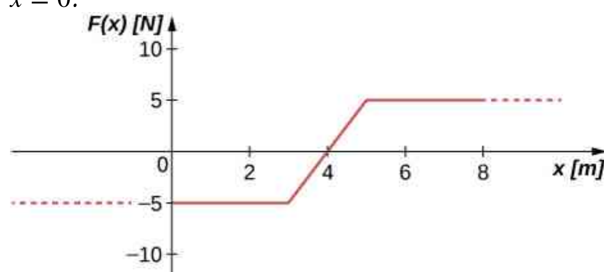
45. Tajemnicza siła o wartości 10 N działa poziomo na wszystko. Siła jest zawsze zwrócona w stronę ściany znajdującej się w wielkiej hali. Wyznacz energię potencjalną ciała, na którą działa ta siła, w funkcji odległości x od ściany. Załóż, że energia potencjalna w położeniu, w którym znajduje się ściana, wynosi zero.

46. Siła $F(x) = -4{,}0x$ (wyrażona w niutonach) działa na ciało o masie 1,0 kg. Dla $x = 3{,}5$ m prędkość ciała wynosi 4,0 m/s. Ile wynosi prędkość w $x = 2{,}0$ m?

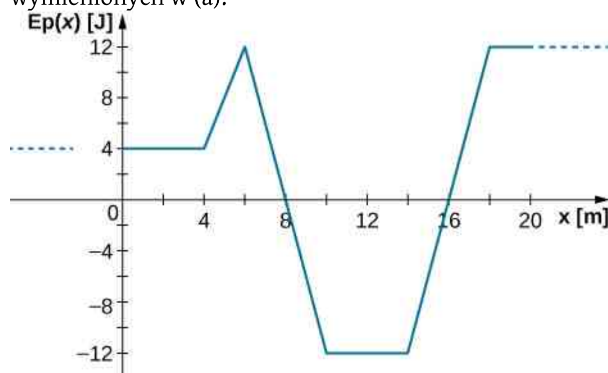
47. Cząstka o masie 4,0 kg porusza się wzdłuż osi x pod wpływem działania siły $F(x) = -cx^3$, gdzie $c = 8{,}0\ \mathrm{N/m^3}$. Prędkość cząstki w punkcie $x_A = 1{,}0$ m wynosi 6,0 m/s. Ile wynosi prędkość dla $x_B = -2{,}0$ m?

48. Siła działająca na cząstkę o masie 2,0 kg zmienia się wraz ze zmianą położenia zgodnie z wzorem $F(x) = -3{,}0x^2$ (x w metrach, $F(x)$ w niutonach). Prędkość cząstki w położeniu $x = 2{,}0$ m wynosi 5,0 m/s. Oblicz energię mechaniczną cząstki, przyjmując punkt odniesienia dla energii potencjalnej:
a. w początku układu współrzędnych;
b. w $x = 4{,}0$ m.
c. Oblicz prędkość cząstki dla $x = 1{,}0$ m. Wykonaj ten podpunkt dla obu wcześniej przyjętych punktów odniesienia.

49. Cząstka o masie 4,0 kg porusza się wzdłuż osi x i działa na nią siła, której funkcję przedstawiono graficznie poniżej. Prędkość cząstki w $x = 0$ wynosi $v = 6{,}0$ m/s. Wyznacz prędkość dla
a. x = 2,0 m,
b. x = 4,0 m,
c. x = 10,0 m.
d. Czy cząstka zawraca w jakimkolwiek położeniu i porusza się z powrotem w kierunku początku układu współrzędnych?
e. Powtórz część (d) zakładając, że $v = 2{,}0$ m/s w $x = 0$.

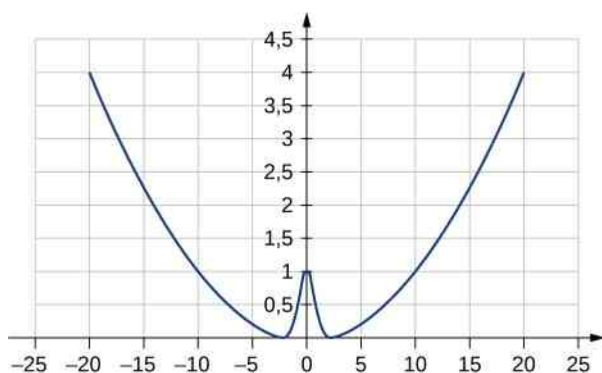


50. Ciało o masie 0,50 kg porusza się wzdłuż osi x. Zależność pomiędzy energią potencjalną a położeniem przedstawia wykres poniżej.
a. Ile wynosi siła działająca na ciało w x = 2, 5, 8 oraz 12 m?
b. Zakładając, że całkowita energia mechaniczna E ciała wynosi −6,0 J, wskaż minimalną i maksymalną wartość x.
c. Jak zmienią się te położenia, jeśli $E = 2{,}0$ J?
d. Załóż, że $E = 16$ J, i oblicz prędkość w położeniach wymienionych w (a).



51.
a. Naszkicuj wykres funkcji energii potencjalnej $E_p(x) = kx^2/2 + Ae^{-\alpha x^2}$, gdzie k, A i α to stałe.
b. Ile wynosi wartość siły związanej z tą energią potencjalną?
c. Załóż, że cząstka o masie równej m porusza się z prędkością v_a w położeniu $x = a$. Wykaż, że cząstka nie może przekroczyć punktu w początku układu współrzędnych, chyba że spełniony jest warunek:

$$A \leq \frac{m v_a^2 + k a^2}{2\left(1 - e^{-\alpha a^2}\right)}.$$



8.5 Źródła energii

52. W filmie animowanym Pocahontas (https://openstaxcollege.org/l/21pocahontclip) główna bohaterka skacze z klifu, żeby pokazać swój ulubiony rodzaj rozrywki. (a) Zakładając, że bierze rozbieg z prędkością 3,0 m/s, a jej prędkość końcowa przy styku z powierzchnią wody wynosi 20,0 m/s, oblicz wysokość klifu. Opory powietrza można pominąć. (b) Jeśli wyskoczyła z klifu bez rozpędu, to jaka będzie jej prędkość końcowa?

53. W reality show Niesamowity wyścig (https://openstaxcollege.org/l/21amazraceclip) uczestnik ma za zadanie strzelić arbuzem o masie 12 kg z procy i trafić w wyznaczony cel. Proca jest naciągnięta na odległość 1,5 m od położenia równowagi, a sam owoc znajduje się wtedy na poziomie gruntu. Podczas wystrzału, w chwili oderwania od procy, arbuz znajduje się na wysokości 0,3 m nad ziemią. Cel, w który uderza pocisk, znajduje się na ziemi w odległości 10 metrów od procy. Oblicz stałą sprężystości procy.

54. W serii filmów Powrót do przyszłości (https://openstaxcollege.org/l/21bactofutclip) , samochód sportowy DeLorean o masie 1230 kg rozwija prędkość 142 km/h, aby móc przenieść się do przyszłości. (a) Jaka jest energia kinetyczna DeLoreana? (b) Sprężynę o jakiej stałej sprężystości należy użyć, aby zatrzymać DeLoreana na dystansie 0,1 m?

55. W filmie Igrzyska śmierci (https://openstaxcollege.org/l/21HungGamesclip) Katniss Everdeen wystrzeliła strzałę o masie 0,0200 kg z poziomu podłoża, po to by przebić jabłko znajdujące się na scenie. Stała sprężystości łuku wynosi 330 N/m, a cięciwa została naciągnięta na odległość 0,55 m. Owoc znajduje się na wysokości 5 m. Z jaką prędkością strzała (a) opuszcza łuk, (b) uderza w jabłko?

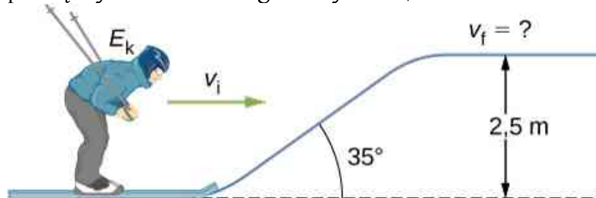
56. W kompilacji wideo „Top Fail” (https://openstaxcollege.org/l/21topfailvideo) , zawierającej filmy amatorskie z różnymi zabawnymi sytuacjami, dwie kobiety biegną naprzeciw siebie, po czym zderzają się, trzymając w rękach piłki do pilatesu. Każda z kobiet ma masę 50 kg (włączając piłkę) i jedna z nich biegnie z prędkością 2,0 m/s, a druga 1,0 m/s.
a. Ile wynosi całkowita energia kinetyczna układu?
b. Jeśli energia jest zachowana po zderzeniu i każda piłka ma masę 2 kg, to jaka będzie prędkość odbitych piłek odlatujących w stronę kamery?

57. W kreskówce Struś pędziwiatr (https://openstaxcollege.org/l/21coyroadcarcl) szybko rozprężająca się sprężyna wyrzuca kojota prosto w skałę. Wydłużenie sprężyny wynosi 5 m, a masa i prędkość kojota odpowiednio 20 kg i 15 m/s.
a. Ile wynosi stała sprężystości sprężyny?
b. Jeśli kojot zostałby wyrzucony pionowo w górę, to jak wysoko by doleciał, zakładając, że nie działają na niego żadne siły niezachowawcze?

58. W znanej scenie z filmu Forrest Gump (https://openstaxcollege.org/l/21ForrGumpvid) tytułowy bohater przebiega przez całe Stany Zjednoczone. Zakładając, że biegnie ze stałą prędkością 3 m/s, wyjaśnij, czy potrzebuje zużywać więcej energii w trakcie biegu pod górkę czy w dół, i dlaczego?

59. W filmie Monty Python i Święty Graal (https://openstaxcollege.org/l/21monpytmovcl) krowę wystrzelono z katapulty znajdującej się na zamkowym murze. Zero dla energii potencjalnej przyjęto na poziomie gruntu. Stała sprężystości katapulty wynosi $1{,}1 \cdot 10^4\ \mathrm{N/m}$, a odchylenie od położenia równowagi jest równe 0,5 m. Jeśli mur zamku ma wysokość 9,1 m, a krowa masę 110 kg, to:
a. Ile wynosi energia potencjalna krowy na szczycie muru?
b. Jaka jest wartość energii potencjalnej sprężystości przed wystrzałem?
c. Jaka jest prędkość krowy tuż przed uderzeniem w ziemię?

60. Narciarz o masie 60,0 kg i prędkości początkowej 12,0 m/s wjeżdża na górkę o wysokości 2,50 m. Znajdź końcową prędkość, wiedząc, że współczynnik tarcia pomiędzy nartami i śniegiem wynosi 0,80.



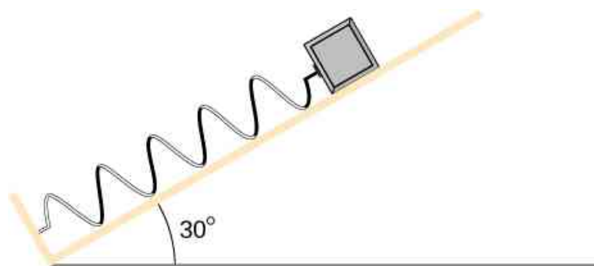
61.
a. Jak wysoko pod górkę może wjechać samochód z wyłączonym silnikiem, jeśli praca wykonana przez siły tarcia jest pomijalnie mała, a jego prędkość początkowa wynosi 110 km/h?
b. Jeśli samochód o masie 750 kg i, tej samej, co w punkcie (a) prędkości początkowej wjeżdża na wysokość 22 m, to jaka część jego energii została zamieniona na ciepło?
c. Ile wynosi średnia siła tarcia wzgórza, jeśli kąt nachylenia wzgórza wynosi $2{,}5°$ względem poziomu?

62. Pociąg metra o masie $5{,}00 \cdot 10^5$ kg zostaje wyhamowany od prędkości 0,500 m/s do zatrzymania na drodze 0,400 m poprzez duży zderzak sprężynowy. Jaka jest stała sprężystości k zderzaka?

63. Drążek pogo ma sprężynę o stałej sprężystości $2{,}5 \cdot 10^4\ \mathrm{N/m}$, której maksymalne ściśnięcie wynosi 12,0 cm. Na jaką maksymalną wysokość, licząc od położenia równowagi, może wyskoczyć dziecko, jeśli całkowita masa dziecka i drążka wynosi 40 kg?

64. Ciężarek o masie 500 g jest przyczepiony do sprężyny o stałej k równej 80 N/m (zobacz rysunek poniżej). Drugi koniec sprężyny jest przymocowany do ściany. Ciężarek spoczywa na równi pochyłej nachylonej pod kątem $30°$ do poziomu. Współczynnik tarcia pomiędzy ciężarkiem a równią wynosi 0,20. Ciężarek popchnięto tak, że sprężyna skurczyła się o 10 cm, a następnie pozwolono całości układu poruszać się swobodnie.

a. Ile wynosi energia potencjalna w momencie ściśnięcia sprężyny?
b. Wyznacz prędkość ciężarka w momencie, w którym przelatuje on przez punkt równowagi.
c. Określ położenie maksymalnego wychylenia ciężarka w górę równi.



65. Ciężarek o masie 200 g przyczepiono do nieważkiej sprężyny o stałej sprężystości 100 N/cm. Drugi koniec sprężyny przymocowano do sufitu. Układ początkowo znajduje się w stanie spoczynku, w którym położenie ciężarka oznaczono symbolem O. Załóżmy, że zero energii potencjalnej ciężarka przypada właśnie w tym punkcie, zarówno dla siły sprężystości, jak i grawitacji. Ciężarek odciągnięto na odległość 5 cm od stanu spoczynku, po czym pozwolono mu na swobodny ruch.

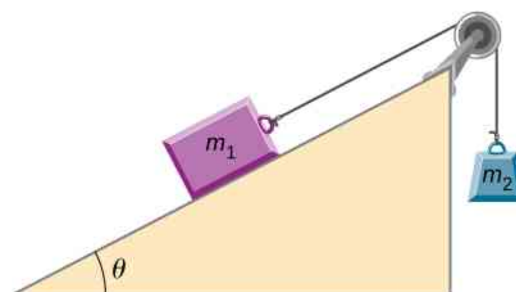
a. Ile wynosi wypadkowa energia potencjalna ciężarka w najniższym punkcie ruchu?
b. Jaka jest wypadkowa energia potencjalna w położeniu O ?
c. Jaka jest prędkość ciężarka w momencie, w którym przekracza położenie O ?
d. Jak wysoko ponad punkt O wzniesie się ciężarek?

66. W akcjach promocyjnych często stosuje się działka strzelające koszulkami T-shirt, aby przekazać je uczestnikom wydarzenia. Przyjmij, że działko wystrzeliwuje T-shirt z prędkością 5,00 m/s ze sceny na wysokości 3,00 metrów nad ziemią. Jaką prędkość będzie miała koszulka w momencie, w którym łapie ją osoba mająca dłonie na wysokości (a) 1 metra oraz (b) 4 metrów nad ziemią? Pomiń siły oporu powietrza.

67. Dziecko o wadze 32 kg skacze na trampolinie. Trampolina oddziałuje na nie siłą sprężystości, działającą jako siła przywracająca. Stała sprężystości trampoliny wynosi 5000 N/m. W najwyższym punkcie podskoku dziecko znajduje się 1 m nad poziomem powierzchni trampoliny. Jakie jest maksymalne odchylenie płachty trampoliny w momencie lądowania dziecka? Pomiń zjawisko ugięcia nóg oraz pracę mięśni dziecka.

68. Poniżej narysowano ciężarek o masie m_1 znajdujący się na równi pochyłej odchylonej od poziomu o kąt θ. Ciężarek połączono nieważką nicią przerzuconą przez nieważki bloczek i przyczepiono do zwisającego swobodnie ciężarka o masie m_2. Ruch nici odbywa się bez tarcia. Jeśli m_1 i m_2 znajdują się na wysokości h oraz $m_2 \gg m_1$ to:

a. Jaka jest energia potencjalna grawitacji całego układu?
b. Jaka jest końcowa energia kinetyczna?

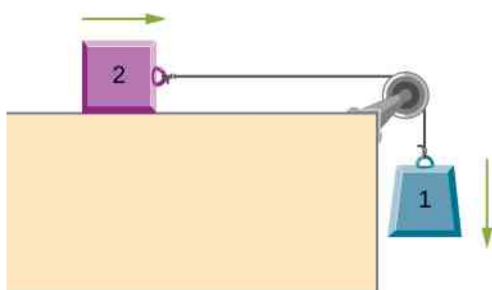


ZADANIA DODATKOWE

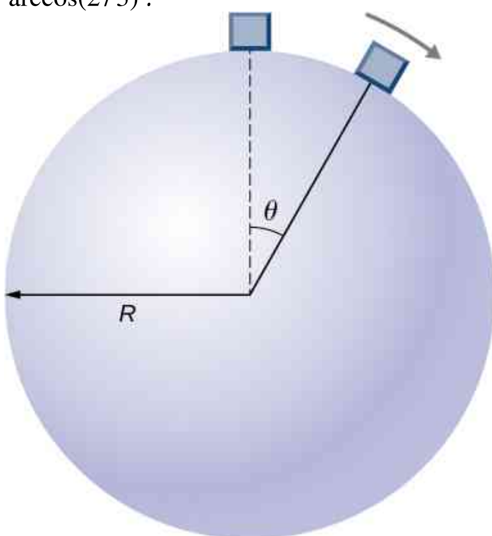
69. Nieważka sprężyna o stałej $k = 200\ \mathrm{N/m}$ zwisa z sufitu. Ciało o masie 2,0 kg przyczepiono do swobodnego końca sprężyny i pozwolono na swobodny ruch. Jeśli ciężarek rozciąga sprężynę o 17 cm, zanim zawróci i zacznie się poruszać w górę, to ile wynosi praca sił tarcia podczas opadania?

70. Cząstka o masie 2,0 kg porusza się pod wpływem siły $F(x) = -x^2 \cdot 5\ \mathrm{N/m^2} + x \cdot 7\ \mathrm{N/m}$. Załóżmy, że siły tarcia również działają na ciało. Jeśli na początku ruchu ciała w punkcie $x = -4{,}0\ \mathrm{m}$ jego prędkość wynosi 0,0 m/s, a w punkcie $x = 4{,}0\ \mathrm{m}$ 9,0 m/s, to ile wynosi praca wykonana przez siły tarcia na tym odcinku?

71. Ciężarek 2 przedstawiony poniżej przesuwa się bez tarcia, podczas gdy ciężarek 1 spada. Oba ciężarki połączone są nieważką, nierozciągliwą nicią przerzuconą przez nieważki bloczek, po którym lina porusza się bez tarcia. Oblicz prędkość bloczków po pokonaniu przez nie drogi równej 2,0 m. Załóż, że ruch rozpoczyna się ze stanu spoczynku. Dane: $m_1 = 2{,}0\ \mathrm{kg}$ oraz $m_2 = 4{,}0\ \mathrm{kg}$.



72. Punkt materialny o masie m znajdujący się początkowo w stanie spoczynku zaczyna się zsuwać po powierzchni kuli o promieniu R bez tarcia (zobacz poniżej). Wykaż, że ciało odrywa się od kuli w momencie gdy $\theta = \arccos(2/3)$.



73. Tajemnicza siła działa na wszystkie cząstki wzdłuż wyróżnionego kierunku i zawsze jest skierowana w stronę pewnego punktu P. Wartość siły zależy od sześcianu odległości od tego punktu, czyli $F \propto r^3$, gdzie r to oddalenie cząstki od punktu P. Przyjmijmy, że b jest współczynnikiem proporcjonalności takim, że wartość siły dana jest wzorem $F = br^3$. Wyznacz energię potencjalną cząstki związaną z działaniem tej siły w odległości D od punktu P, przy założeniu, że w położeniu P energia potencjalna wynosi zero.

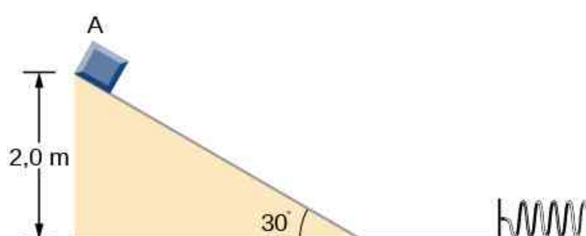
74. Ciało o masie 10 kg rozpoczyna ruch z punktu A i ześlizguje się w dół równi pochyłej o kącie nachylenia $30°$, po czym zderza się z nieważką sprężyną umieszczoną poza równią na poziomym podłożu (zobacz niżej). Stała sprężystości sprężyny wynosi 500 N/m i odchyla się ona od równowagi w momencie uderzenia o 0,75 m. Wysokość równi wynosi 2 m, natomiast ruch odbywa się bez tarcia tylko na powierzchni płaskiej.

a. Jaką prędkość ma ciało na dole równi?

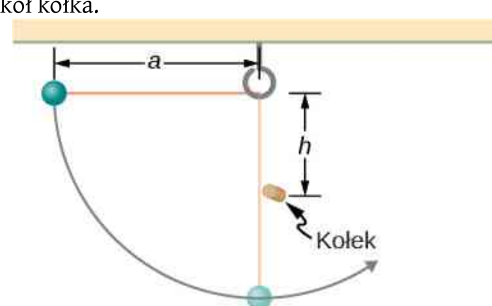
b. Ile wynosi praca sił tarcia wykonana w trakcie ruchu ciała po równi?

c. Ciało odbija się od sprężyny. Jaka jest prędkość ciała w momencie, gdy wraca ono na początek równi?

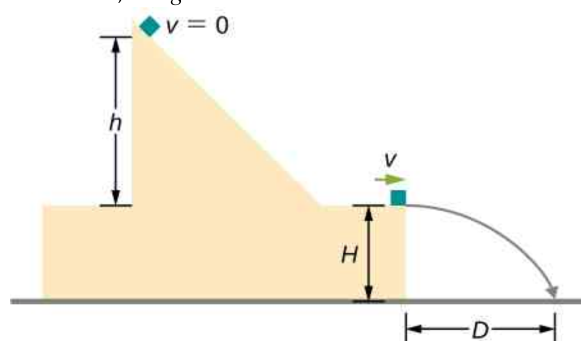
d. Na jaką wysokość powróci ciało po odbiciu?



75. Poniżej przedstawiono małą kulkę o masie m, przyczepioną do liny o długości a. Kołek wbito w ścianę w odległości h poniżej punktu zaczepienia liny. Jeśli kulka rozpoczyna swój ruch w momencie, gdy lina jest wychylona o kąt prosty od pionu, wykaż, że h musi być większe niż $3a/5$, żeby kulka mogła wykonać pełne okrążenie wokół kołka.



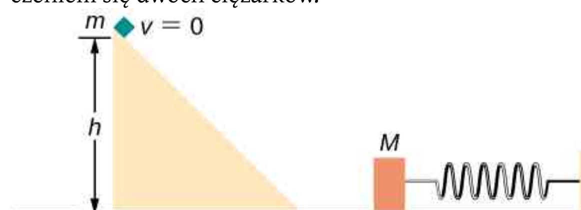
76. Ciężarek najpierw zsuwa się z równi pochyłej, a po pokonaniu wysokości h pokonuje krótką drogę w poziomie (bez tarcia) i wypada z rampy umieszczonej na wysokości H nad ziemią. Oblicz zasięg lotu D w zależności od h, H i g.



77. Ciężarek o masie m zsuwa się z równi bez tarcia. Następnie uderza w drugi ciężarek o masie M przyczepiony do sprężyny o stałej sprężystości k (zobacz poniżej). Ciężarki sklejają się i dalej poruszają się wspólnie.

a. Wyznacz ściśnięcie sprężyny w funkcji m, M, h, g i k w momencie, w którym układ wraca do równowagi.

b. Oblicz utratę energii kinetycznej związaną z połączeniem się dwóch ciężarków.



78. Ciężarek o masie 300 g przyczepiono do sprężyny o stałej sprężystości 100 N/m. Drugi koniec sprężyny przyczepiono do ściany. Układ znajduje się na poziomej

platformie, po której ciężarek porusza się swobodnie bez tarcia. Sprężynę ściśnięto o 12 cm od położenia równowagi, po czym uwolniono.

a. Jaką wartość energii potencjalnej miał układ w trakcie ściśnięcia?

b. Oblicz prędkość ciężarka w momencie, gdy przechodzi on przez położenie równowagi.

c. Wyznacz prędkość ciężarka po pokonaniu przez niego drogi 20 cm, licząc od położenia początkowego.

79. Ciężarek o masie 0,200 kg przyczepiono do sprężyny o stałej sprężystości 100 N/m. Układ umieszczono na stole, po którym ruch odbywa się bez tarcia, drugi koniec sprężyny umocowano na ścianie po lewej stronie. Sprężynę ściśnięto o 10,0 cm. Znajdź prędkość, gdy ciężarek

a. przechodzi przez położenie równowagi,

b. 5,00 cm w lewo od punktu (a),

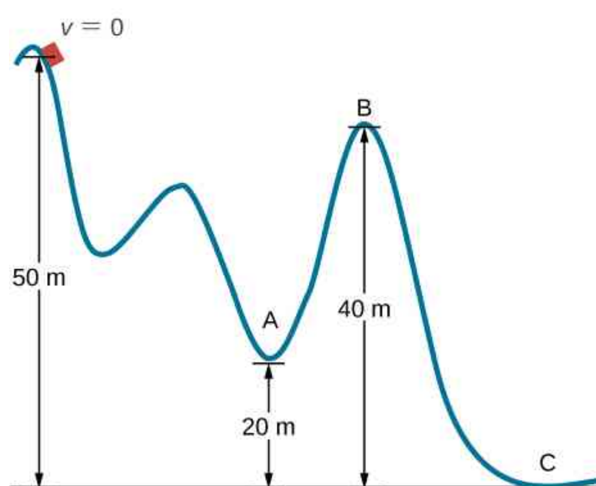
c. 5,00 cm w prawo od (a).

80. Narciarz zaczyna zsuwać się ze zbocza. Jaka będzie prędkość narciarza po pokonaniu 20 m wysokości zbocza? Opór powietrza i tarcie można pominąć.

81. Powtórz poprzednie zadanie, ale tym razem zakładając, że praca wykonana przez siły oporu nie może być pominięta. Niech praca oporu powietrza na odcinku od A do B wynosi −2000 J. Praca wykonana przez siły oporu jest ujemna, ponieważ siły oporu są skierowane przeciwnie do przesunięcia. Masa narciarza wynosi 50 kg. Jaka jest jego prędkość w punkcie B (zakładając, że pokonana wysokość jest taka sama jak w poprzednim zadaniu)?

82. Dwa ciała reagują ze sobą siłą zachowawczą. Wykaż, że energia mechaniczna odizolowanego układu dwóch ciał będzie wtedy zachowana. (*Podpowiedź:* Rozpocznij od trzeciego prawa Newtona i definicji pracy po to, by wyprowadzić wzór na pracę wykonaną przez każde z ciał.)

83. W parku rozrywki wagonik porusza się po torze przedstawionym poniżej. Wyznacz prędkość wagonika w A, B oraz C. Zauważ, że praca sił tarcia jest równa zero ze względu na to, że siła tarcia jest skierowana zawsze prostopadle do promienia obracających się kółek pojazdu.



84. Kula stalowa o masie 200 g jest przyczepiona do nieważkiej nici o długości 2,00 m zwisającej z sufitu. Całość tworzy wahadło, które wychylono pod kątem $30°$ od pionu, po czym puszczono, pozwalając na ruch swobodny. Opór powietrza można pominąć. Wyznacz prędkość kuli w położeniu (a) najniższym w pionie, (b) wychylonym pod kątem $20°$ oraz (c) $10°$.

85. Krążek hokejowy o masie 300 g leci w poprzek pokrytego lodem stawu. Zanim go uderzono, znajdował się w stanie spoczynku. Poprzez uderzenie nadano mu prędkość równą 40 m/s. Krążek zatrzymuje się po pokonaniu drogi 30 m.

a. Opisz zmianę energii ciała w czasie i podaj wartości liczbowe pracy i energii.

b. Oblicz wartość wypadkowej siły tarcia.

86. Pocisk o masie 2 kg wystrzelono z prędkością 20 m/s pod kątem $30°$ do poziomu.

a. Oblicz początkową energię całkowitą pocisku, przyjmując za punkt odniesienia dla energii grawitacji – punkt wystrzału.

b. Oblicz energię kinetyczną w najwyższym możliwym położeniu lotu.

c. Oblicz energię potencjalną w tym samym punkcie.

d. Oblicz maksymalną wysokość. Porównaj wynik z rozwiązaniem zadania metodą kinetyczną.

87. Pocisk artyleryjski wystrzelono, mierząc w cel umieszczony na wysokości 200 m nad ziemią. Kiedy pocisk znajduje się na wysokości 100 m, ma prędkość 100 m/s. Jaką ma prędkość w chwili uderzenia w cel? Pomiń opory powietrza.

88. Ile wynosi energia rozproszona człowieka o masie 60 kg spadającego ze stałą prędkością na odległości 15 metrów?

89. Pudełko o całkowitej energii 50 J ślizga się bez tarcia po powierzchni. Przedmiot uderza w sprężynę, którą ściska, wychylając ją o 25 cm z położenia równowagi. Jeśli to samo pudełko poruszałoby się z tarciem, to ściśnięcie sprężyny byłoby równe 15 cm. Jaka ilość energii została rozproszona podczas ruchu z tarciem?

9 | PĘD I ZDERZENIA



Rysunek 9.1 Pojęcia pędu, impulsu (popędu siły) oraz środka masy są kluczowe dla prawidłowego odbicia piłki przez bejsbolistę. Jeżeli niewłaściwie oceni te wielkości, jego frustracja spowodowana porażką może zakończyć się połamaniem kija. (Źródło: zmodyfikowane przez „Cathy T”/Flickr)

Treść rozdziału

Wstęp

Pojęcia pracy i energii oraz twierdzenie o równoważności pracy i energii są niezwykle istotne z dwóch powodów. Po pierwsze – są użyteczne pod względem rachunkowym, umożliwiając łatwiejszą analizę złożonych układów fizycznych w porównaniu z ich badaniem wprost z praw mechaniki Newtona (np. w przypadku działania siły zmiennej). Po drugie – stwierdzenie, że całkowita energia układu pozostaje stała, oznacza, że układ może ewoluować tylko w taki sposób, by pozostała ona zachowana. Innymi słowy – układ nie może podlegać przypadkowym przemianom, może zmieniać się tylko w sposób zgodny z zasadą zachowania energii.

W tym rozdziale zapoznamy się z *pędem* – kolejną wielkością „zachowaną” tj. nieulegającą zmianie w układzie, przy spełnieniu pewnych warunków. Poznamy także *regułę pędu i popędu*, która nakłada dodatkowe ograniczenia na możliwości ewolucji układu w czasie. *Zasada zachowania pędu* okaże się z kolei bardzo przydatna w zrozumieniu zjawisk zderzeń, jak to zilustrowano na powyższym zdjęciu. Jest ona równie ważna, pomocna i przydatna, jak twierdzenie o równoważności pracy i energii.

9.1 | Pęd

Cel dydaktyczny

W tym rozdziale nauczysz się:

- wyjaśniać fizyczne znaczenie pędu;
- obliczać pęd poruszającego się ciała.

Z rozważań na temat energii kinetycznej wynika, że do pełnego zrozumienia opisu ruchu obiektu musimy znać zarówno jego masę, jak i prędkość ($E_k = mv^2/2$). Pojęcie energii kinetycznej, jakkolwiek użyteczne, niewiele mówi o kierunku ruchu ciała, czyli o kierunku i zwrocie jego prędkości. W tym podrozdziale zdefiniujemy wielkość fizyczną, która zawierać będzie także informację o kierunku ruchu.

Wielkością tą jest **pęd** (ang. *momentum* z łac. *movimentum* = ruch), oznaczany symbolem $\vec{p}$. Podobnie jak energia kinetyczna, pęd - zależąc od masy i prędkości ciała – charakteryzuje „ilość” jego ruchu.

Pęd

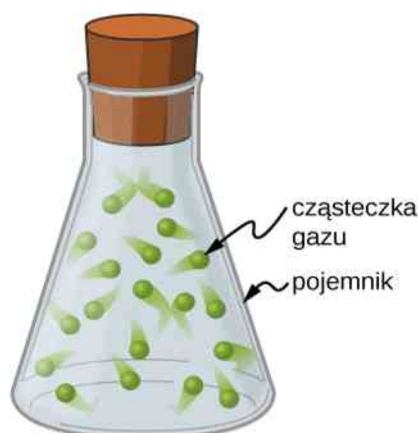
Pęd $\vec{p}$ ciała jest iloczynem jego masy m i prędkości $\vec{v}$. Pęd jest wektorem o kierunku i zwrocie zgodnym z wektorem prędkości:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \tag{9.1}$$



Rysunek 9.2 Kierunki i zwroty wektorów prędkości i pędu piłki są jednakowe. Ponieważ masa piłki wynosi ok. 0,5 kg, a pęd jest iloczynem masy i prędkości – długość wektora pędu równa jest w przybliżeniu połowie długości wektora prędkości. (Źródło: modyfikacja pracy Ben Sutherland)

Jak wynika z Rysunku 9.2, pęd - podobnie jak prędkość – jest wielkością wektorową. Odróżnia to pęd od energii kinetycznej i czyni go szczególnie użytecznym przy ocenie, czy ruch obiektu podlega łatwej (Rysunek 9.3) czy trudnej zmianie (Rysunek 9.4).



Rysunek 9.3 Prędkości cząsteczek gazu mogą być bardzo duże – w temperaturze 20° C średnia prędkość cząsteczek powietrza wynosi około 500 m/s, czyli 1800 km/h. Ze względu na niewielkie masy cząsteczek gazu – zmiana ich pędu w zderzeniach ze sobą lub ze ściankami naczynia następuje niezwykle szybko.



Rysunek 9.4 Supertankowiec przewożący ogromne ilości ropy naftowej ma niemal 400 metrów długości, ponad 60 metrów szerokości, masę 500 tysięcy ton i rozwija prędkość do 30 km/h. Ze względu na znaczną bezwładność zmiana stosunkowo niewielkiej prędkości statku wymaga długiego czasu – rzędu kilkunastu do kilkudziesięciu minut. (Źródło: zmodyfikowane przez „the_tahoe_guy"/Flickr)

W odróżnieniu od energii kinetycznej, pęd obiektu zależy w jednakowym stopniu od jego masy i prędkości. Jak się później przekonamy, studiując termodynamikę, średnia prędkość cząsteczki powietrza w temperaturze pokojowej wynosi około 500 m/s. Przy średniej masie cząsteczki równej $5 \cdot 10^{-26}$ kg jej pęd

$$p_{\text{cz}} = 5 \cdot 10^{-26}\ \text{kg} \cdot 500\,\text{m/s} = 2{,}5 \cdot 10^{-23}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}.$$

Dla porównania, typowy samochód o masie 1400 kg, jadący z prędkością 15 m/s – tj. 54 km/h – posiada pęd

$$p_{\text{s}} = 1400\,\text{kg} \cdot 15\,\text{m/s} = 2{,}1 \cdot 10^{4}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}.$$

Obie wartości pędów różnią się o 27 rzędów wielkości, czyli kwadryliard razy!

9.2 | Popęd siły i zderzenia

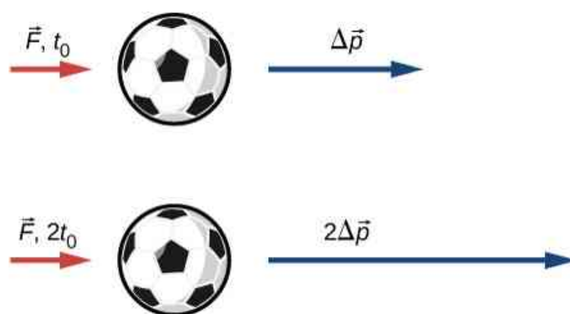
Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- wyjaśniać fizyczne znaczenie popędu siły (impulsu siły);
- opisywać funkcję popędu siły;
- wskazywać związek między popędem siły a zderzeniami;
- stosować regułę o pędzie i popędzie do rozwiązywania zadań.

W poprzedniej sekcji zdefiniowaliśmy pęd obiektu, będący iloczynem jego masy i prędkości. Tym samym, jeżeli na skutek działania siły następuje zmiana prędkości ciała – zmienia się także jego pęd. To wskazuje na relację między pędem i siłą. Celem tego podrozdziału jest zbadanie i opisanie tejże relacji.

Załóżmy, że do pewnego ciała przez pewien czas przyłożono siłę. Oczywiście im większa siła, tym większej zmiany pędu ciała się spodziewamy. Podobnie im dłuższy czas działania siły, tym większa będzie zmiana pędu, jak pokazuje Rysunek 9.5. Zatem wartość zmiany pędu będzie proporcjonalna zarówno do wartości działającej siły, jak i do czasu jej działania.



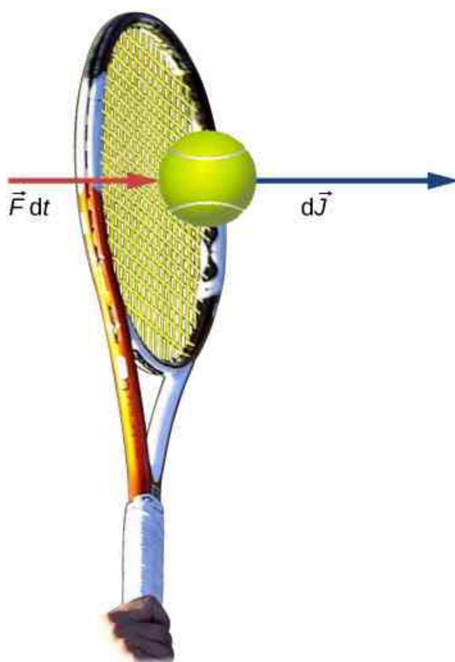
Rysunek 9.5 Zmiana pędu ciała jest proporcjonalna do czasu działania siły. Na dolnym rysunku ta sama siła działa przez czas dwukrotnie dłuższy niż na górnym, powodując dwukrotnie większą zmianę pędu.

Zgodnie z regułami matematyki, jeżeli dana wielkość jest jednocześnie proporcjonalna do dwóch lub więcej wielkości, to jest proporcjonalna do ich iloczynu. Iloczyn siły i czasu jej działania nazywamy **popędem siły** lub **impulsem** (ang. **impulse**), bądź też **impulsem siły** i oznaczamy symbolem $\vec{J}$.

Popęd siły (impuls siły)

Niech $\vec{F}$ oznacza siłę działającą na ciało przez krótki (różniczkowy) przedział czasu $\mathrm{d}t$ (Rysunek 9.6). Popęd siły, wywieranej na ciało zdefiniowany jest jako

$$\mathrm{d}\vec{J} = \vec{F}\,\mathrm{d}t. \tag{9.2}$$



Rysunek 9.6 Siła wywierana na piłeczkę tenisową przez rakietę w przedziale czasu dt wytwarza popęd siły o kierunku i zwrocie identycznym z kierunkiem i zwrotem wektora tejże siły.

Całkowity popęd siły w przedziale czasu od chwili początkowej t_0 do końcowej t_1 wynosi

$$\vec{J} = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}\vec{J} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\,\mathrm{d}t. \tag{9.3}$$

Z Równania 9.2 i Równania 9.3 wynika, że siła działająca przez infinitezymalnie krótki przedział czasu d t, wywiera infinitezymalny popęd d$\vec{J}$. Całkowity popęd siły zdefiniowany jest jako suma (ściślej: całka) owych infinitezymalnych wielkości.

Do obliczenia popędu siły na podstawie Równania 9.3, konieczna jest znajomość tejże siły w funkcji czasu $F(t)$, co często nie jest możliwe. Możliwe jest jednak wyznaczenie poszukiwanej wielkości na podstawie wartości średniej funkcji dla danego przedziału zmiennej niezależnej. Przypomnijmy w tym miejscu, że wartość średnią $f_{\text{śr}}$ funkcji $f(x)$ w przedziale zmiennej niezależnej $\Delta x = x_1 - x_0$ obliczamy jako

$$f_{\text{śr}} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x.$$

W przypadku siły F, będącej funkcją czasu, otrzymujemy:

$$\vec{F}_{\text{śr}} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t)\mathrm{d}t. \tag{9.4}$$

A zatem, na podstawie Równania 9.3, mamy

$$\vec{J} = \vec{F}_{śr} \Delta t. \tag{9.5}$$

Widać więc, że można obliczyć popęd siły nawet nie znając dokładnej postaci zależności siły od czasu, jeżeli znana jest jej wartość średnia w analizowanym przedziale. Odwracając tok myślenia, możemy stwierdzić, że jeżeli z pomiarów lub obliczeń znany jest popęd siły, możliwe jest wyznaczenie wartości średniej siły działającej na ciało w danym przedziale czasu.

Chcąc wyznaczyć popęd siły, możemy skorzystać z Równania 9.3, stosując podstawienie $\vec{F}(t) = m\vec{a}(t)$

$$\vec{J} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t) \mathrm{d}t = m \int_{t_0}^{t_1} \vec{a}(t) \mathrm{d}t = m \left[\vec{v}(t_1) - \vec{v}(t_0) \right].$$

W przypadku siły niezależnej od czasu, jej wartość średnia i chwilowa są jednakowe: $\vec{F}_{śr} = \vec{F} = m\vec{a}$, co pozwala na uproszczenie powyższego równania do postaci

$$\vec{J} = m\vec{a}\Delta t = m \left[\vec{v}(t_1) - \vec{v}(t_0) \right],$$

zatem

$$\vec{J} = m\Delta\vec{v}. \tag{9.6}$$

Warto zauważyć, że całkowa postać Równania 9.3 jest słuszna także w przypadku siły niezależnej od czasu – wówczas jej symbol można wynieść przed całkę, co jest tożsame z obliczeniem siły średniej. Z łatwością przechodzimy więc do zapisu w postaci Równania 9.6.

Przykład 9.1

Krater meteorytowy w Arizonie (Krater Barringera)

Około 50 tys. lat temu w północnej Arizonie (USA) ogromny, liczący ok. 50 m średnicy meteoryt uderzył w powierzchnię Ziemi z prędkością ok. $1{,}28 \cdot 10^4$ m/s. W następstwie zderzenia powstał istniejący do dziś krater o średnicy ok. 1200 m, głębokości 170 m, z obrzeżem wypiętrzonym na wysokość 45 m ponad otaczającą go pustynię (Rysunek 9.7). Typowa gęstość meteorytów, zawierających głównie żelazo i nikiel, wynosi $7\,970\ \mathrm{kg/m^3}$. Korzystając ze wzoru na popęd siły, wyznacz siłę średnią oraz maksymalną siłę, jaką meteoryt działał na powierzchnię Ziemi podczas zderzenia.



Rysunek 9.7 **Krater Barringera** (ang. **Barringer Crater**) we Flagstaff w Arizonie. Jest to najlepiej zbadany i jeden z najlepiej zachowanych kraterów uderzeniowych na Ziemi, zidentyfikowany w roku 1903 przez amerykańskiego geologa i przemysłowca Daniela Barringera jako krater meteorytowy. (Źródło: „Shane.torgerson”/Wikimedia Commons).

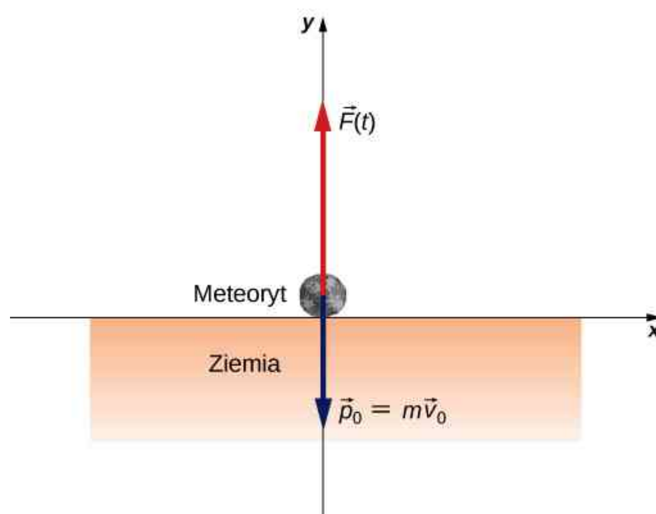
Strategia rozwiązania

Rozwiązanie zadania stanie się łatwiejsze, jeżeli – odwracając problem – obliczymy siłę, z jaką Ziemia oddziaływała na meteoryt, zatrzymując go. Siła ta, na mocy III zasady dynamiki Newtona, będzie co do wartości równa sile, z którą meteoryt uderzył w Ziemię, natomiast w ujęciu wektorowym – będzie zwrócona przeciwnie i przyłożona do środka masy meteorytu.

Korzystając z danych w treści zadania i zakładając dla ułatwienia kulisty kształt meteorytu oraz czas jego zderzenia z Ziemią wynoszący maksymalnie 2 s – możemy zastosować Równanie 9.6 i wyznaczyć najpierw popęd siły. Następnie skorzystamy z relacji pomiędzy siłą i popędem siły (Równanie 9.5) i określimy średnią wartości siły podczas zderzenia. W kolejnym kroku wybierzemy funkcję reprezentującą zależność siły od czasu, z Równania 9.4 wyznaczymy wartość średnią tejże siły i przekształcimy do postaci wyrażenia na siłę średnią. Otrzymane w ten sposób rozwiązanie opisywać będzie wartości siły maksymalnej.

Rozwiązanie

Oznaczmy kierunek pionowy ku górze jako kierunek osi $+y$ (kierunek ten we wzorach oznaczony będzie wersorem osi $+\hat{j}$). Dla uproszczenia przyjmijmy, że meteoryt spadał na Ziemię dokładnie pionowo, na co wskazuje symetryczny kształt krateru uderzeniowego. W tej sytuacji prędkość początkowa meteorytu posiada wyłącznie składową pionową skierowaną w dół: $\vec{v}_0 = -v_0\hat{j}$, zaś siła, jaką Ziemia wywiera na meteoryt, skierowana jest w górę: $\vec{F}(t) = +F(t)\hat{j}$. W chwili upadku sytuacja przedstawia się więc jak na rysunku poniżej:



Średnia wartość siły podczas zderzenia związana jest z popędem siły relacją:

$$\vec{F}_{śr} = \frac{\vec{J}}{\Delta t}.$$

Z Równania 9.6 otrzymujemy zatem

$$\vec{F}_{śr} = \frac{m\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

Masa meteorytu jest równa iloczynowi jego gęstości i objętości:

$$m = \rho V.$$

Zakładając kulisty kształt meteorytu, jego objętość wyrażamy wzorem:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Możemy obliczyć wówczas, że

$$\vec{F}_{śr} = \frac{\rho V\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \rho\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\Delta t}\left[\vec{v}(t_1) - \vec{v}(t_0)\right].$$

Z treści zadania wynika, że prędkość początkowa meteorytu wynosiła $-1{,}28 \cdot 10^4\ \mathrm{m/s} \cdot \hat{j}$, a jego prędkość końcowa była równa zeru. Przyjmujemy dodatkowo, że czas zderzenia meteorytu z Ziemią wynosił $\Delta t = t_{max} - t_0 = 2\ \mathrm{s}$. Zatem średnia siła, z jaką Ziemia działała na meteoryt podczas zderzenia, wynosi

$$\vec{F}_{śr} = 7\,970\ \mathrm{kg/m^3} \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot (25\ \mathrm{m})^3}{2\ \mathrm{s}} \cdot \left[0\ \mathrm{m/s} - \left(-1{,}28 \cdot 10^4\ \mathrm{m/s} \cdot \hat{j}\right)\right] = 3{,}33 \cdot 10^{12}\ \mathrm{N} \cdot \hat{j}.$$

i jest skierowana ku górze. Zauważmy, że tak samo skierowany jest wektor zmiany prędkości meteorytu $\Delta\vec{v}$.

W następnym kroku obliczamy siłę maksymalną. Popęd siły związany jest z funkcją siły zależnością:

$$\vec{J} = \int_{t_0}^{t_{max}} \vec{F}(t)\mathrm{d}t.$$

Należy teraz przyjąć pewną postać funkcji, która będzie spełniała logiczne skądinąd założenia, że siła była maksymalna w chwili uderzenia meteorytu o Ziemię (w chwili $t_0 = 0$), a następnie gwałtownie zmalała do zera w przedziale czasu równym 2 s. Funkcją, która spełnia powyższe warunki ma postać:

$$F(t) = F_{\max} e^{\frac{-t^2}{2\tau^2}}.$$

(parametr τ określa, jak szybko funkcja maleje do zera). Siłę średnią wyliczamy, korzystając ze wzoru:

$$F_{\text{śr}} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_{\max}} F_{\max} e^{\frac{-t^2}{2\tau^2}} \mathrm{d}t,$$

gdzie $\Delta t = t_{\max} - 0\text{ s} = 2\text{ s}$. Ponadto przyjmijmy, że $\tau = t_{\max} / e$ (jest to częste podstawienie, jak przekonasz się w następnych rozdziałach). Po scałkowaniu powyższego wyrażenia otrzymujemy:

$$F_{\text{śr}} = 0{,}458F_{\max} = 3{,}33 \cdot 10^{12}\text{ N}.$$

Siła maksymalna wynosi zatem

$$F_{\max} = 7{,}27 \cdot 10^{12}\text{ N}.$$

Pełen zapis funkcji siły hamującej ruch meteorytu ma więc postać:

$$\vec{F}(t) = 7{,}27 \cdot 10^{12}\, N \cdot e^{\frac{-t^2}{8\text{ s}^2}} \cdot \hat{j},$$

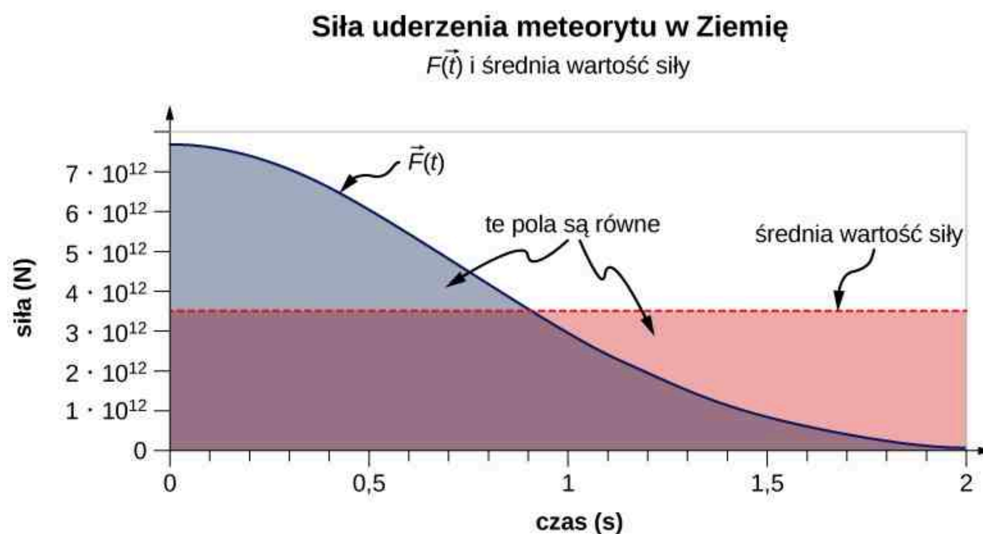
natomiast siła, którą meteoryt działał na Ziemię – na mocy III zasady dynamiki Newtona – jest wyrażona wzorem:

$$\vec{F}(t) = -7{,}27 \cdot 10^{12}\, N \cdot e^{\frac{-t^2}{8\text{ s}^2}} \cdot \hat{j},$$

który stanowi odpowiedź na pytanie postawione w zadaniu.

Znaczenie

Przebieg otrzymanej funkcji zawiera bardzo cenne informacje. Na Rysunku 9.8 pokazano zależność funkcji F oraz siły średniej $F_{\text{śr}}$ od czasu.



Rysunek 9.8 Wykres zależności $F_{\text{śr}}$ (linia czerwona) i F (linia niebieska) od czasu w przypadku zderzenia meteorytu z Ziemią. Pola powierzchni pod wykresami są jednakowe i liczbowo równe wartości popędu siły udzielonego Ziemi podczas zderzenia.

Zauważmy, że pola pod wykresami pokolorowano. Warto pamiętać, że pole pod wykresem danej funkcji jest równe wartości całki z tej funkcji, obliczonej w oznaczonych granicach. Dla wykresu stałej siły $F_{\text{śr}}$, pole to

jest prostokątem, którego wartość odpowiada iloczynowi $F_{śr}\Delta t$ i na mocy związku pomiędzy średnią siłą a popędem siły wynosi J. W przypadku wykresu siły $F(t)$, na mocy Równania 9.3, całka ta również wynosi J. Zatem oba pola są równe i oba reprezentują wartość popędu siły udzielonego Ziemi przez meteoryt podczas dwusekundowego zderzenia. Średnia siła rzędu 10^{12} N wydaje się ogromna i rzeczywiście taka jest. Jednak w przypadku obiektu tak ciężkiego jak Ziemia – jest ona w zasadzie ledwo zauważalna. Istotnie, jeśli wyliczyć z II zasady dynamiki Newtona przyspieszenie Ziemi spowodowane działaniem tejże siły, otrzymamy wartość zupełnie niemierzalną:

$$\vec{a} = \frac{-\vec{F}_{śr}}{M_z} = \frac{-3{,}33 \cdot 10^{12}\ \mathrm{N} \cdot \hat{j}}{5{,}97 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}} = -5{,}6 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{m/s^2} \cdot \hat{j}.$$

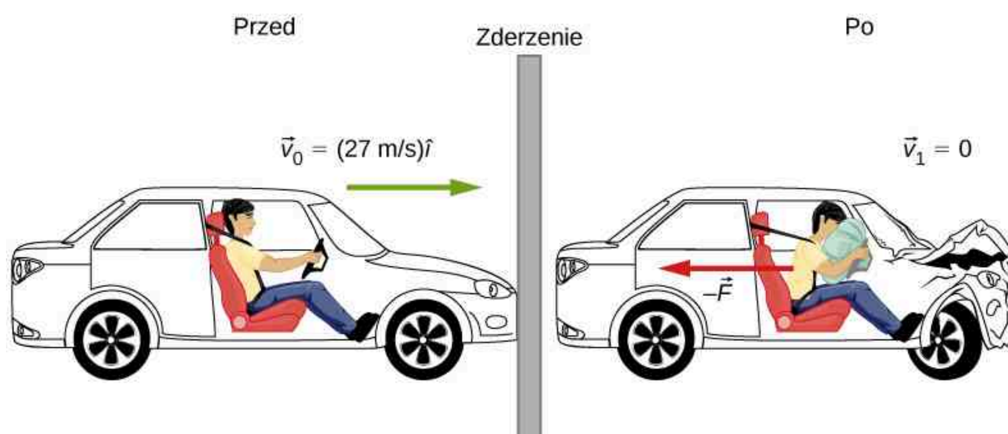
Uderzenie meteorytu spowodowało jednak powstanie fali sejsmicznej, która zostałaby zarejestrowana przez współczesne detektory.

Przykład 9.2

Korzyści ze znajomości pojęcia popędu siły

Samochód jadący z prędkością 27 m/s uderza w budynek. Zderzenie to powoduje zatrzymanie samochodu w czasie 1 s. Kierowca o ciężarze 860 N chroniony jest przez system **pasów bezpieczeństwa** (ang. **seatbelt**) o zmiennym napięciu oraz **poduszkę powietrzną** (ang. **airbag**) (Rysunek 9.9). W rezultacie kierowca zderza się z napiętym pasem i poduszką, a nie z budynkiem. Poduszka i pasy redukują jego prędkość tak, że zatrzymuje się on faktycznie po ok. 2,5 s.

a. Jaka średnia siła działa na kierowcę podczas zderzenia?
b. Bez pasów i poduszki czas zderzenia kierowcy z kierownicą wynosiłby ok. 0,2 s. Działania jakiej siły doświadczyłby wówczas kierowca?



Rysunek 9.9 Ruch samochodu i kierowcy chwilę przed i chwilę po zderzeniu ze ścianą. Kierowca poddany zostaje działaniu ogromnej siły hamującej, działającej przeciwnie do ruchu $-\vec{F}$, wywołanej napięciem pasów i zderzeniem z poduszką. Ostatecznie wytraca on swoją prędkość do zera (siła w kierunku „do przodu”, wynikająca z działania oparcia fotela, jest znacznie mniejsza niż wymienione i zostanie pominięta w dalszej części zadania).

Strategia rozwiązania

Znany jest ciężar kierowcy, jego początkowa i końcowa prędkość oraz czas zderzenia. W zadaniu niewiadomą jest siła, zatem Równanie 9.5 i Równanie 9.6 na popęd siły wydają się być użyteczne.

Rozwiązanie

a. Oznaczmy kierunek ruchu pojazdu jako $+x$ (kierunek ten we wzorach oznaczony będzie wersorem osi $+\hat{i}$). Wiemy, że

$$\vec{J} = \vec{F}_{\text{śr}} \Delta t, \tag{9.7}$$

oraz

$$\vec{J} = m \Delta \vec{v}. \tag{9.8}$$

Z przyrównania obu równań otrzymujemy:

$$\vec{F}_{\text{śr}} \Delta t = m \Delta \vec{v}. \tag{9.9}$$

Chcąc wyznaczyć masę człowieka, gdy znany jest jego ciężar, skorzystamy z zależności $Q = mg$:

$$m = \frac{860\,\text{N}}{9{,}8\,\text{m/s}^2} = 87{,}6\,\text{kg}. \tag{9.10}$$

Wiedząc, że $\Delta \vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_0$ oraz że prędkość końcowa kierowcy wynosi zero, wyznaczamy siłę jako:

$$\vec{F}_{\text{śr}} = \frac{m}{\Delta t} \left[\vec{v}_1 - \vec{v}_0 \right] = \frac{87{,}8\,\text{kg}}{2{,}5\,\text{s}} \left(0\,\text{m/s} - 27\,\text{m/s} \cdot \hat{i} \right) = -948\,\text{N} \cdot \hat{i}. \tag{9.11}$$

Znak minus wskazuje, że działająca na kierowcę siła, spowalnia go. Wartość tej siły wynosi około 1,1 ciężaru kierowcy.

b. Wykonując analogiczne obliczenia dla przedziału czasu równego 0,20 s (zderzenie bez udziału pasów i poduszki), otrzymujemy:

$$\vec{F}_{\text{śr}} = \frac{87{,}8\,\text{kg}}{0{,}2\,\text{s}} \left(0\,\text{m/s} - 27\,\text{m/s} \cdot \hat{i} \right) = -11\,853\,\text{N} \cdot \hat{i}. \tag{9.12}$$

Jej wartość jest 14 razy większa niż ciężar kierowcy. To ogromna różnica!

Znaczenie

Rozwiązując powyższe zadanie, mogliśmy się przekonać, jak ważną rolę odgrywa poduszka powietrzna w redukowaniu sił działających na człowieka podczas zderzenia. Z tego powodu już od początku lat 90. ubiegłego wieku wyposażenie samochodów osobowych w takie poduszki stało się wymogiem w Europie, Azji i Stanach Zjednoczonych. Pamiętajmy, że niezależnie od zastosowania poduszki – zmiana pędu podczas zderzenia jest jednakowa. Użycie poduszki powietrznej sprawia jednak, że siła działająca na człowieka staje się ewidentnie mniejsza!

Rola popędu siły (impulsu)

Ponieważ impuls to efekt działania siły w określonym przedziale czasu, jego skutkiem jest wywołanie zmian w ruchu ciała. Przypomnijmy Równanie 9.6:

$$\vec{J} = m \Delta \vec{v}.$$

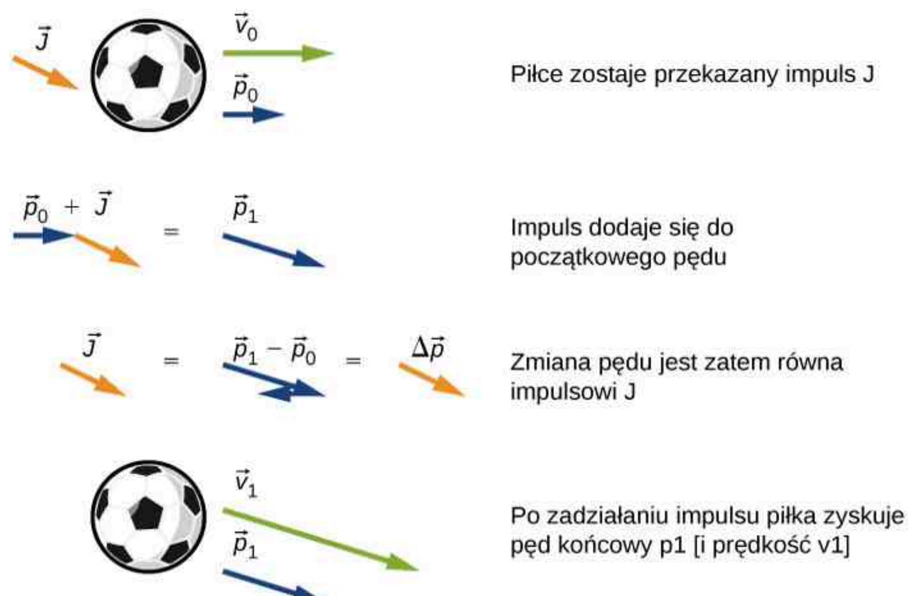
Ponieważ znany nam już iloczyn $m\vec{v}$ definiuje pęd, iloczyn $m\Delta\vec{v}$ oznacza zmianę pędu, co prowadzi do relacji zwanej **regułą pędu i popędu** (ang. **impulse-momentum theorem**).

reguła pędu i popędu

Popęd siły (impuls) udzielony układowi powoduje zmianę pędu tegoż układu. Zmiana ta jest równa działającemu impulsowi:

$$\vec{J} = \Delta\vec{p}. \tag{9.13}$$

Regułę pędu i popędu ilustruje poniższy Rysunek 9.10.



Rysunek 9.10 Ilustracja zasady pędu i popędu. (a) Piłce poruszającej się z prędkością początkową $\vec{v}_0$ i początkowym pędem $\vec{p}_0$ przekazany został impuls siły $\vec{J}$. (b) Impuls dodaje się wektorowo do posiadanego już przez piłkę pędu początkowego. (c) Impuls równa się zatem zmianie pędu: $\vec{J} = \Delta\vec{p}$. (d) Po przekazaniu popędu piłka porusza się z nowym pędem $\vec{p}_1$ i nową prędkością $\vec{v}_1$.

Zwróćmy w tym miejscu uwagę na dwie istotne cechy reguły pędu i popędu:

1. Impuls jest wielkością wektorową; efekt zadziałania impulsu $-10\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}\cdot\hat{i}$ będzie inny niż impulsu $+10\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}\cdot\hat{i}$, gdyż wywoła zupełnie inną zmianę w ruchu, np. hamowanie albo przyspieszanie ciała.
2. Impuls nie jest źródłem pędu; powoduje natomiast *zmianę* pędu danego obiektu. Należy zatem rozumieć go zawsze jako różnicę wektorów pędu końcowego i początkowego tegoż obiektu (oraz pamiętać o znakach poszczególnych wektorów!).

Reguła pędu i popędu najczęściej wykorzystywana jest do wyznaczania działającej siły lub obliczania zmiany prędkości ciała wskutek działania tejże siły.

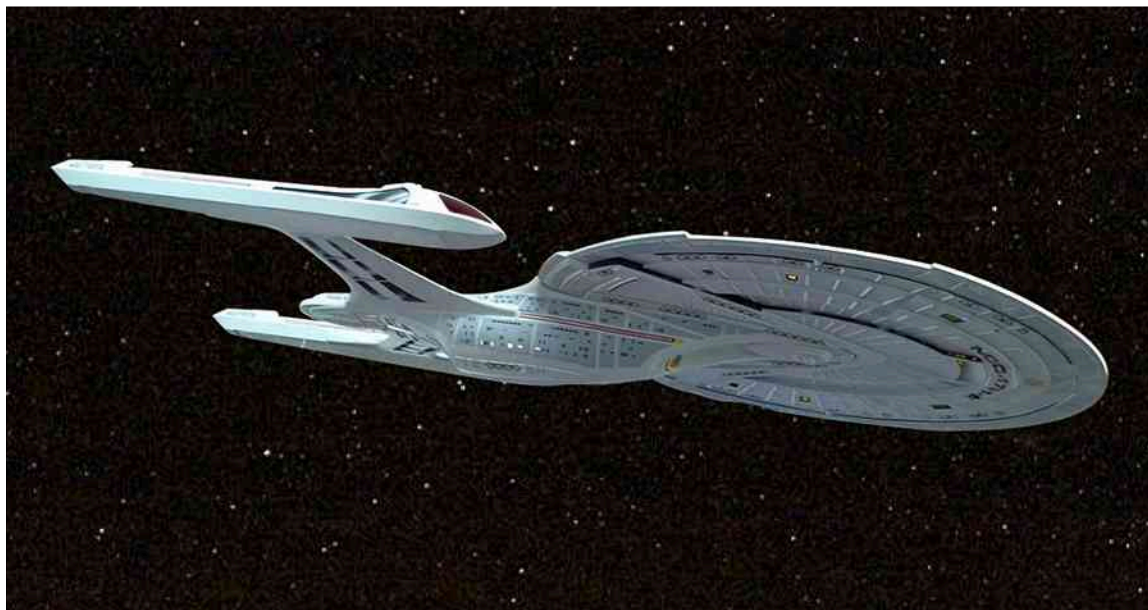
Strategia rozwiązywania zadań: reguła pędu i popędu

Typowa strategia rozwiązywania zadań na podstawie tej reguły obejmuje trzy kroki:

1. Wyraź impuls jako iloczyn siły i czasu jej działania.
2. Wyraź impuls jako zmianę pędu $m\Delta v$.
3. Przyrównaj obie zależności i wyznacz poszukiwane wielkości.

Przykład 9.3

Podróż statkiem *Enterprise*



Rysunek 9.11 Znany z serialu *Star Trek* statek kosmiczny Enterprise korzysta z fikcyjnego napędu WARP, w którym wykorzystuje się reakcję materii z antymaterią. Wytworzona w ten sposób energia nadaje statkowi impuls umożliwiający kultowe dla tematyki science-fiction „przechodzenie w nadświetlną”.

„Panie Sulu, proszę nas stąd zabrać, 1/4 impulsu naprzód!” – tą komendą kapitan statku Enterprise (Rysunek 9.11) nakazywał rozpędzenie statku ze stanu spoczynku do prędkości końcowej równej 1/4 prędkości światła w próżni, czyli $v_1 = 1/4 \cdot 3{,}0 \cdot 10^8$ m/s . Przyjmując, że statek dokonał tego w ciągu 60 s, wyznacz siłę rozpędzającą statek.

Strategia rozwiązania

Poszukując siły, znamy prędkość początkową i końcową statku, a tym samym ich różnicę i czas potrzebny do dokonania danej zmiany prędkości. Naturalne jest tu skorzystanie z reguły pędu i popędu, jednak do obliczenia pędu potrzebna nam będzie znajomość masy statku. Przyjmijmy więc, że wynosi ona $2 \cdot 10^9$ kg .

Rozwiązanie

Ponieważ kierunek ruchu statku reprezentuje tylko jeden wymiar, wystarczy nam analiza samych wartości wektorów, a zatem skalarna postać reguły pędu i popędu, danej Równaniem 9.13, zostanie zapisana jako:

$$\Delta p = m\Delta v = J,$$

gdzie

$$J = F\Delta t.$$

Łącząc oba równania, otrzymujemy:

$$F\Delta t = m\Delta v.$$

Przekształcając powyższe równanie do postaci siły, napiszemy, że:

$$F = \frac{m}{\Delta t}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_0\right) = \frac{2 \cdot 10^9 \text{ kg}}{60 \text{ s}}\left(7{,}5 \cdot 10^7 \text{ m/s} - 0 \text{ m/s}\right) = 2{,}5 \cdot 10^{15} \text{ N}.$$

Znaczenie

Siła, którą wyznaczyliśmy, jest niewyobrażalnie duża. Oczywiste jest, że takiego ruchu nie przeżyłby żaden z pasażerów statku, podobnie jak powstałych naprężeń nie wytrzymałoby jego wyposażenie. Na szczęście Enterprise zawiera „wewnętrzny system tłumienia”. Pozostawiamy wyobraźni czytelników, na jakiej zasadzie on działa...



9.1 **Sprawdź, czy rozumiesz.** W lotnictwie i medycynie lotniczej przyjmuje się, że maksymalne przyspieszenie, jakie człowiek może przeżyć (i to przez zaledwie kilka sekund) – wynosi $10g$, gdzie $g = 9{,}8 \text{ m/s}^2$. Związane jest to z działającymi na ciało przeciążeniami powodującymi kompresję jego narządów wewnętrznych oraz utrudnienia przepływu krwi i pracy serca. Przyjmując wartość $10g$ jako przyspieszenie średnie, oblicz czas potrzebny na rozpędzenie statku Enterprise do prędkości $1/4 \cdot c$.

Przykład 9.4

Upuszczenie iPhone'a

Telefon serii **iPhone** 6 Plus został wprowadzony na rynek w listopadzie 2014 roku. Pierwotnie miał on być wyposażony w ekran dotykowy wykonany z szafiru, jednak niemal w ostatniej chwili zdecydowano się na zastosowanie utwardzonego szkła. Przyczyną była mała odporność szafiru na pęknięcia podczas upadku. Oblicz, jaka siła działa na ten telefon podczas upadku i zderzenia z ziemią.

Strategia rozwiązania

Siła powodująca uszkodzenie telefonu podczas uderzenia o podłogę wynika ze zmiany pędu zachodzącej w bardzo krótkim czasie. Rozwiązanie opieramy więc na regule pędu i popędu. Obliczamy impuls, szacujemy czas zderzenia i korzystamy z tych danych do wyznaczenia średniej wartości siły.

Na wstępie wskazane jest przyjęcie rozsądnych oszacowań dotyczących czasu zderzenia i wysokości, z jakiej spada telefon, jak również danych producenta na temat masy i rozmiarów telefonu. Po pierwsze – przyjmijmy, że telefon spada z wysokości odpowiadającej klatce piersiowej dorosłego człowieka o przeciętnym wzroście. Po drugie – załóżmy, że telefon wypada człowiekowi np. z ręki lub kieszeni, zatem jego prędkość początkowa wynosi zero. Po trzecie – ustalmy, że po zderzeniu z podłożem nie odbija się od niego lub odbija w zaniedbywalnym stopniu.

Rozwiązanie

Ustalmy oś y jako skierowaną pionowo do góry. Przyjęta wcześniej typowa wysokość, z której spada telefon, to wysokość klatki piersiowej dorosłego człowieka, czyli $h = 1{,}5 \text{ m}$, a jego prędkość początkowa $v_0 = 0 \text{ m/s} \cdot \hat{j}$. Średnia siła działająca na telefon związana jest ze zmianą pędu (impulsem) wynikającą z gwałtownego zahamowania telefonu wskutek zderzenia z podłożem i wynosi:

$$\vec{F}_{\text{śr}} = \frac{\vec{J}}{\Delta t}.$$

Impuls $\vec{J}$ jest równy zmianie pędu,

$$\vec{J} = \Delta \vec{p},$$

więc

$$\vec{F}_{\text{śr}} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}.$$

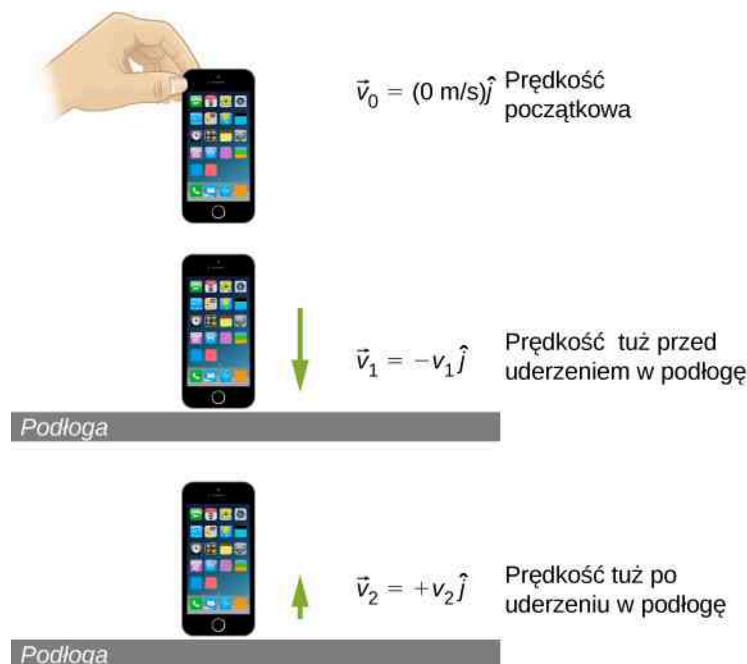
Zmianę momentu pędu telefonu możemy wyrazić jako:

$$\Delta \vec{p} = m \Delta \vec{v}.$$

W tym miejscu warto poświęcić chwilę wartościom prędkości telefonu na różnych etapach jego ruchu oraz ich oznaczeniom:

- $\vec{v}_0$ – prędkość początkowa telefonu na wysokości h $\left(\vec{v}_0 = 0\,\text{m/s} \cdot \hat{j}\right)$,
- $\vec{v}_1$ – prędkość telefonu tuż przed zderzeniem z podłożem,
- $\vec{v}_2$ – prędkość końcowa telefonu po zderzeniu z podłożem.

Rysunek 9.12 ilustruje wymienione prędkości w poszczególnych fazach lotu telefonu.



Rysunek 9.12 (a) Początkowa prędkość telefonu w chwili wypuszczenia z ręki jest równa zeru. (b) Tuż przed uderzeniem o podłogę prędkość telefonu wynosi $\vec{v}_1$ i wiemy o niej na razie tylko tyle, że będzie skierowana w dół $-\hat{j}$. (c) Bezpośrednio po odbiciu od ziemi prędkość telefonu wynosi $\vec{v}_2$. Początkowo prędkości tej również nie znamy, ale wiemy, że będzie ona skierowana w górę, $+\hat{j}$.

Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami zmianę pędu telefonu podczas jego zderzenia z podłogą wyrażamy równaniem:

$$m\Delta\vec{v} = m\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right).$$

Ponieważ założyliśmy, że pomijamy efekt odbicia od podłogi, przyjmujemy prędkość $\vec{v}_2$ równą zeru, zatem

$$m\Delta\vec{v} = m\left[0\text{m / s} - \left(-v_1 \cdot \hat{j}\right)\right] = mv_1 \cdot \hat{j}.$$

Prędkość aparatu tuż przed uderzeniem w podłogę możemy wyznaczyć z zależności kinematycznych lub z zasady zachowania energii mechanicznej. Tutaj skorzystamy z drugiej metody, ale oczywiście wskazane jest, aby czytelnik wykonał obliczenia również na podstawie odpowiednich zależności kinematycznych dla ruchu jednostajnie przyspieszonego – przekonując się, że uzyskany wynik będzie taki sam.

Na wstępie ustalamy poziom odniesienia, dla którego energia potencjalna będzie wynosiła zero. Naturalnym wyborem jest poziom podłogi, względem którego mierzymy wysokość położenia telefonu. Wówczas, zgodnie z zasadą zachowania energii mechanicznej:

$$E_0 = E_1,$$
$$E_{k0} + E_{p0} = E_{k1} + E_{p1},$$
$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1.$$

Jeśli wysokość początkowa telefonu nad podłogą wynosi $h_0 = h$, wysokość w chwili uderzenia $h_1 = 0$, a prędkość początkowa $v_0 = 0$, równanie powyższe przyjmuje postać

$$mgh = \frac{1}{2}mv_1^2,$$
$$v_1 = \sqrt{2gh}.$$

Wobec tego $m\Delta\vec{v} = +m\sqrt{2gh}$. Formułę tę podstawiamy do wyrażenia na siłę:

$$\vec{F}_{\text{śr}} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{+mv_1}{\Delta t}\hat{j} = \frac{+m\sqrt{2gh}}{\Delta t}\hat{j}.$$

Ostatnią rzeczą wymagającą oszacowania jest czas zderzenia. Powszechnie stosowanym sposobem jest obliczenie, ile czasu obiekt potrzebowałby na przebycie drogi równej swojej własnej długości. Skoro prędkość telefonu tuż przed uderzeniem w ziemię wynosi 5,4 m/s, a jego długość równa jest 0,14 m, obliczony z zależności kinematycznych dla ruchu jednostajnego czas zderzenia wynosi 0,026 s.

Zatem siła średnia działająca na telefon i powodująca jego uszkodzenie podczas uderzenia o ziemię wynosi

$$\vec{F}_{\text{śr}} = \frac{0{,}172\,\text{kg}\cdot\sqrt{2\cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2\cdot 1{,}5\,\text{m}}}{0{,}026\,\text{s}}\hat{j} = 36\,\text{N}\cdot\hat{j}.$$

Znaczenie

Ciężar telefonu to $0{,}172\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 = 1{,}68\,\text{N}$, natomiast siła, której zostaje poddany podczas upadku, jest 20 razy większa.



9.2 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Co stanie się w sytuacji, gdy telefon odbija się od podłogi? Czy odbicie zwiększyłoby wartość siły, zmniejszyło ją, czy też pozostałaby ona niezmieniona?

Pęd i siła

W omówionym Przykładzie 9.3 otrzymaliśmy istotny związek:

$$\vec{F}_{\text{śr}} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}. \tag{9.14}$$

Pokazuje on, że średnia siła działająca na ciało jest równa zmianie pędu ciała, którą ta siła wywołuje, podzielonej przez przedział czasu, w którym zmiana nastąpiła. Powyższa zależność jest szczególnie użyteczna w opisie zderzeń, kiedy czas zderzenia Δt jest mały, ale możliwy do zmierzenia; typowe wartości to dziesiętne lub nawet tysięczne części sekundy. Do tej grupy należą na przykład: zderzenie samochodu, kopnięcie piłki lub zderzenia cząstek w skali subatomowej.

W przypadku pędu zmieniającego się w sposób ciągły (na skutek siły zmieniającej się także w sposób ciągły) omawiana zależność jest również bardzo użyteczna. Zagęszczając krok na skali czasu, czyli przechodząc do granicy $\Delta t \to \mathrm{d}t$, przekształcamy Równanie 9.2 do postaci różniczkowej:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}. \tag{9.15}$$

Oznacza to, że szybkość zmian pędu układu (pęd okazuje się funkcją czasu) jest równa sile wypadkowej działającej na układ (mogącej być również funkcją czasu). Powyższe równanie nie jest niczym innym, jak drugą zasadą dynamiki Newtona zapisaną z użyciem pędu, a nie przyspieszenia. To właśnie tę relację przedstawił Newton w swoich *Principia Mathematica*, operując jednak pojęciem „porcji ruchu” zamiast „pędem”.

Jeżeli masa układu pozostaje stała, Równanie 9.3 przekształca się do znanej postaci II zasady dynamiki Newtona. Możemy to w prosty sposób wykazać, podstawiając do powyższego wzoru definicję pędu:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\left(m\vec{v}\right)}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}.$$

Założenie stałości masy pozwala na wyniesienie symbolu m przed operator pochodnej. Gdyby owa masa nie była stała, nie moglibyśmy tego uczynić i należało by poprzestać na Równaniu 9.3 z użyciem pędu. Widoczna jest tu korzyść płynąca z zapisu siły jako zmiany pędu w czasie: możliwy jest opis układów o zmiennej zarówno prędkości, jak i masie. Tego typu zagadnienie omawia się szczegółowo, analizując ruch rakiety.

druga zasada dynamiki wyrażona przy pomocy pędu

Wypadkowa wszystkich sił zewnętrznych działających na układ jest równa szybkości zmian pędu układu pod wpływem działania tychże sił:

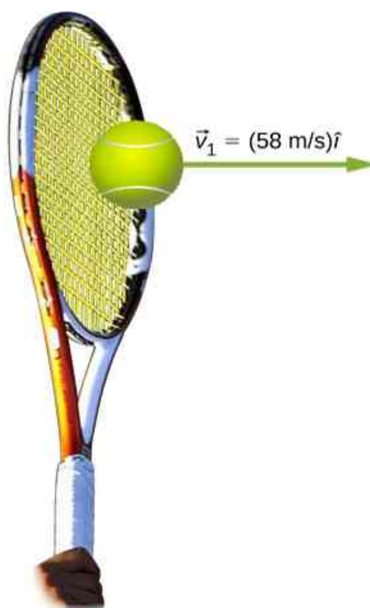
$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}.$$

Jak już wspomniano, Równanie 9.3 dopuszcza zmienność masy w układzie, o czym przekonamy się podczas analizy zasady działania silnika odrzutowego. Oczywiście równanie to jest również bardzo użyteczne, gdy masa układu pozostaje stała, co pokazuje następujący przykład.

Przykład 9.5

Obliczamy siłę: Venus Williams i jej serw

W turnieju tenisowym French Open w roku 2007 Venus Williams podczas serwu ustanowiła światowy rekord prędkości w rozgrywkach kobiet, nadając piłce tenisowej prędkość równą 58 m/s, to jest 209 km/h. Jaką średnią siłą zadziałała wówczas rakieta zawodniczki na piłkę o masie 0,057 kg? Przyjmijmy, że prędkość piłki natychmiast po odbiciu wynosiła 58 m/s i była skierowana poziomo (patrz: Rysunek 9.13) oraz że czas kontaktu piłki z rakietą tenisową wynosił 5 ms.



Rysunek 9.13 Końcowa prędkość piłki tenisowej wynosi $\vec{v}_1 = 58\ \text{m/s} \cdot \hat{i}$.

Strategia rozwiązania

Problem jest zagadnieniem jednowymiarowym, ponieważ piłka w chwili uderzenia nie posiada składowej pionowej prędkości. Pamiętajmy jednak, że w rzeczywistości serwis rozpoczyna się od podrzucenia piłki pionowo w górę i uderzenia w piłkę opadającą. Prędkość pionowa piłki jest jednak zaniedbywalnie mała w porównaniu z prędkością nadawaną podczas uderzenia w płaszczyźnie poziomej. Przywołajmy teraz drugie prawo Newtona, wyrażające znany związek między siłą i pędem:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}.$$

Ponieważ masa piłki jest stała, zmianę pędu piłki wyrażamy jako

$$\Delta p = m\Delta v = m\left(v_1 - v_0\right),$$

przy czym ze względu na jednowymiarowość ruchu – możemy tutaj użyć zapisu skalarnego. W omawianym przykładzie dana jest prędkość piłki po odbiciu oraz czas jej zderzenia z rakietą, zatem do określenia siły ze wzoru $F = \Delta p / \Delta t$, niezbędne jest obliczenie zmiany pędu Δp.

Rozwiązanie

Aby obliczyć zmianę pędu, podstawmy do powyższego wyrażenia posiadane dane:

$$\Delta p = m(v_1 - v_0) = 0{,}057\ \text{kg} \cdot (58\ \text{m/s} - 0\ \text{m/s}) = 3{,}3\ \text{kg} \cdot \text{m/s}.$$

Zatem wielkość siły zewnętrznej nadającej piłce prędkość poziomą wynosi

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{3{,}3\ \text{kg} \cdot \text{m/s}}{0{,}005\ \text{s}} = 660\ \text{N}.$$

Znaczenie

Wyznaczona wartość jest średnią siłą, jaką wywarła rakieta Venus Williams na piłkę podczas tego błyskawicznego uderzenia (dla porównania, na piłkę działa także siła ciężkości równa 0,57 N, ale nie jest ona związana z działaniem rakiety). Problem ten można było oczywiście równie dobrze rozwiązać, wyznaczając najpierw przyspieszenie piłki z równania $F = ma$.

9.3 | Zasada zachowania pędu

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- wyjaśniać znaczenie zasady zachowania pędu;
- prawidłowo oceniać, czy układ jest układem zamkniętym, czy nie;
- definiować układ, którego pęd jest zachowany;
- opisywać matematycznie zasadę zachowania pędu dla danego układu;
- obliczać nieznaną wielkość na podstawie zasady zachowania pędu.

Zacznijmy od przypomnienia trzeciej zasady dynamiki Newtona: jeżeli dwa ciała o masach m_1 i m_2 oddziałują ze sobą (tzn. wywierają na siebie siłę), to jest to zawsze oddziaływanie wzajemne, czyli siła, jaką ciało 2 działa na ciało 1, jest równa co do wartości i przeciwnie skierowana do siły, jaką ciało 1 działa na ciało 2. Oznaczając przez $\vec{F}_{21}$ siłę wywieraną przez ciało 2 na ciało 1 oraz przez $\vec{F}_{12}$ siłę wywieraną przez ciało 1 na ciało 2, trzecią zasadę dynamiki zapiszemy jako:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{21} &= -\vec{F}_{12},\\ m_1\vec{a}_1 &= -m_2\vec{a}_2.\end{aligned} \tag{9.16}$$

Zauważmy, że siły te się wzajemnie nie redukują, ponieważ przyłożone zostały do dwóch różnych obiektów: siła $\vec{F}_{21}$ działa na ciało 1, a siła $\vec{F}_{12}$ na ciało 2. Zwróćmy dodatkowo uwagę, że chociaż wartości tychże sił są jednakowe, to jednak efekt ich działania w postaci przyspieszenia ciała – już nie! Ciało cięższe będzie miało mniejsze przyspieszenie, co oznacza, że jego prędkość będzie zmieniała się niż wolniej niż prędkość ciała lżejszego:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}_1}{\mathrm{d}t} \neq \frac{\mathrm{d}\vec{v}_2}{\mathrm{d}t}.$$

Wartość iloczynu masy i zmiany prędkości w czasie pozostanie jednak stała:

$$m_1\frac{\mathrm{d}\vec{v}_1}{\mathrm{d}t} = -m_2\frac{\mathrm{d}\vec{v}_2}{\mathrm{d}t}. \tag{9.17}$$

Zauważmy, że w następstwie wzajemnego oddziaływania ciała doznają zmiany prędkości $\mathrm{d}v_i$. Ponadto, jeżeli czas trwania oddziaływania wynosi $\mathrm{d}t$ – w czasie tym następuje zmiana prędkości jednocześnie obu ciał.

Załóżmy chwilowo, że masy obu ciał nie ulegają zmianie podczas oddziaływania (nieco później zrezygnujemy z tego warunku). W takim przypadku obie masy możemy umieścić pod znakiem pochodnej:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_1\vec{v}_1\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_2\vec{v}_2\right), \tag{9.18}$$

i zastąpić iloczyny pędem:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t}. \tag{9.19}$$

Szybkości zmian pędów obu ciał są więc jednakowe co do wartości. Jakkolwiek masy oraz zmiany prędkości w czasie tychże ciał mogą być różne, szybkości zmian iloczynów m i $\vec{v}$ pozostaną sobie równe.

Fizycznie oznacza to, że podczas oddziaływania mas m_1 i m_2 oba ciała doznają zmiany pędu, jednakowej co do wartości, ale o przeciwnym znaku. Na przykład pęd pierwszego ciała może wzrosnąć, a to oznacza, że pęd drugiego ciała zmalał dokładnie o tyle samo. W związku z powyższym zapiszmy poprzednie Równanie 9.18 w postaci:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0. \tag{9.20}$$

Wynika z niego, że podczas oddziaływania pęd pierwszego i drugiego ciała ulega zmianie, ale zmiany te wzajemnie się znoszą i całkowita zmiana pędu tego układu wynosi zero.

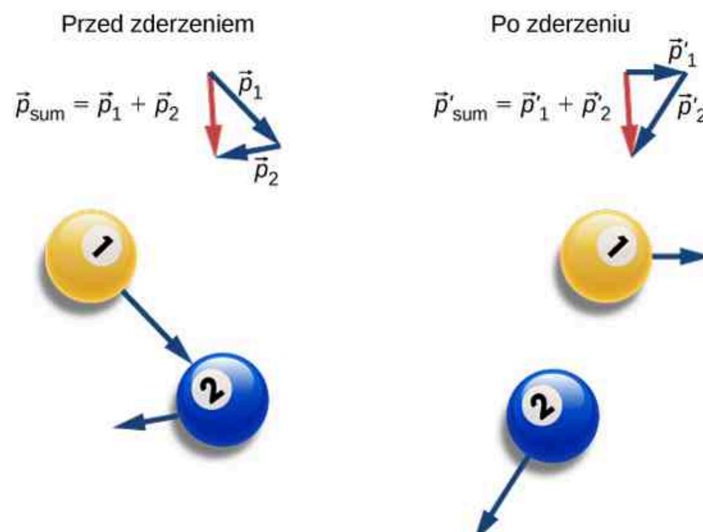
Równanie powyższe można jeszcze zapisać następująco:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right) = 0, \tag{9.21}$$

co prowadzi do wniosku, że całkowity pęd układu, będący wektorową sumą pędów jego elementów – nie zmienia się w czasie, a więc jest stały:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const.} \tag{9.22}$$

Jak pokazano na Rysunku 9.14, całkowity pęd układu przed i po oddziaływaniu pozostaje jednakowy.



Rysunek 9.14 Przed zderzeniem (lewa część rysunku) dwie kule bilardowe posiadają pędy $\vec{p}_1$ i $\vec{p}_2$. Całkowity pęd układu jest sumą wektorową obu pędów, oznaczoną na rysunku jako czerwony wektor $\vec{p}_{sum}$. Po zderzeniu (prawa strona rysunku) obie kule bilardowe posiadają już inne pędy, $\vec{p}'_1$ i $\vec{p}'_2$, ale ich suma wektorowa się nie zmieniła, co ilustruje taki sam jak poprzednio wektor $\vec{p}'_{sum}$.

Uogólniając omawiany przypadek do układu N ciał, otrzymujemy

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots + \vec{p}_N = \text{const},$$
$$\sum_{j=1}^{N} \vec{p}_j = \text{const}. \tag{9.23}$$

Powyższe równanie jest definicją całkowitego (wypadkowego) pędu układu zawierającego N oddziałujących obiektów – a jednocześnie stwierdzeniem, że całkowity pęd tegoż układu jest stały w czasie albo, inaczej mówiąc: zachowany.

prawa zachowania

Jeżeli dana wielkość fizyczna nie zmienia się w czasie, to mówimy, że jest ona zachowana.

Kiedy pęd jest zachowany?

Aby pęd układu nie zmieniał się w czasie, układ ten musi spełniać dwa warunki:

1. *Masa układu podczas oddziaływania musi pozostać stała.*
   Podczas oddziaływania ciał między sobą możliwa jest wprawdzie wymiana masy między nimi, ich sklejenie lub rozpad na drobniejsze elementy, ale masa całkowita układu (suma mas jego elementów) musi pozostać stała.

   $$\left[\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right]_{\text{układu}} = 0.$$

   Tym samym, jeśli jedno ciało zwiększyło masę na skutek oddziaływania, to masa innych elementów układu musiała zmaleć.
2. *Wypadkowa sił zewnętrznych działających na układ musi być równa zeru.*
   Elementy układu podczas ruchu lub zderzenia bądź eksplozji oddziałują ze sobą. Jednak siły tego wzajemnego oddziaływania są siłami wewnętrznymi, wzajemnymi i w ten sposób każda z nich ma swoją siłę wzajemną, wynikającą z III zasady dynamiki – o takiej samej wartości, ale przeciwnym zwrocie. Zatem zmiana pędu jednego elementu układu równoważy się (sumuje wektorowo, dając zero) ze zmianą pędu innego elementu układu. Tym samym, siły wewnętrzne nie są w stanie zmienić całkowitego pędu układu, ponieważ poszczególne zmiany pędów jego elementów wzajemnie się znoszą. Gdy jednak występuje niezrównoważona siła zewnętrzna, działająca na układ (np. siła grawitacji lub tarcia), wówczas wpływa ona na pęd układu jako całości. Mówiąc krótko: pęd układu może ulegać zmianie tylko pod wpływem sił zewnętrznych. Chcąc, aby w naszym układzie pęd był wielkością zachowaną, musimy spełnić warunek

   $$\vec{F}_{\text{zewn}} = \vec{0}.$$

Każdy układ ciał, który spełnia powyższe wymagania, nazywamy **układem zamkniętym** (ang. **closed system**) lub **izolowanym.** Zasadę tę w bardziej syntetycznej postaci wyraża zapis przytoczony poniżej.

prawo zachowania pędu

Całkowity pęd układu zamkniętego jest zachowany:

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{p}_j = \text{const}.$$

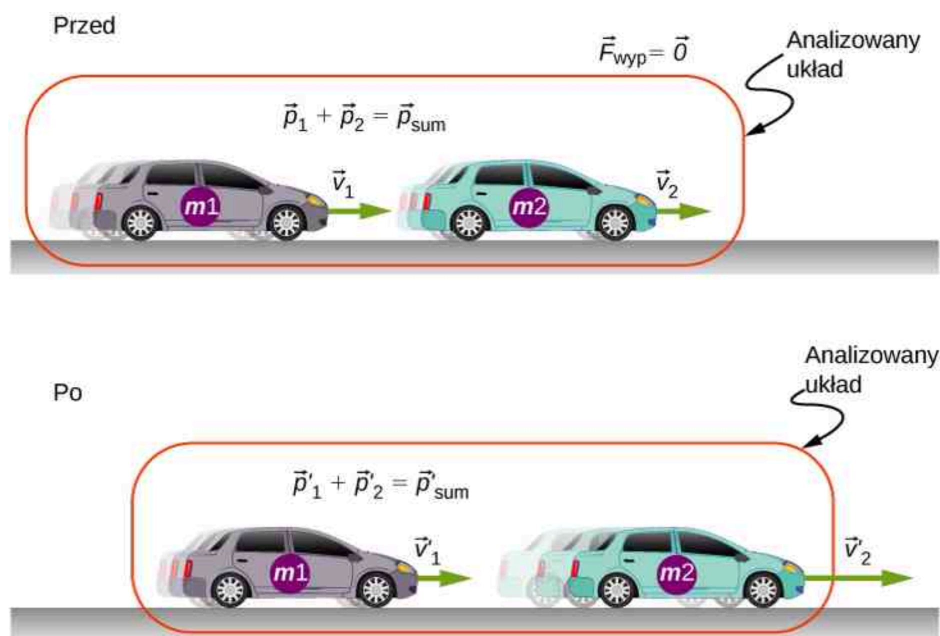
Powyższe stwierdzenie nosi nazwę **zasady zachowania pędu** (ang. **Law of Conservation of Momentum**). Wespół z zasadą zachowania energii stanowi ona jedną z fundamentalnych praw fizyki. Słuszność tejże zasady potwierdzają

wszystkie obserwacje eksperymentalne – dotyczące każdego zjawiska, przebiegającego w każdej skali: począwszy od ruchu galaktyk, po oddziaływanie maleńkich kwarków tworzących protony i neutrony. *W układzie zamkniętym całkowity jego pęd nie ulega zmianie.*

Zauważmy teraz, że chociaż układ fizyczny może podlegać działaniom sił zewnętrznych, aby pęd tegoż układu pozostawał stały – siły te muszą się zrównoważyć. Wówczas *wypadkowa* sił zewnętrznych będzie równa zeru i tylko w tej sytuacji pęd układu nie będzie ulegał zmianie w czasie.

Co rozumiemy przez „układ”?

Układ (ang. **system**) (w rozumieniu fizyki, a ściślej – mechaniki) to zbiór obiektów, których ruch analizujemy (czy to w ujęciu kinematyki, czy dynamiki). Jeśli opisujemy proces odbijania się piłki od podłoża, prawdopodobnie interesuje nas ruch piłki, a nie ruch Ziemi, zatem naszym układem jest po prostu piłka. Jeżeli analizujemy proces zderzenia dwóch samochodów, układ fizyczny tworzą oba samochody (Rysunek 9.15).



Rysunek 9.15 Analizowany układ stanowią dwa poruszające się samochody. Należy pamiętać, że zawartość tegoż układu (ściślej, jego łączna masa) pozostaje niezmieniona przed, podczas i po zderzeniu.

Strategia rozwiązywania zadań: zasada zachowania pędu

Sposób wykorzystania zasady zachowania pędu można przedstawić w czterech krokach, przy czym pierwszy z nich ma znaczenie zasadnicze:

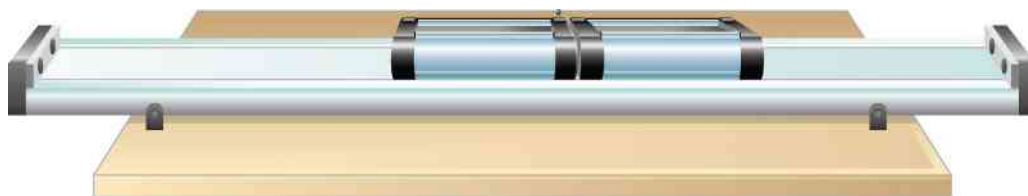
1. Zidentyfikuj układ zamknięty dla analizowanego problemu (sprawdź, czy całkowita masa układu jest zachowana podczas zdarzenia oraz czy wypadkowa sił działających na układ jest równa zeru).
2. Zapisz równanie przedstawiające całkowity pęd układu przed zdarzeniem (eksplozją, zderzeniem).
3. Zapisz analogiczne równanie dla tego układu po zdarzeniu.
4. Przyrównaj oba równania i wyznacz poszukiwaną niewiadomą.

Przykład 9.6

Modelowe zderzenie dwóch ciał

Zjawiska zderzeń często bada się za pomocą dwóch wózków poruszających się bez tarcia po torze prostoliniowym, np. torze powietrznym. Do wózków, na ich końcach, doczepione są magnesy, tak aby po zderzeniu

wózki złączyły się (Rysunek 9.16). Pierwszy wózek ma masę 675 g i porusza się w prawo z prędkością 0,75 m/s; drugi wózek o masie 500 g, porusza się z prędkością 1,33 m/s, także w prawo. Jaka jest prędkość obu wózków po zderzeniu?



Rysunek 9.16 Wózki na torze zderzają się i „sklejają” po zderzeniu.

Strategia rozwiązania

Wiemy, że nastąpiło zderzenie. Znamy masy i prędkości wózków przed zderzeniem, szukamy prędkości obu wózków „sklejonych” po zderzeniu. Można spodziewać się, że znajdzie tu zastosowanie zasada zachowania pędu. Trzeba jednak sprawdzić, czy spełnione są oba warunki dotyczące zastosowania tejże zasady, tzn. czy nasz układ jest układem zamkniętym. Trzeba zatem przekonać się, czy masa układu jest zachowana oraz czy wypadkowa działających nań sił zewnętrznych równa jest zeru.

Układ, w skład którego wchodzą oba wózki, spełnia kryteria układu zamkniętego. Suma mas obu wózków pozostaje niezmieniona, a siły wzajemnego oddziaływania tychże wózków – są siłami wewnętrznymi układu i nie zmieniają jego pędu. Na każdy z wózków w kierunku pionowym działają siły grawitacji, równoważone jednak przez siły reakcji toru. Siły zewnętrzne działające na układ znoszą się więc – ich wypadkowa równa jest zeru.

Rozwiązanie

Zasadę zachowania pędu przedstawia równanie:

$$\vec{p}_{\text{przed}} = \vec{p}_{\text{po}}.$$

Pęd układu przed zderzeniem zawiera tylko składowe wzdłuż osi x:

$$\vec{p}_{\text{przed}} = m_1 v_1 \hat{i} + m_2 v_2 \hat{i}.$$

Pęd układu po zderzeniu jest pędem obu złączonych mas:

$$\vec{p}_{\text{po}} = (m_1 + m_2)\vec{v}_3.$$

Przyrównując oba pędy, napiszemy:

$$(m_1 + m_2)\vec{v}_3 = m_1 v_1 \hat{i} + m_2 v_2 \hat{i},$$

stąd

$$\vec{v}_3 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}\hat{i}.$$

Podstawiając dane, otrzymujemy:

$$\vec{v}_3 = \frac{0{,}675\,\text{kg} \cdot 0{,}75\,\text{m/s} + 0{,}5\,\text{kg} \cdot 1{,}33\,\text{m/s}}{1{,}175\,\text{kg}}\hat{i} = 0{,}997\,\text{m/s} \cdot \hat{i}.$$

Znaczenie

Opisana powyżej metoda postępowania stosuje się do wszystkich obiektów, niezależnie od ich skali czy rozmiaru. Pamiętajmy na przykład, że pęd i zasada jego zachowania mają szczególne znaczenie nawet przy

oddziaływaniu fotonów. Ponieważ foton nie posiada masy, jego pęd definiowany jest inaczej niż w przypadku obiektów materialnych (przekonamy się o tym nieco później, studiując zagadnienia fizyki kwantowej).



9.3 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Załóżmy, że lżejszy wózek porusza się w lewo. Jaki byłby wówczas znak prędkości końcowej?

Przykład 9.7

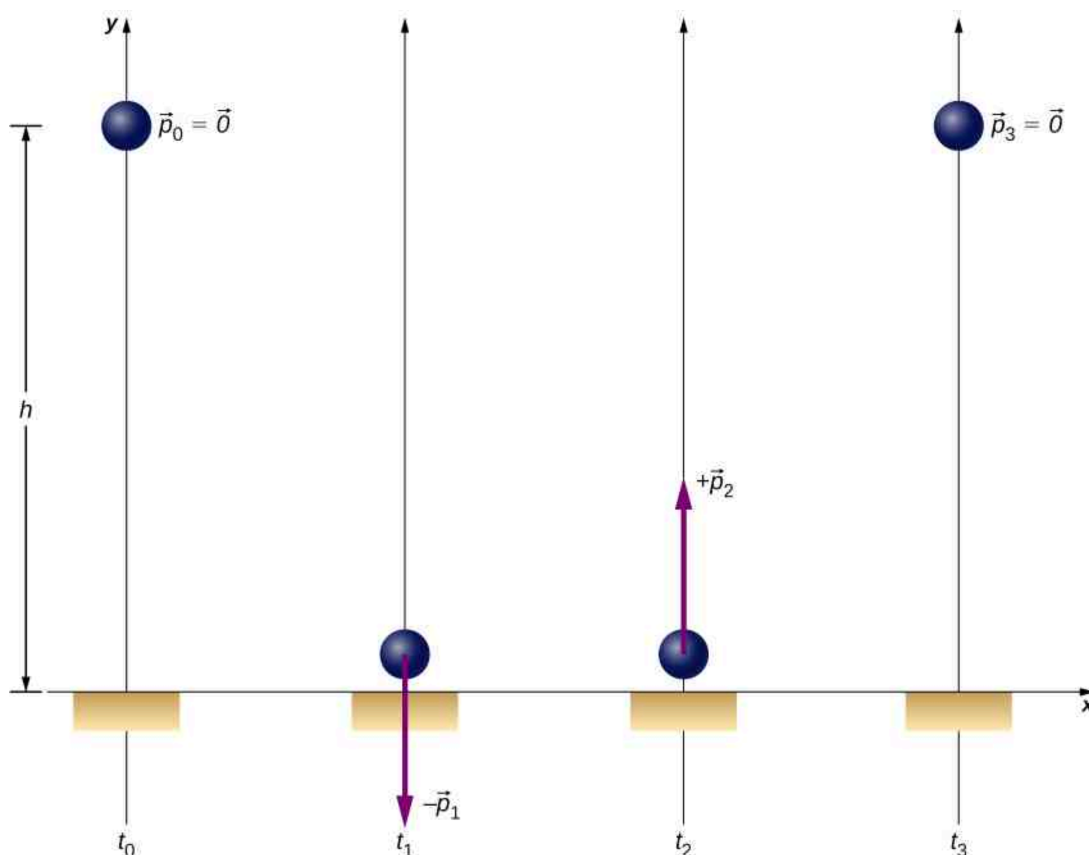
Skacząca „superpiłka”

Poniższy przykład wskazuje, że definiowanie analizowanego układu wymaga pewnej ostrożności. „Superpiłka” o masie 0,25 kg spada z wysokości $h = 1{,}50\ \mathrm{m}$ nad podłogą. Odbija się od niej bez straty energii, osiągając wysokość, z której spadła (Rysunek 9.17).

a. Jakiej zmiany pędu doznała piłka podczas odbicia od podłogi?

b. Jakiej zmiany pędu doznała Ziemia wskutek odbicia się piłki od podłogi?

c. Jaka jest zmiana prędkości Ziemi na skutek tego odbicia?



Rysunek 9.17 „Superpiłka” rozpoczyna spadek z wysokości (chwila t_0), uderza o podłogę (t_1), odbija się (t_2) i wraca na poprzednią wysokość (t_3).

Strategia rozwiązania

Ponieważ rozważamy ruch piłki i zmianę jej pędu, uznajmy na wstępie, że nasz układ stanowi wyłącznie piłka. Oczywiście układ ten nie jest zamknięty. Na piłkę działa bowiem niezrównoważona siła zewnętrzna – skierowana w dół siła grawitacji, a w chwili kontaktu piłki z podłożem – siła reakcji. Nie możemy więc sko-

rzystać z zasady zachowania pędu. Możemy jednak po prostu obliczyć pęd piłki tuż przed zderzeniem oraz jej pęd tuż po zderzeniu, a następnie obliczyć ich różnicę. Znamy masę piłki, więc do wyznaczenia pędów potrzebne nam będą prędkości.

Rozwiązanie

a. Zagadnienie jest jednowymiarowe i określone wzdłuż osi pionowej, przy czym kierunek ku górze traktujemy jako dodatni. Przyjmijmy następujące oznaczenia:

   1. p_0– wartość pędu piłki w chwili początkowej t_0. Ponieważ spadek piłki jest swobodny, pęd ten jest równy zeru.
   2. p_1– wartość pędu piłki w chwili t_1, tuż przed uderzeniem o podłogę.
   3. p_2– wartość pędu piłki w chwili t_2, tuż po odbiciu się od podłogi.

   Zmiana pędu piłki wynosi:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = p_2\hat{j} - \left(-p_1\hat{j}\right) = (p_1 + p_2)\hat{j}.$$

   Prędkość piłki tuż przed uderzeniem w podłogę można wyznaczyć bądź z zasady zachowania energii mechanicznej, bądź na podstawie reguł kinematyki. Zastosujmy pierwszą z tychże metod, postępując analogicznie do przykładu spadającego telefonu z poprzedniego rozdziału. Warto też rozwiązać nasze zagadnienie drugim sposobem i sprawdzić, czy prowadzi on do identycznych wyników.
   Wyznaczymy na wstępie prędkości piłki, tuż przed uderzeniem o podłoże, znając jej prędkość początkową w chwili t_0 $(v_0 = 0)$, wysokość h oraz przyspieszenie ziemskie g. Energia mechaniczna jest zawsze sumą energii kinetycznej i potencjalnej w danej chwili. W polu grawitacyjnym Ziemi energia mechaniczna jest zachowana, co oznacza, że:

$$\begin{aligned} E_0 &= E_1, \\ E_{p0} + E_{k0} &= E_{p1} + E_{k1}, \\ mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 &= mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2. \end{aligned}$$

   Wstawiając do ostatniego równania wysokość początkową piłki nad podłogą $h_0 = h$, wysokość w chwili uderzenia $h_1 = 0$ oraz prędkość $v_0 = 0$, otrzymujemy:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_1^2,$$

   stąd

$$v_1 = \sqrt{2gh}.$$

   Analizując zwrot wektora, prędkość $\vec{v}_1$ zapiszemy jako ujemną, czyli skierowaną w dół:

$$\vec{v}_1 = -\sqrt{2gy} \cdot \hat{j} = -5{,}4\,\mathrm{m/s} \cdot \hat{j}.$$

$$\vec{p}_1 = -0{,}25\,\mathrm{kg} \cdot (-5{,}4\,\mathrm{m/s}) \cdot \hat{j} = -1{,}4\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s} \cdot \hat{j}.$$

   Przyjrzyjmy się teraz pewnej symetrii procesu opadania piłki i jej wznoszenia. Przed odbiciem piłka rozpoczyna ruch z wysokości 1,5 m z prędkością równą zeru i nabiera pędu pod wpływem siły ciężkości – aż do chwili uderzenia o ziemię. W drodze powrotnej, po odbiciu – piłka rozpoczyna ruch z pewną „porcją ruchu”, czyli pędem. Pęd piłki następnie maleje i staje się równy zeru, gdy piłka ponownie znajdzie się na wysokości 1,5 m. Możemy więc stwierdzić, że mamy do czynienia z lustrzanym odbiciem, symetrią obu faz ruchu. Zatem, w celu wyznaczenia prędkości v_2, ułoży-

libyśmy równania analogiczne do powyższych, zastępując dolne indeksy 0 oraz 1 liczbami 2 oraz 3. Wówczas wartość prędkości piłki tuż po odbiciu byłaby równa wartości prędkości v_1, a wartość pędu po odbiciu spełniałaby równość $p_2 = p_1$, przy czym jego wektor byłby skierowany ku górze:

$$\vec{p}_2 = -\vec{p}_1 = 1{,}4\,\text{kg} \cdot \text{m/s} \cdot \hat{j}.$$

Ostatecznie zmiana pędu wskutek odbicia piłki wynosi

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = 1{,}4\,\text{kg} \cdot \text{m/s} \cdot \hat{j} - \left(-1{,}4\,\text{kg} \cdot \text{m/s} \cdot \hat{j}\right) = 2{,}8\,\text{kg} \cdot \text{m/s} \cdot \hat{j}.$$

b. Jakiej zmiany pędu doznaje Ziemia wskutek uderzenia piłki o podłogę?
Instynktowna odpowiedź brzmiałaby zapewne „zero – Ziemia jest zbyt wielka w porównaniu z małą piłką, aby zderzenie mogło *zmienić* jej pęd” albo „więcej niż zero, ale zaniedbywalnie mało”. Obie odpowiedzi nie są jednak prawdziwe. Istotnie, jeśli zdefiniujemy nasz układ jako „Superpiłka plus Ziemia”, będzie to już układ zamknięty. Siła przyciągania Ziemia-piłka jest w nim bowiem siłą wewnętrzną i całkowita zmiana pędu tegoż układu jest równa zeru. W tej sytuacji zmiana pędu Ziemi wynosi $-\Delta\vec{p}$:

$$\Delta\vec{p}_Z = -2{,}8\,\text{kg} \cdot \text{m/s} \cdot \hat{j}.$$

c. Jak zmieni się prędkość Ziemi po zderzeniu?
Tym razem nasze przeczucie i odpowiedź „zero lub prawie zero” są prawdopodobnie słuszne:

$$\Delta\vec{v}_Z = \frac{\Delta p_Z}{M_Z} = \frac{-2{,}8\,\text{kg} \cdot \text{m/s}}{5{,}97 \cdot 10^{24}\,\text{kg}}\hat{j} = -4{,}7 \cdot 10^{-25}\,\text{m/s} \cdot \hat{j}.$$

Taka zmiana prędkości jest rzeczywiście niezauważalna.

Znaczenie

Należy sobie uświadomić, że odpowiedź w podpunkcie c nie dotyczy prędkości, ale zmiany prędkości Ziemi – są to dwie zupełnie różne wielkości. Aby przekonać się, jak niewielka jest wartość otrzymana powyżej – wyobraźmy sobie, że poruszamy się z taką właśnie prędkością. Wówczas przebycie odcinka o długości średnicy atomu wodoru zajęłoby nam... 7 milionów lat!

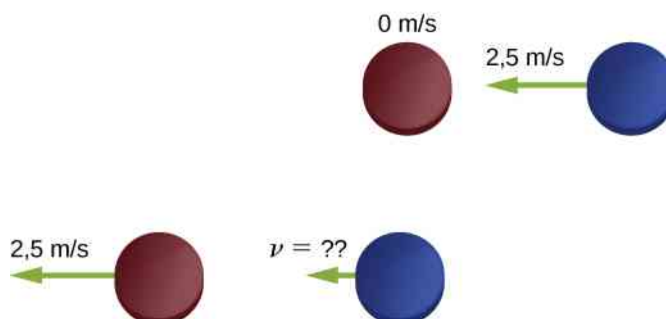


9.4 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Czy zmiana pędu piłki byłaby większa, taka sama, czy też mniejsza, gdyby wskutek zderzenia piłka spoczęła na podłodze, nie odbijając się?

Przykład 9.8

Krążki hokejowe

Dwa krążki hokejowe o takich samych masach, wynoszących 15 g położono na płaskim, gładkim lodzie. Czerwony krążek pozostaje w spoczynku, a krążkowi niebieskiemu nadano prędkość 2,5 m/s, skierowaną w lewo (Rysunek 9.18), tak by uderzył on centralnie w krążek czerwony. Po zderzeniu krążek czerwony przesuwa się w lewo, także z prędkością 2,5 m/s. Jaka będzie prędkość krążka niebieskiego?



Rysunek 9.18 Zderzenie dwóch krążków hokejowych na lodzie. Górny rysunek odpowiada sytuacji na chwilę przed zderzeniem, a dolny – tuż po zderzeniu. Wypadkowa sił zewnętrznych wynosi zero.

Strategia rozwiązania

Rozważamy zderzenie dwóch ciał o znanych masach i prędkościach początkowych; ponadto znana jest prędkość jednego z nich po zderzeniu. Wykorzystanie zasady zachowania pędu wydaje się być dobrą strategią. Zdefiniuj układ jako zawierający oba krążki. Gładkość lodu zapewnia brak tarcia, siłę ciężkości równoważy siła reakcji podłoża – układ jest więc układem zamkniętym.

Zanim przejdziesz do rozwiązania, zastanów się, jaką odpowiedź wskazuje intuicja.

- Zero,
- 2,5 m/s w lewo,
- 2,5 m/s w prawo,
- 1,25 m/s w lewo,
- 1,25 m/s w prawo.
- Inną wartość?

Rozwiązanie

Zdefiniujmy kierunek osi $+x$ jako poziomy w prawo. Zasada zachowania pędu przedstawia się wówczas następująco:

$$\vec{p}_{\text{przed}} = \vec{p}_{\text{po}},$$
$$mv_{1c}\hat{i} + mv_{1n}\hat{i} = mv_{2c}\hat{i} + mv_{2n}\hat{i}.$$

Przed zderzeniem prędkość krążka czerwonego wynosi zero, a wektor prędkości krążka niebieskiego ma postać $-v_{1n}\hat{i} = -2{,}5\ \text{m/s} \cdot \hat{i}$. Zatem:

$$-mv_{1n}\hat{i} = mv_{2c}\hat{i} + mv_{2n}\hat{i},$$
$$-v_{1n}\hat{i} = v_{2c}\hat{i} + v_{2n}\hat{i}.$$

Ponieważ $v_{2c} = -2{,}5\ \text{m/s} \cdot \hat{i}$, z ostatniego równania otrzymujemy:

$$-2{,}5\ \text{m/s} \cdot \hat{i} = -2{,}5\ \text{m/s} \cdot \hat{i} + v_{2n}\hat{i},$$
$$v_{2n}\hat{i} = 0.$$

Znaczenie

Wykazaliśmy właśnie, że krążki podczas zderzenia wymieniły się pędami. Krążek niebieski przekazał cały pęd krążkowi czerwonemu. Jest to typowe dla zderzeń obiektów o jednakowych masach.



9.5 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Nawet gdyby w układzie działała siła tarcia, nadal moglibyśmy skorzystać w rozwiązaniu z zasady zachowania pędu. Potrzebne byłyby jednak dodatkowe dane. Czy wiesz jakie?

Przykład 9.9

Lądowanie Philae

12 listopada 2014 roku **Philae** – lądownik Europejskiej Agencji Kosmicznej został osadzony na powierzchni komety 67P/Czurimow-Gierasimienko (Rysunek 9.19). Podczas lądowania lądownik ten odbijał się jednak dwa razy od powierzchni komety i osiadł na niej dopiero za trzecim razem. Oblicz, jak zmieniła się prędkość tejże komety na skutek pierwszego odbicia.



Rysunek 9.19 Artystyczna wizja lądowania lądownika Philae na powierzchni komety. (Źródło: zmodyfikowany przez „DLR German Aerospace Center”/Flickr)

Ustalmy kierunek osi $+y$ pionowo w górę, a $y = 0$ niech oznacza współrzędną powierzchni komety. Przyjmijmy także, że:

- Masa komety 67P: $M_\text{k} = 1{,}0 \cdot 10^{13}\ \text{kg}$,
- Przyspieszenie grawitacyjne komety: $\vec{a} = -5{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{m/s}^2 \cdot \hat{j}$,
- Masa lądownika: $M_\text{Ph} = 96\ \text{kg}$,
- Prędkość początkowa osiadania lądownika: $\vec{v}_1 = -1{,}0\ \text{m/s} \cdot \hat{j}$,
- Prędkość lądownika po pierwszym odbiciu: $\vec{v}_2 = 0{,}38\ \text{m/s} \cdot \hat{j}$,
- Czas zderzenia lądownika z kometą: $\Delta t = 1{,}3\ \text{s}$,

Strategia rozwiązania

Szukamy odpowiedzi na pytanie, jak zmieniła się prędkość komety, choć poza masą i przyspieszeniem grawitacyjnym nie mamy o tej komecie żadnych informacji. Wiemy jednak, że lądownik Philae uderzył w kometę i odbił się od jej powierzchni – co wskazuje, że można zastosować zasadę zachowania pędu.

Jeżeli jako układ fizyczny zdefiniujemy parę „Philae plus kometa”, wypadkowa sił zewnętrznych będzie równa zeru i pęd całkowity tegoż układu pozostanie zachowany (pomijamy wpływ oddziaływania grawitacyjnego ze Słońcem). Wówczas, obliczając zmianę pędu lądownika podczas odbicia, wyznaczymy równocześnie zmianę pędu komety, a z nią wiąże się bezpośrednio zmiana prędkości komety.

Rozwiązanie

Niech $\vec{p}_1$ oznacza pęd lądownika tuż przed uderzeniem o powierzchnię komety, a $\vec{p}_2$ jego pęd bezpośrednio po zderzeniu. Wówczas:

$$\vec{p}_1 = M_\text{Ph} \vec{v}_1 = 96\ \text{kg} \cdot \left(-1{,}0\ \text{m/s} \cdot \hat{j}\right) = -96\ \text{kg} \cdot \text{m/s} \cdot \hat{j},$$

$$\vec{p}_2 = M_{\text{Ph}}\vec{v}_2 = 96\,\text{kg} \cdot 0{,}38\,\text{m/s} \cdot \hat{j} = 36{,}5\,\text{kg} \cdot \text{m/s} \cdot \hat{j}.$$

Zmiana pędu lądownika podczas zderzenia wynosi:

$$\Delta p_{\text{Ph}} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = 36{,}5\,\text{kg} \cdot \text{m/s} \cdot \hat{j} - \left(-96{,}0\,\text{kg} \cdot \text{m/s} \cdot \hat{j}\right) = 132{,}5\,\text{kg} \cdot \text{m/s} \cdot \hat{j}.$$

Zwróćmy uwagę, jak ważną rolę w naszym rozwiązaniu odgrywają znaki pędu początkowego i końcowego, odzwierciedlane przez znaki wektorów.

Przejdźmy teraz do komety. Ponieważ pęd układu jest zachowany, zmiana pędu komety jest równa zmianie pędu lądownika, wziętej z przeciwnym znakiem (obie zmiany dodane do siebie dadzą zero). Zatem:

$$\Delta\vec{p}_{\text{k}} = -\Delta\vec{p}_{\text{Ph}} = -132{,}5\,\text{kg} \cdot \text{m/s} \cdot \hat{j}.$$

Wobec tego zmiana prędkości komety wynosi:

$$\Delta\vec{v}_{\text{k}} = \frac{\Delta\vec{p}_{\text{k}}}{M_{\text{k}}} = \frac{-132{,}5\,\text{kg} \cdot \text{m/s}}{1{,}0 \cdot 10^{13}\,\text{kg}} = -1{,}33 \cdot 10^{-11}\,\text{m/s} \cdot \hat{j}.$$

Znaczenie

Obliczona wartość jest bardzo mała – zaledwie jedna stumiliardowa część metra na sekundę, tym niemniej nie całkiem równa zeru.



9.6 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Wartości zmian pędu lądownika Philae oraz komety 67P będą jednakowe. Czy impulsy udzielone Philae i komecie także będą jednakowe? Co można powiedzieć o siłach oraz zmianie energii kinetycznej każdego z ciał?

9.4 | Rodzaje zderzeń

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- rozpoznawać rodzaj zderzenia;
- prawidłowo oceniać, czy zderzenie jest sprężyste, czy nie;
- korzystać ze znajomości energii kinetycznej i pędu do analizy zderzenia.

Chociaż pęd jest wielkością zachowaną we wszystkich przypadkach wzajemnego oddziaływania ciał, nie wszystkie oddziaływania (na przykład zderzenia lub eksplozje) są jednakowe. W fizyce mówimy o następujących przypadkach:

- Pojedynczy obiekt może eksplodować, rozpadając się na więcej elementów (w skrócie: *jeden na wiele*).
- Wiele obiektów (przynajmniej dwa) mogą zderzyć się i połączyć na skutek tego zderzenia (w skrócie: *wiele na jeden*).
- Wiele obiektów zderzając się odbija się od siebie, co w efekcie daje również wiele ciał w ruchu (w skrócie: *wiele na wiele*). Po odbiciu prędkości ciał mogą być takie same jak przed nim, ale mogą też ulec zmianie.

Użyteczne będzie więc dokonanie charakterystyki tych oddziaływań w kontekście liczby elementów przed i po zdarzeniu.

Jeden na wiele

Pierwsza sytuacja to rozpad pojedynczego obiektu (lub obiektu traktowanego jako całość) na dwa lub więcej fragmentów. Przykładem może być petarda, układ *łuk-strzała* lub rakieta. Im więcej elementów powstaje po rozpadzie, tym trudniejsza staje się analiza, niemniej całkowity pęd układu przed i po rozpadzie pozostaje niezmieniony. Układ

będzie miał jednak, niekiedy znaczną, łączną energię kinetyczną, mimo że wcześniej jej nie posiadał. Widzimy więc, że chociaż pęd układu jest zawsze zachowany, jego energia kinetyczna – już nie. W takim przypadku, gdy ciało rozpada się na więcej fragmentów i energia kinetyczna układu wzrasta – mówimy o **eksplozji** (ang. **explosion**).

Zastanówmy się teraz nad źródłem dodatkowej porcji energii. Czy jej powstanie oznacza, że zasada zachowania energii przestaje nagle obowiązywać? Oczywiście zasada zachowania energii całkowitej musi być i jest spełniona. W przypadku eksplozji lub wystrzału energia udzielona fragmentom układu pochodzi z energii chemicznej cząsteczek biorących udział w egzoenergetycznych reakcjach chemicznych. Reakcje te, wytwarzając wysoką temperaturę i ciśnienie – są bezpośrednią przyczyną rozerwania się układu i nadania jego fragmentom energii kinetycznych. W przypadku układu *łuk-strzała* źródłem energii jest energia potencjalna sprężystości naciągniętej cięciwy.

Zauważmy, że jeżeli ciało znajduje się początkowo w spoczynku, pęd i energia kinetyczna równe są zeru. Po eksplozji sumaryczny pęd musi być nadal równy zeru, ponieważ na mocy zasady zachowania pędu nie może się on zmienić.

Wiele na jeden

Druga możliwość jest odwrotnością pierwszej: dwa lub więcej ciał zderza się i łączy ze sobą, tworząc jeden obiekt. Masa tego obiektu jest sumą mas ciał zderzających się, a prędkość ruchu takiego „produktu” jest określona zasadą zachowania pędu. W tym przypadku również okazuje się, że pęd układu przed i po zderzeniu nie ulega zmianie, natomiast jego energia kinetyczna tym razem maleje. Tego typu zderzenie nazywamy **niesprężystym** (ang. **inelastic collision**).

W skrajnym przypadku ciała po zderzeniu tworzą bryłę, której prędkość wynosi zero. Oznacza to, że prędkości wszystkich elementów układu i jego energia kinetyczna zmalały do zera. Zauważmy, że w takim przypadku mamy do czynienia z największą możliwą zmianą energii w układzie. Takie zderzenie nazywamy **idealnie niesprężystym** (ang. **perfectly inelastic collision**).

Wiele na wiele

Przypadek, w którym ciała zderzają się i odbijają się od siebie, a następnie oddalają z taką samą prędkością względną jest zderzeniem **sprężystym** (ang. **elastic collision**). Wówczas zmiana energii kinetycznej układu jest równa zeru, zatem jego energia kinetyczna jest zachowana.

W każdym rodzaju oddziaływania, w przypadku układu zamkniętego, jego pęd jest zachowany ($\vec{p}_{\text{przed}} = \vec{p}_{\text{po}}$), natomiast energia kinetyczna – już niekoniecznie:

- Jeżeli $0 < E_{\text{k po}} < E_{\text{k przed}}$, zderzenie jest niesprężyste.
- Jeżeli $E_{\text{k po}} = 0$, zderzenie jest idealnie niesprężyste.
- Jeżeli $E_{\text{k po}} = E_{\text{k przed}}$, zderzenie jest sprężyste.
- Jeżeli $E_{\text{k po}} > E_{\text{k przed}}$, mamy do czynienia z eksplozją.

Należy pamiętać, że analizując zderzenia lub eksplozje, można opisywać je z użyciem pędu i energii kinetycznej.

Strategia rozwiązywania zadań: zderzenia

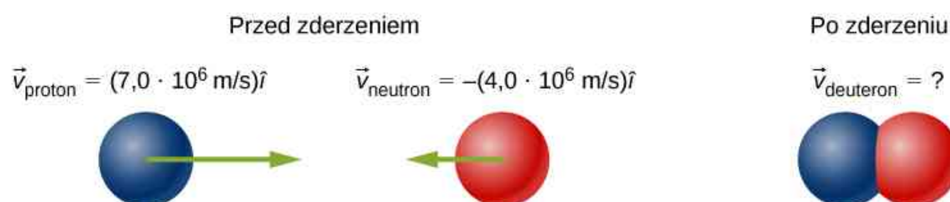
W układzie zamkniętym spełniona jest zawsze zasada zachowania pędu, a w szczególnych przypadkach zachowana bywa także energia mechaniczna. Typowe sytuacje wymagające opisu z użyciem energii i pędu są zwykle jedno- lub dwuwymiarowe i najczęściej zawierają dwie niewiadome. Wówczas dla ułatwienia należy:

1. Zdefiniować układ zamknięty.
2. Napisać równanie ilustrujące zasadę zachowania pędu.
3. Jeśli zachowana jest też energia kinetyczna – wyrazić to odpowiednim równaniem; jeśli nie – podać równanie opisujące zmianę energii kinetycznej.
4. Utworzone w ten sposób dwa równania stanowią ich układ z dwiema niewiadomymi, który rozwiązujemy standardowymi metodami.

Przykład 9.10

Powstawanie deuteronu

Proton o masie $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg zderza się z neutronem o masie nieznacznie większej (tu z przyczyn praktycznych przyjmijmy, że takiej samej) i po ich złączeniu powstaje cząstka zwana **deuteronem**. Jaka jest prędkość deuteronu, jeżeli prędkość protonu wynosiła $7 \cdot 10^6$ m/s i skierowana była w prawo, a prędkość neutronu, równa $4 \cdot 10^6$ m/s – w lewo?



Strategia rozwiązania

Niech nasz układ tworzą obie cząstki: proton i neutron. Mamy do czynienia ze zderzeniem, spróbujmy określić, jakiego rodzaju. W efekcie oddziaływania z dwóch cząstek powstaje jedna, więc będzie to zderzenie niesprężyste. W tej sytuacji zachowany zostaje pęd, ale energia kinetyczna – nie. Użyjemy więc zasady zachowania pędu do wyznaczenia prędkości produktu tegoż zderzenia, natomiast zasadę zachowania energii możemy wykorzystać do obliczenia zmiany (straty) energii kinetycznej i stwierdzenia, ile dżuli energii przeszło w formę niemechaniczną – energię potrzebną do związania się protonu z neutronem, tzw. energię fuzji.

Rozwiązanie

Przyjmijmy, że masy cząstek są jednakowe i wynoszą M. Indeksami p, n oraz d oznaczymy odpowiednio prędkości: protonu, neutronu i deuteronu. Zagadnienie jest jednowymiarowe, możemy więc w zapisie zasady zachowania pędu zrezygnować z oznaczeń wersorów, uwzględniając przeciwny zwrot wektora prędkości neutronu:

$$Mv_{\text{p}} - Mv_{\text{n}} = 2Mv_{\text{d}}.$$

Po podzieleniu przez M i podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$\vec{v}_3 = \frac{v_{\text{p}} - v_{\text{n}}}{2}\hat{i} = 1{,}5 \cdot 10^6 \text{ m/s} \cdot \hat{i}.$$

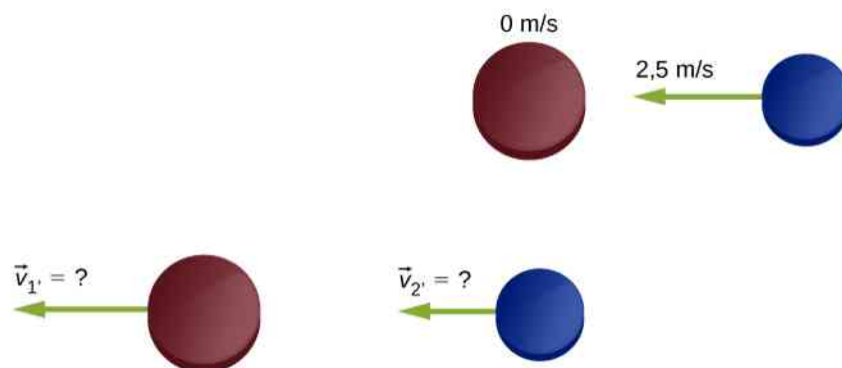
Znaczenie

Opisana reakcja nosi nazwę reakcji **fuzji** (ang. **fusion**) i właśnie z myślą o takich zderzeniach uruchomiono Wielki Zderzacz Hadronów (LHC) w ośrodku badań reakcji jądrowych CERN pod Genewą. Przyspiesza on cząstki do bardzo dużych prędkości (i dużych pędów) w dwóch przeciwbieżnych strumieniach. W takim „czołowym” zderzeniu wiązek mają szansę narodzić się, w drodze fuzji, nowe **cząstki wtórne** (ang. **daughter particles**).

Przykład 9.11

Krążki hokejowe na lodzie

Poniższy przykład jest modyfikacją zadania z poprzedniego rozdziału. Dwa krążki hokejowe, tym razem o *różnych* masach (czerwony o masie 15 g, niebieski o masie 12 g), położono na płaskim, gładkim lodzie. Czerwony krążek pozostaje w spoczynku, a niebieskiemu nadano prędkość 2,5 m/s skierowaną w lewo (Rysunek 9.20), tak by uderzył on centralnie w krążek czerwony. Jeżeli zderzenie jest idealnie sprężyste, jakie będą prędkości krążków po zderzeniu?



Rysunek 9.20 Zderzenie dwóch krążków hokejowych o różnych masach. Górny rysunek odpowiada sytuacji na chwilę przed zderzeniem, a dolny – tuż po zderzeniu. Wypadkowa sił zewnętrznych wynosi zero.

Strategia rozwiązania

Rozważamy zderzenie dwóch krążków o znanych masach i prędkościach początkowych, gdzie nieznane są prędkości obu krążków po zderzeniu. Zasada zachowania pędu wydaje się tu być dobrą strategią. Układ tworzą tutaj oba krążki. Gładkość lodu zapewnia brak tarcia, a siłę ciężkości równoważy siła reakcji podłoża – układ jest więc układem zamkniętym i spełniona jest w nim zasada zachowania pędu. Ponieważ mamy do czynienia ze zderzeniem idealnie sprężystym, energia kinetyczna w tym układzie także będzie zachowana. Otrzymujemy więc dwa równania z dwiema niewiadomymi.

Początkowy pęd układu i jego energia kinetyczna jest początkowym pędem i energią kinetyczną tylko niebieskiego krążka. W zderzeniu sprężystym część pędu i energii zostaje przeniesiona na krążek czerwony.

Rozwiązanie

Zdefiniujmy kierunek osi $+x$ jako poziomy w lewo. Zasada zachowania pędu przedstawia się wówczas następująco:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'.$$

Równanie opisujące łączną energię kinetyczną układu przed i po zderzeniu przyjmuje postać:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2.$$

Chociaż wiemy, że prędkość początkowa krążka pierwszego jest równa zeru, dla ogólności rozważań zachowajmy jeszcze obecność tego członu w obu równaniach.

W obu równaniach pogrupujmy wyrazy zawierające masę m_1 po lewej stronie, a z masą m_2 - po stronie prawej:

$$m_1 \left(v_1 - v_1' \right) = m_2 \left(v_2' - v_2 \right),$$
$$m_1 \left(v_1^2 - v_1'^2 \right) = m_2 \left(v_2'^2 - v_2^2 \right).$$

Jeżeli równanie drugie podzielimy przez pierwsze, to (po zastosowaniu wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów) uzyskamy:

$$v_1 + v_1' = v_2' + v_2.$$

Z powyższego równania wyznaczamy jedną z niewiadomych i podstawiamy ją do równania pierwszego, opisującego zasadę zachowania pędu. Ostatecznie nowe prędkości krążków po zderzeniu to:

$$v_1' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1,$$
$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2.$$

Podstawiając nasze dane, otrzymamy:

$$v_1' = 2{,}22\,\mathrm{m\,/\,s},$$
$$v_2' = -0{,}28\,\mathrm{m\,/\,s}.$$

Znaczenie

Pamiętajmy, że oś x układu współrzędnych zwrócona jest w lewo, więc prędkość krążka czerwonego v_1', jako dodatnia – zwrócona jest także w lewo. Krążek niebieski, po odbiciu od cięższego krążka czerwonego – porusza się w prawo, o czym świadczy znak minus przed jego prędkością v_2'.



9.7 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Przyglądając się równaniom opisującym zasadę zachowania pędu i energii kinetycznej, widzimy, że możliwe jest jeszcze jedno rozwiązanie, w którym $v_1' = v_1$ i $v_2' = v_2$ (oba równania się wówczas zerują). Podaj interpretację fizyczną tych wyników.

Przykład 9.12

Thor kontra Iron Man

W wyprodukowanym w roku 2012 filmie science-fiction *The Avengers* widzimy scenę walki Iron Mana z Thorem. Na początku Thor rzuca w Iron Mana swoim młotem tak, że siła zderzenia wyrzuca Iron Mana w powietrze i ciska o drzewo. W momencie uderzenia Iron Man stoi nieruchomo w odległości ok. 10 metrów od Thora, a czas lotu młota trwa około 1 s. Drzewo znajduje się w odległości ok. 2 m za Iron Manem i do uderzenia o nie dojdzie po ok. 0,75 s. Przyglądając się uważniej tejże scenie, zauważymy, że tor ruchu lecącego młota oraz Iron Mana wraz z młotem jest w przybliżeniu linią poziomą (jest to w rzeczywistości bardzo „spłaszczona” parabola). Przyjmij, że masa Iron Mana wynosi 200 kg.

a. Oszacuj masę młota Thora.

b. Oszacuj stratę energii kinetycznej podczas tego zderzenia.

Strategia rozwiązania

Po uderzeniu młot i Iron Man poruszają się razem – jest to więc zderzenie niesprężyste. Zatem, wybierając odpowiednio układ zamknięty, powinniśmy uzyskać spełnienie zasady zachowania pędu (ale nie energii kinetycznej). Zanim zastosujemy tę zasadę, obliczmy prędkości rzuconego młota i układu *„młot plus Iron Man”* z danych kinematycznych (droga i czas). Zagadnienie jest jednowymiarowe, więc wygodnie jest operować równaniami w postaci skalarnej.

Rozwiązanie

a. Postulujemy zastosowanie zasady zachowania pędu. Układ *„młot plus Iron Man”* w rozpatrywanym przedziale czasu, tj. od momentu zderzenia do chwili stratowania drzewa – spełnia wymogi dla układu zamkniętego. Przyjmijmy teraz następujące oznaczenia:

   - M_m – masa młota,
   - M_I – masa Iron Mana,
   - v_m – prędkość młota tuż przed uderzeniem w Iron Mana,
   - v – prędkość układu *„młot plus Iron Man”* tuż po zderzeniu.

   Prędkość początkowa Iron Mana wynosi zero. Zapisujemy zasadę zachowania pędu:

$$M_\mathrm{m} v_\mathrm{m} = (M_\mathrm{m} + M_\mathrm{I})\, v,$$

a następnie wyznaczamy masę młota:

$$M_m v_m = M_m v + M_I v,$$
$$M_m (v_m - v) = M_I v,$$
$$M_m = \frac{M_I v}{v_m - v} = \frac{200\,\text{kg} \cdot \frac{2\,\text{m}}{0{,}75\,\text{s}}}{10\,\text{m/s} - \frac{2\,\text{m}}{0{,}75\,\text{s}}} = 73\,\text{kg}.$$

Biorąc pod uwagę znaczną niepewność naszych oszacowań, wynikającą z oceny odległości i pomiaru czasu na podstawie kadru filmowego, bardziej miarodajne będzie podanie wyniku z dokładnością do dziesiątek kg, a więc $M_m = 70\,\text{kg}$.

b. Energia kinetyczna układu, podobnie jak i pęd, pochodzi w całości z ruchu rozpędzonego młota:

$$E_{K\text{przed}} = \frac{1}{2} M_m v_m^2 = \frac{1}{2} \cdot 70\,\text{kg} \cdot (10\,\text{m/s})^2 = 3500\,\text{J}.$$

Po zderzeniu:

$$E_{K\text{po}} = \frac{1}{2}(M_m + M_I)\,v^2 = \frac{1}{2} \cdot (70\,\text{kg} + 200\,\text{kg}) \cdot (2{,}67\,\text{m/s})^2 = 960\,\text{J}.$$

Zatem zmiana energii kinetycznej wynosi $E_{K\text{po}} - E_{K\text{przed}} = 960\,\text{J} - 3500\,\text{J} = 2540\,\text{J}$, co oznacza jej ubytek.

Znaczenie

Z innej sceny filmu wynika, że Thor jest w stanie siłą umysłu kontrolować swój młot i dodatkowo rozpędzić młot w fazie po zderzeniu – w tej sytuacji w układzie *„młot plus Iron Man”* pojawiłaby się siła zewnętrzna i przestałby to już być układ zamknięty. Mentalne zdolności Thorna nie są oczywiście przedmiotem zainteresowań niniejszego podręcznika.

Przykład 9.13

Analiza zderzenia samochodów

Ciężarówka o masie 3000 kg uderza w stojący na światłach samochód o masie 1200 kg. W efekcie zderzenia ciężarówka zatrzymuje się, a samochód osobowy porusza się do przodu i zatrzymuje po przebyciu 10 metrów. Zmierzony współczynnik tarcia między oponami a nawierzchnią drogi wynosi 0,62. Z jaką prędkością poruszała się ciężarówka przed zderzeniem?

Strategia rozwiązania

Z początku może się wydawać, że zbyt mało wiemy, aby rozwiązać ten problem. Choć znamy prędkość początkową samochodu osobowego, nie znamy prędkości ciężarówki (ją właśnie mamy wyznaczyć), a zatem i pędu układu. Podobnie, znamy prędkość końcową ciężarówki, ale nie znamy prędkości auta osobowego bezpośrednio po zderzeniu. Fakt, że samochód ostatecznie się zatrzymuje jest już efektem zadziałania sił zewnętrznych, czyli tarcia. Reguła pędu i popędu również nie wydaje się pomocna, ponieważ nie znamy czasu trwania zderzenia.

Przyjmijmy wstępnie, że w bardzo krótkim przedziale czasu odpowiadającym samemu zderzeniu, naszym układem zamkniętym będzie układ *„ciężarówka plus auto”*. Traktujemy wówczas zatrzymanie się ciężarówki jako błyskawiczne i prowadzące do natychmiastowego przekazania pędu samochodowi. Dopiero potem rozpocznie się ruch postępowy jednostajnie opóźniony samochodu (jest bardzo prawdopodobne, że przerażony kierowca uderzonego auta naciskał pedał hamulca aż do chwili zatrzymania, zatem samochód wytracił swoją prędkość za sprawą siły tarcia). Prędkość początkową tej fazy ruchu można wyznaczyć z zależności kinematycznych albo z twierdzenia o równoważności pracy i energii. Tu zastosujemy tę drugą metodę.

Rozwiązanie

Wprowadźmy oznaczenia:

- M_s i M_c – odpowiednio masa samochodu i ciężarówki,
- v_{c0} i v_{c1} – prędkość ciężarówki: początkowa (przed zderzeniem) i końcowa (po zderzeniu),
- v_{s0} i v_{s1} – prędkość samochodu: początkowa (przed zderzeniem) i końcowa (bezpośrednio po zderzeniu),
- E_{K1} i E_{K2} – energia kinetyczna samochodu bezpośrednio po zderzeniu i na końcu ruchu (po zatrzymaniu $E_{K2} = 0$),
- L – droga, jaką pokonał samochód zanim się zatrzymał.

Zasadę zachowania pędu dla układu *„ciężarówka plus auto"* zapisujemy jako:

$$M_s v_{s0} + M_c v_{c0} = M_s v_{s1} + M_c v_{c1} .$$

Ponieważ $v_{s0} = 0$ i $v_{c1} = 0$, otrzymujemy prędkość początkową ciężarówki równą:

$$v_{c0} = \frac{M_s}{M_c} v_{s1} .$$

Aby wyznaczyć prędkość auta po zderzeniu, zastosujmy twierdzenie o równoważności pracy i energii, zgodnie z którym:

$$W = \Delta E_K = E_{K2} - E_{K1} = 0 - \frac{1}{2} M_s v_{s1}^2 .$$

Z drugiej strony, praca siły tarcia wykonana na odcinku L:

$$W = \vec{F}_t \cdot \vec{L} = F_t L \cos\theta.$$

Kąt θ jest kątem między wektorem siły tarcia (działającym poziomo, przeciwnie do ruchu) i przemieszczenia (działającym poziomo, zgodnie z kierunkiem ruchu). Wynosi więc on $180°$, zatem $\cos 180° = -1$.

Siłę tarcia na poziomym torze możemy powiązać z siłą nacisku (tu: równą ciężarowi auta) i współczynnikiem tarcia kinetycznego μ_k zależnością:

$$F_t = \mu_k M_s g.$$

Zatem pracę siły tarcia możemy przyrównać do zmiany energii kinetycznej:

$$-(\mu_k M_s g) L = -\frac{1}{2} M_s v_{s1}^2 .$$

Prędkość auta bezpośrednio po zderzeniu wynosi więc:

$$v_{s1} = \sqrt{2\mu_k g L} = \sqrt{2 \cdot 0{,}62 \cdot 9{,}81\, \mathrm{m/s^2} \cdot 10\mathrm{m}} = 11\, \mathrm{m/s}.$$

Teraz możemy już wrócić do zasady zachowania pędu i wyznaczyć prędkość ruchu ciężarówki przed zderzeniem:

$$v_{c0} = \frac{1\,200\, \mathrm{kg}}{3\,000\, \mathrm{kg}} \cdot 11{,}0\, \mathrm{m/s} = 4{,}4\, \mathrm{m/s} = 16\, \mathrm{km/h}.$$

Znaczenie

Powyższy przykład pokazuje typową analizę, jakiej dokonują policjanci po przybyciu na miejsce wypadku. Widać więc, że od znajomości pojęć pędu i energii kinetycznej oraz ich prawidłowego zastosowania zależą często prawne i finansowe konsekwencje rzeczywistych wypadków.



9.8 Sprawdź, czy rozumiesz. Gdyby nie było tarcia (zderzenie nastąpiłoby na oblodzonej nawierzchni), współczynnik tarcia wynosiłby zero, a nasz wynik $v_{s1} = \sqrt{2\mu_k gL} = 0$ byłby również zerowy, co jest oczywiście niepoprawne. Gdzie tkwi błąd?

Zderzenia i pęd w skali subatomowej

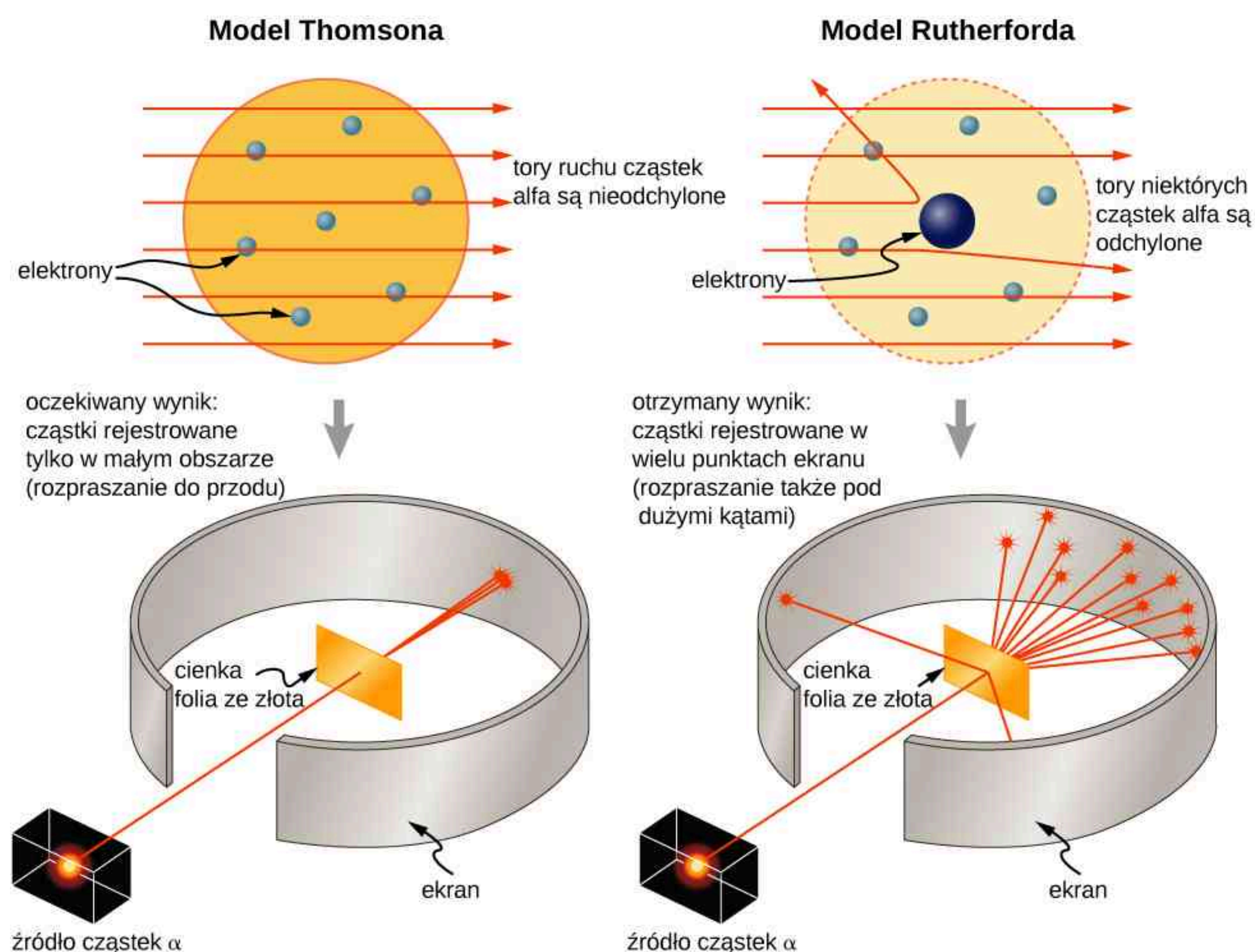
Zasada zachowania pędu okazuje się kluczowa w rozumieniu zjawisk w skali atomowej i subatomowej, ponieważ głównie dzięki eksperymentom zderzeniowym możemy się czegoś dowiedzieć o tych maleńkich cząstkach.

Na początku XX wieku obiektem ogromnego zainteresowania i tematem dyskusji naukowców był atom i jego budowa. Wiedziano już, że atomy zawierają dwa rodzaje cząstek naładowanych: obdarzone ładunkiem ujemnym elektrony i dodatnio naładowane protony (istnienie cząstek obojętnych elektrycznie, czyli neutronów podejrzewano, ale doświadczalnie potwierdzono je dopiero w roku 1932). Zasadnicze pytanie brzmiało: w jaki sposób owe dodatnie i ujemne ładunki są w atomie poukładane? Czy wypełniają równomiernie przestrzeń atomu (wyobrażenie takie zaproponował J.J. Thomson w swoim modelu „ciasta z rodzynkami”), czy umieszczone są w wierzchołkach wielokąta foremnego (model Gilberta Lewisa), a może przyjmują postać pierścieni ładunku ujemnego otaczających dodatnio naładowane jądro – na wzór pierścieni wokół Saturna (zgodnie z sugestią Hantaro Nagaoki)? A może istnieje jeszcze inna struktura?

Ernest Rutherford, fizyk nowozelandzki, wraz z Niemcem – Hansem Geigerem i Brytyjczykiem **Ernestem Marsdenem** przeprowadzili w roku 1909 przełomowy, jak się okazało, eksperyment. Polegał on na bombardowaniu bardzo cienkiej folii złota wiązką szybkich, a więc wysokoenergetycznych cząstek alfa (jąder atomu helu He-4). Cząstki te zderzały się z atomami złota, podczas zderzenia zmieniały kierunek lotu (czyli: ulegały rozproszeniu) i były rejestrowane pod różnymi kątami względem ich początkowego kierunku. Ich rozpraszanie analizowane było właśnie na podstawie zasady zachowania pędu i energii.

Gdyby ładunek w atomie był rozłożony jednorodnie w całej jego objętości (zgodnie z modelem Thomsona) wówczas cząstki alfa po zderzeniach byłyby rejestrowane w pewnym wąskim zakresie małych kątów. Model Nagaoki dawałby podobne rezultaty. Zgodnie z modelem wieloboku Lewisa rozproszenie cząstek zachodziłoby selektywnie, pod pewnymi charakterystycznymi kątami.

Tymczasem wyniki eksperymentu Rutherforda pokazały, że wprawdzie większość cząstek praktycznie wcale nie zmienia kierunku, ale są też i takie, które wręcz całkowicie zawracają i zostają rozproszone pod kątami bliskimi 180° (Rysunek 9.21). Ostatecznie, wykorzystując zasadę zachowania pędu i energii, Rutherford zaproponował model atomu, znacznie bliższy modelowi współczesnemu i dobrze wyjaśniający wyniki jego obserwacji.



Rysunek 9.21 Modele atomu Thomsona i Rutherforda. Model Thomsona zakładał, że praktycznie wszystkie cząstki alfa zostaną rozproszone w bardzo małym kącie, bliskim 0° (rozproszenie do przodu). **Rutherford** i **Geiger** stwierdzili, że rozproszeniu uległo bardzo mało cząstek, ale za to pod znacznie większymi kątami. Wyniki eksperymentu Rutherforda były niespójne z modelem Thomsona. Rutherford opracował więc swój model atomu, wykorzystując zasadę zachowania pędu i energii – znany obecnie jako model jądrowy.

9.5 | Zderzenia w wielu wymiarach

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- wyrażać pęd na płaszczyźnie;
- zapisywać zasadę zachowania pędu z uwzględnieniem składowych pędu;
- obliczać pęd jako wektor na płaszczyźnie.

Zderzenia ciał w dwóch wymiarach występują w przyrodzie znacznie częściej niż jednowymiarowe. W zderzeniach na płaszczyźnie kąty między prędkościami początkowymi ciał nie wynoszą 0° lub 180° i możliwa jest każda konfiguracja wektorów. Jeżeli natomiast zderzają się więcej niż dwa ciała lub wskutek eksplozji powstają więcej niż dwa fragmenty – sytuacja może wymagać opisu w trzech wymiarach, czyli w przestrzeni. Przyjrzyjmy się, jakie komplikacje to rodzi (dla uproszczenia na początek wystarczy nam zderzenie na płaszczyźnie).

Po pierwsze, należy zawsze pamiętać, że pęd jest wektorem. Jak wszystkie wektory, można go przedstawić przy pomocy składowych wzajemnie do siebie prostopadłych. Najczęściej są to składowe kartezjańskie x, y i z (oznaczone odpowiednio wersorami osi: $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$). Stosując później zasadę zachowania pędu, będziemy rozpisywać równania dla poszczególnych składowych.

Druga, niezwykle istotna informacja dotyczy relacji siły i pędu, wyrażającej się w II zasadzie dynamiki:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t},$$

gdzie siła również jest wektorem o trzech składowych, zatem:

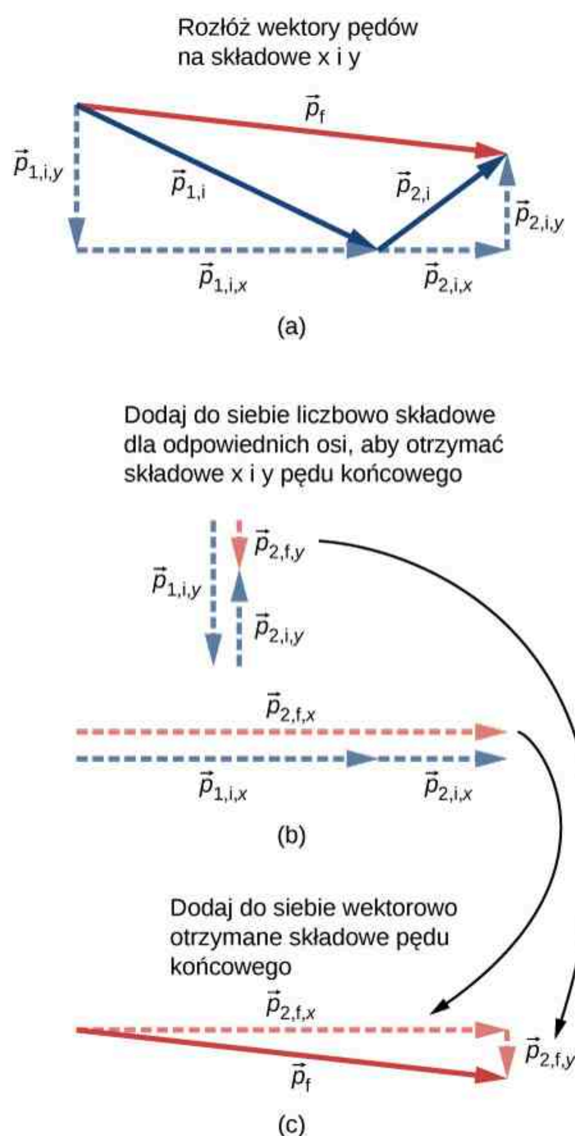
$$F_x = \frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t}, \quad F_y = \frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t}, \quad F_z = \frac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t}.$$

Wiemy, że druga zasada dynamiki jest słuszna dla każdego kierunku ruchu, niezależnie od pozostałych składowych. Skoro tak, to na mocy III zasady Newtona, również zasada zachowania pędu będzie słuszna niezależnie od kierunku.

Powyższe informacje pozwalają na analizę każdego problemu wielowymiarowego za pomocą równań rozpisanych dla dwóch (w przypadku opisu w 2D) lub trzech (przy opisie w 3D) składowych wektorów siły, pędu czy prędkości, a także wyrażenie pędu całkowitego jako sumy pędów elementów układu:

$$\begin{aligned} p_{x\,\text{suma po}} &= p_{x1\,\text{przed}} + p_{x2\,\text{przed}}, \\ p_{y\,\text{suma po}} &= p_{y1\,\text{przed}} + p_{y2\,\text{przed}}. \end{aligned} \qquad (9.24)$$

Procedurę tę ilustruje Rysunek 9.22.



Rysunek 9.22 (a) W analizie zagadnienia dwuwymiarowego rozkładamy wektory pędów przed zderzeniem na składowe x i y. (b) Dodajemy do siebie wszystkie składowe pędów dla danego kierunku osi i otrzymujemy składową $p_{x\text{po}}$ i $p_{y\text{po}}$ odpowiednio pokazane czerwoną linią przerywaną. (c) Dodajemy do siebie składowe $p_{x\text{po}}$ i $p_{y\text{po}}$ i otrzymujemy wektor pędu po zderzeniu $\vec{p}_{\text{po}}$.

Z równań dla każdej składowej niezależnie wyprowadzamy składową poszukiwanej prędkości:

$$v_{\text{x po}} = \frac{m_1 v_{\text{1x przed}} + m_2 v_{\text{2x przed}}}{m},$$
$$v_{\text{y po}} = \frac{m_1 v_{\text{1y przed}} + m_2 v_{\text{2y przed}}}{m},$$

gdzie m jest całkowitą masą układu. Długość wektora prędkości v_{po} obliczymy z pomocą twierdzenia Pitagorasa:

$$v_{\text{po}} = \left|\vec{v}_{\text{po}}\right| = \sqrt{v_{\text{x po}}^2 + v_{\text{y po}}^2}.$$

Strategia rozwiązywania zadań: zasada zachowania pędu w dwóch wymiarach

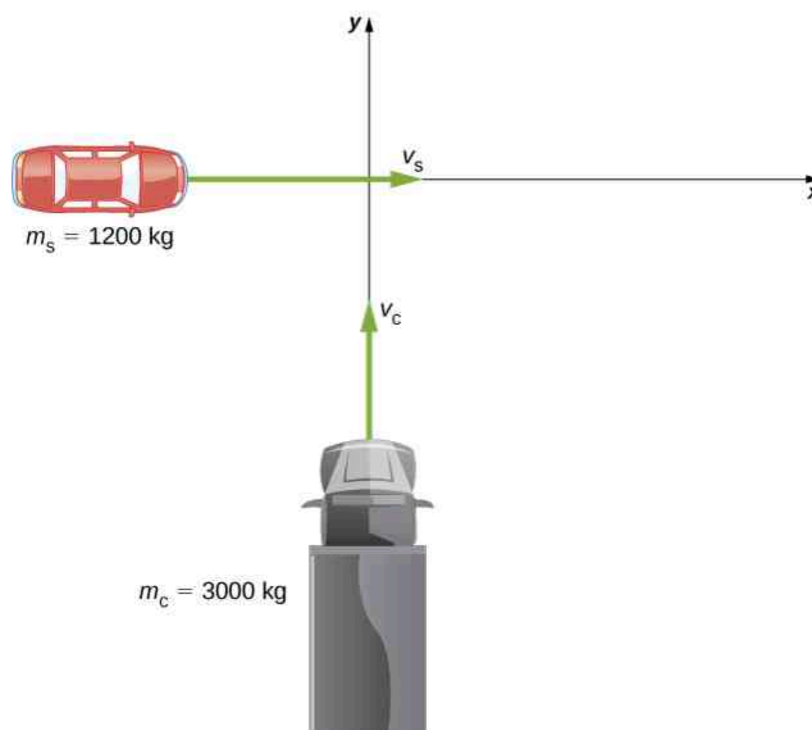
Metoda postępowania w przypadku zagadnień dwu- lub trójwymiarowych z wykorzystaniem zasady zachowania pędu jest w gruncie rzeczy jednakowa, jak w przypadku problemu jednowymiarowego. Różnica polega na tym, że należy ułożyć i rozwiązać równanie dla każdej składowej:

1. Zidentyfikuj układ zamknięty.
2. Zapisz równania reprezentujące zasadę zachowania pędu dla poszczególnych składowych.
3. Jeżeli masz za zadanie wyznaczyć prędkość lub pęd – pamiętaj o wektorowym (graficznym) dodaniu składowych i wyznaczeniu długości wektora sumarycznego za pomocą twierdzenia Pitagorasa.

Przykład 9.14

Zderzenie samochodów

Samochód osobowy o masie 1200 kg jadący na wschód z prędkością 60 km/h zderzył się na skrzyżowaniu z ciężarówką o masie 3 ton jadącą na północ z prędkością 40 km/h (Rysunek 9.23). Oba pojazdy poruszają się dalej razem. Jaka jest ich prędkość po zderzeniu?



Rysunek 9.23 Sytuacja tuż przed zderzeniem się ciężarówki jadącej na północ z samochodem osobowym jadącym na wschód. Sumaryczny pęd posiadać będzie składowe zarówno wzdłuż osi x, jak i y.

Strategia rozwiązania

Przede wszystkim należy wyodrębnić układ zamknięty. Naturalnym wyborem jest układ „*ciężarówka plus samochód*": nie jest to jednak układ zamknięty ze względu na obecność siły tarcia między drogą a zdeformowanymi pojazdami po zderzeniu. Problem ten przestanie istnieć, jeśli zawęzimy zagadnienie do wyznaczenia prędkości masy pojazdów w chwili tuż po zderzeniu. Przy takim zastrzeżeniu układ będzie zamknięty, a zasada zachowania pędu spełniona.

Ponieważ rozważamy ruch na płaszczyźnie, analizujemy pęd w ujęciu składowych x, y i względem tychże osi zapisujemy zasadę zachowania pędu.

Rozwiązanie

Przed zderzeniem całkowity pęd układu wynosi:

$$\vec{p} = m_s \vec{v}_s + m_c \vec{v}_c.$$

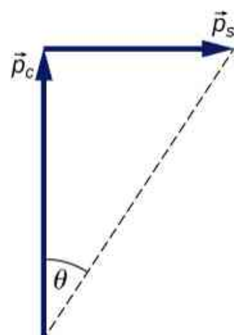
Po zderzeniu pęd całkowity wynosi:

$$\vec{p} = (m_s + m_c)\,\vec{v}_{sc}.$$

Ponieważ mamy do czynienia z układem zamkniętym, pęd zostaje zachowany:

$$m_s\,\vec{v}_s + m_c\,\vec{v}_c = (m_s + m_c)\,\vec{v}_{sc}.$$

Istotne jest wciąż zachowanie zapisu wektorowego, ponieważ zagadnienie nie jest jednowymiarowe, tzn. wektory nie są do siebie równoległe. Należy je dodać wektorowo (Rysunek 9.24).



Rysunek 9.24 Graficzna ilustracja dodawania wektorów pędu. Zwróćmy uwagę, że chociaż prędkość samochodu osobowego jest większa od prędkości ciężarówki, to pęd samochodu jest mniejszy.

Oznaczmy osie układu współrzędnych jako x –skierowaną w prawo i y –skierowaną w górę, zgodnie z prędkościami pojazdów na rysunku. Wówczas pędy pojazdów:

$$\vec{p}_s = m_s\,\vec{v}_s = m_s v_s \hat{i},$$
$$\vec{p}_c = m_c\,\vec{v}_c = m_c v_c \hat{j}.$$

Zasada zachowania pędu wzdłuż osi x ma wówczas postać:

$$m_s v_s = (m_s + m_c)\, v_{scx},$$
$$v_{scx} = \frac{m_s}{m_s + m_c} v_s.$$

Wzdłuż osi y:

$$m_c v_c = (m_s + m_c)\, v_{scy},$$
$$v_{scy} = \frac{m_c}{m_s + m_c} v_c.$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa:

$$\left|\vec{v}_{sc}\right| = \sqrt{\left(\frac{m_s}{m_s + m_c} v_s\right)^2 + \left(\frac{m_c}{m_s + m_c} v_c\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{1200\,\text{kg}}{4200\,\text{kg}} \cdot 16{,}67\,\text{m / s}\right)^2 + \left(\frac{3000\,\text{kg}}{4200\,\text{kg}} \cdot 11{,}1\,\text{m / s}\right)^2}$$
$$= \sqrt{(4{,}79\,\text{m / s})^2 + (7{,}93\,\text{m / s})^2} = 9{,}25\,\text{m / s} = 33{,}3\,\text{km / h}.$$

Kąt wskazany na rysunku wynosi:

$$\theta = \text{arctg}\,\frac{v_{scx}}{v_{scy}} = \text{artg}\,\frac{7{,}93\,\text{m/s}}{4{,}79\,\text{m/s}} = 59°.$$

Znaczenie

W praktyce, aby określić prędkości pojazdów przed zderzeniem, policjanci lub ekipa dochodzeniowa czynności omówione we wcześniejszym przykładzie wykonują w odwrotnej kolejności: mierzą długość śladów hamowania na drodze (drogę hamowania) i korzystają z twierdzenia o równoważności pracy i energii oraz z zasady zachowania pędu.

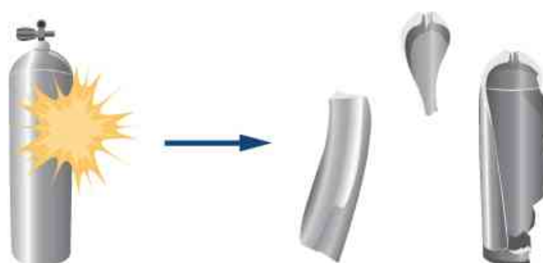


9.9 Sprawdź, czy rozumiesz. Załóżmy, że prędkości przed zderzeniem pojazdów nie są do siebie prostopadłe. Jak zmieniłoby to efekt fizyczny i matematyczną analizę zderzenia?

Przykład 9.15

Eksplozja butli nurkowej

Typowa butla nurkowa jest aluminiowym cylindrem o masie własnej ok. 14,4 kg (Rysunek 9.25). Po napełnieniu jej sprężonym powietrzem ciśnienie wewnątrz butli wynosi 170–200 atm. Załóżmy, że w pewnym momencie taka spoczywająca butla eksploduje, rozrywając się na trzy fragmenty. Pierwszy z nich, o masie ok. 4,5 kg odlatuje w płaszczyźnie poziomej z prędkością 105 m/s, drugi – o masie 3,2 kg również odlatuje w płaszczyźnie poziomej z prędkością 77 m/s, pod kątem $19°$ do kierunku ruchu pierwszego fragmentu. Jaką masę i prędkość początkową po wybuchu będzie miał trzeci fragment?



Rysunek 9.25 Butla nurkowa rozpadająca się w wyniku eksplozji na trzy fragmenty.

Strategia rozwiązania

Aby skorzystać z zasady zachowania pędu, niezbędne jest określenie układu zamkniętego. Jeśli weźmiemy pod uwagę samą butlę bezpośrednio po wybuchu, możemy pominąć wpływ siły grawitacji na butlę i jej fragmenty. Uznajemy zatem, że jest to układ zamknięty o początkowym pędzie równym zeru.

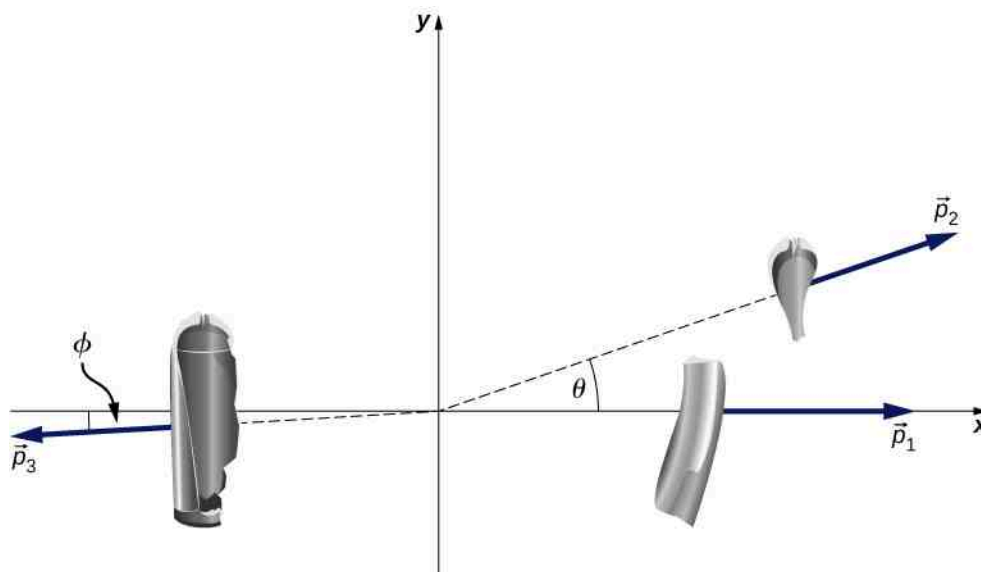
Ponieważ wiemy, że dwa fragmenty poruszają się w płaszczyźnie poziomej, zatem i trzeci fragment będzie poruszał się w tejże płaszczyźnie (w przeciwnym razie jakakolwiek pionowa składowa wektora pędu nie mogłaby zrównoważyć się, a wiemy, że na początku wszystkie składowe wynosiły zero). Zatem, patrząc „z góry” na odlatujące elementy wybieramy początek dwuwymiarowego układu współrzędnych xy w środku butli, zaś oś x w taki sposób, by była skierowana zgodnie z skierowaną zgodnie z prędkością pierwszego fragmentu. Zapisujemy równania wyrażające zasadę zachowania pędu dla obu składowych, aby otrzymać składowe nieznanego pędu trzeciego fragmentu, z których (przy zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa) obliczymy jego wartość. Następnie, dzieląc wynik przez masę trzeciego fragmentu, otrzymamy prędkość tegoż fragmentu.

Rozwiązanie

Zacznijmy od wyliczenia masy trzeciego fragmentu butli:

$$m_3 = m_b - (m_1 + m_2),$$
$$m_3 = 14{,}4\,\text{kg} - (4{,}5\,\text{kg} + 3{,}2\,\text{kg}) = 6{,}7\,\text{kg}\,.$$

Zapiszemy teraz zasadę zachowania pędu dla składowych x i y:



Kierunek osi x:

$$\begin{aligned} p_{x\text{po}} &= p_{x\text{przed}}, \\ p_{1x} + p_{2x} + p_{3x} &= 0, \\ m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + p_{3x} &= 0, \\ p_{3x} &= -m_1 v_{1x} - m_2 v_{2x}. \end{aligned}$$

Kierunek osi y:

$$\begin{aligned} p_{y\text{po}} &= p_{y\text{przed}}, \\ p_{1y} + p_{2y} + p_{3y} &= 0, \\ m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} + p_{3y} &= 0, \\ p_{3y} &= -m_1 v_{1y} - m_2 v_{2y}. \end{aligned}$$

Korzystając z funkcji trygonometrycznych kąta θ obliczamy składową x:

$$p_{3x} = -m_1 v_1 - m_2 v_2 \cos\theta = -4{,}5\,\text{kg} \cdot 105\,\text{m/s} - 3{,}2\,\text{kg} \cdot 77\,\text{m/s} \cdot \cos 19^\circ = -705\,\text{kg} \cdot \text{m/s}.$$

Następnie wyznaczamy składową y:

$$p_{3y} = 0 - m_2 v_2 \sin\theta = -3{,}2\,\text{kg} \cdot 77\,\text{m/s} \cdot \sin 19^\circ = -80\,\text{kg} \cdot \text{m/s}.$$

Z obu składowych wyznaczamy wartość pędu:

$$\left|\vec{p}_3\right| = \sqrt{p_{3x}^2 + p_{3y}^2} = \sqrt{(-705\,\text{kg} \cdot \text{m/s})^2 + (-80\,\text{kg} \cdot \text{m/s})^2} = 710\,\text{kg} \cdot \text{m/s}.$$

Prędkość trzeciego fragmentu butli wynosi więc:

$$v_3 = \frac{p_3}{m_3} = \frac{710\,\text{kg} \cdot \text{m/s}}{6{,}7\,\text{kg}} = 106\,\text{m/s}.$$

Kierunek tej prędkości jest taki, jak kierunek wektora pędu:

$$\phi = \operatorname{arctg}\frac{p_{3y}}{p_{3x}} = \operatorname{arctg}\left(\frac{-80\,\text{kg} \cdot \text{m/s}}{-705\,\text{kg} \cdot \text{m/s}}\right) = 6{,}5^\circ.$$

Ponieważ kąt ϕ mierzony jest od ujemnej półosi x jego właściwa wartość to $186{,}5^\circ$ względem kierunku $+x$.

Znaczenie

Ogromne wartości prędkości są typowe i odzwierciedlają siłę wybuchu sprężonego gazu. Rozpędzone fragmenty mogą z łatwością przebić ścianę, spowodować poważne obrażenia, a nawet śmierć. Na szczęście statystyki pokazują, że tego typu zdarzenia występują niezwykle rzadko.



9.10 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Zauważ, że masa samego powietrza sprężonego w butli została w powyższej analizie pominięta. Jak zmieniłaby się metoda rozwiązania zadania, gdyby uwzględnić masę powietrza? Jak bardzo wpłynęłoby to na wynik liczbowy?

9.6 | Środek masy

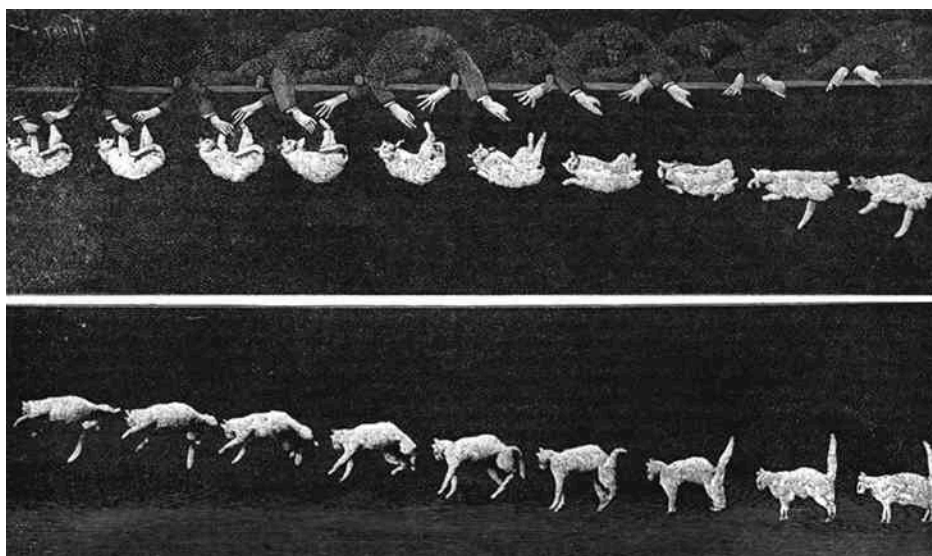
Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- wyjaśniać znaczenie i użyteczność pojęcia środka masy;
- obliczać położenie środka masy danego układu;
- wykorzystywać koncepcję środka masy w układach dwu- i trójwymiarowych;
- obliczać prędkość i przyspieszenie środka masy.

Jak dotąd udawało nam się uniknąć brania pod uwagę pewnej istotnej kwestii: kiedy mówiliśmy, że ciało porusza się (a dokładniej: przyspiesza) zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona, ignorowaliśmy fakt, że może być ono zbudowane z wielu elementów. Samochód ma przecież silnik, kierownicę, siedzenia, pasażerów; piłka futbolowa zawiera warstwę skórzaną, gumową oraz sprężone powietrze; cegła zbudowana jest z atomów. W każdym ciele zawarta jest ogromna ilość różnego rodzaju elementów, niekoniecznie równomiernie w nim rozłożonych. Jaki to ma wpływ na jego ruch i jak uwzględnić te dane w naszych obliczeniach?

Zdajemy sobie sprawę, że obiekty fizyczne bywają rozciągłe, czyli posiadają pewne rozmiary przestrzenne, które mogą się zmieniać podczas ruchu, jak np. balon z wodą albo spadający kot (Rysunek 9.26). Oznacza to, że poszczególne elementy ciała oddziałują ze sobą **siłami wewnętrznymi** (ang. **internal force**), będąc jednocześnie pod wpływem sił zewnętrznych, działających na obiekt jako całość. Dobrze byłoby uwzględniać i te zależności w naszych analizach.



Rysunek 9.26 Spadający kot wykonuje bardzo skomplikowane ewolucje, aby ostatecznie wylądować na czterech łapach. Mimo złożoności tego układu istnieje w ciele kota taki punkt, który podlega prostemu ruchowi jednostajnie przyspieszonemu z przyspieszeniem ziemskim g.

Postawmy więc problem: która część obiektu o fizycznych rozmiarach podlega ruchowi zgodnie z II zasadą dynamiki, gdy działają siły zewnętrzne, oraz w jaki sposób siły wewnętrzne i zewnętrzne zaburzają ruch ciała jako całości?

Pamiętajmy jednak, że aby tę nową dla nas sytuację prawidłowo przeanalizować, musimy być konsekwentni i bezkompromisowi – nie wolno nam robić żadnych specjalnych założeń co do rodzaju ciała, jego elementów czy też typu sił wewnętrznych i zewnętrznych. Rozumowanie musi być spójne i uniwersalne.

Siły wewnętrzne i zewnętrzne

Załóżmy, że opisujemy ciało o masie M, składające się z N oddziałujących ze sobą elementów o masach $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_N$. Masę całkowitą tego ciała zapiszemy jako:

$$M = \sum_{j=1}^{N} m_j. \tag{9.25}$$

Jeżeli na obiekt działa **siła zewnętrzna** (ang. **external force**) $\vec{F}_z$, to znaczy, że każdy element tego ciała dozna działania pewnej części tej siły. Niech więc

$$\vec{f}_{zj} = \text{ułamek siły zewnętrznej, który działa na } j\text{-tą cząstkę tego ciała.}$$

Zwróćmy uwagę, że ułamki przypadające na poszczególne fragmenty ciała generalnie nie muszą być jednakowe, zatem

$$\vec{f}_{z1} \neq \vec{f}_{z2} \neq \vec{f}_{z3} \neq \cdots \neq \vec{f}_{zN}.$$

Części ciała mogą równie dobrze oddziaływać wzajemnie na siebie siłami wewnętrznymi:

$\vec{f}_{wj}$ – wypadkowa sił wewnętrznych działających na j-tą cząstkę ciała na skutek oddziaływania z innymi częściami układu.

Wobec tego na dany j-ty fragment masy działa siła będąca sumą wektorową wkładu sił zewnętrznych i wewnętrznych:

$$\vec{f}_j = \vec{f}_{zj} + \vec{f}_{wj}, \tag{9.26}$$

gdzie j numeruje kolejne elementy ciała: $j = 1,2,3, \ldots, N$.

W wyniku działania tejże siły pęd danego elementu może się zmienić, zgodnie z zapisem II zasady dynamiki:

$$\begin{aligned} \vec{f}_j &= \frac{d\vec{p}_j}{dt}, \\ \vec{f}_{zj} + \vec{f}_{wj} &= \frac{d\vec{p}_j}{dt}. \end{aligned} \tag{9.27}$$

Siła wypadkowa działająca na całe ciało jest sumą wektorową tych sił:

$$\vec{F}_{wyp} = \sum_{j=1}^{N} \left(\vec{f}_{zj} + \vec{f}_{wj} \right) = \sum_{j=1}^{N} \vec{f}_{zj} + \sum_{j=1}^{N} \vec{f}_{wj}. \tag{9.28}$$

Powyższa siła zmienia pęd ciała jako całości, zatem całkowita zmiana pędu ciała będzie sumą wektorową zmian pędów poszczególnych jego elementów:

$$\vec{F}_{wyp} = \sum_{j=1}^{N} \frac{d\vec{p}_j}{dt}. \tag{9.29}$$

Łącząc ze sobą oba powyższe równania, otrzymujemy:

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{f}_{zj} + \sum_{j=1}^{N} \vec{f}_{wj} = \sum_{j=1}^{N} \frac{d\vec{p}_j}{dt}. \quad (9.30)$$

Pamiętamy, że $\vec{f}_{wj}$ jest siłą wywieraną na j-ty element ciała przez inne jego elementy. Wiemy również z III zasady dynamiki Newtona, że dla każdej z takich sił istnieje siła reakcji na nią – wywierana przez j-ty element na inne, taka sama co do wartości, ale przeciwnie skierowana. Siły te jednak wzajemnie się nie znoszą i dla konkretnego fragmentu ciała ich wektorowa suma nie będzie równa zeru. Natomiast sumowanie w obrębie całego obiektu i z uwzględnieniem wszystkich sił wewnętrznych wzajemnie na siebie wywieranych przez elementy ciała – spowoduje w skali całościowej wzajemne zniesienie się sił w parach, zatem:

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{f}_{wj} = 0.$$

Przedstawiony tok rozumowania wydaje się dość zawiły, jest on tu jednak kluczowy – upewnij się, że dobrze rozumiesz powyższą koncepcję.

W przypadku $\vec{f}_{zj}$ natomiast sumowanie dla poszczególnych elementów ciała da nam po prostu wypadkową siłę zewnętrzną działającą na obiekt:

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{f}_{zj} = \vec{F}_z.$$

W rezultacie:

$$\vec{F}_z = \sum_{j=1}^{N} \frac{d\vec{p}_j}{dt}. \quad (9.31)$$

Powyższe równanie informuje nas, jaka będzie całkowita zmiana pędu całego ciała (wszystkich jego N elementów) na skutek działania sił zewnętrznych; siły wewnętrzne nie mają wpływu na pęd ciała jako całości. Z tego powodu nie możemy np. stojąc w koszu wciągnąć samych siebie za linę przytwierdzoną do tegoż kosza. (lub nieco brutalniej: samych siebie podnieść za włosy!) Z punktu widzenia układu, którego częścią jesteśmy – działamy siłą wewnętrzną i nie możemy zmienić swojego pędu.

Siła i pęd

Naszym obecnym celem jest podać równanie ruchu dla całego, złożonego obiektu. Aby to uczynić, zdefiniujmy:

$\vec{p}_{ŚM}$ całkowity pęd układu zawierającego N elementów (znaczenie dolnego indeksu „ŚM” stanie się jasne w dalszej części rozdziału).

Wówczas

$$\vec{p}_{ŚM} = \sum_{j=1}^{N} \vec{p}_j,$$

i wcześniejsze Równanie 9.31 możemy zapisać jako

$$\vec{F}_z = \frac{d\vec{p}_{ŚM}}{dt}. \quad (9.32)$$

Powyższe równanie jest zapisem II zasady dynamiki dla całego ciała. Jeżeli nie wydaje się to szczególnie odkrywcze, zwróćmy uwagę, co kryje się pod symbolem $\vec{p}_{\text{ŚM}}$ – jest to wektorowa suma pędów setek tysięcy trylionów $6{,}02 \cdot 10^{23}$ cząsteczek, zaistniała wskutek zadziałania siły zewnętrznej – siły, którą jesteśmy w stanie wyliczyć.

Środek masy

Naszym kolejnym zadaniem jest określić położenie tego fragmentu ciała, którego dotyczy Równania 9.32.

W tym miejscu przywołajmy dobrze znaną postać II zasady dynamiki:

$$\vec{F} = M\vec{a}. \tag{9.33}$$

Wówczas:

$$M\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\text{ŚM}}}{\mathrm{d}t}$$

oraz

$$M\vec{a} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\vec{p}_j}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{j=1}^{N} \vec{p}_j$$

(przeniesienie znaku pochodnej spod sumy jest dopuszczalne, ponieważ pochodna sumy jest równa sumie pochodnych).

Wektor $\vec{p}_j$ jest pędem j-tego elementu ciała. Położenie tego elementu określa wektor wodzący w wybranym układzie współrzędnych: $\vec{r}_j = \left(x_j,\ y_j,\ z_j\right)$. Otrzymujemy więc:

$$\vec{p}_j = m_j \vec{v}_j = m_j \frac{\mathrm{d}\vec{r}_j}{\mathrm{d}t},$$

a następnie:

$$M\vec{a} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\vec{p}_j}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{j=1}^{N} m_j \frac{\mathrm{d}\vec{r}_j}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r}_j.$$

Dzieląc obustronnie przez masę ciała M (sumę mas wszystkich jego elementów), otrzymujemy:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \left(\frac{1}{M} \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r}_j \right). \tag{9.34}$$

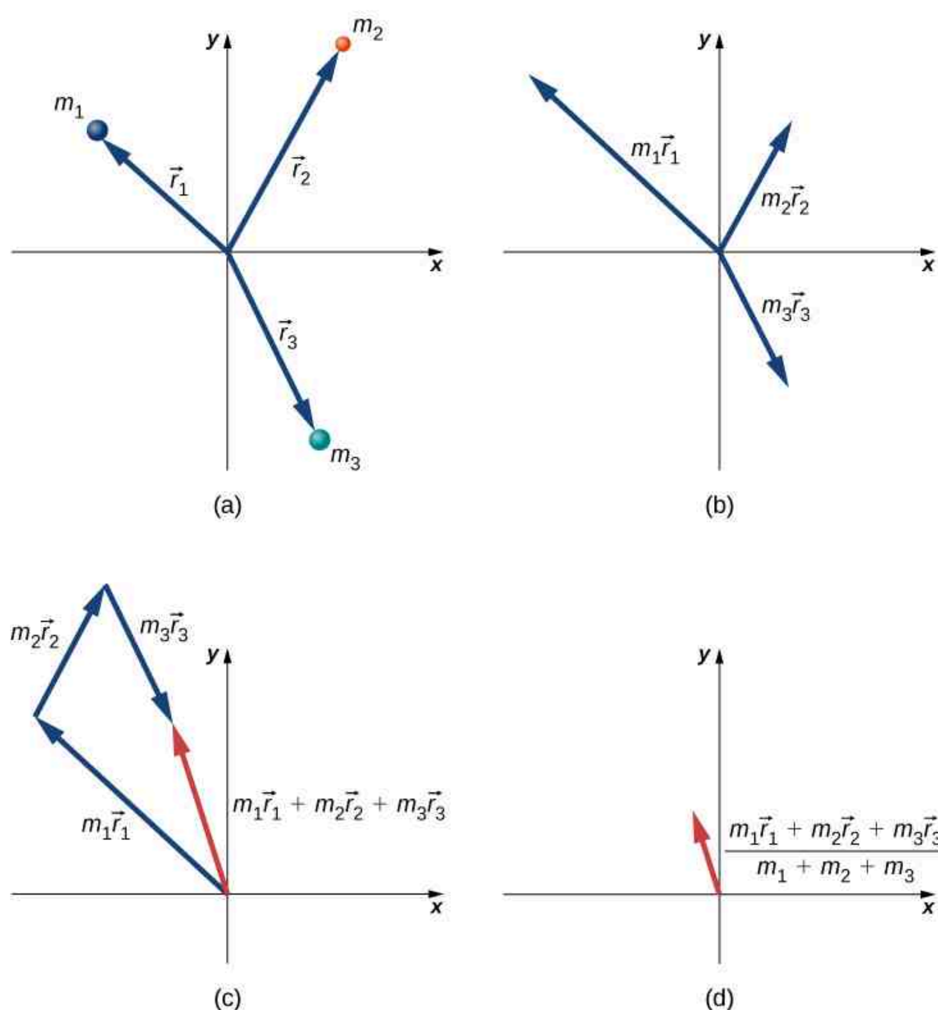
Punkt, którego współrzędne określa zawartość nawiasu w powyższym równaniu, pod wpływem siły zewnętrznej doświadcza takiego przyspieszenia (i porusza się po takim torze), jakby w nim skupiona była masa całego ciała.

Przyglądając się zawartości nawiasu we wzorze, przekonamy się, że przedstawia ona sumę iloczynów mas poszczególnych elementów i położenia w danym układzie współrzędnych podzieloną przez całkowitą masę układu. Można to obrazowo powiązać z liczeniem średniej ważonej, gdzie wagą dla współrzędnych przestrzennych każdego elementu jest masa tego elementu. Obrazuje to rozciągłość ciała, czyli jego niezerowe wymiary w przestrzeni. Tym samym zdefiniowaliśmy położenie **środka masy** (ang. **center of mass**) ciała lub układu ciał:

$$\vec{r}_{\text{ŚM}} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r}_j. \tag{9.35}$$

Zwróćmy uwagę, że jednostką tej wielkości jest metr, zatem rzeczywiście jest to wielkość definiująca położenie w przestrzeni.

Być może wyda się zaskakujący fakt, że w środku masy ciała niekoniecznie musi fizycznie tkwić jakakolwiek masa! Przykładem jest tu sferycznie symetryczna bańka próżniowa, której środek masy pokrywa się ze środkiem geometrycznym bryły i przypada na wnętrze sfery, podczas gdy cała masa rozłożona jest równomiernie wokół tego punktu. Zatem w środku masy sfery nie ma masy! Analogicznym przykładem jest torus, obręcz lub pusty walec. Procedurę wyznaczania środka masy ilustruje poniższy Rysunek 9.27.



Rysunek 9.27 Wyznaczanie środka masy układu trzech różnych cząstek. (a) Do każdej z mas poprowadzono wektor wodzący ze środka układu współrzędnych. (b) Wektory wodzące przemnożono przez odpowiednie masy. (c) Przeskalowane wektory dodano do siebie geometrycznie. (d) Wektor wypadkowy podzielono przez całkowitą masę układu. Wektor ten wskazuje położenie środka masy układu. Zwróćmy uwagę, że w rzeczywistości nie znajduje się w nim żadna z mas.

Ponieważ $\vec{r}_j = x_j\hat{i} + y_j\hat{j} + z_j\hat{k}$, kolejne składowe wektora położenia środka masy wyrazimy jako:

$$r_{\text{ŚM}x} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{N} m_j x_j, \tag{9.36}$$

$$r_{\text{ŚM}y} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j y_j, \tag{9.37}$$

$$r_{\text{ŚM}z} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j z_j, \tag{9.38}$$

A zatem otrzymujemy wektor położenia środka masy o 3 składowych:

$$\vec{r}_{\text{ŚM}} = r_{\text{ŚM}x}\hat{i} + r_{\text{ŚM}y}\hat{j} + r_{\text{ŚM}z}\hat{k},$$

i długości wyznaczonej z twierdzenia Pitagorasa (w 3D):

$$r_{\text{ŚM}} = \left|\vec{r}_{\text{ŚM}}\right| = \sqrt{r^2_{\text{ŚM}x} + r^2_{\text{ŚM}y} + r^2_{\text{ŚM}z}}.$$

Ostatecznie, aby dopełnić zależności kinematycznych, chwilową prędkość środka masy obliczymy jako:

$$\vec{v}_{\text{ŚM}} = \frac{\text{d}}{\text{d}t}\left(\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r}_j\right) = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{v}_j. \tag{9.39}$$

Podobnie jak wektor położenia, prędkość środka masy zawiera również składowe x, y i z.

Strategia rozwiązywania zadań: wyznaczanie położenia środka masy

Położenie środka masy oznacza wektor o dwóch (na płaszczyźnie) lub trzech (w przestrzeni) składowych. Do ich wyznaczenia prowadzą następujące kroki:

1. Określ układ współrzędnych (tzn. jego środek i orientację osi). Zazwyczaj środek obieramy w jednej z mas, ale nie jest to obowiązkowe.
2. Wyznacz składowe położenia w osadzonym układzie współrzędnych dla każdej z mas wchodzących w skład analizowanego układu (ciała).
3. Dodaj do siebie masy wszystkich elementów wchodzących w skład układu (także tego, który jest w środku układu współrzędnych) – będzie to całkowita masa układu.
4. Oblicz współrzędne środka masy, korzystając z Równania 9.36, Równania 9.37 i Równania 9.38.
5. Jeśli to potrzebne, zastosuj twierdzenie Pitagorasa (dla dwóch lub trzech składowych) do wyznaczenia długości wektora $r_{\text{ŚM}}$.

Poniższe przykłady pozwolą ci lepiej przyswoić koncepcję środka masy układu.

Przykład 9.16

Środek masy układu Ziemia-Księżyc

Korzystając z danych zawartych w Dodatku D, obliczmy, w jakiej odległości od środka Ziemi znajduje się środek układu Ziemia-Księżyc. Porównajmy tę wartość z promieniem ziemskim i skomentujmy wynik. Zaniedbujemy tu obecność innych ciał w Układzie Słonecznym.

Strategia rozwiązania

Odnajdujemy masy obiektów i średnią odległość między nimi, osadzamy układ współrzędnych w środku Ziemi i wyznaczamy położenie środka masy przy uwzględnieniu tylko obecności Ziemi i Księżyca ($N = 2$). Indeksy dolne Z i K dotyczą odpowiednio każdego z ciał.

Rozwiązanie

Dane zaczerpnięte z Dodatku D:

- Masa Ziemi $m_Z = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg,
- Masa Księżyca $m_K = 7{,}36 \cdot 10^{22}$ kg,
- Odległość Ziemia-Księżyc $r_K = 3{,}82 \cdot 10^5$ km.

Równanie opisujące $r_{ŚM}$ przy użyciu powyższych danych przyjmuje postać:

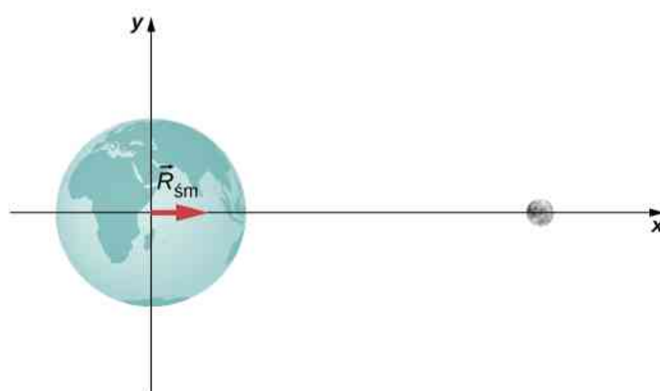
$$R_{ŚM} = \frac{m_Z r_Z + m_K r_K}{m_Z + m_K}.$$

Ponieważ środek układu współrzędnych zdefiniowaliśmy w środku Ziemi, odległość $r_Z = 0$. Wstawiając powyższe dane, otrzymujemy:

$$R_{ŚM} = \frac{5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 0\ \text{m} + 7{,}36 \cdot 10^{22}\ \text{kg} \cdot 3{,}82 \cdot 10^{8}\ \text{m}}{5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg} + 7{,}36 \cdot 10^{22}\ \text{kg}} = 4{,}67 \cdot 10^{6}\ \text{m}.$$

Znaczenie

Promień Ziemi wynosi $6{,}37 \cdot 10^6$ m, zatem środek układu Ziemia-Księżyc znajduje się w odległości $6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m} - 4{,}64 \cdot 10^6\ \text{m} = 1{,}73 \cdot 10^6\ \text{m} = 1\,730\ \text{km}$ pod powierzchnią Ziemi. Pokazuje to poniższy rysunek.



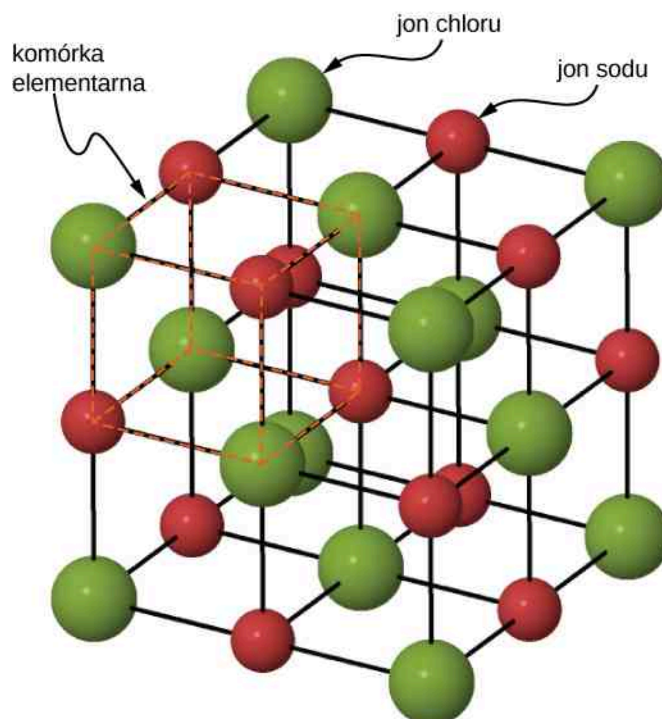


9.11 Sprawdź, czy rozumiesz. Załóżmy, że w naszej analizie uwzględnimy także obecność Słońca. Gdzie w przybliżeniu znalazłby się środek masy układu Ziemia-Księżyc-Słońce?

Przykład 9.17

Środek masy kryształu soli

Na Rysunku 9.28 przedstawiono schemat struktury krystalicznej chlorku sodu, czyli soli kuchennej. Jony sodu i chloru tworzą przestrzenną sieć krystaliczną NaCl. Najmniejsza jednostka, tzw. komórka elementarna stanowi sześcian zawierający połączone naprzemiennie cztery jony sodu i cztery jony chloru. Długość boku takiego sześcianu (tj. długość wiązania) wynosi $2{,}36 \cdot 10^{-10}$ m. Wyznaczmy współrzędne środka masy komórki, podając albo składowe $r_{ŚMx}$, $r_{ŚMy}$, $r_{ŚMz}$, albo $r_{ŚM}$ i dwa kąty.



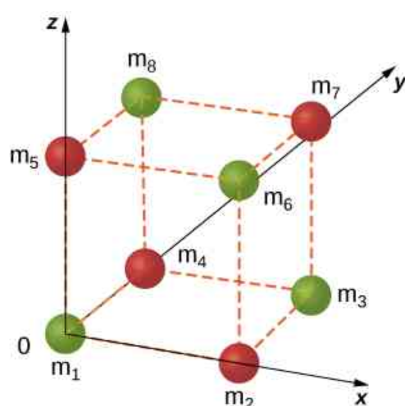
Rysunek 9.28 Sieć krystaliczna kryształu chlorku sodu NaCl.

Strategia rozwiązania

Sprawdzamy, jakie są masy jonów, wybieramy układ współrzędnych i przeliczamy odległości do poszczególnych wierzchołków sześcianu. Korzystamy z Równania 9.36, Równania 9.37 i Równania 9.38 oraz twierdzenia Pitagorasa.

Rozwiązanie

Początek układu wybierzemy w lewym dolnym wierzchołku sześcianu zawierającym jon chloru, jak ilustruje Rysunek 9.29.



Rysunek 9.29 Komórka elementarna sieci kryształu NaCl

W układzie znajduje się 8 jonów, więc $N = 8$:

$$\vec{r}_{\text{ŚM}} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{8} m_j \vec{r}_j .$$

Masy poszczególnych jonów wynoszą:

- $m_{\mathrm{Cl}} = m_1 = m_3 = m_6 = m_8 = 35{,}453\ \mathrm{u} = 35{,}453 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} = 5{,}885 \cdot 10^{-26}\ \mathrm{kg}$.
- $M_{\mathrm{Na}} = m_2 = m_4 = m_5 = m_7 = 22{,}990\ \mathrm{u} = 22{,}990 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} = 3{,}816 \cdot 10^{-26}\ \mathrm{kg}$.

Całkowita masa komórki elementarnej

$$M = 4\,(3{,}816 + 5{,}885) \cdot 10^{-26}\ \mathrm{kg} = 3{,}88 \cdot 10^{-25}\ \mathrm{kg}.$$

Wektory położeń poszczególnych wierzchołków w układzie współrzędnych:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_1 &= 0,\\
\vec{r}_2 &= 2{,}36 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m} \cdot \hat{i},\\
\vec{r}_3 &= r_{3x}\hat{i} + r_{3y}\hat{j} = 2{,}36 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m} \cdot \hat{i} + 2{,}36 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m} \cdot \hat{j},\\
\vec{r}_4 &= 2{,}36 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m} \cdot \hat{j},\\
\vec{r}_5 &= 2{,}36 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m} \cdot \hat{k},\\
\vec{r}_6 &= r_{6x}\hat{i} + r_{6z}\hat{k} = 2{,}36 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m} \cdot \hat{i} + 2{,}36 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m} \cdot \hat{k},\\
\vec{r}_7 &= r_{7x}\hat{i} + r_{7y}\hat{j} + r_{7z}\hat{k} = 2{,}36 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m} \cdot \hat{i} + 2{,}36 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m} \cdot \hat{j} + 2{,}36 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m} \cdot \hat{k},\\
\vec{r}_8 &= r_{8y}\hat{j} + r_{8z}\hat{k} = 2{,}36 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m} \cdot \hat{j} + 2{,}36 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m} \cdot \hat{k}.
\end{aligned}$$

Podstawiając, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
r_{\text{ŚM}x} &= \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{8} m_j x_j = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{8} m_j r_{jx}\\
&= \frac{1}{M}(m_1 r_{1x} + m_2 r_{2x} + m_3 r_{3x} + m_4 r_{4x} + m_5 r_{5x} + m_6 r_{6x} + m_7 r_{7x} + m_8 r_{8x})\\
&= \frac{1}{3{,}88 \cdot 10^{-25}\ \mathrm{kg}}(5{,}88 \cdot 0 + 3{,}816 \cdot 2{,}36 + 5{,}885 \cdot 2{,}36 + 3{,}816 \cdot 0 + 3{,}816 \cdot 0\\
&\qquad + 5{,}885 \cdot 2{,}36 + 3{,}816 \cdot 2{,}36 + 5{,}88 \cdot 0) \cdot 10^{-26}\ \mathrm{kg} \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}\\
&= 1{,}18 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}.
\end{aligned}$$

Analogiczne obliczenia dają nam wynik dla składowych y i z : $r_{\text{ŚM}y} = r_{\text{ŚM}y} = 1{,}18 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}$, co wynika zarówno z obliczeń, jak i z symetrii zagadnienia.

Znaczenie

Jak można zauważyć, przeliczenie masy z jednostek atomowych u na kilogramy nie było konieczne, ponieważ w obliczeniach jednostki masy i tak uległy skróceniu. Chcąc wyrazić wektor $r_{\text{ŚM}}$ przez jego długość i kąt, jaki tworzy on z osiami układu współrzędnych, wyliczamy:

$$r_{\text{ŚM}} = \left|\vec{r}_{\text{ŚM}}\right| = \sqrt{r_{\text{ŚM}x}^2 + r_{\text{ŚM}y}^2 + r_{\text{ŚM}z}^2} = 1{,}18\sqrt{3} \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m} = 2{,}044 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}.$$

Ponieważ problem jest trójwymiarowy, do opisu orientacji wektora w przestrzeni konieczne jest podanie kątów, jakie wektor tworzy z dwiema płaszczyznami; w tym przypadku niech będą to płaszczyzny xy i yz. Kąt ϕ do płaszczyzny horyzontalnej xy wynosi:

$$\phi = \operatorname{arctg}\frac{r_{\text{ŚM}y}}{r_{\text{ŚM}x}} = 45^\circ,$$

natomiast kąt do płaszczyzny pionowej yz:

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{r_{\text{ŚM}z}}{r_{\text{ŚM}y}} = 45^\circ.$$

I ponownie nie zawiodła nas intuicja – środek masy układu okazał się być środkiem geometrycznym bryły.



9.12 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Załóżmy, że mamy makroskopowy kryształ soli (tzn. taki, którego sieć byłaby dla nas widoczna gołym okiem). Kryształ ten utworzony jest z ogromnej liczby komórek elementarnych. Czy jego środek masy zawsze pokrywałby się ze środkiem geometrycznym?

Z omówionych przykładów wypływają dwa kluczowe spostrzeżenia:

1. Jak w każdym zadaniu, należy zacząć od ustalenia układu współrzędnych. Dla obliczeń położenia środka masy często użyteczne jest osadzenie środka układu współrzędnych w jednym z elementów układu. Ten wybór automatycznie pozwala na przyjęcie odległości tej masy jako zero w Równaniu 9.35. Jednak masę tę nadal należy doliczać do całkowitej masy układu w Równaniu 9.25. W przypadku układu Ziemia-Księżyc oznacza to uwzględnienie masy Ziemi. Gdyby to pominąć, środek masy układu przypadłby w środku Księżyca, co jest oczywiście odpowiedzią błędną.
2. W drugim przykładzie (z kryształem soli) zwróćmy uwagę, że środek masy przypadł w miejscu, gdzie masy w ogóle nie ma. Jest to sytuacja, o której wspomnieliśmy już na początku analizy koncepcji środka masy – w punkcie nazywanym środkiem masy nie zawsze musi znajdować się fizycznie jakaś masa.

Środek masy w ciałach o rozkładzie ciągłym

Jeżeli masa danego ciała rozłożona jest jednorodnie w przestrzeni, w odróżnieniu od omówionego wcześniej układu mas dyskretnych, wówczas $m_j \to \mathrm{d}m$, a sumowanie przechodzi w całkę:

$$\vec{r}_{\text{ŚM}} = \frac{1}{M} \int \vec{r}\, \mathrm{d}m. \tag{9.40}$$

W tym kontekście r jest charakterystycznym wymiarem ciała, np. promieniem kuli, promieniem walca, długością pręta. Chcąc podać wyrażenie podcałkowe, należy przedstawić $\mathrm{d}m$ jako funkcję gęstości masy obiektu i promienia r. Poniższy przykład pomoże lepiej wyjaśnić to rozumowanie.

Przykład 9.18

Środek masy jednorodnej obręczy cienkościennej

Wyznaczmy środek masy jednorodnej obręczy o masie M i promieniu r.

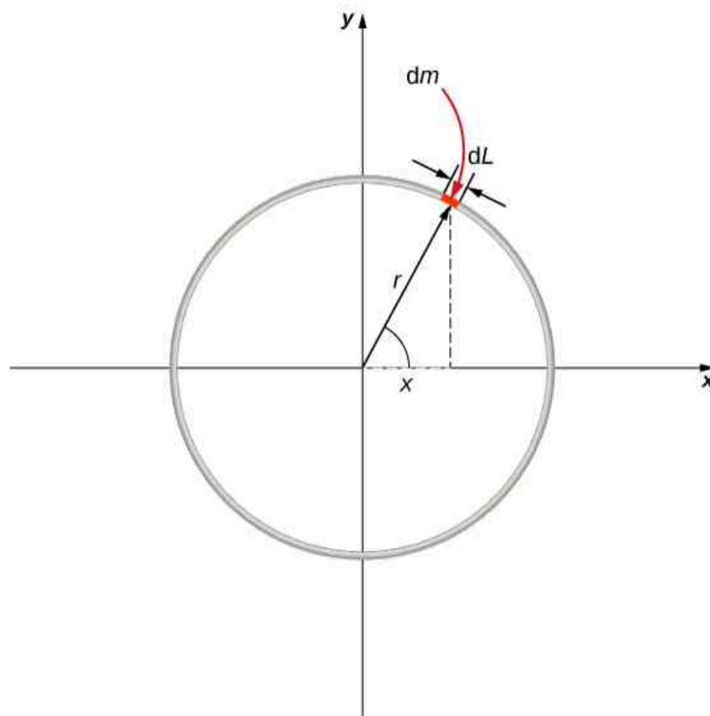
Strategia rozwiązania

Po pierwsze, symetria i kształt obręczy sugerują, że jej środek masy powinien pokrywać się ze środkiem geometrycznym. Rozsądne więc wydaje się osadzenie naszego układu współrzędnych właśnie w środku obręczy.

Następnie należy zastąpić $\mathrm{d}m$ wyrażeniem zawierającym promień obręczy i gęstość materiału, która, jako stała, może zostać wyprowadzona spod całki. Ponieważ obręcz jest cienka, traktujemy ją jako obiekt o jednym stałym promieniu, w odróżnieniu od obręczy grubej, która miałaby promień wewnętrzny i zewnętrzny. Możemy wówczas posłużyć się **gęstością liniową** (ang. **linear mass density**), oznaczoną symbolem λ, reprezentującą liczbę kilogramów na jednostkę długości: $\lambda = m/L$ i wyrażoną w kilogramach na metr. Oczywiście w przypadku obręczy jednorodnej gęstość liniowa pozostaje stała. Możemy więc wyrazić element masy jako $\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}L$, podstawić do wyrażenia podcałkowego i scałkować w odpowiednich granicach.

Rozwiązanie

Na początek zdefiniujmy układ współrzędnych i pomocnicze wielkości (Rysunek 9.30).



Rysunek 9.30 Wyznaczanie środka masy jednorodnej obręczy cienkościennej. Wyrażamy współrzędne elementu masy obręczy, a następnie całkujemy po całej długości obręczy.

Środek masy dla obiektu o ciągłym rozkładzie masy obliczamy z zależności:

$$\vec{r}_{\text{ŚM}} = \frac{1}{M} \int_a^b \vec{r}\, \mathrm{d}m.$$

W tym celu niezbędne jest określenie granic całkowania a i b. Wyraźmy wektor $\vec{r}_{\text{ŚM}}$ przy pomocy jego składowych x i y powiązanych z funkcjami trygonometrycznymi kąta θ:

$$\vec{r}_{\text{ŚM}} = \frac{1}{M} \int_a^b \left(r\cos\theta \cdot \hat{i} + r\sin\theta \cdot \hat{j} \right) \mathrm{d}m.$$

Na rysunku wyeksponowano łuk o niewielkiej (różniczkowej) długości $\mathrm{d}L$. Odpowiadający mu element masy możemy zastąpić przez $\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}L$, a długość tego łuku przedstawić jako $\mathrm{d}L = r\mathrm{d}\theta$. Po podstawieniu:

$$\vec{r}_{\text{ŚM}} = \frac{1}{M} \int_a^b \left(r\cos\theta \cdot \hat{i} + r\sin\theta \cdot \hat{j} \right) \lambda r \mathrm{d}\theta.$$

W następnym kroku wyrażamy gęstość liniową jako stosunek masy całej obręczy do jej długości:

$$\lambda = \frac{M}{2\pi r},$$

co daje nam:

$$\vec{r}_{\text{ŚM}} = \frac{1}{M} \int_a^b \left(r\cos\theta \cdot \hat{i} + r\sin\theta \cdot \hat{j} \right) \frac{M}{2\pi r} r \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \left(r\cos\theta \cdot \hat{i} + r\sin\theta \cdot \hat{j} \right) \mathrm{d}\theta.$$

Zauważmy, że zmienną, po której przebiega całkowanie, jest kąt θ. Pełny okrąg odpowiada przedziałowi od $\theta = 0$ do $\theta = 2\pi$, a zatem granice całkowania to $a = 0$ i $b = 2\pi$. Dla wygody możemy też rozdzielić całkę na sumę całek, rozdzielając tym samym składowe wektora $\vec{r}_{\text{ŚM}}$:

$$\vec{r}_{\text{ŚM}} = \left(\frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos\theta \mathrm{d}\theta \right) \hat{i} + \left(\frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta \right) \hat{j} = 0\hat{i} + 0\hat{j} = \vec{0}.$$

Wektor położenia środka masy jest więc zerowy, a wynik jest zgodny z naszymi oczekiwaniami – środek masy pokrywa się ze środkiem układu współrzędnych.

Środek masy i zasada zachowania pędu

W jaki sposób łączy się koncepcja środka masy z zasadą zachowania pędu?

Załóżmy, że mamy N elementów o masach $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_N$ i początkowych prędkościach $\vec{v}_1, \vec{v}_2. \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_N$. Wektor położenia środka masy tego układu ma postać:

$$\vec{r}_{\text{ŚM}} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r}_j.$$

Prędkość środka masy:

$$\vec{v}_{\text{ŚM}} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{\text{ŚM}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{N} m_j \frac{\mathrm{d}\vec{r}_j}{\mathrm{d}t},$$

zatem początkowy pęd środka masy

$$\left[M \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{\text{ŚM}}}{\mathrm{d}t} \right]_{\text{przed}} = \sum_{j=1}^{N} m_j \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{j\text{przed}}}{\mathrm{d}t},$$

$$\left[M \vec{v}_{\text{ŚM}} \right]_{\text{przed}} = \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{v}_{j\text{przed}}.$$

Po zdarzeniu, polegającym na oddziaływaniu mas ze sobą, pęd środka masy wynosi

$$\left[M \vec{v}_{\text{ŚM}} \right]_{\text{po}} = \sum_{j=1}^{N'} m_j \vec{v}_{j\text{po}}.$$

Zwróćmy uwagę, że sumowanie może przebiegać już w obrębie innej liczby elementów (N' po zderzeniu niesprężystym albo eksplozji będzie różne od N), ale lewe strony równania są sobie równe:

$$\left[M \vec{v}_{\text{ŚM}} \right]_{\text{przed}} = \left[M \vec{v}_{\text{ŚM}} \right]_{\text{po}}. \tag{9.41}$$

Oznacza to, że gdy nie działają siły zewnętrzne, prędkość środka masy układu nie ulega zmianie.

I znów wydawać by się mogło, że wciąż rozważamy ten sam problem, bo to przecież I zasada dynamiki Newtona. Różnica polega jednak na tym, że Newton mówił o pojedynczym obiekcie, podczas gdy Równanie 9.41 dotyczy środka masy całego układu elementów oddziałujących ze sobą (których liczba może być ogromna). Może być też i tak, że w środku masy nie będzie żadnego z nich!

Przykład 9.19

Wybuchy fajerwerków

Kiedy eksplodują fajerwerki, tysiące iskrzących fragmentów zostaje wystrzelonych we wszystkich kierunkach; opadają one na ziemię, co stanowi spektakularny widok. (Rysunek 9.31). Opisz, co dzieje się podczas wybuchu w kontekście zasady zachowania pędu i środka masy.



Rysunek 9.31 Eksplodujące fajerwerki są doskonałym przykładem zachowania pędu oraz ruchu środka masy.

Ilustracja pokazuje radialnie, czyli gwiaździście, symetryczne względem punktu centralnego ślady cząstek, co nawiązuje do koncepcji środka masy układu. Z kolei paraboliczne tory świecących cząstek przywodzą na myśl opis ruchu ciała w polu grawitacyjnym.

Rozwiązanie

Początkowo petarda zostaje wystrzelona mniej lub bardziej pionowo do góry, czego dowodzi widoczna na zdjęciu w przybliżeniu prostoliniowa, niemal pionowa smuga dymu od żółtego fajerwerku. Linia tej smugi nie jest parabolą ponieważ nie jest to zwykły rzut ukośny czy nawet pionowy, ale lot rakiety, napędzanej siłą odrzutu spalonych podczas wybuchu gazów – stąd widoczny „skokowy” charakter ruchu, odpowiadający kolejnym fazom przyspieszania rakiety ku górze (zjawisko napędu odrzutowego przeanalizujemy dokładniej w kolejnym podrozdziale).

W momencie wybuchu tysiące świecących fragmentów rozbiegają się radialnie, tworząc symetryczną rozetę. Symetria tego zjawiska jest konsekwencją zerowania się wektorów wszystkich sił wewnętrznych $\sum_{j=1}^{N} \vec{f}_{\text{w}j} = 0$; dla każdej siły wewnętrznej istnieje w układzie jej odpowiedniczka o takiej samej wartości, ale przeciwnym zwrocie.

Wiemy jednak, że owe siły wewnętrzne nie mogą zmienić pędu środka masy rakiety, teraz już rozerwanej. Ponieważ siła napędowa rakiety przestała już działać, jedyną siłą działającą na fragmenty oraz środek masy układu jest siła grawitacji, zatem trajektorie ruchu nabierają parabolicznego kształtu. Dwie czerwone rozety po lewej stronie zdjęcia są efektem nieco wcześniejszych wybuchów niż wybuch petardy żółtej, na co wskazuje ich wielkość i silniej zaznaczony paraboliczny kształt torów.

Analizując uważnie gęstość śladów w każdej rozecie, można zauważyć pewną asymetrię – jedna strona wydaje się być gęstsza od drugiej (np. w dolnej czerwonej oraz żółtej eksplozji zaznacza się przewaga po prawej stronie, zaś w górnej czerwonej – po stronie lewej). Dzieje się tak z powodu chwilowej orientacji wektora pędu środka masy w momencie wybuchu, nachylonej nieznacznie w prawo (w dwóch pierwszych przypadkach) lub nieznacznie w lewo (w przypadku lewej czerwonej petardy) od linii pionu. Jest to spójne również z odchylonym nieco w prawo, białym śladem wyrzucanych gazów petardy żółtej.

Ostatecznie każdy fragment po wybuchu porusza się samodzielnie po trajektorii parabolicznej.

Znaczenie

Można się zastanawiać, jak to możliwe, że siła grawitacji działa na środek masy nawet jeżeli nie ma w nim masy? Jest to oczywiście pewien skrót myślowy – siła grawitacji działa na wszystkie cząstki układu i powoduje ich ruch. W miarę przemieszczania się tychże części w przestrzeni, zmienia się także położenie środka masy jako wypadkowej położeń i mas ich wszystkich. Środek masy przemieszcza się tak, jakby w nim była wciąż skupiona masa całego układu. Mimo, że po wybuchu masa została rozproszona na duże odległości, żaden z fragmentów nie porusza się przypadkowo – wszystkie trajektorie mają swoje uzasadnienie w zasadzie zachowania pędu.



9.13 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Jak wyglądałby wybuch fajerwerku w stanie nieważkości?

Może znane jest ci stwierdzenie, że „fragmenty eksplodującego ciała zawsze poruszają się tak, aby wyliczone z ich aktualnych współrzędnych położenie środka masy przemieszczało się dalej po swojej niezaburzonej trajektorii”. Wydaje się to nieco „magiczne”: jak to możliwe, że w *każdej* eksplozji fragmenty *zawsze* poruszają się tak, aby nie zaburzyć toru środka masy? Lub – innymi słowy – czy nie ma przypadku, który złamałby tę zasadę?

Wyjaśnieniem tego zadziwiającego faktu jest tok rozumowania, który przyjęliśmy, definiując precyzyjnie środek masy oraz jego pęd:

$$\vec{p}_{\text{ŚM}} = \sum_{j=1}^{N} \vec{p}_j .$$

Następnie wywnioskowaliśmy, że tylko wypadkowa sił zewnętrznych może go zmienić:

$$\vec{F}_{\text{z}} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\text{ŚM}}}{\mathrm{d}t} .$$

Wreszcie (i to jest sedno problemu) zdefiniowaliśmy przyspieszenie na podstawie drugiej zasady dynamiki

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{z}}}{M} ,$$

gdzie przyspieszenie:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r}_j\right) .$$

Zawartość nawiasu w powyższym równaniu to nic innego jak wektor położenia środka masy. Nie ma więc nic dziwnego w tym, że ruch środka masy podlega drugiemu prawu dynamiki, bo przecież w ten sposób go zdefiniowaliśmy.

9.7 | Napęd rakietowy

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać wykorzystanie zasady zachowania pędu, gdy masa i prędkość zmieniają się w czasie;
- obliczać prędkość rakiety w przestrzeni kosmicznej przy danych parametrach początkowych;
- obliczać prędkość rakiety w warunkach grawitacji ziemskiej przy danych parametrach początkowych.

Zajmiemy się teraz przypadkiem, w którym masa poruszającego się ciała ulega zmianie. Przeanalizujmy ruch rakiety, której prędkość oraz pęd zmieniają się wskutek wyrzucenia spalin, powodując przyspieszenie rakiety w kierunku przeciwnym do prędkości wyrzucanych gazów (zobacz Rysunek 9.32). Rakieta w przestrzeni kosmicznej, zaopatrzona w zapas paliwa, ma masę m_0 (jest to masa własna rakiety wraz z masą paliwa). Rakieta przyspiesza na zasadzie zjawiska odrzutu, dzięki reakcjom spalania paliwa oraz wyrzucaniu spalin za siebie. Na pewnym etapie jej prędkość wynosi $\vec{v}$, a masa m i jest to masa własna rakiety oraz części niezużytego jeszcze paliwa. Zauważmy, że operujemy tu pojęciem masy chwilowej $m(t)$ i prędkości chwilowej $\vec{v}(t)$. Obliczymy teraz, jak zmieni się prędkość rakiety na skutek zużycia całego paliwa, jeżeli szybkość spalania w silnikach rakiety oraz szybkość wyrzutu spalin będą na stałym poziomie.



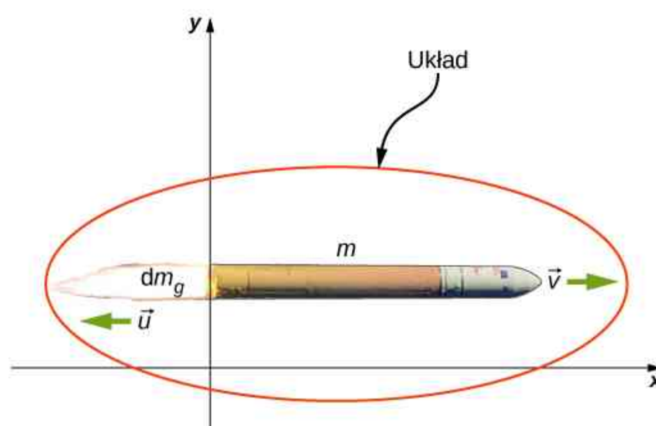
Rysunek 9.32 Prom kosmiczny wykorzystuje zarówno paliwo stałe, jak i ciekłe i wyposażony jest w sporą liczbę elementów wielokrotnego użytku. Ogromne zbiorniki na paliwo ciekłe przeznaczone są wprawdzie na straty, ale dodatkowe zbiorniki na paliwo stałe odzyskuje się i powtórnie napełnia po każdym locie. Również sam statek po powrocie na Ziemię wykorzystywany jest do kolejnych lotów. Umożliwiają to m.in. pokrywy ceramiczne chroniące go przed przegrzaniem podczas powtórnego wejścia w atmosferę. Można zatem wielokrotnie powtarzać misje wahadłowca. (Źródło: NASA)

Analiza fizyczna ruchu

Omówimy teraz, co dzieje się podczas ruchu rakiety w przestrzeni kosmicznej oraz omówimy fizyczną naturę tego procesu:

- Podczas pracy silnika produkowane są gazy, które posiadają zarówno masę jak i prędkość, a więc również pęd. Z zasady zachowania pędu wynika, że rakieta odrzucająca spaliny dozna takiej samej zmiany pędu, ale z przeciwnym znakiem. Załóżmy, że gazy wyrzucane są ze stałą szybkością, co oznacza, że przyrost pędu rakiety będzie również stały. Odwołując się do Równania 9.15, stwierdzimy, że oznacza to obecność stałej siły działającej na rakietę i nadającej jej przyspieszenie.
- W miarę upływu czasu masa rakiety (obejmująca także masę paliwa) maleje w sposób ciągły. Jeśli siła napędu rakiety się nie zmienia, przyspieszenie rakiety będzie rosnąć.
- Zatem całkowita zmiana prędkości rakiety zależy w sposób nieliniowy od ilości zużytego paliwa.

Mamy więc do czynienia ze zmianami zarówno masy jak i prędkości rakiety, a także masy wyrzucanych gazów. Jeśli jako układ zdefiniujemy *„rakietę plus paliwo”*, to będzie to układ zamknięty (ponieważ rozważamy rakietę w przestrzeni kosmicznej, na układ nie działają siły zewnętrzne). W efekcie pęd układu będzie zachowany i możemy skorzystać z zasady zachowania pędu (Rysunek 9.33).



Rysunek 9.33 Rakieta przyspiesza (w prawo) wyrzucając gazy z dyszy (w lewo). Zasada zachowania pędu pozwala na wyznaczenie prędkości rakiety po odrzucie. Masa m jest chwilową wartością sumy masy własnej rakiety i znajdującego się w niej paliwa. (Źródło: zmodyfikowany przez NASA/Bill Ingalls)

Ze względu na zależność masy i prędkości od czasu, należy operować wielkościami chwilowymi dla konkretnego momentu na osi czasu. Definiujemy więc prędkość chwilową $\vec{v} = v\hat{i}$ (w kierunku $+x$) mierzoną względem Ziemi. Pęd początkowy układu wyrażamy jako:

$$\vec{p}_{\text{przed}} = mv\hat{i}.$$

Silniki rakietowe spalają paliwo ze stałą szybkością i wyrzucają gazy w kierunku $-x$. W infinitezymalnym przedziale czasu $\mathrm{d}t$ masa wyrzuconego gazu wynosi $\mathrm{d}m_{\text{g}}$, a ich prędkość $\vec{u} = -u\hat{i}$. Zwróćmy uwagę, że o ile prędkość rakiety $v\hat{i}$ mierzona jest względem Ziemi, prędkość wyrzucanych gazów mierzona jest względem poruszającej się rakiety. Przekształcając ją w odniesieniu do układu związanego z Ziemią, uzyskamy $(v - u)\hat{i}$.

W następstwie wyrzucenia spalonych gazów masa rakiety zmalała o $\mathrm{d}m_{\text{g}}$, a jej prędkość wzrosła o $\mathrm{d}v\hat{i}$. Uwzględniając zmianę masy rakiety oraz wyrzuconych gazów, końcowy pęd układu obliczymy jako:

$$\vec{p}_{\text{po}} = \vec{p}_{\text{r}} + \vec{p}_{\text{g}} = \left(m - \mathrm{d}m_{\text{g}}\right)(v + \mathrm{d}v)\,\hat{i} + \mathrm{d}m_{\text{g}}\,(v - u)\,\hat{i}.$$

Ponieważ wszystkie wektory skierowane są wzdłuż osi x, możemy zrezygnować z notacji wektorowej. Stosując zasadę zachowania pędu, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} p_{\text{przed}} &= p_{\text{po}}, \\ mv &= \left(m - \mathrm{d}m_{\text{g}}\right)(v + \mathrm{d}v) + \mathrm{d}m_{\text{g}}(v - u), \\ mv &= mv + m\,\mathrm{d}v - \mathrm{d}m_{\text{g}}v - \mathrm{d}m_{\text{g}}\,\mathrm{d}v + \mathrm{d}m_{\text{g}}v - \mathrm{d}m_{\text{g}}u, \\ m\,\mathrm{d}v &= \mathrm{d}m_{\text{g}}\,\mathrm{d}v + \mathrm{d}m_{\text{g}}u. \end{aligned}$$

Ponieważ $\mathrm{d}m_{\text{g}}$ i $\mathrm{d}v$ są bardzo małe, ich iloczyn jest tym bardziej znikomy w porównaniu z pozostałymi wyrazami w równaniu. Pomijając go, otrzymamy:

$$m\mathrm{d}v = \mathrm{d}m_{\text{g}}u.$$

Zauważmy, że $\mathrm{d}m_{\text{g}}$ reprezentuje masę wyrzuconych gazów, ale liczbowo jest ona równa ubytkowi masy rakiety:

$$\mathrm{d}m_{\text{g}} = -\mathrm{d}m.$$

Po zastąpieniu $\mathrm{d}m_{\text{g}}$ w powyższym równaniu, uzyskamy:

$$m\mathrm{d}v = -\mathrm{d}mu,$$

czyli:

$$\mathrm{d}v = -\frac{\mathrm{d}m}{m}u.$$

Całkujemy obustronnie od masy m_0 do masy m rakiety:

$$\begin{aligned} \int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v &= -u \int_{m_0}^{m} \frac{\mathrm{d}m}{m}, \\ v - v_0 &= u \ln \frac{m_0}{m}. \end{aligned}$$

Odpowiedź na pytanie: „jak zmieni się prędkość rakiety?” brzmi więc następująco:

$$\Delta v = u \ln \frac{m_0}{m}. \tag{9.42}$$

To równanie znane jest pod nazwą **równania ruchu rakiety** (ang. **rocket equation**) lub **wzoru Ciołkowskiego** dla ruchu rakiety w próżni i przy braku grawitacji. Wzór ten, wyprowadzony przez rosyjskiego fizyka Konstantina Ciołkowskiego w roku 1897 wykazuje nieliniowy charakter zmian prędkości rakiety, której masa z paliwem wynosi m_0, a masa bez paliwa równa jest m.

Strategia rozwiązywania zadań: analiza zjawiska odrzutu

W typowych zagadnieniach opisujących ruch rakiety najczęściej poszukiwaną wielkością jest zmiana prędkości rakiety, wynikająca z faktu spalenia paliwa lub też związanego z tym przyspieszenia.

1. Do wyznaczenia zmiany prędkości skorzystaj z Równania 9.42 Ciołkowskiego.
2. Do wyznaczenia przyspieszenia określ siłę (na podstawie reguły pędu i popędu), a następnie zmianę prędkości (z równania Ciołkowskiego).

Przykład 9.20

Siła ciągu silników statku kosmicznego

Statek kosmiczny porusza się w przestrzeni kosmicznej po torze prostym, kiedy pilot postanawia przyspieszyć. Włącza w tym celu silniki, które wytwarzają strumień gazów o stałej szybkości wypływu masy równej $2 \cdot 10^2\ \mathrm{kg/s}$, przy ich prędkości względem rakiety $2{,}5 \cdot 10^2\ \mathrm{m/s}$. Początkowa masa statku z paliwem wynosi $2 \cdot 10^4\ \mathrm{kg}$, a czas pracy silników wynosił 30 s.

a. Jaka jest siła ciągu silników statku?
b. Wyznacz przyspieszenie statku w funkcji czasu.
c. Jaka była wartość przyspieszenia statku w chwilach $t = 0\ \mathrm{s}$, $t = 15\ \mathrm{s}$, $t = 30\ \mathrm{s}$, $t = 35\ \mathrm{s}$?

Strategia rozwiązania

a. Na podstawie reguły pędu i popędu stwierdzamy, że siła ciągu silników będzie równa szybkości zmiany pędu statku.
b. Znając siłę ciągu z podpunktu (a), skorzystamy z II zasady dynamiki Newtona do wyznaczenia przyspieszenia. Kluczowy jest tu fakt, że mimo stałej prędkości wyrzutu gazów z dyszy i stałej siły ciągu przyspieszenie rośnie, ponieważ maleje masa statku. Z tego powodu spodziewamy się zależności przyspieszenia od czasu.
c. Odpowiedź wyliczoną w podpunkcie (b) wykorzystamy do wyznaczenia wartości liczbowych dla podanych momentów na osi czasu. Pamiętamy, że przyspieszenie powinno rosnąć, ponieważ zmniejsza się masa statku wskutek zużywania paliwa.

Rozwiązanie

a. Pęd wyrzucanych gazów

$$p = m_g u.$$

Prędkość wyrzucanych gazów $u = 2{,}5 \cdot 10^2\ \mathrm{m/s}$ jest stała, zatem licząc pochodną po czasie otrzymamy siłę ciągu jako:

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = u\frac{\mathrm{d}m_g}{\mathrm{d}t}.$$

Zauważmy, że $\mathrm{d}m_g / \mathrm{d}t$ jest szybkością wypływu masy wyrzucanych gazów, która zgodnie z treścią zadania wynosi $2 \cdot 10^2\ \mathrm{kg/s}$. Po podstawieniu otrzymamy siłę ciągu silników:

$$F = u\frac{\mathrm{d}m_g}{\mathrm{d}t} = 2{,}5 \cdot 10\ \mathrm{m/s} \cdot 2{,}0 \cdot 10^2\ \mathrm{kg/s} = 5{,}0 \cdot 10^4\ \mathrm{N}.$$

b. Masa statku to suma jego masy własnej oraz paliwa, które w danej chwili ów statek posiada: $m = m_r + m_g$. Z II zasady dynamiki Newtona

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F}{m_r + m_g}.$$

Siła ciągu i masa własna pustej rakiety to wielkości stałe, natomiast masa paliwa jest funkcją zależną od czasu:

$$m_g = m_g(t) = m_g(0) - \frac{\mathrm{d}m_g}{\mathrm{d}t}t,$$

gdzie $m_g(0)$ oznacza masę paliwa w rakiecie w chwili początkowej.
Wobec tego:

$$a = \frac{F}{M - \frac{\mathrm{d}m_\mathrm{g}}{\mathrm{d}t}t},$$

gdzie $M = m_\mathrm{r} + m_\mathrm{g}(0) = 2 \cdot 10^4\ \mathrm{kg}$ jest masą rakiety wraz z paliwem w chwili $t = 0$. Z powyższego wzoru wynika jawnie zależność przyspieszenia od czasu, która będzie funkcją rosnącą. Po podstawieniu danych z zadania:

$$a = \frac{5{,}0 \cdot 10^4\ \mathrm{N}}{2{,}0 \cdot 10^4\ \mathrm{kg} - 2{,}0 \cdot 10^2\ \mathrm{kg/s} \cdot t}.$$

c. We wskazanych momentach:
gdy $t = 0\ \mathrm{s}$ (kiedy tylko pojawia się siła ciągu silników):

$$a(0\ \mathrm{s}) = \frac{5{,}0 \cdot 10^4\ \mathrm{N}}{2{,}0 \cdot 10^4\ \mathrm{kg} - 2{,}0 \cdot 10^2\ \mathrm{kg/s} \cdot 0\ \mathrm{s}} = 2{,}5\ \mathrm{m/s^2},$$

gdy $t = 15\ \mathrm{s}$, to $a(15\ \mathrm{s}) = 2{,}9\ \mathrm{m/s^2}$,
gdy $t = 30\ \mathrm{s}$, to $a(30\ \mathrm{s}) = 3{,}6\ \mathrm{m/s^2}$,
ale gdy $t = 35\ \mathrm{s}$, to $a(35\ \mathrm{s}) = 0\ \mathrm{m/s^2}$, ponieważ $F = 0$ (silniki zostały wyłączone).
W trakcie pracy silników, jak się spodziewaliśmy, przyspieszenie rosło.

Znaczenie

Zauważmy, że przyspieszenie nie jest stałe, co powoduje, że każda wielkość dynamiczna lub kinematyczna powinna być liczona z użyciem całki lub (w prostszym przypadku) z zasady zachowania energii całkowitej.



9.14 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Jaka jest fizyczna różnica (lub zależność) między $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ i $\mathrm{d}m_\mathrm{g}/\mathrm{d}t$ w powyższym przykładzie?

Rakieta w polu grawitacyjnym Ziemi

Przeanalizujmy teraz zmiany prędkości rakiety podczas fazy startu w polu grawitacyjnym Ziemi. Przyjmijmy, że w omawianym na tym etapie przedziale wysokości przyspieszenie grawitacyjne traktujemy jako stałe i wynoszące g.

Analiza przebiega podobnie jak w przypadku rakiety w przestrzeni kosmicznej, z tym że uwzględniamy obecność stałej siły skierowanej pionowo w dół $\vec{F} = -mg\hat{j}$, działającej na nasz układ. Siła ta wytwarza impuls $\mathrm{d}\vec{J} = \vec{F}\mathrm{d}t = -mg\mathrm{d}t\hat{j}$, który jest równy zmianie pędu:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{p} &= \mathrm{d}\vec{J}, \\ \vec{p}_\mathrm{po} - \vec{p}_\mathrm{przed} &= -mg\mathrm{d}t\hat{j}, \\ \left[\left(m - \mathrm{d}m_\mathrm{g}\right)(v + \mathrm{d}v) + \mathrm{d}m_\mathrm{g}(v - u) - mv\right]\hat{j} &= -mg\mathrm{d}t\hat{j}. \end{aligned}$$

A zatem

$$m\mathrm{d}v - \mathrm{d}m_\mathrm{g}u = -mg\mathrm{d}t,$$

gdzie, podobnie jak poprzednio, pominęliśmy człon $\mathrm{d}m_\mathrm{g}\mathrm{d}v$ oraz zrezygnowaliśmy z zapisu wektorowego. Możemy także zamienić $\mathrm{d}m_\mathrm{g}$ symbolem $-\mathrm{d}m$:

$$\begin{aligned} m\mathrm{d}v + \mathrm{d}mu &= -mg\mathrm{d}t, \\ m\mathrm{d}v &= -\mathrm{d}mu - mg\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Po podzieleniu przez m otrzymujemy

$$\mathrm{d}v = -\frac{\mathrm{d}m}{m}u - g\mathrm{d}t,$$

a po scałkowaniu:

$$\Delta v = u \ln \frac{m_0}{m} - g\Delta t, \tag{9.43}$$

przy czym Δt oznacza czas trwania procesu spalania paliwa. Nikogo chyba nie dziwi, że ze względu na przyciąganie ziemskie zmiana prędkości rakiety będzie teraz mniejsza. Przy braku grawitacji nie miało znaczenia, ile czasu trwało zużycie całego paliwa – maksymalna zmiana prędkości nie była od tego zależna. W obecności siły grawitacji jednak okazuje się to istotne. Czynnik $-g\Delta t$ w Równaniu 9.43 mówi nam, że im dłużej będzie trwało spalanie całego paliwa, tym mniejszą zmianę prędkości uzyskamy. Z tego powodu przy starcie rakiety moment jej poderwania jest zawsze tak spektakularnym widowiskiem. Ważne jest bowiem spalenie dużej ilości paliwa (i wypuszczenie ogromnej ilości gazów) w jak najkrótszym czasie – tak aby uzyskać możliwie największe Δv.

PODSUMOWANIE ROZDZIAŁU 9

KLUCZOWE POJĘCIA

eksplozja (ang. explosion) pojedynczy obiekt rozpada się na dwa lub więcej fragmentów. Energia kinetyczna nie jest zachowana, ale pęd – tak

liniowa gęstość masy (ang. linear mass density) λ, wyrażona jako liczba kilogramów przypadająca na jednostkę długości ciała

popęd siły (impuls) (ang. impulse) efekt działania siły przez określony przedział czasu. Może on być bardzo mały, np. podczas zderzenia, ale może też być dowolnie długi

pęd (ang. momentum) miara „ilości ruchu” ciała, wektor iloczynu masy i prędkości ciała, zorientowany tak samo, jak prędkość ciała

reguła pędu i popędu (ang. impulse-momentum theorem) zmiana pędu układu jest równa popędowi siły, udzielonemu temu układowi

równanie ruchu rakiety (wzór Ciołkowskiego) (ang. rocket equation) wyprowadzone przez rosyjskiego fizyka Konstantina Ciołkowskiego w roku 1897, opisuje zmianę prędkości rakiety wynikającą z odrzutu spalanych gazów, co powoduje systematyczne zmniejszanie się masy rakiety z początkowej (masa własna rakiety plus masa paliwa) do końcowej (docelowo: masa własna rakiety)

siła wewnętrzna (ang. internal force) siła, którą wywierają na siebie wzajemnie elementy układu. Siły wewnętrzne mogą być zarówno przyciągające jak i odpychające

siła zewnętrzna (ang. external force) siła przyłożona do obiektu fizycznego powodująca zmianę jego pędu jako całości

układ (ang. system) ciało lub zbiór ciał, których ruch podlega analizie; układ zdefiniowany na początku analizy problemu musi być traktowany konsekwentnie w dalszym ciągu rozważań

układ zamknięty (izolowany) (ang. closed system) układ obejmujący jedno lub więcej ciał, w którym łączna masa obiektów nie ulega zmianie oraz wypadkowa sił zewnętrznych nań działających wynosi zero

zasada zachowania pędu (ang. Law of Conservation of Momentum) całkowity pęd układu zamkniętego nie może ulec zmianie

zderzenie idealnie niesprężyste (ang. perfectly inelastic collision) zderzenie, po którym ciała pozostają w spoczynku, a końcowa energia kinetyczna wynosi zero (strata energii jest maksymalna)

zderzenie niesprężyste (ang. inelastic collision) zderzenie, w którym nie jest spełniona zasada zachowania energii mechanicznej

zderzenie sprężyste (ang. elastic collision) zderzenie, w którym spełniona jest zasada zachowania energii mechanicznej. W przypadku ruchu po płaskim torze oznacza to zachowanie energii kinetycznej

środek masy (ang. center of mass) punkt o współrzędnych, będących średnimi ważonymi położeń poszczególnych elementów ciała lub układu ciał

NAJWAŻNIEJSZE WZORY

Definicja pędu	$\vec{p} = m\vec{v}$
Popęd siły (impuls)	$\vec{J} \equiv \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t)\mathrm{d}t$ lub $\vec{J} = \vec{F}_{\text{śr}}\Delta t$
Reguła pędu i popędu	$\vec{J} = \Delta\vec{p}$
Zależność zmiany pędu od siły średniej	$\vec{F}_{\text{śr}} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$
Zależność pędu od siły (II prawo Newtona)	$\vec{F}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$
Zasada zachowania pędu	$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t} = 0$ lub $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const}$

Uogólniona zasada zachowania pędu	$\sum_{j=1}^{N} \vec{p}_j = \text{const}$
Zasada zachowania pędu w dwóch wymiarach	$p_{x\ \text{sum po}} = p_{x1\ \text{przed}} + p_{x2\ \text{przed}}$ $p_{y\ \text{sum po}} = p_{y1\ \text{przed}} + p_{y2\ \text{przed}}$
Siły zewnętrzne	$\vec{F}_z = \sum_{j=1}^{N} \frac{d\vec{p}_j}{dt}$
II zasada dynamiki dla obiektów fizycznych (rozciągłych)	$\vec{F}_z = \frac{d\vec{p}_{ŚM}}{dt}$
Przyspieszenie środka masy	$\vec{a} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r}_j\right) = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{a}_j$
Położenie środka masy układu cząstek	$\vec{r}_{ŚM} \equiv \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r}_j$
Prędkość środka masy	$\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r}_j\right) = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{v}_j$
Położenie środka masy ciała o rozkładzie ciągłym	$\vec{r}_{ŚM} \equiv \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm$
Równanie ruchu rakiety (wzór Ciołkowskiego) – bez grawitacji	$\Delta v = u \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$

PODSUMOWANIE

9.1 Pęd

- Ruch ciała zależy od jego masy i prędkości. Pęd jest wielkością fizyczną służącą do opisu ruchu – bardzo użyteczną zarówno w obliczeniach, jak i rozważaniach teoretycznych. Pęd jest iloczynem masy i prędkości ciała. Jednostką pędu w układzie SI jest kg·m/s.

9.2 Popęd siły i zderzenia

- Jeżeli przez pewien przedział czasu na ciało działa siła, to ciało to doznaje zmiany pędu (impulsu) lub, innymi słowy, udzielony mu zostaje popęd siły.
- Impuls ten jest równy zmianie pędu ciała.
- Zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona wypadkowa sił zewnętrznych działających na dany układ jest równa szybkości zmiany pędu, który wywołała.

9.3 Zasada zachowania pędu

- Zgodnie z prawem zachowania pędu pęd układu zamkniętego jest stały w czasie (jest zachowany).
- Układ zamknięty (izolowany) to taki układ, w którym suma mas jego elementów jest stała, a wypadkowa sił zewnętrznych nań działających wynosi zero.
- Całkowity pęd układu jest zachowany *tylko* wtedy, gdy jest on zamknięty.

9.4 Rodzaje zderzeń

- Zderzenie sprężyste to takie, w którym zachowana zostaje energia kinetyczna.
- W zderzeniu niesprężystym energia kinetyczna nie jest zachowana.
- Całkowity pęd układu zamkniętego jest zachowany zarówno w zderzeniu sprężystym jak i niesprężystym, czyli niezależnie od zachowania energii kinetycznej.
- Analiza zmian energii kinetycznej i zachowania pędu pozwala na wyznaczenie końcowych prędkości (przy użyciu prędkości początkowych i mas) w zderzeniach jedno- i dwuwymiarowych.

9.5 Zderzenia w wielu wymiarach

- Do przeprowadzenia analizy zderzeń w dwóch wymiarach należy odpowiednio obrać układ współrzędnych i przedstawić ruch ciał za pomocą składowych wzdłuż obranych osi tegoż układu.
- Jeżeli pęd jest zachowany, to zachowany jest wzdłuż każdej osi, równocześnie i niezależnie.
- Twierdzenie Pitagorasa umożliwia wyznaczenie wartości wektora pędu dla każdej osi z jego składowych, wyznaczonych na podstawie zasady zachowania pędu.

9.6 Środek masy

- Dla obiektów lub układów o rozkładzie przestrzennym, składających się z wielu elementów, definiuje się wektor nazywany wektorem położenia środka masy.
- Środek masy jest punktem, który reprezentuje średnie położenie ciała lub układu.
- Położenie środka masy ciała poruszającego się pod wpływem sił zewnętrznych wyznacza trajektorię zgodną z II zasadą dynamiki Newtona, niezależnie od rozkładu masy ciała wokół tego punktu.
- Siły wewnętrzne w ciele lub układzie ciał nie mogą zaburzyć pędu tego ciała lub układu jako całości.

9.7 Napęd rakietowy

- Napęd rakietowy jest przykładem zasady zachowania pędu w układzie, w którym masa ulega zmianom w sposób ciągły, w efekcie spalania paliwa i wyrzucania gazów przez silniki rakiety.
- Równanie ruchu rakiety znane też jako równanie Ciołkowskiego przedstawia zmianę prędkości rakiety wskutek spalania paliwa i zmniejszania się masy rakiety.

PYTANIA

9.1 Pęd

1. Dwa ciała – lżejsze i cięższe – posiadają taki sam pęd. Które z nich ma większą energię kinetyczną?

2. Jaka będzie odpowiedź, gdy ciało lżejsze i cięższe mają taką samą energię kinetyczną? Które z nich ma większy pęd?

9.2 Popęd siły i zderzenia

3. Czy możliwe jest, aby małą siłą wywołać znaczniejszą zmianę pędu danego ciała niż siłą większą? Odpowiedź uzasadnij.

4. Dlaczego upadek z wysokości 10 metrów na beton jest dużo bardziej niebezpieczny niż upadek do wody?

5. Jaka siła zewnętrzna jest odpowiedzialna za zmianę pędu samochodu jadącego po płaskiej drodze?

6. Kulkę z plasteliny oraz piłeczkę tenisową o takiej samej masie rzucono w kierunku ściany z takimi samymi prędkościami. Czy któreś ciało doświadczy większej zmiany pędu na skutek zderzenia, czy też impuls będzie w obu przypadkach jednakowy? Odpowiedź uzasadnij.

9.3 Zasada zachowania pędu

7. Kiedy pęd układu jest zachowany?

8. Czy pęd układu może być zachowany, jeżeli działają na niego siły zewnętrzne? Jeśli tak – pod jakimi warunkami? Jeśli nie – dlaczego?

9. Wyjaśnij w kontekście pojęcia pędu i zasad Newtona, jak obecność oporu powietrza podczas ruchu samochodu przyczynia się do rozpędzania cząsteczek powietrza w kierunku jego ruchu.

10. Czy element układu może posiadać pęd, podczas gdy pęd układu jako całości jest równy zeru? Odpowiedź uzasadnij.

11. Czy sprinter przyspieszający bezpośrednio po starcie z bloków startowych może być traktowany jako układ zamknięty? Odpowiedź uzasadnij.

12. Rakieta w przestrzeni kosmicznej, w której nie występuje grawitacja – przyspiesza poprzez wyrzucanie gorącego gazu z dyszy silników. Czy można ją traktować jako układ zamknięty? Odpowiedź uzasadnij.

9.4 Rodzaje zderzeń

13. Dwa ciała o jednakowych masach poruszają się z jednakowymi prędkościami, zwróconymi naprzeciw siebie (zderzenie czołowe). Czy w tym zderzeniu może być stracona cała energia kinetyczna?

14. Opisz układ, w którym pęd jest zachowany, a energia mechaniczna nie. A następnie odwrotnie – opisz układ, w którym zachowana jest energia kinetyczna, a

pęd nie.

9.5 Zderzenia w wielu wymiarach

15. Pęd jest zachowany wzdłuż jednego kierunku, ale nie jest zachowany dla innego. Co możesz powiedzieć o kącie między tymi kierunkami? Podaj przykład.

9.6 Środek masy

16. Załóżmy, że petarda eksploduje, rozpadając się na trzy duże fragmenty, dla których opór powietrza jest zaniedbywalnie mały. Jak wybuch zaburzy ruch środka masy petardy? Jak wyglądałoby zaburzenie, gdyby rozpadające się odłamki doznawały większej siły oporów powietrza niż sama petarda przed wybuchem?

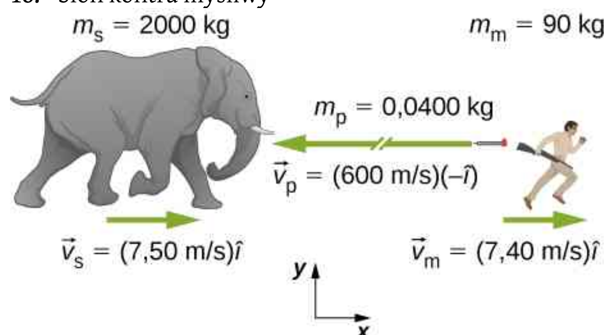
9.7 Napęd rakietowy

17. Możliwa jest sytuacja, kiedy prędkość rakiety jest większa od prędkości wyrzucanych gazów. Gdy ma to miejsce, prędkość i pęd gazów skierowane są w tę samą stronę co rakieta. Jak to się dzieje, że rakieta wciąż uzyskuje napęd z takiego spalania?

ZADANIA

9.1 Pęd

18. Słoń kontra myśliwy

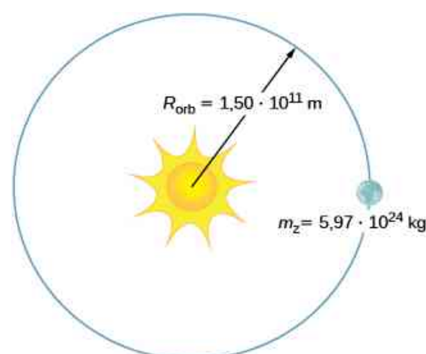


a. Oblicz pęd słonia o masie 2 ton pędzącego w kierunku myśliwego z prędkością $v_s = 7{,}5\ \mathrm{m/s}$.
b. Oblicz stosunek pędu słonia do pędu lotki ze środkiem usypiającym, jeżeli masa tejże lotki wynosi $m_p = 0{,}04\ \mathrm{kg}$, a prędkość $v_p = 600\ \mathrm{m/s}$.
c. Jaki jest pęd myśliwego o masie 90 kg biegnącego z prędkością $7{,}4\ \mathrm{m/s}$?

19. Łyżwiarka o masie 40 kg porusza się bez tarcia z prędkością 5 m/s względem ziemi, trzymając w rękach pudełko o masie 5 kg.
a. Wyznacz pęd pudełka względem ziemi.
b. Wyznacz pęd pudełka względem ziemi, gdy łyżwiarka położy je w czasie jazdy na gładkim lodzie.

20. Samochód o masie 2000 kg jedzie na wschód ze stałą prędkością 10 m/s. Jaki jest pęd samochodu?

21. Masa Ziemi wynosi $5{,}97 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$, a średni promień orbity wokół Słońca jest równy $1{,}5 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m}$. Oblicz średni pęd Ziemi.



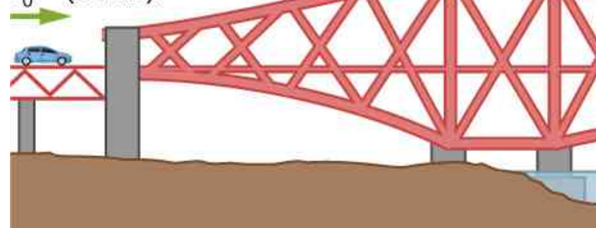
22. Ilość opadów podczas ulewnego deszczu w ciągu 1 godziny na powierzchnię $10\ \mathrm{km}^2$ wynosiła 1 cm. Jaki pęd można przypisać masie deszczu, który spadł w ciągu jednej sekundy tej ulewy? Przyjmij wartość końcową prędkości kropli deszczu jako 10 m/s.

23. Jaka jest średnia wartość pędu lawiny niosącej warstwę śniegu o grubości 40 cm z powierzchni $100\ \mathrm{m} \times 500\ \mathrm{m}$, na odległość równą 1 km, w czasie 5,5 s? Przyjmij gęstość masy śniegowej równą $350\ \mathrm{kg/m^3}$.

24. Jaka jest średnia wartość pędu sprintera o masie 70 kg, który przebiegł dystans 100 m w czasie 9,65 s?

9.2 Popęd siły i zderzenia

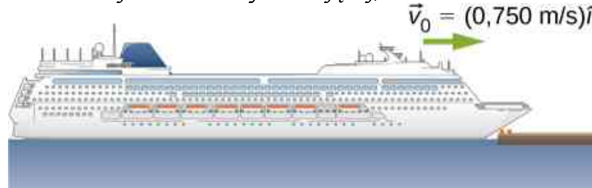
25. Człowiek o masie 75 kg jadący samochodem z prędkością 20 m/s wjeżdża w przyczółek mostu (rysunek).



a. Oblicz średnią siłę działającą na człowieka, kiedy uderza on w deskę rozdzielczą, która ulega wgnieceniu na głębokość 1 cm.
b. Oblicz średnią siłę działającą na człowieka, kiedy uderza w poduszkę powietrzną, która ulega wgnieceniu na głębokość 15 cm.

26. Z podróżami w przestrzeń kosmiczną wiąże się wielkie ryzyko zderzenia z tzw. śmieciami kosmicznymi, czyli odpadkami dawnych obiektów wprowadzonych na orbitę. Szacuje się, że kilka tysięcy takich śmieci jest na tyle dużych, by mógł wykryć je radar, natomiast olbrzymią część stanowią bardzo małe obiekty, takich jak np. lecące z ogromną prędkością płatki farby. Jaką siłę wywiera taki płatek o masie 0,1 mg, gdy uderza w okno rakiety ze względną prędkością 4 km/s? Przyjmij, że zderzenie trwa 60 ns.

27. Wycieczkowiec o masie 10^7 kg uderza w molo z prędkością 0,750 m/s i zatrzymuje się po przebyciu drogi równej 6 m (rujnując statek, molo i stan portfela kapitana holownika, odpowiedzialnego za pilotowanie do portu). Korzystając z reguły pędu i popędu oblicz średnią siłę uderzenia w molo. (*Wskazówka:* oblicz najpierw czas potrzebny do zatrzymania statku przy założeniu stałej wartości siły hamującej).



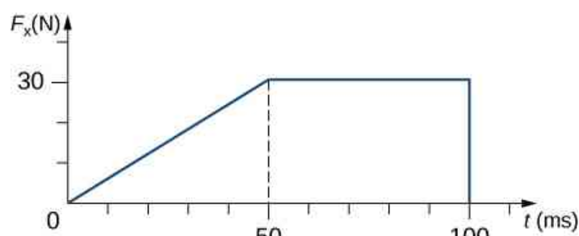
28. Oblicz końcową prędkość zawodnika rugby ważącego 110 kg, który biegnąc z prędkością początkową równą 8,0 m/s, zderza się czołowo ze słupkiem bramki i doznaje działania siły hamującej o wartości $1{,}76 \cdot 10^4$ N w czasie 55 ms.

29. Strumień wody o natężeniu 50 kg/s, wydostający się z prędkością 42 m/s ze skierowanego poziomo węża strażackiego, skierowano na pionową ścianę. Oblicz siłę wywieraną na ścianę, zakładając, że wskutek zderzenia składowa pozioma pędu zostaje zredukowana do zera.

30. Młotek o masie 0,45 kg uderza w gwóźdź z prędkością 7 m/s, skierowaną poziomo. Młotek wytraca prędkość do zera, a gwóźdź zostaje wbity w deskę na głębokość 1 cm. Przyjmując, że przyspieszenie układu młotek-gwóźdź jest stałe:
a. Oblicz czas trwania zderzenia.
b. Oblicz średnią siłę działającą na gwóźdź.

31. Jaki jest pęd (wyrażony jako funkcja czasu) ciała o masie 5 kg, poruszającego się z prędkością $\vec{v}(t) = \left(2 \cdot \hat{i} + 4t \cdot \hat{j}\right)$ m/s? Jaka siła wypadkowa działa na to ciało?

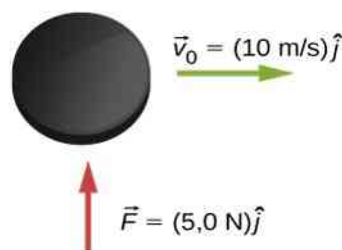
32. Na rysunku przedstawiono zależność od czasu składowej poziomej siły działającej na piłkę golfową o masie 46 g.



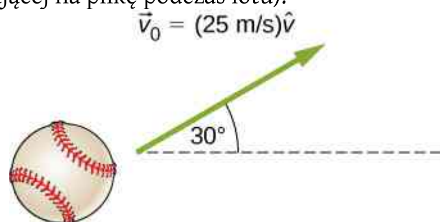
a. Wyznacz składową x popędu siły dla przedziałów czasu:
i. $\langle 0 \text{ ms},\ 50 \text{ ms}\rangle$,
ii. $\langle 50 \text{ ms},\ 100 \text{ ms}\rangle$.

b. Wyznacz składową x zmiany pędu piłki dla przedziałów czasu:
iii. $\langle 0 \text{ ms},\ 50 \text{ ms}\rangle$,
iv. $\langle 50 \text{ ms},\ 100 \text{ ms}\rangle$.

33. Krążek hokejowy o masie 150 g ślizga się bez tarcia po płaskim stole w kierunku $+x$ z prędkością 10 m/s. Nagle, w ciągu 1,5 s, uderzono w niego siłą o wartości 5 N skierowaną prostopadle do kierunku ruchu (wzdłuż stołu - kierunek $+y$). Znajdź składowe oraz zmianę pędu tuż po uderzeniu.

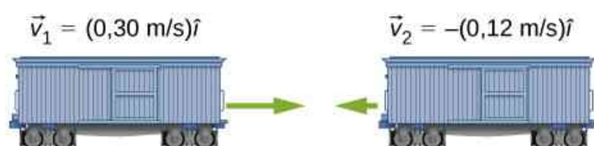


34. Piłka o masie 250 g została rzucona z prędkością początkową 25 m/s pod kątem 30° do poziomu. Pomijając opory ruchu, wyznacz pęd piłki po czasie równym 0,2 s. (Wskazówka: znajdź najpierw składowe pędu i przeanalizuj ich zachowanie w obecności siły ciężkości działającej na piłkę podczas lotu).



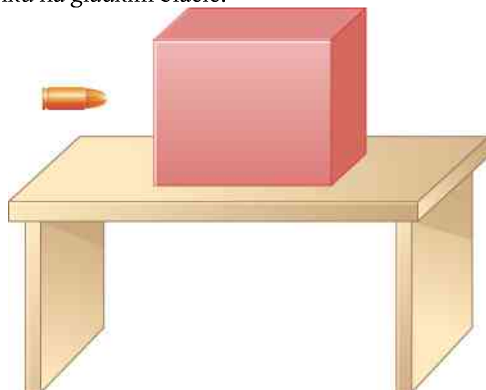
9.3 Zasada zachowania pędu

35. Łączenie wagonów kolejowych w skład pociągu polega na ich kontrolowanym zderzaniu na wspólnym torze. Dwa wagony, pierwszy o masie $1{,}5 \cdot 10^5$ kg i prędkości $\vec{v}_1 = 0{,}3 \text{ m/s} \cdot \hat{i}$, oraz drugi o masie $1{,}1 \cdot 10^5$ kg i prędkości $\vec{v}_2 = -0{,}12 \text{ m/s} \cdot \hat{i}$ – złączono ze sobą. Wyznacz prędkość wagonów po złączeniu.



36. Dwa jednakowe krążki hokejowe zderzają się sprężyście na lodowisku. Krążek pierwszy jest początkowo w spoczynku, a krążek drugi posiada prędkość początkową 6 m/s skierowaną w lewo. Po zderzeniu krążek niebieski zmienia kierunek ruchu i oddala się pod kątem $30°$ względem pierwotnego kierunku ruchu. Jaka jest prędkość krążka pierwszego po zderzeniu?

37. Poniższy rysunek przedstawia pocisk o masie 200 g lecący poziomo z prędkością 400 m/s i wbijający się w blok o masie 1,5 kg, pozostający początkowo w spoczynku na gładkim blacie.



Po uderzeniu w blok pocisk utkwił w nim i wraz z blokiem przemieszczał się po blacie.
a. Jaka jest wartość i kierunek prędkości układu „blok plus pocisk" po zderzeniu?
b. Jaka jest wartość i kierunek wektora impulsu, który blok wywiera na pocisk?
c. Jaka jest wartość i kierunek wektora impulsu, jaki pocisk wywiera na blok?
d. Jeżeli na zmianę prędkości pocisku z 400 m/s do końcowej prędkości wspólnego ruchu potrzeba 3 ms – jaka jest średnia wartość siły wzajemnego oddziaływania pocisku i bloku?

38. Dziecko o masie 20 kg, jadące w wagoniku o masie 4,0 kg z prędkością 3,3 m/s, wyrzuca za siebie piłkę o masie 1,0 kg. Jaka będzie prędkość dziecka i wagonika po wyrzuceniu piłki?

39. Maszyna do kładzenia nawierzchni drogowej o masie własnej 4 ton załadowana jest żwirem o masie 1000 kg i porusza się z prędkością 2,5 m/s wyrzucając ładunek z prędkością 0,5 m/s. Jaka będzie prędkość maszyny, gdy zrzuci ona nagle ładunek na naprawianą drogę?

40. Wyjaśnij zjawisko odrzutu armaty po wystrzeleniu kuli armatniej.

41. Para łyżwiarska jedzie w tym samym kierunku, przy czym łyżwiarka jedzie z przodu partnera z prędkością 5,5 m/s, a łyżwiarz za nią z prędkością 6,2 m/s. Gdy łyżwiarz dogania łyżwiarkę, podnosi ją, działając wyłącznie siłą skierowaną pionowo. Przyjmując, że jest on o połowę cięższy od partnerki (ważącej 50 kg), oblicz ich wspólną prędkość.

42. Dwutonowy wagon towarowy przejeżdża z prędkością 4,4 m/s pod pasem transmisyjnym, wsypującym ziarno bezpośrednio do wagonu. Jaką maksymalną masę ładunku można załadować do wagonu, aby prędkość jego ruchu nie spadła poniżej 3 m/s?

9.4 Rodzaje zderzeń

43. Kula do kręgli o masie 5,5 kg toczy się z prędkością 9 m/s i uderza w kręgiel o masie 0,85 kg. Kręgiel odskakuje pod pewnym kątem względem kierunku początkowego kuli z prędkością 15 m/s.
a. Oblicz wartość i kierunek prędkości kuli po zderzeniu.
b. Czy zderzenie było sprężyste?

44. Ernest Rutherford (pierwszy Nowozelandczyk uhonorowany nagrodą Nobla w dziedzinie chemii) wykazał w swoim eksperymencie rozpraszania cząstek alfa (He-4) na folii złota (Au-197), że jądro atomowe jest obiektem o bardzo dużej gęstości i rozmiarach ok. 100 tysięcy razy mniejszych niż sam atom. Energia nadlatującej cząstki alfa wynosi $8{,}00 \cdot 10^{-13}$ J, masy jądra helu i złota wynoszą odpowiednio $6{,}68 \cdot 10^{-27}$ kg i $3{,}29 \cdot 10^{-25}$ kg (zwróć uwagę, że ich stosunek jest jak 4 do 197).

a. Jeżeli jądro helu rozprasza się pod kątem $120°$ w zderzeniu sprężystym z jądrem złota, oblicz wartość i kierunek końcowej prędkości jądra złota.



b. Jaka jest końcowa energia jądra helu?

45. Hokeista o masie 90 kg uderza w krążek o masie 0,15 kg, nadając mu prędkość 45 m/s. Jeżeli hokeista i krążek znajdują się początkowo w spoczynku na idealnie gładkim lodzie, jak daleko przesunie się hokeista na skutek odrzutu, w czasie gdy krążek dolatuje do bramki znajdującej się w odległości 15 m od miejsca uderzenia?

46. Petarda o masie 100 g, wystrzelona pionowo do góry, w najwyższym punkcie lotu rozdziela się na dwie części. Jaka jest prędkość (wartość i kierunek) drugiego fragmentu petardy, jeżeli jeden fragment o masie 72 g został odstrzelony poziomo w lewo z prędkością 20 m/s?

47. W zderzeniu sprężystym samochodzik elektryczny w wesołym miasteczku uderza od tyłu w jadący w tym samym kierunku inny samochodzik. Masy obu autek

wynoszą 400 kg, prędkość uderzonego samochodziku wynosi 5,6 m/s, a prędkość samochodziku uderzającego 6 m/s. Zakładając, że masy kierujących są dużo mniejsze niż masy pojazdów, oblicz ich prędkości po zderzeniu.

48. Wykonaj obliczenia i odpowiedz na pytania z poprzedniego zadania, jeśli masa auta uderzonego jest o 30% większa niż uderzającego.

49. Cząstka alfa (He-4) zderza się sprężyście ze spoczywającym jądrem uranu U-235. Jaki procent energii kinetycznej cząstki alfa zostanie przekazany jądru ciężkiemu? Zagadnienie traktujemy jako jednowymiarowe.

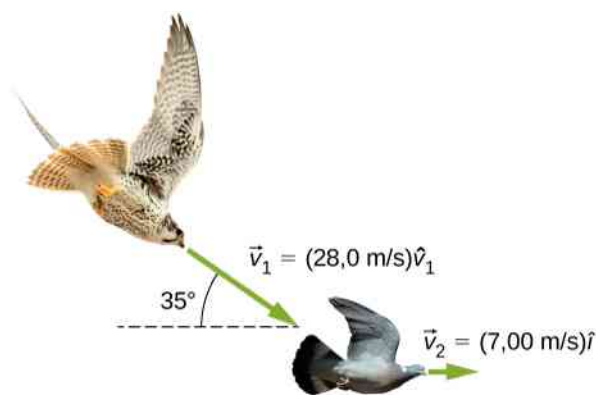
50. Wyobraź sobie, że stoisz na bardzo śliskim podłożu i wyrzucasz przed siebie piłkę o masie 1 kg poziomo z prędkością 6,7 m/s. Jaka będzie twoja prędkość po wyrzuceniu piłki (przyjmij swoją masę rzeczywistą lub średnią masę studenta równą 65 kg)?

51. Dziecko o masie 35 kg zjeżdża z górki na sankach, a następnie po płaskim torze, gdy na sanki wskakuje drugie dziecko o takiej samej masie. Jeżeli prędkość sanek z jednym dzieckiem wynosiła 3,5 m/s, jaka jest prędkość sanek z dwójką dzieci?

52. Chłopiec zjeżdża na sankach ze wzniesienia, a następnie wjeżdża na zmrożoną taflę jeziora. Na środku jeziora znajduje się zaspa śniegu o masie 1 tony, którą pędzący na sankach chłopiec przebija i porusza się dalej. Wiedząc, że prędkość chłopca przed zderzeniem wynosiła 10 m/s, jego masa jest równa 40 kg, a masa sanek 2,5 kg, oblicz prędkość chłopca z sankami oraz zaspy po zderzeniu.

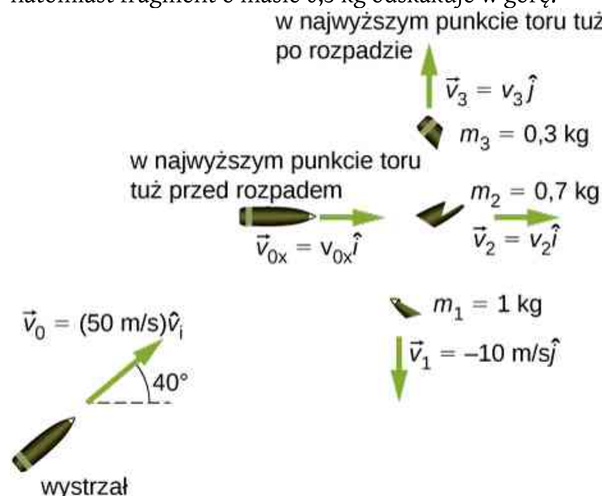
9.5 Zderzenia w wielu wymiarach

53. Jastrząb o masie 1,80 kg nurkuje w powietrzu pod kątem 35° do poziomu w kierunku lecącego poziomo gołębia o masie 0,65 kg i chwyta go w locie. Jaka będzie wartość i kierunek ich wspólnej prędkości, jeżeli prędkość gołębia wynosiła 7 m/s, a prędkość jastrzębia 28 m/s? Źródło ilustracji: “hawk”: zmodyfikowano przez: “USFWS Mountain-Prairie”/Flickr; Źródło:“dove”: zmodyfikowano przez: Jacob Spinks.



54. Kula bilardowa oznaczona numerem 1, poruszająca się w kierunku poziomym uderza w kulę o takiej samej masie, oznaczoną numerem 2, pozostającą w stanie spoczynku. Prędkość kuli 1 przed zderzeniem wynosi 3,00 m/s, a po zderzeniu 0,50 m/s i skierowana jest pod kątem 50° względem pierwotnego kierunku ruchu. Przyjmując, że każda z kul ma masę równą 300 g, ustal jaka będzie prędkość kuli 2 po zderzeniu.

55. Pocisk o masie 2 kg wystrzelono w powietrze pod kątem 40° do poziomu z prędkością 50 m/s. W najwyższym punkcie lotu pocisk rozrywa się na trzy części o masach 1 kg, 0,7 kg i 0,3 kg. Odłamek o masie 1 kg bezpośrednio po rozpadzie spada pionowo w dół z prędkością 10 m/s, fragment o masie 0,7 kg kontynuuje lot poziomy, natomiast fragment o masie 0,3 kg odskakuje w górę.



a. Wyznacz prędkości odłamków o masach 0,3 kg i 0,7 kg bezpośrednio po rozpadzie.
b. Jak wysoko od miejsca rozpadu doleci najlżejszy odłamek?
c. Jak daleko od miejsca wystrzału doleci odłamek o masie 0,7 kg?

56. Dwie asteroidy zderzają się i spajają na skutek zderzenia. Pierwsza miała masę 15 ton i prędkość 770 m/s, a druga – 20 ton i 1020 m/s. Kierunki ich prędkości tworzyły kąt 20°. Jaka będzie ich wspólna prędkość po zderzeniu względem prędkości początkowej pierwszej asteroidy?

57. Rakieta kosmiczna o masie 200 kg leci z prędkością $121\ \text{m/s} \cdot \hat{i} + 38{,}0\ \text{m/s} \cdot \hat{j}$. Nagle rozpada się na trzy elementy, z których pierwszy (78 kg) leci z prędkością $-321\ \text{m/s} \cdot \hat{i} + 228\ \text{m/s} \cdot \hat{j}$, a drugi (56 kg) z prędkością $16{,}0\ \text{m/s} \cdot \hat{i} - 88{,}0\ \text{m/s} \cdot \hat{j}$. Oblicz prędkość trzeciego elementu.

58. Proton lecący z prędkością $3 \cdot 10^6\ \text{m/s}$ rozprasza się sprężyście na spoczywającej cząstce alfa, tak że tor jego ruchu ulega odchyleniu o 85° względem pierwotnego biegu. Przyjmując, że masa cząstki alfa jest 4 razy większa od masy protonu, oblicz, jaki procent energii kinetycznej zachowa proton po zderzeniu.

59. Trzy renifery o masie 70 kg każdy stoją na wielkiej

krze unoszącej się na powierzchni spokojnego jeziora. Pod wpływem huku wystrzału rozbiegają się z prędkościami:

A: $15\,\mathrm{m/s} \cdot \hat{i} + 5\,\mathrm{m/s} \cdot \hat{j}$;

B: $-12\,\mathrm{m/s} \cdot \hat{i} + 8\,\mathrm{m/s} \cdot \hat{j}$;

C: $1{,}2\,\mathrm{m/s} \cdot \hat{i} - 18\,\mathrm{m/s} \cdot \hat{j}$.

Z jaką prędkością porusza się kra?

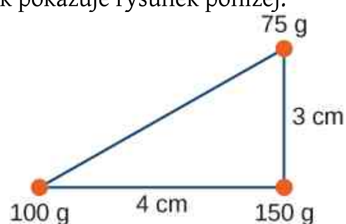
60. Rodzina wybrała się na lodowisko. Tata (o masie 75 kg) jedzie z prędkością 8,2 m/s, dogania i chwyta mamę o masie 50 kg, jadącą początkowo z prędkością 3,3 m/s pod kątem 45° względem prędkości taty. Następnie oboje chwytają stojącą spokojnie córkę o masie 30 kg i poruszają się razem. Jaka jest ich wspólna prędkość?

61. Atom tlenu o masie 16 u porusza się z prędkością 733 m/s pod kątem 15° względem osi x i zderza się niesprężyście z cząsteczką tlenu o masie 32 u, poruszającą się z prędkością 528 m/s pod kątem 128° do osi x. Po ich złączeniu się powstaje cząsteczka ozonu. Jaka będzie jej prędkość?

62. Dwa samochody dojeżdżają do oblodzonego skrzyżowania dwóch prostopadłych ulic. Samochód A jedzie na północ z prędkością 30 m/s, a samochód B na wschód. Na skrzyżowaniu dochodzi do ich zderzenia i złączenia, wskutek czego poruszają się one razem wzdłuż azymutu 28°. Jaka była prędkość samochodu B?

9.6 Środek masy

63. Trzy masy punktowe umieszczono w wierzchołkach trójkąta, jak pokazuje rysunek poniżej.



Wyznacz położenie środka masy układu.

64. Dwie cząstki o masach m_1 i m_2, znajdujące się początkowo w odległości poziomej D od siebie, upuszczono z wysokości h w tym samym czasie. Wyznacz pionową współrzędną środka masy dwóch spadających cząstek, zanim jeszcze uderzą w ziemię. Załóż, że nie ma oporu powietrza.

65. Dwie cząstki o masach m_1 i m_2, znajdujące się początkowo w odległości poziomej D od siebie, upuszczono z wysokości h w ziemskim polu grawitacyjnym: cząstkę 1 w chwili $t = 0$, a cząstkę drugą w chwili $t = T$. Wyznacz pionową współrzędną środka masy układu w chwili, gdy pierwsza cząstka dotknie powierzchni ziemi. Opory ruchu pomijamy.

66. Dwie cząstki o masach m_1 i m_2 poruszają się jednostajnie po okręgach o promieniach R_1 i R_2, wokół środka układu współrzędnych x, y. Współrzędne środka masy oraz współrzędne pierwszej cząstki zmieniają się w czasie zgodnie z równaniami, w których długość podano w metrach, a czas w sekundach:

$x_1(t) = 4\cos(2t)$, $y_1(t) = 4\sin(2t)$;

$x_{ŚM}(t) = 3\cos(2t)$, $y_{ŚM}(t) = 3\sin(2t)$.

a. Jaki jest promień okręgu pierwszej cząstki?

b. Jakie są współrzędne x i y cząstki drugiej oraz promień jej okręgu?

67. Dwie cząstki o masach m_1 i m_2 poruszają się jednostajnie po okręgach o promieniach R_1 i R_2, wokół środka układu współrzędnych x, y. Współrzędne obu cząstek zmieniają się w czasie zgodnie z równaniami, w których długość podano w metrach, a czas w sekundach (współrzędna z dla obu cząstek wynosi zero): $x_1(t) = 4\cos(2t)$, $y_1(t) = 4\sin(2t)$ oraz $x_2(t) = 2\cos(3t - \pi/2)$, $y_2(t) = 2\sin(3t - \pi/2)$.

a. Jakie są promienie okręgów obu cząstek?

b. Jakie są współrzędne x i y środka masy układu?

c. Ustal, czy środek masy porusza się po okręgu; jeśli tak, wyznacz jego trajektorię.

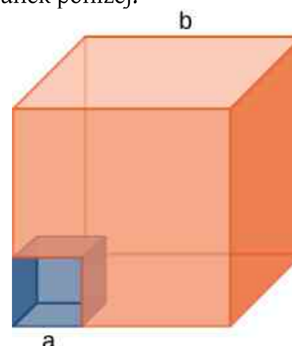
68. Wyznacz środek masy pręta o długości 1 m powstałego przez złączenie 0,5 m pręta żelaznego (gęstość żelaza $8\,\mathrm{g/cm^3}$) i 0,5 m pręta z aluminium (gęstość aluminium $2{,}7\,\mathrm{g/cm^3}$).

69. Wyznacz środek masy pręta o długości L, którego gęstość zmienia się od jednego końca do drugiego zgodnie z zależnością: $\rho(x) = \rho_0 + (\rho_1 - \rho_0)(x/L)^2$, gdzie ρ_0 i ρ_1 są stałymi.

70. Wyznacz środek masy prostokątnej płyty o długości a i szerokości b, której gęstość rośnie liniowo wraz ze współrzędną x (wzdłuż boku a), tzn. $\rho(x, y) = \rho_0 x$, gdzie ρ_0 jest stałą.

71. Wyznacz środek masy prostokątnej płyty o długości a i szerokości b, wykonanej z materiału o zmiennej gęstości. Gęstość rośnie liniowo wraz ze współrzędną x (wzdłuż boku a) i y (wzdłuż boku b), tzn. $\rho(x, y) = \rho_0 xy$, gdzie ρ_0 jest stałą.

72. Z sześcianu o boku b odcięto narożnik o boku a, jak pokazuje rysunek poniżej:



Wyznacz współrzędne środka masy tej bryły (*Podpo-*

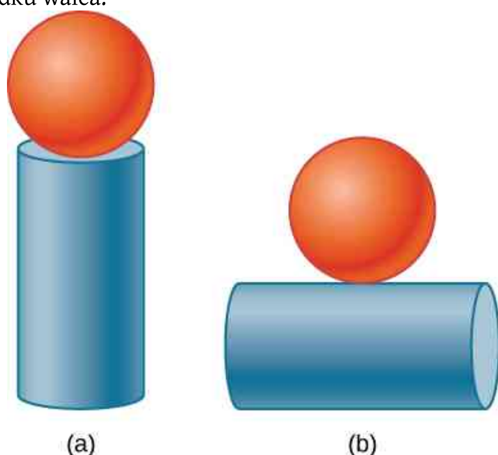
wiedź: wyobraź sobie ubytek jako masę małego sześcianu, wziętą z ujemnym znakiem z dodatniej masy dużego sześcianu).

73. Wyznacz środek masy stożka jednorodnego o promieniu podstawy R, wysokości h i masie M. Niech początek układu współrzędnych znajduje się w środku podstawy, a oś z jest osią symetrii stożka.

74. Wyznacz środek masy cienkiego drutu o masie m i długości L zgiętego w kształt półokręgu. Niech układ współrzędnych będzie osadzony w środku półokręgu, a oś y będzie osią symetrii ciała.

75. Wyznacz środek masy płaskiej cienkiej, płyty w kształcie półokręgu o promieniu R. Osadź układ współrzędnych w środku półokręgu, tak by płaszczyzna xy pokrywała się z płaszczyzną płyty, a oś y była jej osią symetrii.

76. Wyznacz środek masy układu brył pokazanych na rysunku. Masa i promień kuli: M, R; masa, promień i wysokość walca: m, r, h. Układ współrzędnych osadź w środku walca.



9.7 Napęd rakietowy

77. Kałamarnica o masie 5 kg, będąca początkowo w spoczynku, wyrzuca z siebie 0,25 kg wody z prędkością 10 m/s.

a. Jaka będzie prędkość odrzutu kałamarnicy, jeśli czas trwania wyrzutu wody wynosił 0,1 s a siła oporów ruchu wynosi 5 N?
b. Ile energii zużyła kałamarnica, aby pokonać siłę oporów ruchu?

78. Rakieta startuje z powierzchni Ziemi i osiąga prędkość 100 m/s w czasie 10 s. Przyjmując, że prędkość wylotu gazów jest równa 1500 m/s, a masa spalonego paliwa wynosi 100 kg, oblicz początkową masę rakiety.

79. Przeprowadź analizę jak w poprzednim zadaniu, przyjmując jednak, że rakieta startuje ze stacji kosmicznej, gdzie nie ma wpływu grawitacji (pomijając niewielką grawitację, której źródłem jest sama stacja).

80. Ile paliwa potrzeba dla rakiety o masie własnej 1000 kg, aby wystartować z powierzchni Ziemi i osiągnąć prędkość 1000 m/s w ciągu 30 s? Prędkość wyrzutu gazów wynosi 1000 m/s.

81. Jaka prędkość wyrzutu gazów jest potrzebna do przyspieszenia rakiety w przestrzeni kosmicznej z prędkości 800 m/s do 1000 m/s w czasie 5 s, jeżeli całkowita masa rakiety wynosi 1200 kg i zostało w niej tylko 50 kg paliwa?

82. Nieracjonalne wyniki. Podobno kałamarnice są w stanie wyskoczyć z wody i pokonać w powietrzu poziomą odległość równą 30 m.

a. Zakładając, że można pominąć straty na oderwanie się od wody i opór powietrza, oblicz początkową prędkość kałamarnicy, jeśli wyskakuje ona z wody pod kątem 20°.

b. Kałamarnica uzyskuje napęd wyrzucając wodę z wnętrza swojego ciała. Jaki ułamek masy jej ciała powinna stanowić woda, aby uzyskać prędkość potrzebną do wyskoku w poprzednim podpunkcie? Woda wyrzucana jest z prędkością 12 m/s, pomijamy przyspieszenie ziemskie podczas odrzutu oraz siły tarcia.

c. Co jest niedorzecznego w otrzymanych wynikach?

d. Które założenie jest niesłuszne, albo które założenia są ze sobą niespójne?

ZADANIA DODATKOWE

83. Wioślarze o masie 70 kg płyną kajakiem o masie 50 kg. Kajak porusza się z prędkością 1,2 m/s względem wody, zaś woda płynie z prędkością 4 m/s względem lądu. Jaki jest ich pęd względem lądu?

84. Co ma większy pęd: Ważący 3 tony słoń biegnący z prędkością 40 km/h czy gepard o masie 60 kg biegnący z prędkością 112 km/h?

85. Kierowca, naciskając pedał hamulca, zmniejsza prędkość samochodu o 20%, nie zmieniając kierunku ruchu auta. Jaką zmianę pędu to wywoła?

86. Twój kolega twierdzi, że skoro pęd jest iloczynem masy i prędkości, to ciało o większej masie ma zawsze większy pęd. Czy zgadzasz się z tym? Wyjaśnij.

87. Prawdopodobieństwo rozbicia się szklanki po upadku na betonową podłogę jest zdecydowanie większe niż po upadku na miękki trawnik. Wyjaśnij, dlaczego tak się dzieje, w kontekście reguły pędu i popędu.

88. Twój sportowy samochód o masie 1,5 tony przyspiesza od 0 do 30 m/s w 10 s. Jaka średnia siła działa na niego podczas przyspieszania?

89. Piłkę o masie m upuszczono swobodnie w polu grawitacyjnym Ziemi. Jakim wzorem opiszesz impuls udzielony piłce od chwili wypuszczenia jej z ręki do pewnej chwili τ? Opory ruchu pomijamy.

90. Przeanalizuj poprzednie zagadnienie uwzględniając siłę oporów ruchu $\vec{F}_{\text{op}} = -b\vec{v}$.

91. Jaki impuls został przekazany jajku podczas rozbicia się o podłogę, jeśli spadło ono z lady znajdującej się na wysokości 90 cm? Masa jajka wynosiła 5 g.

92. Rozpędzony samochód uderza w nieruchome drzewo. Prędkość samochodu zmniejsza się podczas zderzenia z 30 m/s do zera, a długość drogi, którą w tym czasie pokonał jego środek ciężkości równa jest około. połowy długości auta, czyli 1,3 m.
a. Jaki impuls został przekazany przez pasy bezpieczeństwa kierowcy o masie 70 kg, zakładając, że poruszał się dokładnie tak samo jak samochód?
b. Jaką średnią siłą działały pasy na kierowcę?

93. Dwóch hokeistów jadących z jednakową prędkością v zderza się czołowo na lodowisku. Zderzają się niesprężyście, upadają i suną z prędkością $v/5$. Jaki jest stosunek ich mas?

94. Jedziesz na rowerze o masie 10 kg z prędkością 15 m/s, gdy na twoim kasku rowerowym przysiada owad o masie 5 g. Poruszał się on wcześniej z prędkością 2 m/s w tym samym kierunku. Przyjmując, że twoja masa wynosi 60 kg, oblicz:
a. Jaki był pęd twój i roweru, zanim nadleciał owad?
b. Jaki był początkowy pęd owada?
c. Jak zmieniła się twoja prędkość po wylądowaniu owada?
d. Ile wynosiłaby ta zmiana, gdyby owad nadlatywał z przeciwnej strony?

95. Ładunek żwiru został zrzucony wprost na ciężarówkę o masie 30 ton jadącą z prędkością 2,2 m/s po poziomej rampie. Wiedząc, że wskutek tego prędkość ciężarówki zmniejszyła się do 1,5 m/s, oblicz masę załadowanego żwiru.

96. Dwa wózki zderzają się czołowo na płaskim torze. Pierwszy z nich poruszał się z prędkością 3,6 m/s w kierunku $+x$, a drugi z prędkością 2,4 m/s w kierunku przeciwnym. Po zderzeniu drugi wózek kontynuuje jazdę w tym samym kierunku z prędkością 0,24 m/s. Jeżeli wiemy, że masa drugiego wózka jest 5 razy większa od masy pierwszego, jaka jest masa pierwszego wózka i jego prędkość po zderzeniu?

97. Astronauta o masie 100 kg znajduje się w odległości 10 m od statku kosmicznego i oddala się od niego z prędkością 0,1 m/s. Aby wrócić na statek, astronauta wyrzuca przed siebie worek o masie 10 kg, nadając mu prędkość równą 5 m/s. Ile czasu zajmie mu dotarcie do statku?

98. Wyprowadź równania opisujące końcowe prędkości dwóch ciał zderzających się sprężyście. Masy ciał wynoszą m_1 i m_2, początkowa prędkość pierwszego ciała była równa v_1, a drugie pozostawało w spoczynku.

99. Przeanalizuj poprzedni problem w przypadku niezerowej prędkości drugiego ciała.

100. Dziecko zjeżdża na sankach z górki i uderza z prędkością 5,6 m/s w stojące sanki – identyczne, ale puste. Wskutek zderzenia dziecko zostało wyrzucone do przodu, natomiast sanki sczepiły się i sunęły wolno po płaskim torze. Jaka była ich prędkość po złączeniu?

101. Dla przypadku z poprzedniego zadania oblicz prędkości sanek, gdyby zderzenie było sprężyste.

102. Bramkarz o masie 90 kg wyskakuje pionowo w górę, aby złapać piłkę o masie 0,5 kg lecącą dokładnie poziomo w jego kierunku z prędkością 17 m/s. Jaka jest składowa pozioma jego prędkości po złapaniu piłki?

103. Trójka akrobatów spadochronowych spada w kierunku ziemi. Początkowo trzymają się razem, aby w pewnym momencie odepchnąć się od siebie.. Dwaj z nich masie odpowiednio: 70 kg i 80 kg uzyskują prędkości poziome w kierunku północno-wschodnim równe odpowiednio 1,2 m/s i 1,4 m/s. Jaka jest prędkość pozioma trzeciego uczestnika, jeśli jego masa wynosi 55 kg?

104. Dwie kule bilardowe leżą na stole bilardowym stykając się. Wzdłuż linii symetrii między tymi kulami porusza się trzecia z prędkością 3,8 m/s i uderza w nie równocześnie. Jeżeli zderzenie jest zderzeniem sprężystym, jakie będą prędkości kul po zderzeniu?

105. Kula bilardowa poruszającą się z prędkością $2{,}2\,\text{m/s} \cdot \hat{i} - 0{,}4\,\text{m/s} \cdot \hat{j}$ zderza się ze ścianą, która jest ustawiona wzdłuż kierunku $\hat{j}$. Zakładając, że zderzenie jest sprężyste, oblicz końcową prędkość kuli po odbiciu.

106. Dwie identyczne kule bilardowe zderzają się. Pierwsza, poruszała się początkowo z prędkością $2{,}2\,\text{m/s} \cdot \hat{i} - 0{,}4\,\text{m/s} \cdot \hat{j}$, a druga z prędkością $-1{,}4\,\text{m/s} \cdot \hat{i} + 2{,}4\,\text{m/s} \cdot \hat{j}$. W chwili zderzenia kula pierwsza znajduje się w środku układu współrzędnych, a druga w punkcie $(2R,\ 0)$, gdzie R jest promieniem kuli. Jakie będą końcowe prędkości obu kul?

107. Przeprowadź analizę jak w poprzednim zadaniu, ale dla sytuacji, gdy środek drugiej kuli jest w punkcie $(0,\ 2R)$ względem środka pierwszej kuli, będącego jednocześnie środkiem układu współrzędnych.

108. Przeprowadź analizę jak w poprzednim zadaniu, ale dla sytuacji, gdy środek drugiej kuli jest w punkcie $\left(\sqrt{3}R,\ R\right)$ względem środka pierwszej kuli, będącego jednocześnie środkiem układu współrzędnych.

109. Gdzie znajduje się środek masy pręta wygiętego w kształt półokręgu o promieniu R? Układ współrzędnych osadzony został w środku półokręgu, z osią x przechodzącą przez początek i koniec pręta.

110. Gdzie znajduje się środek masy kawałka pizzy, którą podzielono na 8 części? Układ współrzędnych osadzony został w środku pizzy o promieniu R, oś x przebiega wzdłuż jednego z ramion kąta.

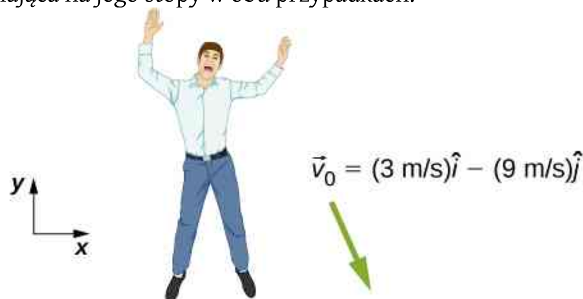
111. Gdyby cała populacja Ziemi została przesiedlona na Księżyc, jak przesunąłby się środek masy układu Ziemia-Księżyc-populacja? Przyjmijmy, że populacja liczy 7 miliardów ludzi, średnia masa człowieka to 65 kg i zarówno Ziemia jak i Księżyc zaludnione są jednorodnie. Masa Ziemi wynosi $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg, masa Księżyca równa jest $7{,}34 \cdot 10^{22}$ kg. Promień orbity Księżyca wynosi $3{,}84 \cdot 10^{8}$ m.

112. Twój kolega zastanawia się, jak rakieta może się ciągle wznosić, nawet gdy na odpowiedniej wysokości wyłączy już napęd odrzutowy. Co mu odpowiesz?

113. Czy w celu zwiększenia przyspieszenia rakiety można by wyrzucać z niej kamienie? Jeśli tak, to raczej przez właz tylni czy przedni? Pomijamy aspekty dekompresji rakiety.

ZADANIA TRUDNIEJSZE

114. Człowiek o masie 65 kg wyskakuje z okna na pierwszym piętrze płonącego budynku i ląduje niemal pionowo na ziemi z prędkością o składowej poziomej 3 m/s i pionowej -9 m/s. Podczas uderzenia o ziemię wytraca prędkość w bardzo krótkim czasie. Siła, której doświadczają jego stopy zależy od tego, czy zamortyzował upadek uginając kolana, czy też nie. Oblicz siłę działająca na jego stopy w obu przypadkach.



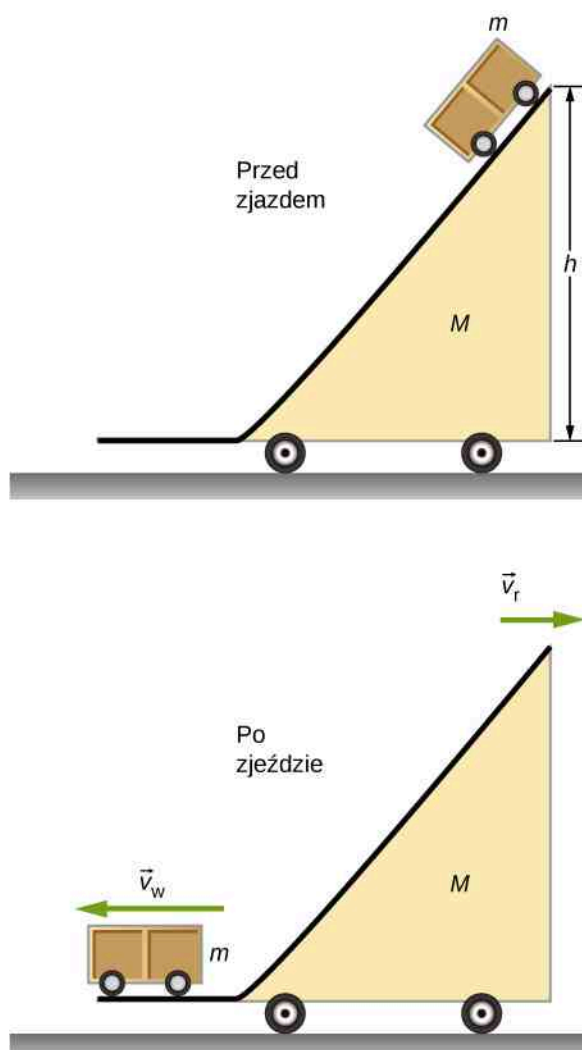
a. Wyznacz najpierw impuls przekazany człowiekowi podczas zderzenia. Oblicz zarówno jego wartość jak i kierunek.
b. Wyznacz średnią wartość siły działającej na stopy człowieka, gdy jego nogi pozostają proste, a jego środek ciężkości przesuwa się podczas zderzenia zaledwie o 1 cm w dół i 1 cm w prawo.
c. Wyznacz średnią wartość siły działającej na stopy, gdy człowiek ugiął nogi podczas lądowania, a jego środek ciężkości przesuwa się podczas zderzenia o 50 cm w dół i 5 cm w prawo.
d. Porównaj wyniki z podpunktu (b) i (c) i wyciągnij wnioski. Który sposób lądowania jest bardziej bezpieczny?

Do powyższych obliczeń potrzebny będzie czas działania siły oraz założenie o jej stałej wartości. Siła wprawdzie nie jest stała podczas całego zderzenia (bardziej szczegółową analizę przeprowadzono w przykładzie opisującym zderzenie meteoryt z Ziemią), niemniej tu założenie o stałości siły jest akceptowalne.

115. Dwie cząstki o masach m_1 i m_2 wystrzelono z tymi samymi prędkościami, ale w przeciwnych kierunkach z dwóch miejsc oddalonych od siebie o D. Obie docierają do punktu spotkania w najwyższym punkcie swojego lotu, zderzają się i łączą. W jakim miejscu wylądują? Przyjmujemy przyspieszenie grawitacyjne g.

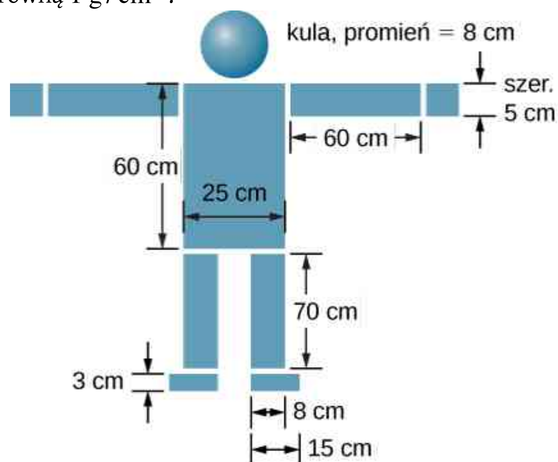
116. Dwa identyczne ciała (np. kule bilardowe) ulegają zderzeniu liniowemu, przy czym początkowo jedno z nich jest w spoczynku. Po zderzeniu poruszający się obiekt zatrzymuje się, a drugi porusza się z taką prędkością, jak pierwszy z nich przed zderzeniem. Wykaż, że w tym zderzeniu zachowana była zarówno energia kinetyczna, jak i pęd.

117. Mobilna rampa o masie M spoczywa na poziomym podłożu. Na górze rampy umieszczono mały wózek, który rozpoczyna zjeżdżanie po umieszczonej na niej pochylni. Jakie będą prędkości wózka oraz rampy, kiedy wózek dotrze do jej końca (patrz: rysunek).



Jakie są prędkości rampy i wózka względem ziemi w chwili, gdy wózek opuszcza rampę?

118. Wyznacz środek masy układu brył pokazanego na rysunku. Przyjmij jednakową grubość każdego prostopadłościanu wynoszącą 20 cm oraz jednorodną gęstość równą 1 g / cm^3 .



10 | OBROTY WOKÓŁ STAŁEJ OSI



Rysunek 10.1 Farma wiatrowa na Pomorzu w Polsce. W 2017 roku farmy wiatrowe w Polsce miały łączną moc prawie 6 gigawatów. (Źródło: https://pixabay.com/pl/wiatraki-energia-polska-pomorze-935097/, autor: Sebastian Bona-Kuchejda)

Treść rozdziału

Wstęp

W poprzednich rozdziałach opisaliśmy ruch (kinematyka) oraz jego zmiany (dynamika). Zdefiniowaliśmy ważne pojęcie energii w odniesieniu do obiektu, który można rozpatrywać jako punkt materialny. Punkt materialny, z definicji, nie ma kształtu, więc może wykonywać jedynie ruch postępowy. Jednakże, jak wiemy z codziennych doświadczeń, ruch obrotowy jest również bardzo ważny i wiele poruszających się obiektów może równocześnie poruszać się

ruchem obrotowym i postępowym. Turbiny wiatrowe przedstawione na zdjęciu na początku rozdziału są najlepszym przykładem zastosowania ruchu obrotowego w codziennym życiu. Popularność tych urządzeń wynika między innymi z coraz większego znaczenia czystych i odnawialnych źródeł energii.

Zaczynamy analizę ruchu obrotowego od opisu ruchu obrotowego ciała sztywnego wokół stałej (ustalonej) osi. Przez ciało sztywne rozumiemy obiekt, który nie ulega deformacji w czasie poruszania się. Pokażemy, jak zastosować do opisu ruchu obiektu obracającego się wokół stałej osi wszystkie pojęcia, które do tej pory stosowaliśmy do opisu ruchu postępowego. W następnym podrozdziale rozszerzymy te pojęcia, aby opisać bardziej złożony ruch obrotowy – w tym obiekty, które równocześnie obracają się i poruszają się ruchem postępowym, oraz obiekty obracające się wokół osi, której położenie się zmienia.

10.1 | Zmienne opisujące ruch obrotowy

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

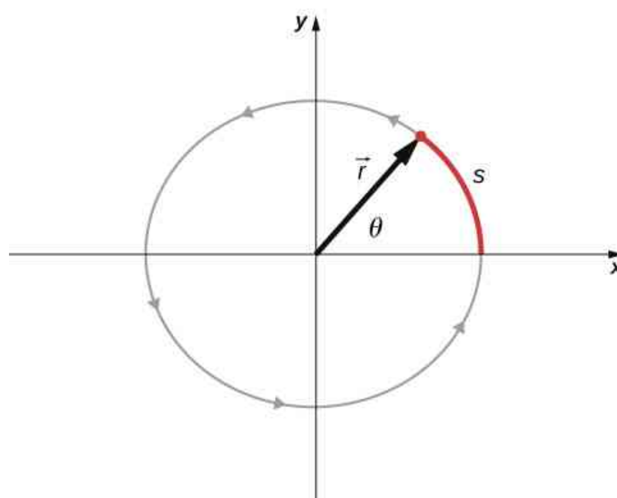
- opisywać sens fizyczny zmiennych obrotowych w zastosowaniu do obrotu wokół stałej osi;
- wyjaśniać, jak prędkość kątowa jest związana z prędkością styczną;
- obliczać, znając zależność od czasu położenia kątowego, chwilową prędkość kątową w dowolnej chwili;
- wyznaczać prędkość kątową i przyspieszenie kątowe obracającego się ciała;
- obliczać średnie przyspieszenie kątowe, gdy prędkość kątowa się zmienia;
- obliczać chwilowe przyspieszenie kątowe, znając zależność prędkości kątowej od czasu.

Do tej pory zajmowaliśmy się głównie analizą ruchu postępowego. Zmienne opisujące ruch postępowy to: przemieszczenie, prędkość i przyspieszenie. Teraz rozszerzymy nasz opis ruchu na ruch obrotowy wokół stałej osi. Zobaczymy, że ruch obrotowy jest opisany przez zestaw powiązanych ze sobą zmiennych, podobnych do tych, które wykorzystaliśmy do opisu ruchu postępowego.

Prędkość kątowa

Jednostajny ruch po okręgu (omówiony wcześniej w rozdziale Ruch w dwóch i trzech wymiarach) jest ruchem po okręgu ze stałą wartością prędkości (szybkością). Chociaż jest to najprostszy przypadek ruchu obrotowego, jest on bardzo przydatny w wielu sytuacjach. Użyjemy go, aby wprowadzić zmienne obrotowe.

Rysunek 10.2 przedstawia cząstkę poruszającą się po okręgu. Układ współrzędnych jest stały i służy jako punkt odniesienia do określenia położenia cząstki. Wektor położenia cząstki (wektor zaczepiony w początku układu współrzędnych i kończący się w miejscu znajdowania się cząstki) tworzy kąt θ z osią x, który rośnie w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, gdy cząstka przesuwa się po okręgu. Kąt θ nazywamy **położeniem kątowym** (ang. **angular position**) cząstki. W miarę przesuwania się cząstki po okręgu zakreśla ona łuk o długości s.



Rysunek 10.2 Cząstka porusza się po okręgu w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, zakreślając łuk o długości s. Jej wektor położenia tworzy dodatni kąt θ z osią x.

Związek pomiędzy wartością kąta θ a promieniem okręgu i długością łuku wyraża się wzorem:

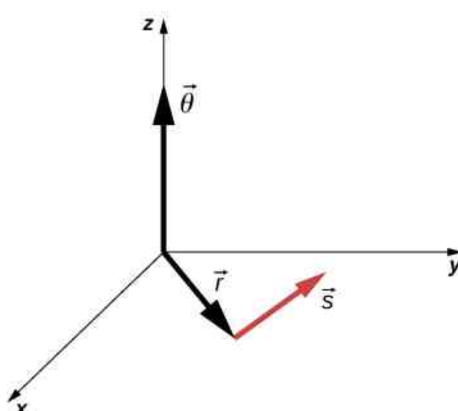
$$\theta = \frac{s}{r}. \tag{10.1}$$

Kąt θ, kątowe położenie cząstki, mierzony jest w radianach (rad). Kąt 2π radianów odpowiada w mierze łukowej kątowi 360°. Należy zauważyć, że kąt wyrażony w radianach jest ilorazem dwóch długości, a zatem jest wielkością bezwymiarową. Gdy cząstka porusza się po okręgu, jej położenie kątowe zmienia się, powodując zmianę kąta o wartość $\Delta\theta$.

Kątowi θ możemy przypisać wektor $\vec{\theta}$. Wektor $\vec{\theta}$ jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny xy na Rysunku 10.3. Wektory położenia $\vec{r}$ i długości łuku $\vec{s}$ leżą w płaszczyźnie xy. Te trzy wektory związane są relacją:

$$\vec{s} = \vec{\theta} \times \vec{r}. \tag{10.2}$$

Oznacza to, że wektor długości łuku jest iloczynem wektorowym wektora kąta i wektora położenia, tak jak to pokazano na Rysunku 10.3.



Rysunek 10.3 Wektor kąta skierowany jest wzdłuż osi z, a wektory położenia i długości łuku leżą w płaszczyźnie xy. Widzimy, że $\vec{s} = \vec{\theta} \times \vec{r}$. Wszystkie trzy wektory są wzajemnie do siebie prostopadłe.

Wartość wektora **prędkości kątowej** (ang. **angular velocity**), oznaczona jako ω, jest szybkością zmian kąta θ, gdy cząstka porusza się po łuku. **Chwilowa wartość prędkości kątowej** (ang. **instantaneous angular velocity**) jest definiowana jako granica, przy $\Delta t \to 0$, średniej prędkości kątowej $\bar{\omega} = \Delta\theta/\Delta t$:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}, \tag{10.3}$$

gdzie θ jest kątem obrotu (Rysunek 10.3). Jednostką prędkości kątowej jest radian na sekundę (rad/s). Prędkość kątowa może być również określana jako szybkość obrotów w radianach na sekundę. Aby wyznaczyć prędkość kątową, musimy pomnożyć liczbę obrotów na sekundę przez 2π, ponieważ jeden pełny obrót oznacza przemieszczenie kątowe równe 2π radianów. Obroty w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara będziemy uważali za dodatnie, a obroty w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara za ujemne.

Związek pomiędzy prędkością kątową a prędkością liniową w ruchu po okręgu możemy wyznaczyć poprzez zróżniczkowanie po czasie równania na przesunięcie kątowe (Równanie 10.1). Zapiszmy to równanie w postaci:

$$s = r\theta. \tag{10.4}$$

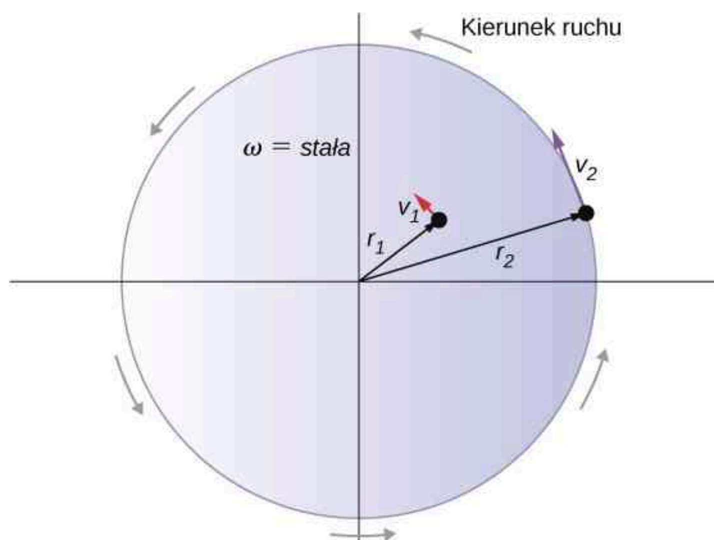
Obliczając pochodną po czasie i uwzględniając, że promień okręgu jest wielkością stałą, otrzymujemy:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\theta) = \theta\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{10.5}$$

gdzie $\theta\,(\mathrm{d}r/\mathrm{d}t) = 0$. W powyższym równaniu $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ jest właśnie prędkością styczną v_t cząstki w ruchu po okręgu, przedstawionej na Rysunku 10.3 skierowaną zgodnie z kierunkiem wektora $\vec{s}$. W ten sposób, stosując równanie na prędkość kątową (Równanie 10.3) otrzymujemy:

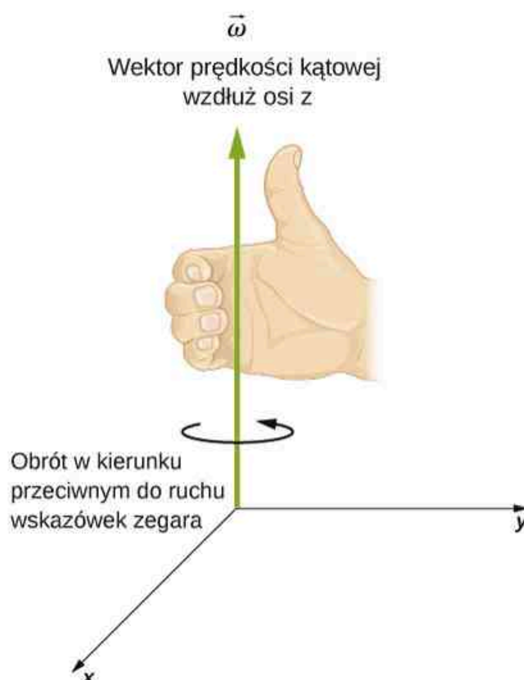
$$v_\mathrm{t} = r\omega. \tag{10.6}$$

Zatem prędkość styczna cząstki w ruchu po okręgu jest iloczynem prędkości kątowej i promienia okręgu. Z równania tego wynika, że przy stałej prędkości kątowej, prędkość styczna cząstki wzrasta wraz z odległością od osi obrotu. Efekt ten ilustruje Rysunek 10.4. Na obracającej się ze stałą prędkością kątową tarczy umieszczono, w różnych odległościach od osi obrotu, dwie cząstki. Gdy tarcza się obraca, prędkość styczna cząstek wzrasta liniowo wraz ze wzrostem odległości od osi obrotu. Na podstawie Rysunku 10.4 możemy stwierdzić, że: $v_1 = r_1\omega_1$ oraz $v_2 = r_2\omega_2$. Ponieważ prędkości kątowe wszystkich punktów tarczy są jednakowe ($\omega_1 = \omega_2$), to otrzymamy $v_1/r_1 = v_2/r_2$, czyli $v_2 = (r_2/r_1)v_1$. Ponieważ $r_2 > r_1$, to $v_2 > v_1$, innymi słowy prędkość styczna jest wprost proporcjonalna do promienia.



Rysunek 10.4 Dwie cząstki umieszczone na obracającej się tarczy mają różne prędkości styczne, w zależności od ich odległości od osi obrotu.

Do tej pory używaliśmy wartości prędkości kątowej $\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$, która to wielkość jest wielkością skalarną – jest to zmiana położenia kątowego w zależności od czasu. Wektor $\vec{\omega}$ jest wektorem związanym z prędkością kątową i jest skierowany wzdłuż osi obrotu. Przydaje się, gdy opisujemy ruch obrotowy ciała sztywnego, bo wówczas chcemy znać zarówno położenie osi obrotu, jak i kierunek, w którym nasze ciało obraca się wokół tej osi – zgodnie ze wskazówkami zegara, czy też przeciwnie do ich ruchu. Prędkość kątowa przedstawiona jako wektor daje nam te informacje. Kierunek wektora prędkości kątowej $\vec{\omega}$ jest określany przez tak zwaną **regułę prawej dłoni** (ang. **right-hand rule**). Mówi ona, że jeżeli palce prawej dłoni zgięte są w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara od osi x do osi y (w kierunku, w którym wzrasta θ), to odgięty kciuk wskazuje kierunek dodatniej części osi z (Rysunek 10.5). Wektor prędkości kątowej $\vec{\omega}$ skierowany zgodnie z kierunkiem osi z wskazuje na obroty w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, podczas gdy wektor prędkości kątowej $\vec{\omega}$ skierowany przeciwnie do kierunku osi z wskazuje na obroty zgodne z kierunkiem ruchu wskazówek zegara.



Rysunek 10.5 Ilustracja zastosowania reguły prawej dłoni w przypadku obrotów w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Zgodnie z regułą prawej dłoni, wektor prędkości kątowej skierowany jest w kierunku zgodnym z kierunkiem osi z.

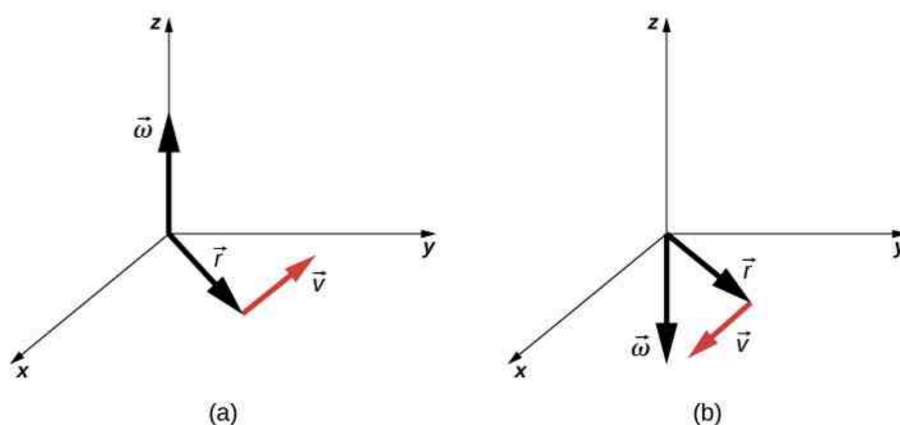
Możemy sprawdzić regułę prawej dłoni stosując wektorowe wyrażenie dla długości łuku $\vec{s} = \vec{\theta} \times \vec{r}$. Jeżeli zróżniczkujemy to równanie po czasie, otrzymamy:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\theta} \times \vec{r}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{\theta}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r}\right) + \left(\vec{\theta} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}\vec{\theta}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r}. \tag{10.7}$$

Ponieważ $\vec{r}$ nie zależy od czasu, to składnik $\vec{\theta} \times \left(\mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t\right) = 0$. Ponieważ $\vec{v} = \mathrm{d}\vec{s}/\mathrm{d}t$ jest prędkością styczną, zaś $\vec{\omega} = \mathrm{d}\vec{\theta}/\mathrm{d}t$ jest prędkością kątową, otrzymujemy:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{10.8}$$

Czyli prędkość styczna jest iloczynem wektorowym prędkości kątowej i wektora położenia, tak jak to pokazano na Rysunku 10.6. Część (a) rysunku przedstawia sytuację, w której wektor prędkości kątowej skierowany jest zgodnie z kierunkiem osi z, co oznacza, że ruch odbywa się w płaszczyźnie xy przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara. W części (b) wektor prędkości kątowej skierowany jest przeciwnie do kierunku osi z, co oznacza, że obrót odbywa się w płaszczyźnie xy, w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara.



Rysunek 10.6 Wektory na rysunku przedstawiają prędkość kątową, wektor położenia oraz wektor prędkości stycznej. (a) Wektor prędkości kątowej skierowany jest zgodnie z kierunkiem osi z, co oznacza obrót w płaszczyźnie xy w kierunku przeciwnym do kierunku obrotu wskazówek zegara. (b) Wektor prędkości kątowej skierowany jest w kierunku przeciwnym do kierunku osi z, wskazując na obrót w płaszczyźnie xy w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara.

Przykład 10.1

Obroty koła zamachowego

Koło zamachowe leżące w płaszczyźnie kartki obraca się tak, że położenie kątowe danego punktu koła zmienia się zgodnie z zależnością $\theta = \omega t = 45{,}0\ \mathrm{rad/s} \cdot t$. Koło obraca się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Odpowiedz na następujące pytania:

a. Jaka jest prędkość kątowa koła zamachowego?
b. Jaki jest kierunek wektora prędkości kątowej?
c. O ile radianów obróci się to koło zamachowe w ciągu 30 s?
d. Jaka jest prędkość styczna punktu koła położonego w odległości 10 cm od osi obrotu?

Strategia rozwiązania

Zależność położenia kątowego od czasu opisana jest równaniem $\theta(t) = \omega t$. Aby wyznaczyć wartość prędkości kątowej, należy wyliczyć pierwszą pochodną θ po czasie. Następnie należy przy pomocy reguły prawej dłoni wyznaczyć kierunek (zwrot) wektora prędkości kątowej. Aby wyznaczyć przemieszczenie kątowe

koła zamachowego w czasie 30 s, wystarczy wyznaczyć $\Delta\theta$ dla zmiany położenia kątowego od chwili początkowej 0 do upływu 30 s. Aby wyznaczyć prędkość styczną dla punktu położonego w pewnej odległości od osi obrotu, mnożymy tę odległość przez prędkość kątową koła zamachowego.

Rozwiązanie

a. $\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = 45\ \mathrm{rad/s}$. Widzimy, że prędkość kątowa jest stała.

b. Stosując regułę prawej dłoni zginamy palce w kierunku obrotu koła, tj. w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara w płaszczyźnie kartki. Wówczas odchylony kciuk wskaże nam kierunek wektora prędkości kątowej. Będzie on prostopadły do płaszczyzny strony i skierowany przed kartkę.

c. $\Delta\theta = \theta(30\ \mathrm{s}) - \theta(0\ \mathrm{s}) = 45{,}0\ \mathrm{rad/s} \cdot 30{,}0\ \mathrm{s} - 45{,}0\ \mathrm{rad/s} \cdot 0\ \mathrm{s} = 1350{,}0\ \mathrm{rad}$

d. $v_t = r\omega = 0{,}1\ \mathrm{m} \cdot 45{,}0\ \mathrm{rad/s} = 4{,}5\ \mathrm{m/s}$

Znaczenie

Jeżeli podzielimy otrzymane przemieszczenie kątowe przez 2π, to przekonamy się, że w ciągu 30 sekund koło zamachowe wykonało aż 215 obrotów. Masywne koło zamachowe może służyć do magazynowania energii, jeśli zminimalizuje się straty z powodu tarcia. Trwają badania nad zastosowaniem nadprzewodzących łożysk (ang. **superconducting bearings**), które pozwoliłyby kołu zamachowemu obracać się bez tarcia.

Przyspieszenie kątowe

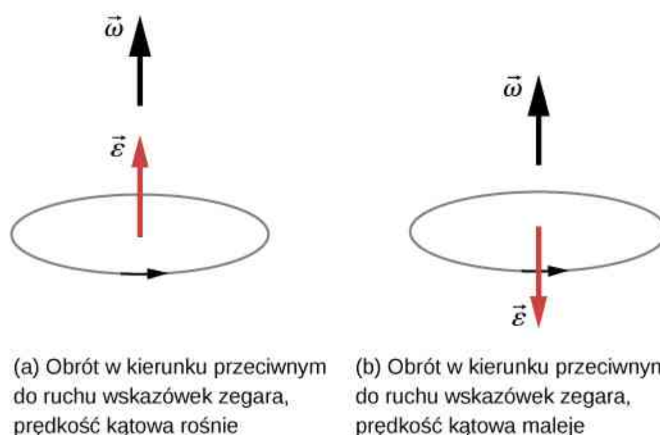
Właśnie omówiliśmy prędkość kątową dla ruchu jednostajnego po okręgu, ale nie wszystkie ruchy są jednostajne. Wyobraźmy sobie łyżwiarza wirującego z wyciągniętymi rękami – jeśli przyciągnie ręce do siebie, jego prędkość kątowa wzrośnie – lub wirujący dysk twardy komputera, zwalniający aż do zatrzymania po wyłączeniu. Omówimy tę sytuację w dalszych podrozdziałach, ale widzimy już potrzebę zdefiniowania przyspieszenia kątowego do opisu sytuacji, w których zmienia się ω. Im szybciej zmienia się ω, tym większe jest przyspieszenie kątowe. Zdefiniujmy **chwilowe przyspieszenie kątowe** (ang. **instantaneous angular acceleration**) jako pochodną prędkości kątowej po czasie:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}, \tag{10.9}$$

tj. granicę średniego przyspieszenia kątowego przy Δt dążącym do zera, $\bar{\varepsilon} = \Delta\omega/\Delta t$, gdy $\Delta t \to 0$.

Jednostką przyspieszenia kątowego jest (rad/s)/s czyli $\mathrm{rad/s}^2$.

W ten sam sposób, w jaki zdefiniowaliśmy wektor prędkości kątowej $\vec{\omega}$, możemy teraz zdefiniować wektor przyspieszenia kątowego $\vec{\varepsilon}$ (Rysunek 10.7). Jego długością jest wartość przyspieszenia kątowego ε, zdefiniowana powyższym równaniem (Równanie 10.9). Jeżeli wektor prędkości kątowej $\vec{\omega}$ jest skierowany wzdłuż osi $+z$, tak jak to pokazano na Rysunku 10.7, a $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$ ma wartość dodatnią, wówczas przyspieszenie kątowe $\vec{\varepsilon}$ jest dodatnie i skierowane zgodnie z kierunkiem osi $+z$. Podobnie, jeżeli wektor prędkości kątowej $\vec{\omega}$ jest skierowany zgodnie z osią $+z$, a $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$ jest ujemne, wówczas przyspieszenie kątowe jest ujemne, a wektor $\vec{\varepsilon}$ skierowany jest w kierunku przeciwnym do osi $+z$.



Rysunek 10.7 Rysunki (a) oraz (b) przedstawiają obroty w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. (a) Wektory przyspieszenia kątowego i prędkości kątowej mają ten sam kierunek i zwrot, co oznacza wzrost wartości prędkości kątowej. (b) Wektor przyspieszenia kątowego jest skierowany przeciwnie do wektora prędkości kątowej, więc wartość prędkości kątowej maleje.

Wektor przyspieszenia stycznego możemy wyrazić jako iloczyn wektorowy wektora przyspieszenia kątowego i wektora położenia. Wyrażenie to możemy otrzymać poprzez zróżniczkowanie wyrażenia $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ (wykonanie tego pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie). Otrzymamy wówczas:

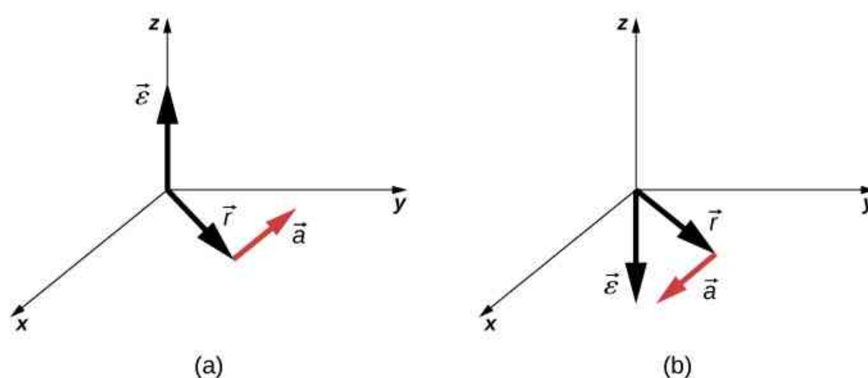
$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}. \tag{10.10}$$

Zależność pomiędzy przyspieszeniem stycznym a kątowym przedstawia Rysunek 10.8.

Wyrażenie na przyspieszenie styczne punktu obracającego się ciała można otrzymać podobnie, jak uzyskaliśmy zależność pomiędzy prędkością styczną a prędkością kątową. Jeżeli zróżniczkujemy po czasie Równanie 10.10 – pamiętając, że r ma stałą wartość – otrzymamy:

$$a_t = r\varepsilon. \tag{10.11}$$

Tak więc wartość przyspieszenia stycznego a_t jest równa iloczynowi promienia i przyspieszenia kątowego. Równania na prędkość i przyspieszenie styczne są ważne przy opisywaniu ruchu toczących się ciał (patrz podrozdział Moment pędu). Zastosujmy te pojęcia do analizy kilku prostych scenariuszy obrotu wokół stałej osi. Zanim to zrobimy, przedstawimy strategię rozwiązywania zadań, która przyda się do opisu kinematyki ruchu obrotowego.



Rysunek 10.8 (a) Przyspieszenie kątowe skierowane jest w kierunku dodatnim osi z dając przyspieszenie styczne w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. (b) Przyspieszenie kątowe jest skierowane w kierunku ujemnym osi z dając przyspieszenie styczne w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara.

Strategia rozwiązywania zadań: kinematyka ruchu obrotowego

1. Sprawdź, czy opisana sytuacja dotyczy ruchu obrotowego.
2. Określ dokładnie, co należy wyznaczyć w zadaniu (zidentyfikuj niewiadome). Warto wykonać szkic sytuacyjny.
3. Wypisz w punktach, co zostało podane w zadaniu lub co można wywnioskować z treści zadania (zidentyfikuj dane).
4. Rozwiąż odpowiednie równanie lub układ równań w celu wyznaczenia niewiadomych. Ponieważ znasz już równania ruchu postępowego, spróbuj myśleć w kategoriach analogicznych do ruchu postępowego.
5. Wstaw do otrzymanych równań dane wraz z ich jednostkami i wylicz wartości niewiadomych. Pamiętaj, aby kąt wyrazić w radianach.
6. Zadaj sobie pytanie, czy uzyskane rozwiązanie jest rozsądne, czy ma sens.

Zastosujmy teraz powyższą strategię rozwiązywania zadań do analizy kilku konkretnych przykładów.

Przykład 10.2

Wirujące koło rowerowe

Mechanik rowerowy umieszcza rower w stojaku do naprawy rowerów i zaczyna obracać tylne koło. W czasie 5,00 s od początku ruchu osiąga ono prędkość kątową wynoszącą 250 obrotów na minutę.

a. Wyznacz w $\mathrm{rad/s^2}$ średnie przyspieszenie kątowe.
b. Po jakim czasie koło się zatrzyma, jeżeli mechanik wciśnie hamulec, wytwarzając przyspieszenie kątowe o wartości $-87{,}3\ \mathrm{rad/s^2}$?

Strategia rozwiązania

Wartość średnia przyspieszenia kątowego $\bar{\varepsilon} = \Delta\omega/\Delta t$ może być wyznaczona bezpośrednio z jej definicji, ponieważ dane są początkowa i końcowa prędkość kątowa oraz czas ruchu. Widzimy, że $\Delta t = 5{,}00\ \mathrm{s}$, a $\Delta\omega = \omega_{\mathrm{konc}} - \omega_{\mathrm{pocz}} = 250\ \mathrm{obr/min}$. W przypadku (b) znamy przyspieszenie kątowe oraz początkową prędkość kątową. Możemy określić czas potrzebny na zatrzymanie koła z definicji przyspieszenia kątowego, wyznaczając z niej Δt. Otrzymamy:

$$\Delta t = \Delta\omega/\varepsilon. \tag{10.12}$$

Rozwiązanie

a. Wstawiając dane do wyrażenia na średnią wartość przyspieszenia kątowego otrzymamy:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\varepsilon} = \frac{250\ \mathrm{obr/\,min}}{5{,}00\ \mathrm{s}}. \tag{10.13}$$

Ponieważ $\Delta\omega$ wyrażone jest w obrotach na minutę, a chcemy uzyskać przyspieszenie kątowe w $\mathrm{rad/s^2}$, musimy przekonwertować obr/min na rad/s. Otrzymamy:

$$\Delta\omega = 250\ \frac{\mathrm{obr}}{\mathrm{min}} \cdot \frac{2\pi\ \mathrm{rad}}{\mathrm{obr}} \cdot \frac{1\ \mathrm{min}}{60\ \mathrm{s}} = 26{,}2\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}. \tag{10.14}$$

Wstawiając tę wielkość do równania na ε otrzymamy:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{26{,}2\ \mathrm{rad/s}}{5{,}00\ \mathrm{s}} = 5{,}24\ \mathrm{rad/s^2}. \tag{10.15}$$

b. Teraz prędkość kątowa maleje od wartości 26,2 rad/s do zera, czyli $\Delta\omega = -26{,}2\ \mathrm{rad/s}$, a z danych zadania $\varepsilon = -87{,}3\ \mathrm{rad/s^2}$. Zatem,

$$\Delta t = \frac{-26{,}2\ \mathrm{rad/s}}{-87{,}3\ \mathrm{rad/s}} = 0{,}300\ \mathrm{s}. \tag{10.16}$$

Znaczenie

Należy zauważyć, że gdy mechanik obraca koło, przyspieszenie kątowe jest małe i dodatnie; potrzeba 5 sekund do osiągnięcia znacznej prędkości kątowej. Kiedy wciśnie on hamulec, przyspieszenie kątowe jest duże i ujemne. Prędkość kątowa szybko maleje do zera.



10.1 Sprawdź, czy rozumiesz. Łopatki wentylatora w lotniczym silniku turbowentylatorowym (na zdjęciu poniżej) przyspieszane są w ciągu 20 s od spoczynku do prędkości kątowej 40,0 obr/s. Wzrost prędkości kątowej wentylatora jest stały w czasie. (Silnik turbowentylatorowy GE90-115B montowany w Boeingu 777, jak pokazano na zdjęciu, jest obecnie największym silnikiem turbowentylatorowym na świecie, o sile ciągu osiągającej 510 kN).

a. Jaka jest wartość średniego przyspieszenia kątowego?

b. Jaka jest wartość chwilowego przyspieszenia kątowego w dowolnej chwili w ciągu pierwszych 20 s?



Rysunek 10.9 (Źródło: “Bubinator”/ Wikimedia Commons)

Przykład 10.3

Turbina wiatrowa

Turbina wiatrowa (Rysunek 10.10) na farmie wiatrowej jest wyłączana w celu wykonania konserwacji. Potrzeba 30 s, aby wirnik turbiny zwolnił od roboczej prędkości kątowej do pełnego zatrzymania. W czasie zatrzymywania jego prędkość kątowa maleje z czasem, zgodnie z zależnością $\omega(t) = \left[(t - 30{,}0)^2/100{,}0\right]$ rad/s . Jeśli turbina obraca się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, patrząc w kierunku kartki, to:

a. jaki jest kierunek wektora prędkości kątowej i wektora przyspieszenia?

b. Jaka jest wartość średniego przyspieszenia kątowego?

c. Jaka jest wartość chwilowego przyspieszenia kątowego dla $t = 0{,}0$ s ; $t = 15{,}0$ s ; $t = 30{,}0$ s ?



Rysunek 10.10 Turbina wiatrowa obracająca się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, widok z przodu.

Strategia rozwiązania

a. Wiemy, że turbina obraca się w płaszczyźnie rysunku, w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Za pomocą reguły prawej dłoni (Rysunek 10.6) możemy określić kierunek wektora prędkości kątowej i wektora przyspieszenia kątowego.

b. W celu wyznaczenia średniego przyspieszenia kątowego musimy obliczyć wartości początkową i końcową prędkości kątowej. Znak wartości przyspieszenia kątowego określimy korzystając z rezultatów otrzymanych w punkcie (a).

c. Mamy daną zależność prędkości kątowej od czasu. Korzystając z niej wyznaczymy zależności przyspieszenia kątowego od czasu poprzez wyznaczenie pierwszej pochodnej zależności prędkości od czasu.

Rozwiązanie

a. Ponieważ turbina obraca się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, to wektor prędkości kątowej $\vec{\omega}$ jest skierowany przed płaszczyznę kartki. Ponieważ jednak wartość prędkości kątowej maleje, wektor przyspieszenia kątowego $\vec{\varepsilon}$ wskazuje w kierunku przeciwnym do wektora prędkości kątowej.

b. Początkowa wartość prędkości kątowej, w chwili $t = 0$ wynosi $\omega = 9{,}0\,\text{rad/s}$ Końcowa wartość prędkości kątowej jest równa zero, więc średnia wartość przyspieszenia kątowego równa się

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0} = \frac{0\,\text{rad/s} - 9{,}0\,\text{rad/s}}{30{,}0\,\text{s} - 0\,\text{s}} = -0{,}3\,\text{rad/s}^2. \quad (10.17)$$

c. Wyliczając pierwszą pochodną zależności prędkości kątowej od czasu otrzymamy: $\varepsilon = \text{d}\omega/\text{d}t = [(t - 30{,}0)\,/50{,}0]\ \ \text{rad/s}^2$

$$\varepsilon(0{,}0\,\text{s}) = -0{,}6\,\text{rad/s}^2, \quad \varepsilon(15{,}0\,\text{s}) = -0{,}3\,\text{rad/s}^2\,, \quad \varepsilon(30{,}0\,\text{s}) = 0\,\text{rad/s}^2. \quad (10.18)$$

Znaczenie

Z obliczeń w punktach (a) i (b) wynika, że przyspieszenie kątowe ε i średnie przyspieszenie kątowe $\bar{\varepsilon}$ mają ujemne wartości. Wektor przyspieszenia kątowego turbiny ma przeciwny zwrot do wektora jej prędkości kątowej.

Znamy już podstawowe słownictwo do opisu kinematyki ruchu obrotowego wokół stałej osi i związków pomiędzy wielkościami obrotowymi. Więcej wielkości i związków pomiędzy nimi omówimy w następnym podrozdziale.

10.2 | Obroty ze stałym przyspieszeniem kątowym

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- pisać równania kinetyczne dla obrotów ze stałym przyspieszeniem kątowym;
- wybierać odpowiednie równania służące do analizy ruchu w układzie wykonującym obroty wokół stałej osi spośród równań opisujących obroty ze stałym przyspieszeniem kątowym;
- wykorzystać rozwiązanie, które zostało otrzymane w wyniku zastosowania równań kinetycznych, do weryfikacji graficznej analizy obrotów wokół stałej osi ze stałym przyspieszeniem kątowym.

W poprzednim podrozdziale zdefiniowaliśmy zmienne obrotowe: przemieszczenie kątowe, prędkość kątową oraz przyspieszenie kątowe. W tym rozdziale wyprowadzimy zależności pomiędzy tymi wielkościami, a następnie użyjemy ich do opisu ruchu obrotowego wokół stałej osi ze stałym przyspieszeniem kątowym. W ten sposób sformułujemy podstawowe równania kinematyczne dla ruchu obrotowego. Jeżeli przyspieszenie kątowe jest stałe, to równania opisujące kinematykę ruchu obrotowego upraszczają się podobnie, jak w przypadku równań dla ruchu postępowego, omówionego w rozdziałach Ruch prostoliniowy oraz Ruch w dwóch i trzech wymiarach. Następnie użyjemy tego uproszczonego układu równań do przedstawienia zastosowań ruchu obrotowego w fizyce i technice, w sytuacjach, w których przyspieszenie kątowe jest stałe. Kinematyka ruchu obrotowego jest również warunkiem wstępnym do opisania dynamiki ruchu obrotowego w dalszej części tego rozdziału.

Kinematyka ruchu obrotowego

Korzystając z naszej intuicji, rozpoczniemy od określenia, w jaki sposób zmienne obrotowe θ, ω, ε oraz czas t są ze sobą powiązane. Na przykład w poprzednim podrozdziale widzieliśmy, że jeżeli wektor przyspieszenia kątowego koła zamachowego ma ten sam zwrot, co wektor prędkości, to jego prędkość kątowa wzrasta z upływem czasu, podobnie jak jego przemieszczenie kątowe. W przeciwnym przypadku, czyli jeżeli wektor przyspieszenia kątowego jest przeciwnie skierowany do wektora prędkości kątowej, jego prędkość kątowa z upływem czasu maleje. Możemy opisać te przypadki i wiele innych za pomocą spójnego układu równań kinematycznych ruchu obrotowego, przy założeniu stałego przyspieszenia kątowego. Taką metodę opisu ruchu obrotowego nazywamy **kinematyką ruchu obrotowego** (ang. **kinematics of rotational motion**).

Na początek zauważmy, że jeżeli układ obraca się ze stałym przyspieszeniem kątowym, to prędkość kątowa wzrasta liniowo z upływem czasu. Wówczas średnia wartość prędkości kątowej wyraża się jako połowa sumy początkowej ω_0 i końcowej ω_k wartości prędkości kątowej:

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_0 + \omega_k}{2}. \qquad (10.19)$$

Korzystając z definicji średniej prędkości kątowej, można otrzymać równanie wiążące położenie kątowe ze średnią prędkością kątową i czasem:

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}. \qquad (10.20)$$

Z poprzedniego równania (Równanie 10.25) otrzymujemy:

$$\theta_k = \theta_0 + \bar{\omega} t, \tag{10.21}$$

gdzie przyjęliśmy, że w chwili początkowej $t_0 = 0$. Równanie to może być bardzo przydatne, gdy znamy średnią prędkość kątową układu; można wówczas wyznaczyć wartość drogi kątowej (kątowego przemieszczenia) przebytej w danym czasie. Teraz zajmijmy się wyprowadzeniem wyrażenia wiążącego ω, ε oraz t. Rozpocznijmy od zdefiniowania przyspieszenia kątowego:

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}. \tag{10.22}$$

Przekształćmy powyższe równanie do postaci $\varepsilon \mathrm{d}t = \mathrm{d}\omega$, a następnie scałkujmy obustronnie od wartości początkowej czasu t_0 do wartości końcowej t oraz od ω_0 do ω_k Ponieważ przyspieszenie kątowe ε w ruchu jednostajnym obrotowym jest wielkością stałą, można je wyłączyć przed znak całkowania. Otrzymamy wówczas po obu stronach znaku równości dwie całki oznaczone:

$$\varepsilon \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t = \int_{\omega_0}^{\omega_k} \mathrm{d}\omega. \tag{10.23}$$

Przyjmując $t_0 = 0$, otrzymujemy

$$\varepsilon t = \omega_k - \omega_0. \tag{10.24}$$

Równanie to można przekształcić do postaci:

$$\omega_\mathrm{k} = \omega_0 + \varepsilon t, \tag{10.25}$$

gdzie ω_0 jest początkową prędkością kątową. Powyższe równanie dla prędkości kątowej jest odpowiednikiem równania $v_\mathrm{k} = v_0 + at$ dla ruchu postępowego. Korzystając z tego równania oraz mając dane początkową prędkość kątową i przyspieszenie kątowe możemy wyznaczyć prędkość kątową obiektu w danej chwili t.

Postąpmy teraz podobnie z równaniem $\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$. Przekształcamy je do postaci $\omega \mathrm{d}t = \mathrm{d}\theta$, a następnie całkujemy obustronnie od wartości początkowych do końcowych. Tym razem musimy uwzględnić fakt, że prędkość kątowa, w ogólności, jest zależna od czasu. Otrzymamy wówczas:

$$\int_{t_0}^{t_k} (\omega_0 + \varepsilon t)\,\mathrm{d}t = \int_{\theta_0}^{\theta_k} \mathrm{d}\theta, \tag{10.26}$$

$$\int_{t_0}^{t_k} \omega_0 \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_k} \varepsilon t \mathrm{d}t = \int_{\theta_0}^{\theta_k} \mathrm{d}\theta = \left[\omega_0 t + \varepsilon\left(\frac{t^2}{2}\right)\right]_{t_0}^{t_k} = \omega_0 t + \varepsilon\left(\frac{t^2}{2}\right) = \theta_k - \theta_0, \tag{10.27}$$

gdzie przyjęliśmy $t_0 = 0$. Po przekształceniu otrzymujemy:

$$\theta_\mathrm{k} = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2. \tag{10.28}$$

Równanie to jest odpowiednikiem równania kinematycznego dla ruchu jednostajnego prostoliniowego, określającego zależność położenia od czasu. Równanie to było analizowane w rozdziale Ruch prostoliniowy. Można z niego otrzymać wartość drogi kątowej (przemieszczenia kątowego) obracającego się ciała sztywnego w dowolnym czasie t, jeżeli są dane warunki początkowe (początkowe położenie kątowe i początkowa prędkość kątowa) oraz przyspieszenie kątowe.

Rozwiązując zadania rachunkowe możemy spotkać się z sytuacją, w której nie będzie nas interesować czas trwania ruchu, lecz końcowa prędkość kątowa ciała sztywnego. Aby otrzymać takie wyrażenie możemy napisać równanie na końcowe położenie (drogę kątową), w którym czas nie będzie występował w sposób jawny. W tym celu z równania na prędkość kątową (Równanie 10.25) wyznaczamy czas i otrzymane wyrażenie wstawiamy do Równania 10.28. Wówczas równanie na θ_k (Równanie 10.28) przyjmie postać:

$$\begin{aligned} \theta_\mathrm{k} &= \theta_0 + \omega_0 \left(\frac{\omega_\mathrm{k}-\omega_0}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{\omega_\mathrm{k}-\omega_0}{\varepsilon}\right)^2 \\ &= \theta_0 + \frac{\omega_0\omega_\mathrm{k}}{\varepsilon} - \frac{\omega_0^2}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\frac{\omega_\mathrm{k}^2}{\varepsilon} - \frac{\omega_0\omega_\mathrm{k}}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\frac{\omega_0^2}{\varepsilon} \\ &= \theta_0 + \frac{1}{2}\frac{\omega_\mathrm{k}^2}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\frac{\omega_0^2}{\varepsilon}, \\ \theta_\mathrm{k} - \theta_0 &= \frac{\omega_\mathrm{k}^2-\omega_0^2}{2\varepsilon} \end{aligned} \tag{10.29}$$

przyjmując, iż $\Delta\theta = \theta_\mathrm{k} - \theta_0$ otrzymujemy

$$\omega_\mathrm{k}^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon(\Delta\theta). \tag{10.30}$$

Równania od Równania 10.21 do Równania 10.30 opisują obroty wokół stałej osi ze stałym przyspieszeniem kątowym. Zostały one zebrane w Tabeli 10.1.

Zależność drogi kątowej (położenia kątowego) od średniej prędkości kątowej	$\theta_k = \theta_0 + \bar{\omega} t$
Zależność prędkości kątowej od stałego przyspieszenia kątowego	$\omega_\mathrm{k} = \omega_0 + \varepsilon t$
Zależność drogi kątowej (położenia kątowego) od początkowej prędkości kątowej i przyspieszenia kątowego	$\theta_\mathrm{k} = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$
Związek prędkości kątowej z drogą kątową i przyspieszeniem kątowym	$\omega_\mathrm{k}^2 = {\omega_0}^2 + 2\varepsilon(\Delta\theta)$

Tabela 10.1 Wzory kinematyczne

Zastosowanie równań opisujących kinematykę ruchu obrotowego

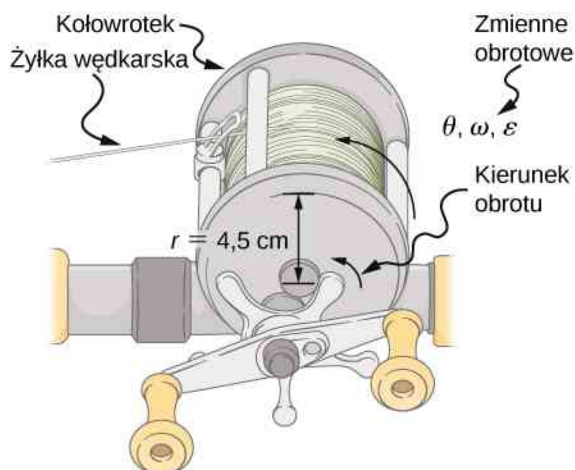
Teraz na kilku prostych przykładach zobaczmy, w jaki sposób można w codziennych sytuacjach zastosować podstawowe zależności kinematyczne do analizy ruchu obrotowego.

Przykład 10.4

Obliczenie przyspieszenia kołowrotka wędkarskiego

Rybak złapał na wędkę dużą rybę, która odpływając od łodzi ciągnie za sobą żyłkę z kołowrotka wędki. Początkowo kołowrotek nie obracał się (był w spoczynku). Żyłka rozwija się z kołowrotka o promieniu 4,50 cm (Rysunek 10.11). Kołowrotek obraca się z przyspieszeniem kątowym $110\ \mathrm{rad/s}^2$ przez 2,00 s.

a. Jaka jest końcowa prędkość kątowa kołowrotka po 2 s?
b. Ile obrotów w tym czasie zrobił kołowrotek?



Rysunek 10.11 Żyłka rozwijająca się z kołowrotka porusza się ruchem prostoliniowym.

Strategia rozwiązania

Zidentyfikuj dane i porównaj z równaniami kinematycznymi dla przypadku stałego przyspieszenia. Poszukaj odpowiedniego równania, które można zastosować do wyznaczenia niewiadomych korzystając z informacji podanych w zadaniu.

Rozwiązanie

a. Znając ε i t mamy wyznaczyć ω. Najprostszym równaniem, które możemy tu zastosować, jest równanie $\omega_{\mathrm{k}} = \omega_0 + \varepsilon t$, ponieważ występują tu wszystkie informacje podane w zadaniu oraz tylko jedna niewiadoma, której wartość mamy wyznaczyć. Załóżmy, że $\omega_0 = 0$ (początkowo kołowrotek nie obracał się), więc

$$\omega_k = 0\,\mathrm{rad/s} + 110\,\mathrm{rad/s^2} \cdot 2{,}00\,\mathrm{s} = 220\,\mathrm{rad/s}. \tag{10.31}$$

b. Mamy wyznaczyć liczbę obrotów kołowrotka. Ponieważ jeden obrót oznacza obrót o kąt 2π rad, możemy znaleźć liczbę obrotów poprzez znalezienie θ w radianach. Znając ε i t oraz wiedząc, że ω_0 jest równa zero, możemy wyznaczyć θ za pomocą równania:

$$\begin{aligned}\theta_{\mathrm{k}} &= \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2 \\ &= 0\,\mathrm{rad} + 0\,\mathrm{rad}\,/\,\mathrm{s} \cdot 2{,}00\,\mathrm{s} + \frac{1}{2} \cdot 110\,\mathrm{rad}\,/\,\mathrm{s^2} \cdot (2{,}00\,\mathrm{s})^2 \\ &= 220\,\mathrm{rad}\,.\end{aligned} \tag{10.32}$$

Zamiana obrotów na radiany daje:

$$\text{liczba obrotów} = 220\,\mathrm{rad} \cdot \frac{1\,\mathrm{obr}}{2\pi\,\mathrm{rad}} = 35{,}0\,\mathrm{obr}. \tag{10.33}$$

Znaczenie

Przykład ten pokazuje, że zależności między wielkościami obrotowymi są analogiczne do zależności pomiędzy wielkościami liniowymi. Odpowiedzi uzyskane w zadaniu są racjonalne. Po odwijaniu się żyłki przez dwie sekundy kołowrotek obraca się z prędkością kątową 220 rad/s, czyli wykonuje 2100 obr/min. (Nic dziwnego, że bębny kołowrotków czasem wydają dźwięki o wysokich częstotliwościach).

W poprzednim przykładzie rozważaliśmy kołowrotek wędkarski obracający się z dodatnim przyspieszeniem kątowym. Rozpatrzmy teraz sytuację, gdy kołowrotek obraca się z ujemnym przyspieszeniem kątowym.

Przykład 10.5

Obliczmy czas trwania obrotów, gdy kołowrotek zwalnia i zatrzymuje się. Teraz rybak wciska hamulec w kołowrotku sprawiając, że obraca on się z przyspieszeniem kątowym -300 rad/s^2 . Po jakim czasie kołowrotek się zatrzyma?

Strategia rozwiązania

W tym przykładzie mamy wyznaczyć czas t, po jakim kołowrotek przestanie się obracać. Warunki początkowe i końcowe różnią się od tych z poprzedniego przykładu, ale dotyczącą tego samego kołowrotka. Teraz początkowa prędkość kątowa wynosi $\omega_0 = 220 \text{ rad/s}$, końcowa prędkość kątowa ω jest równa zero, a przyspieszenie kątowe $\varepsilon = -300 \text{ rad/s}^2$. Spośród dostępnych równań, równaniem, w którym występują wszystkie zmienne podane w przykładzie i szukany czas t, jest równanie $\omega_k = \omega_0 + \varepsilon t$. Możemy go użyć do wyliczenia t.

Rozwiązanie

Zastosujmy równanie

$$\omega_\text{k} = \omega_0 + \varepsilon t. \tag{10.34}$$

Wyznaczając z tego równania t, a następnie wstawiając dane otrzymamy:

$$t = \frac{\omega_k - \omega_0}{\varepsilon} = \frac{0 \text{ rad/s} - 220{,}0 \text{ rad/s}}{-300{,}0 \text{ rad/s}^2} = 0{,}733 \text{ s}. \tag{10.35}$$

Znaczenie

Przypisując znak wartościom wielkości wektorowych, czyli wskazując kierunek tych wielkości, należy zachować ostrożność. Zauważmy, że czas potrzebny do zatrzymania kołowrotka jest mały, ponieważ duże jest opóźnienie (ujemne przyspieszenie). Żyłki wędkarskie często zrywają się w wyniku zbyt dużego przyspieszenia, dlatego wędkarze zazwyczaj pozwalają rybie płynąć przez chwilę, zanim użyją hamulca na bębnie. Zmęczona ryba płynie wolniej, więc można zastosować małe opóźnienie.



10.2 Sprawdź, czy rozumiesz. Wirówka stosowana do ekstrakcji DNA wiruje z maksymalną prędkością 7000 obr/min, działając na próbkę siłą odśrodkową 6000 razy większą od siły ciążenia. Jeśli wirówka potrzebuje 10 s od chwili startu do osiągnięcia maksymalnej prędkości wirowania:

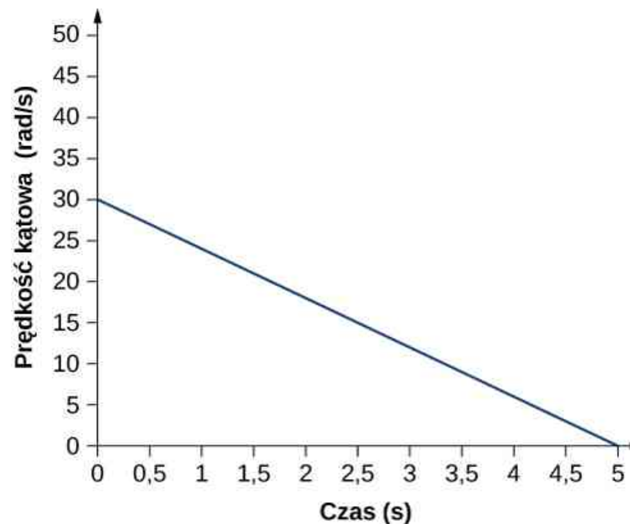
a. Jakie jest przyspieszenie kątowe wirówki?
b. Jakie jest przemieszczenie kątowe wirówki w tym czasie?

Przykład 10.6

Przyspieszenie kątowe śmigła

Rysunek 10.12 przedstawia wykres zależności prędkości kątowej śmigła samolotu od czasu. Jego prędkość kątowa rozpoczyna się od wartości 30 rad/s i liniowo zmniejsza się do 0 rad/s w ciągu 5 sekund.

a. Wyznacz przyspieszenie kątowe śmigła. Zweryfikuj otrzymany wynik przy użyciu równań kinematycznych.
b. Wyznacz kąt, o jaki obróci się śmigło w ciągu tych 5 sekund. Zweryfikuj wynik przy użyciu równań kinematycznych.



Rysunek 10.12 Wykres zależności prędkości kątowej śmigła od czasu.

Strategia rozwiązania

a. Ponieważ prędkość kątowa zmienia się liniowo w czasie, wnioskujemy, że przyspieszenie kątowe jest stałe i nie zależy od czasu. Przyspieszenie kątowe jest równe nachyleniu prostej ilustrującej zależność prędkości kątowej od czasu, $\varepsilon = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$. Dane do obliczenia nachylenia możemy odczytać bezpośrednio z Rysunku 10.12. Otrzymujemy $\omega_0 = 30\,\mathrm{rad/s}$, dla $t = 0\,\mathrm{s}$ oraz $\omega_0 = 30\,\mathrm{rad/s}$ dla $t = 5\,\mathrm{s}$. Następnie możemy zweryfikować wynik przy użyciu równania $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$.

b. Teraz zastosujemy równanie $\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$. Ponieważ pierwsza pochodna położenia kątowego po czasie to prędkość kątowa, możemy wyznaczyć przemieszczenie kątowe całkując prędkość kątową. Zgodnie z rysunkiem oznacza to wyznaczenie pola powierzchni pod wykresem prędkości kątowej. Inaczej mówiąc:

$$\int_{\theta_0}^{\theta_k} \mathrm{d}\theta = \theta_k - \theta_0 = \int_{t_0}^{t_k} \omega(t)\mathrm{d}t. \quad (10.36)$$

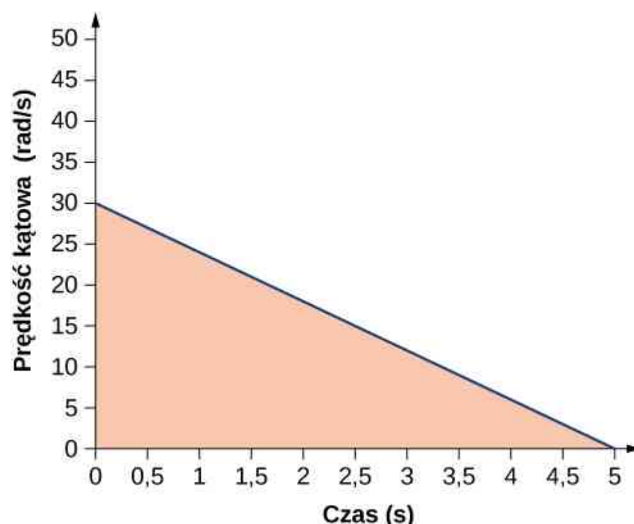
Następnie, w celu sprawdzenia wyniku, użyjemy równania kinematycznego dla stałego przyspieszania.

Rozwiązanie

a. Obliczając nachylenie otrzymamy:

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0} = \frac{0\,\mathrm{rad/s} - 30{,}0\,\mathrm{rad/s}}{5{,}0\,\mathrm{s} - 0\,\mathrm{s}} = -6{,}0\,\mathrm{rad/s^2}. \quad (10.37)$$

b. Możemy wyznaczyć pole obszaru pod krzywą poprzez obliczenie powierzchni trójkąta prostokątnego, jak pokazano na **Rysunku 10.13**.



Rysunek 10.13 Pole pod krzywą jest polem trójkąta prostokątnego.

$$\Delta\theta = P_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 30\,\text{rad} / \text{s} \cdot 5\,\text{s} = 75\,\text{rad}. \tag{10.38}$$

$$\theta_{\text{k}} = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2. \tag{10.39}$$

Wstawiając θ_0 otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= 30{,}0\,\text{rad} / \text{s} \cdot 5{,}0\,\text{s} + \frac{1}{2} \cdot \left(-6{,}0\,\text{rad} / \text{s}^2\right) \cdot (5{,}0\,\text{s})^2 \\ &= 150{,}0\,\text{rad} - 75{,}0\,\text{rad} = 75{,}0\,\text{rad}. \end{aligned} \tag{10.40}$$

To potwierdza rozwiązanie otrzymane z wyliczenia pola pod krzywą zależności prędkości kątowej od czasu.

Znaczenie

Widzimy z części (b), że istnieją alternatywne podejścia do analizy obrotów wokół stałej osi ze stałym przyspieszeniem kątowym. Nasze rozwiązania zaczęliśmy od podejścia graficznego i zweryfikowaliśmy to rozwiązanie przy użyciu równań kinematyki ruchu obrotowego. Ponieważ $\varepsilon = \text{d}\omega/\text{d}t$, możemy wykonać taką samą analizę graficzną wykresu zależności przyspieszenia kątowego od czasu. Obszar pod krzywą $\varepsilon = f(t)$ daje nam zmianę prędkości kątowej. Ponieważ w tej części przyspieszenie kątowe jest stałe, jest to proste ćwiczenie.

10.3 | Związek między wielkościami w ruchach obrotowym i postępowym

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- na podstawie równania dla ruchu postępowego pisać analogiczne równanie dla ruchu obrotowego;
- obliczać liniowe przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia punktów biorących udział w ruchu obrotowym na podstawie ich przyspieszenia i prędkości kątowej.

W tym podrozdziale odniesiemy każdą ze zmiennych obrotowych do zmiennych w ruchu postępowym, zdefiniowanych w rozdziałach Ruch prostoliniowy i Ruch w dwóch i trzech wymiarach. To pozwoli nam opisywać obroty wokół stałej osi.

Zmienne kątowe a zmienne liniowe

Jeśli porównamy definicje zmiennych obrotowych (które zdefiniowane zostały w podrozdziale Zmienne opisujące ruch obrotowy) z definicjami zmiennych kinematycznych w ruchu postępowym, zdefiniowanymi w rozdziałach Ruch prostoliniowy i Ruch w dwóch i trzech wymiarach, zauważymy, że istnieje odwzorowanie wielkości liniowych na obrotowe. Położenie, prędkość liniowa i przyspieszenie liniowe mają swoje odpowiedniki w wielkościach obrotowych.

	Liniowe	Obrotowe
Położenie	x	θ
Prędkość	$v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$	$\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$
Przyspieszenie	$a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$	$\varepsilon = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$

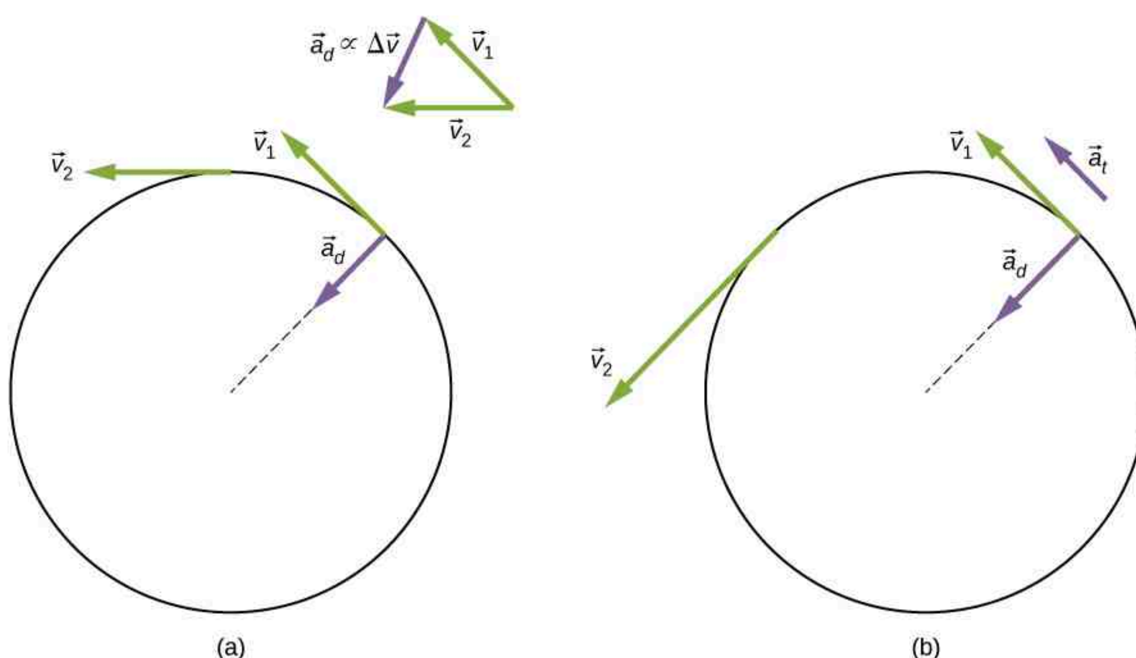
Tabela 10.2 Związek pomiędzy wielkościami opisującymi ruch liniowy oraz obrotowy.

Porównajmy indywidualnie zmienne liniowe i obrotowe. Jednostką zmiennych liniowych położenia jest metr, podczas gdy jednostką położenia kątowego jest bezwymiarowa jednostka radian, co wynika z definicji $\theta = s/r$, gdzie droga kątowa jest ilorazem dwóch wielkości, z których każda jest wyrażona w jednostkach długości. Jednostką prędkości liniowej jest m/s, a jej odpowiednik, prędkość kątowa, ma jednostkę rad/s. W podrozdziale Zmienne opisujące ruch obrotowy widzieliśmy, że w przypadku ruchu po okręgu o promieniu r prędkość liniowa cząstki jest związana z prędkością kątową zależnością $v_{\mathrm{t}} = r\omega$. Zależność ta ma zastosowanie również do punktów ciała sztywnego, obracającego się wokół stałej osi. Tutaj rozważamy jedynie ruch po okręgu. W ruchu po okręgu, zarówno jednostajnym jak i niejednostajnym, istnieje jeszcze **przyspieszenie dośrodkowe** (ang. **centripetal acceleration**) (patrz rozdział Ruch w dwóch i trzech wymiarach). Wektor przyspieszenia dośrodkowego skierowany jest do wnętrza toru, od cząstki wykonującej ruch po okręgu do osi obrotu. Wyprowadzenie wartości przyspieszenia dośrodkowego przedstawiono w rozdziale Ruch w dwóch i trzech wymiarach. Wartość przyspieszenia dośrodkowego wyraża się wzorem:

$$a_{\mathrm{d}} = \frac{v_{\mathrm{t}}^2}{r}, \tag{10.41}$$

gdzie r jest promieniem okręgu.

Tak więc w jednostajnym w ruchu po okręgu, w którym wartość prędkości kątowej jest stała, a przyspieszenie kątowe jest równe zeru, występuje przyspieszenie liniowe – konkretnie przyspieszenie dośrodkowe – ponieważ wartość prędkości stycznej w powyższym Równaniu 10.41 jest stała, a zmienia się kierunek wektora prędkości. Jeżeli ruch po okręgu jest ruchem niejednostajnym i obracające się ciało ma przyspieszenie kątowe, to w tym przypadku występuje zarówno zmieniające się przyspieszenie dośrodkowe (ponieważ zmienia się kierunek i zwrot wektora prędkości stycznej), jak i **przyspieszenie styczne** (ang. **tangential acceleration**) (ponieważ zmienia się wartość wektora prędkości stycznej). Zależność ta jest pokazana na Rysunku 10.14, gdzie przedstawiono przyspieszenie dośrodkowe i przyspieszenie styczne, zarówno dla ruchu jednostajnego, jak i ruchu niejednostajnego po okręgu.



Rysunek 10.14 (a) Ruch jednostajny po okręgu. Wektor przyspieszenia dośrodkowego a_{d} skierowany jest w kierunku do osi obrotu. Nie ma przyspieszenia stycznego. (b) Niejednostajny ruch po okręgu. Istnienie przyspieszenia kątowego jest przyczyną zmiany wartości przyspieszenia dośrodkowego oraz istnienia przyspieszenia stycznego a_t .

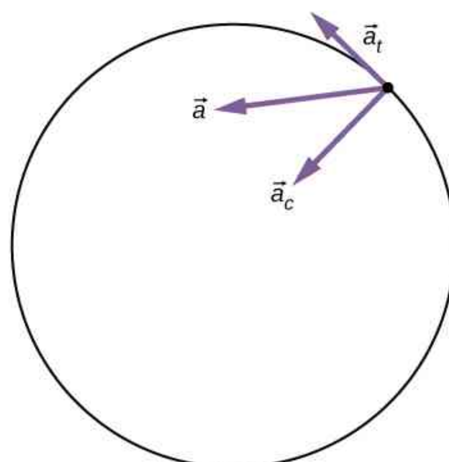
Przyspieszenie dośrodkowe wywołane jest ciągłą zmianą kierunku prędkości stycznej, podczas gdy przyspieszenie styczne związane jest ze zmianą wartości wektora prędkości stycznej. Wektory przyspieszenia stycznego $\vec{a}_t$ i dośrodkowego $\vec{a}_d$ są zawsze prostopadłe do siebie, tak jak to przedstawiono na Rysunku 10.14. Dla pełnego opisu musimy jeszcze dodać wektor przyspieszenia całkowitego dla punktu obracającego się ciała oraz cząstki wykonującej ruch po okręgu o promieniu r. Wektor **całkowitego przyspieszenia liniowego** (ang. **total linear acceleration**) $\vec{a}$ jest sumą wektorową przyspieszenia stycznego i dośrodkowego:

$$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_t. \tag{10.42}$$

W przypadku niejednostajnego ruchu po okręgu, wektor przyspieszenia całkowitego skierowany jest pod pewnym kątem między wektorami przyspieszenia stycznego i dośrodkowego, tak jak pokazano to na Rysunku 10.15. Ponieważ $\vec{a}_d \perp \vec{a}_t$, wartość całkowitego przyspieszenia liniowego wynosi:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_d^2 + a_t^2}. \tag{10.43}$$

Zauważ, że jeżeli przyspieszenie kątowe jest równe zero, to całkowite przyspieszenie liniowe jest równe przyspieszeniu dośrodkowemu.



Rysunek 10.15 Cząstka wykonuje ruch po okręgu z pewnym przyspieszeniem kątowym. Całkowite przyspieszenie liniowe cząstki jest sumą wektorową wektora przyspieszenia dośrodkowego i wektora przyspieszenia stycznego. Wektor całkowitego przyspieszenia liniowego leży pomiędzy wektorami przyspieszenia stycznego i dośrodkowego.

Związek pomiędzy wielkościami kątowymi i liniowymi

Przedstawmy teraz dwa związki między ruchem rotacyjnym i postępowym.

1. Ogólnie rzecz biorąc liniowe równania kinematyczne mają swoje odpowiedniki w równaniach dla ruchu obrotowego. Tabela 10.3 prezentuje cztery liniowe równania kinematyczne i odpowiadające im równania dla ruchu obrotowego. Te dwa zestawy równań są podobne do siebie, ale opisują dwie różne sytuacje fizyczne, tj. obrót i ruch postępowy.

Ruch obrotowy	Ruch postępowy
$\theta_k = \theta_0 + \bar{\omega} t$	$x = x_0 + \bar{v} t$
$\omega_k = \omega_0 + \varepsilon t$	$v_k = v_0 + at$
$\theta_k = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$	$x_k = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$
$\omega_k^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon(\Delta\theta)$	$v_k^2 = v_0^2 + 2a(\Delta x)$

Tabela 10.3 Równania kinematyczne dla ruchu obrotowego i postępowego

2. Drugi zestaw zależności dotyczy zmiennych liniowych i obrotowych w szczególnym przypadku ruchu po okręgu. Zależności te pokazano w trzeciej kolumnie Tabeli 10.4, gdzie znajdują się równania łączące zmienne obrotowe ze zmiennymi liniowymi.

Ruch obrotowy	Ruch postępowy	Związek pomiędzy wielkościami (r = promień okręgu)
θ	s	$\theta = s/r$
ω	v_t	$\omega = v_t/r$
ε	a_t	$\varepsilon = a_t/r$
	a_d	$a_d = v_t^2/r$

Tabela 10.4 Wielkości ruchu postępowego i obrotowego i zależności między nimi

Przykład 10.7

Przyspieszenie liniowe wirówki

Wirówka o promieniu 20 cm zwalnia ze stałym przyspieszeniem kątowym od maksymalnej prędkości obrotowej wynoszącej 10 000 obr/min i zatrzymuje się po upływie 30 s. Przez cały ten czas wirówka obraca się w lewo. Jaka jest wartość całkowitego przyspieszenia liniowego punktu położonego na obrzeżu wirówki w chwili $t = 29{,}0\text{ s}$? Jaki jest kierunek wektora całkowitego przyspieszenia liniowego?

Strategia rozwiązania

Dzięki podanym informacjom możemy obliczyć przyspieszenie kątowe, co następnie pozwoli nam wyznaczyć przyspieszenie styczne. Obliczając prędkość styczną w chwili $t = 29{,}0\text{ s}$ możemy wyznaczyć przyspieszenie dośrodkowe. Dzięki wyznaczonym wartościom przyspieszeń możemy obliczyć całkowite przyspieszenie liniowe. Na podstawie opisu obrotów przedstawionych w zadaniu możemy naszkicować kierunek całkowitego wektora przyspieszenia.

Rozwiązanie

Przyspieszenie kątowe:

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{0\text{ rad/s} - 10^4 \cdot 2\pi/60{,}0\text{ rad/s}}{30{,}0\text{ s}} = -34{,}9\text{ rad/s}^2. \tag{10.44}$$

Stąd, przyspieszenie styczne:

$$a_t = r\varepsilon = 0{,}2\text{ m} \cdot \left(-34{,}9\text{ rad/s}^2\right) = -7{,}0\text{ m/s}^2. \tag{10.45}$$

Prędkość kątowa w chwili $t = 29{,}0\text{ s}$:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \varepsilon t \\ &= 1{,}0 \cdot 10^4 \cdot \frac{2\pi\text{ rad}}{60{,}0\text{ s}} + \left(-34{,}9\text{ rad} / \text{s}^2\right) \cdot 29{,}0\text{ s} \\ &= 1047{,}2\text{ rad} / \text{s} - 1012{,}71\text{ rad} / \text{s} = 35{,}1\text{ rad} / \text{s}. \end{aligned} \tag{10.46}$$

Tak więc, prędkość w chwili $t = 29{,}0\text{ s}$ można wyliczyć jako:

$$v_t = r\omega = 0{,}2\text{ m} \cdot 35{,}1\text{ rad/s} = 7{,}0\text{ m/s}. \tag{10.47}$$

Teraz możemy wyznaczyć przyspieszenie dośrodkowe:

$$a_d = \frac{v_t^2}{r} = \frac{(7{,}0\text{ m/s})^2}{0{,}2\text{ m}} = 245{,}0\text{ m/s}^2. \tag{10.48}$$

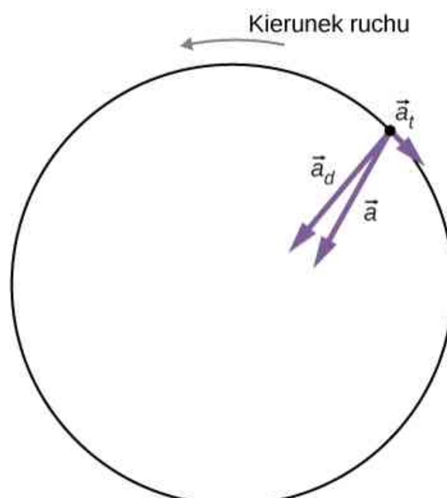
Ponieważ dwa wektory przyspieszenia są do siebie prostopadłe, wartość całkowitego przyspieszenia liniowego to:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_d^2 + a_t^2} = \sqrt{\left(245{,}0\text{ m/s}^2\right)^2 + \left(-7{,}0\text{ m/s}^2\right)^2} = 245{,}1\text{ m/s}^2. \tag{10.49}$$

Wirówka ma ujemne przyspieszenie kątowe. Oznacza to, że wiruje z coraz mniejszą prędkością kątową. Całkowity wektor przyspieszenia jest taki, jak pokazano na Rysunku 10.16. Kąt pomiędzy wektorem przyspieszenia dośrodkowego a wektorem przyspieszenia całkowitego jest równy:

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{-7{,}0}{245}\right) = -1{,}6^\circ. \tag{10.50}$$

Znak ujemny oznacza, że wektor przyspieszenia całkowitego jest ustawiony pod kątem w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara.



Rysunek 10.16 Wektory przyspieszenia dośrodkowego, stycznego i całkowitego. Wirówka zmniejsza obroty, więc przyspieszenie styczne skierowane jest zgodnie z ruchem wskazówek zegara, w kierunku przeciwnym do kierunku obrotu wirówki.

Znaczenie

Z Rysunku 10.16 wynika, że wektor przyspieszenia stycznego jest skierowany przeciwnie do kierunku obrotów. Wartość przyspieszenia stycznego jest znacznie mniejsza niż przyspieszenia dośrodkowego, więc wektor całkowitego przyspieszenia liniowego będzie tworzyć bardzo mały kąt z wektorem przyspieszenia dośrodkowego.



10.3 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Chłopiec wskakuje na platformę karuzeli o promieniu 5 m, która jest w spoczynku. Karuzela rozpoczyna obracać się ze stałym przyspieszeniem kątowym, osiągając prędkość kątową 5 rad/s po 20 sekundach. Jaką drogę na karuzeli chłopiec przebył w tym czasie?

Poeksperymentuj z symulacją z repozytorium PhET (https://openstaxcollege.org/l/21rotatingdisk) . Zmieniając parametry tarczy obrotowej (kąt początkowy, prędkość kątową i przyspieszenie kątowe) umieszczaj biedronkę i chrząszcza w różnych odległościach od osi obrotu. W ten sposób możesz zbadać, jak ruch obiektu po okręgu zależy od jego położenia, prędkości i przyspieszenia. Użyj wykresów i wektorów prezentowanych w aplikacji.

10.4 | Moment bezwładności i energia kinetyczna w ruchu obrotowym

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- wyjaśniać różnicę pomiędzy energią kinetyczną w ruchu obrotowym a energią kinetyczną w ruchu postępowym;
- przedstawiać pojęcie momentu bezwładności zależnego od rozkładu masy względem osi obrotu;
- wyjaśniać, jak moment bezwładności ciała sztywnego wpływa na jego energię kinetyczną związaną z ruchem obrotowym;
- stosować zasadę zachowania energii mechanicznej do analizowania systemów poruszających się zarówno ruchem postępowym jak i obrotowym.;
- obliczać prędkość kątową obracającego się ciała w przypadku straty energii w wyniku działania sił niezachowawczych.

Dotychczas w tym rozdziale omawialiśmy kinematykę ruchu obrotowego: opis ruchu obrotowego ciała sztywnego wokół stałej osi. Teraz zdefiniujemy dwie nowe wielkości bardzo przydatne w analizie właściwości obracających się obiektów: moment bezwładności i energię kinetyczną ruchu obrotowego. Te dwie wielkości dadzą nam ważne narzędzie do analizy dynamiki ruchu obrotowego.

Energia kinetyczna ruchu obrotowego

Dowolne obracające się ciało ma energię kinetyczną. Potrafimy policzyć energię kinetyczną ciała poruszającego się ruchem postępowym, lecz jak policzyć energię kinetyczną obracającego się ciała? Może to wydawać się bardzo skomplikowane, ponieważ w czasie wykonywania obrotu każdy punkt ciała sztywnego ma inną prędkość liniową. Jednakże w celu wyznaczenia **energii kinetycznej ruchu obrotowego** (ang. **rotational kinetic energy**) możemy posłużyć się prędkością kątową, która ma taką samą wartość dla każdego punktu obracającego się ciała. Na Rysunku 10.17 pokazano przykład pracującej szlifierki, napędzanej silnikiem elektrycznym. Wirująca tarcza szlifierki posiada określoną energię kinetyczną ruchu obrotowego. W momencie styku z obrabianym przedmiotem dochodzi do wystąpienia tarcia. W rezultacie cząstki przedmiotu są odrywane od jego powierzchni i ze względu na dużą energię wyzwalaną w tym procesie dochodzi do ich zapalenia i emisji światła. Dodatkowo, obroty szlifierki wywołują drgania, których częstotliwość zawiera się w paśmie słyszalnym, stąd tego typu pracom towarzyszy hałas.



Rysunek 10.17 Energia kinetyczna ruchu obrotowego szlifierki jest zamieniana na ciepło, energię światła, dźwięku oraz na energię drgań (Źródło: Zachary David Bell, US Navy)

Energia ruchu obrotowego jest sumą energii kinetycznych ruchu obrotowego poszczególnych cząstek ciała, podobnie jak energia kinetyczna ciała w ruchu postępowym. Ponieważ energia kinetyczna ruchu postępowego jest proporcjonalna do kwadratu prędkości $E_k = mv^2/2$, a prędkość każdego punktu obracającego się ciała jest inna, sensownym postępowaniem jest znalezienie sposobu na wyrażenie energii kinetycznej obracającego się ciała poprzez prędkość kątową, która ma taką samą wartość dla każdego punktu obracającego się ciała. Dla pojedynczej cząstki poruszającej się po okręgu wokół stałej osi możemy tego dokonać w prosty sposób. Możemy powiązać prędkość kątową z wartością prędkości liniowej ruchu po okręgu, stosując zależność $v_t = \omega r$, gdzie r jest odległością cząstki od osi obrotu, a v jest wartością prędkości ruchu po okręgu. Wstawiając to do wyrażenia na energię kinetyczną otrzymujemy:

$$E_k = \frac{1}{2} m v_t^2 = \frac{1}{2} m (\omega r)^2 = \frac{1}{2} (m r^2) \omega^2 . \tag{10.51}$$

Podzielmy teraz obracające się ciało sztywne na dużą liczbę małych fragmentów, każdy o masie m_j i odległości r_j od osi obrotu. Każdy z fragmentów będzie miał prędkość v_j. Masę całego ciała można teraz zapisać jako $M = \sum_j m_j$. Energię kinetyczną obracającego się ciała można wyrazić jako sumę energii kinetycznych wszystkich jej fragmentów:

$$E_k = \sum_j \frac{1}{2} m_j v_j^2 = \sum_j \frac{1}{2} m_j (r_j \omega_j)^2 . \tag{10.52}$$

Ponieważ każdy z fragmentów ma taką samą prędkość kątową $\omega_j = \omega$, to otrzymujemy:

$$E_k = \frac{1}{2} \left(\sum_j m_j r_j^2 \right) \omega^2 . \tag{10.53}$$

W układzie SI jednostką wielkości E_k (energii kinetycznej ruchu obrotowego), określonej powyższym równaniem, jest dżul (J). W przedstawionej formie równanie to wygląda na dość skomplikowane. Postaramy się je nieco uprościć poprzez wprowadzenie nowej wielkości fizycznej – momentu bezwładności.

Moment bezwładności

Porównanie tego wyrażenia do formy zapisu energii kinetycznej w ruchu postępowym w rozdziale Praca i energia

kinetyczna, $mv^2/2$, sugeruje, że mamy do czynienia z nową wielkością obrotową. Dodajmy ją do naszej listy zmiennych obrotowych i zależności pomiędzy zmiennymi obrotowymi a zmiennymi w ruchu postępowym. Wielkość $\sum_j m_j r_j^2$ jest odpowiednikiem masy w równaniu na energię kinetyczną ruchu postępowego. Jest to bardzo ważna nowa wielkość fizyczna opisująca ruch obrotowy. Nazywamy ją **momentem bezwładności** (ang. **moment of inertia**) I, a jej jednostką jest $\mathrm{kg \cdot m^2}$:

$$I = \sum_j m_j r_j^2. \tag{10.54}$$

Wyrażenie to definiuje moment bezwładności układu punktów materialnych poruszających się po okręgu wokół stałej osi. Zauważmy, że moment bezwładności pojedynczej cząstki, liczony względem osi obrotu, wyraża się wielkością mr^2, gdzie r jest odległością cząstki od osi obrotu. W następnym podrozdziale zastosujemy całkową postać tego równania do wyznaczania momentu bezwładności brył sztywnych o regularnych kształtach.

Moment bezwładności jest ilościową miarą bezwładności obrotowej, podobnie jak w ruchu postępowym masa jest miarą liniowej bezwładności – to znaczy, im bardziej masywny jest obiekt, tym ma większą inercję (bezwładność) i tym bardziej opiera się zmianom prędkości liniowej. Podobnie, im większa wartość momentu bezwładności bryły sztywnej lub układu cząstek, tym bardziej ciało to przeciwstawia się zmianie prędkości kątowej w jego obrocie wokół stałej osi. Interesująca jest analiza zależńości momentu bezwładności ciała sztywnego oraz układu punktów materialnych zdefiniowanego Równaniem 10.54 od rozkładu mas względem osi obrotu. Ciała sztywne oraz układy punktów materialnych, których masa jest skupiona dalej od osi obrotu, mają większy moment bezwładności niż ciała, których masa jest skupiona bliżej osi obrotu. Dlatego też pierścień o takiej samej masie, długości i promieniu co pełny walec będzie miał większy od niego moment bezwładności, liczony względem osi obrotu będącej ich osią symetrii. Wstawiając równanie na moment bezwładności (Równanie 10.54) do równania na energię kinetyczną (Równanie 10.53) otrzymujemy wyrażenie na energię kinetyczną obracającego się ciała sztywnego w postaci:

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2. \tag{10.55}$$

Z równania tego wynika, że energia kinetyczna obracającego się ciała sztywnego jest wprost proporcjonalna do momentu bezwładności ciała i kwadratu prędkości kątowej. Jest to wykorzystywane w urządzeniach z **kołami zamachowymi** (ang. **flywheel**), które służą do magazynowania dużych ilości energii w ruchu obrotowym. Obecnie wielu producentów samochodów testuje w swoich samochodach urządzenia do magazynowania energii wykorzystujące koła zamachowe, jak np. urządzenie do odzyskiwania energii kinetycznej pokazane na Rysunku 10.18.



Rysunek 10.18 Na fotelu pasażera umieszczono urządzenie wykorzystujące koło zamachowe do odzyskiwania energii kinetycznej w samochodzie. (Źródło: „cmonville”/Flicker)

Wielkości opisujące energię kinetyczną ruchu obrotowego i postępowego zostały zebrane w Tabeli 10.5. Zależności wiążących wielkości przedstawione w obu kolumnach nie zawarto w tabeli, ponieważ takie zależności nie istnieją. Nie istnieje bowiem taka stała, przez którą można by pomnożyć wielkość związaną z ruchem obrotowym, aby otrzymać opowiadającą jej wielkość związaną z ruchem postępowym, tak jak to zostało zrobione dla zmiennych przedstawionych w tabeli w poprzednim podrozdziale (Związek między wielkościami w ruchach obrotowym i postępowym).

Ruch obrotowy	Ruch postępowy
$I = \sum_j m_j r_j^2$	$m = \sum_j m_j$
$E_k = I\omega^2/2$	$E_k = mv^2/2$

Tabela 10.5 Energia i bezwładność w ruchu obrotowym i postępowym

Przykład 10.8

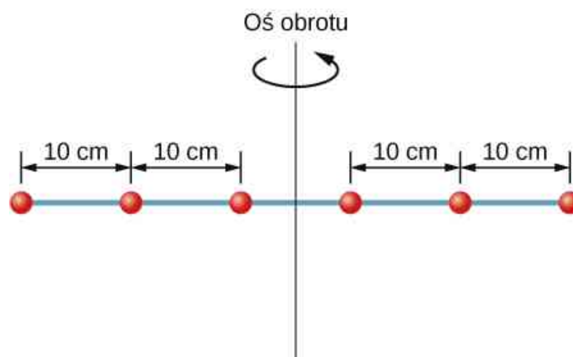
Moment bezwładności układu cząstek

Sześć małych nakrętek umieszczono na pręcie o pomijalnej masie i o długości 0,5 m, tak jak to pokazano na Rysunku 10.19. Nakrętki umieszczono w odległości 10 cm od siebie nawzajem, a każda z nakrętek ma masę 20 g.

a. Jaki jest moment bezwładności układu nakrętek?

b. Jeżeli usuniemy dwie nakrętki leżące najbliżej osi obrotu, to jaki będzie moment bezwładności układu pozostałych nakrętek?

c. Jeżeli układ sześciu nakrętek obraca się z prędkością kątową 5 obr/s, to jaka jest jego energia kinetyczna?



Rysunek 10.19 Rysunek przedstawia sześć nakrętek umieszczonych w odległości 10 cm od siebie nawzajem na nieważkim pręcie obracającym się wokół pionowej osi.

Strategia rozwiązania

a. Aby wyznaczyć moment bezwładności układu sześciu nakrętek, zastosujemy definicję momentu bezwładności dla układu punktów materialnych. Ponieważ masy nakrętek są jednakowe, możemy masę nakrętki wyciągnąć przed znak sumowania.
b. Analogiczne obliczenia wykonamy dla układu czterech nakrętek.
c. Wstawimy wynik obliczeń z punktu (a) do wyrażenia na energię kinetyczną ruchu obrotowego.

Rozwiązanie

a. $I = \sum_j m_j r_j^2 = 0{,}02\ \text{kg} \cdot 2\left[(0{,}25\ \text{m})^2 + (0{,}15\ \text{m})^2 + (0{,}05\ \text{m})^2\right] = 0{,}0035\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$

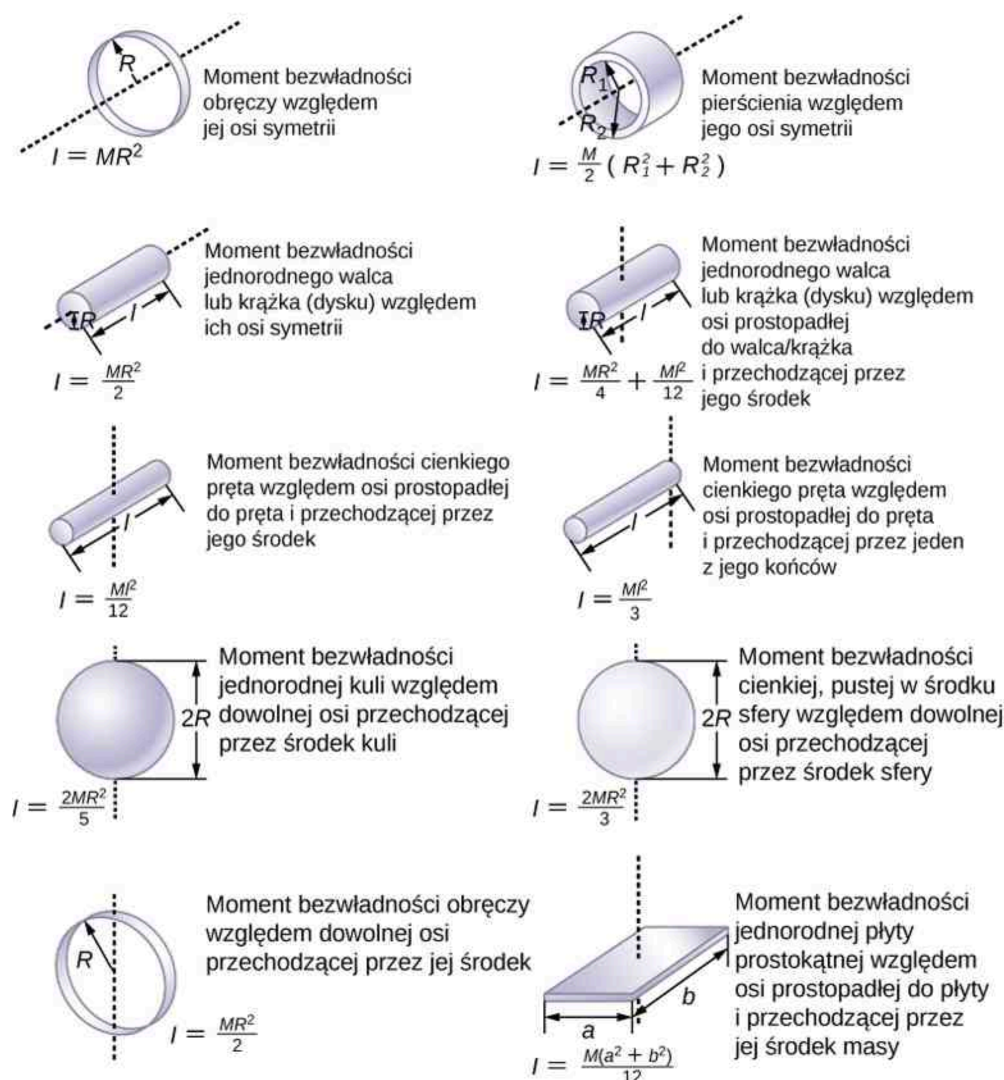
b. $I = \sum_j m_j r_j^2 = 0{,}02\ \text{kg} \cdot \left[2 \cdot (0{,}25\ \text{m})^2 + 2 \cdot (0{,}15\ \text{m})^2\right] = 0{,}0034\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$

c. $K = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}0035\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot (5{,}0 \cdot 2\pi\ \text{rad/s})^2 = 1{,}73\ \text{J}$.

Znaczenie

Usunięcie dwóch nakrętek leżących najbliżej osi obrotu miało mały wpływ na wartość momentu bezwładności, który jest proporcjonalny do kwadratu odległości punktu materialnego od osi obrotu.

W następnej części uogólnimy równanie na moment bezwładności dla układu punktów materialnych uzyskując równanie na moment bezwładności ciała sztywnego. Na razie jednak, na Rysunku 10.20 przedstawiono wartości momentów bezwładności dla wybranych ciał obracających się wokół zaznaczonej osi.



Rysunek 10.20 Momenty bezwładności wybranych ciał. Oś obrotu względem której obliczono moment bezwładności zaznaczono przerywana linią.

Stosowanie energii kinetycznej ruchu obrotowego

Zastosujmy teraz pojęcie energii kinetycznej ruchu obrotowego i momentu bezwładności do zaznajomienia się z energią ruchu obrotowego związaną z obrotami wybranych obiektów. Poniższe przykłady ułatwią również korzystanie z tych równań. Najpierw przyjrzyjmy się ogólnej strategii rozwiązywania zadań dotyczących energii ruchu obrotowego.

Strategia rozwiązywania zadań: energia kinetyczna ruchu obrotowego

1. Ustal, czy w zadaniu mamy do czynienia z energią lub pracą w ruchu obrotowym.
2. Określ, co nas interesuje. Zwykle pomaga szkic rozwiązania.
3. Dokonaj analizy zadania w celu określenia rodzajów pracy i energii.
4. Jeśli nie ma strat energii ze względu na tarcie i inne siły niezachowawcze, energia mechaniczna jest zachowana, tj. $E_{\text{k pocz}} + E_{\text{p pocz}} = E_{\text{k końc}} + E_{\text{p końc}}$.
5. Jeżeli występują siły niezachowawcze, to energia mechaniczna nie jest zachowana. Oznacza to, że inne formy energii, takie jak energia cieplna lub energia świetlna, mogą być dostarczane lub oddawane przez układ.
6. Dla ułatwienia obliczeń, tam gdzie jest to możliwe, upraszczaj wyrażenia algebraiczne.

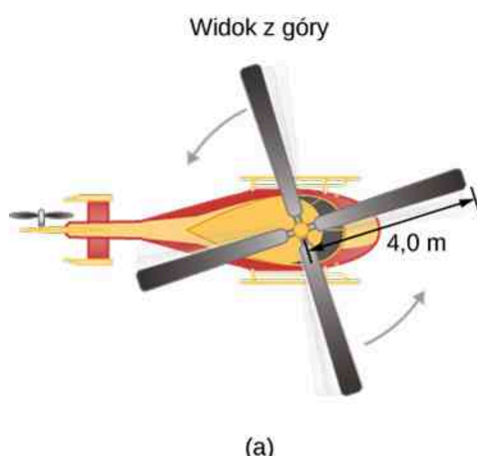
7. Oceń rozwiązanie numeryczne, aby sprawdzić, czy ma ono sens w sytuacji fizycznej przedstawionej w treści zadania.

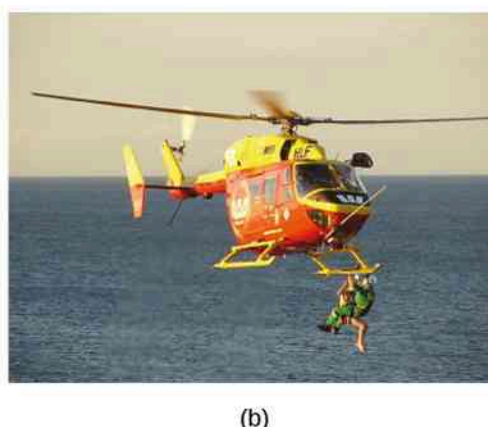
Przykład 10.9

Energia lecącego helikoptera

Typowy mały helikopter ratunkowy ma cztery łopaty wirnika: każda ma długość 4,00 m i masę $m = 50{,}0\ \mathrm{kg}$ (Rysunek 10.21). Łopaty można rozpatrywać jako cienkie pręty, które obracają się wokół jednego z końców, wokół osi prostopadłej do ich długości. Całkowita masa załadowanego helikoptera wynosi $M = 1000\ \mathrm{kg}$.

a. Oblicz energię kinetyczną ruchu obrotowego łopat wirnika, jeśli ich prędkość kątowa wynosi 300 obr/min.
b. Oblicz energię kinetyczną ruchu postępowego helikoptera, gdy leci on z prędkością $20{,}0\ \mathrm{m/s}$, i porównaj ją z energią kinetyczną ruchu obrotowego łopat.





Rysunek 10.21 (a) Szkic helikoptera z czterołopatowym wirnikiem głównym. (b) Akcja ratownictwa wodnego z udziałem helikoptera ze służby ratunkowej Westpac Rescue Helicopter. (Źródło b: "111 Emergency" / Flickr)

Strategia rozwiązania

Energię kinetyczną ruchu postępowego i obrotowego możemy wyznaczyć z ich definicji. W treści zadania znajdziemy wszystkie wartości wielkości fizycznych, potrzebne do obliczenia energii ruchu postępowego i obrotowego helikoptera.

Rozwiązanie

a. Energia kinetyczna ruchu obrotowego dana jest wyrażeniem:

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2. \tag{10.56}$$

ω z obr/min na rad/sek.

$$\omega = \frac{300\ \mathrm{obr}}{1{,}00\ \mathrm{min}} \cdot \frac{2\pi\ \mathrm{rad}}{1\ \mathrm{obr}} \cdot \frac{1{,}00\ \mathrm{min}}{60{,}0\ \mathrm{s}} = 31{,}4\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}. \tag{10.57}$$

Moment bezwładności jednej łopaty można przybliżyć momentem bezwładności cienkiego pręta obracającego się wokół jednego z jego końców. Wartość tego momentu podana jest na Rysunku 10.20. Ponieważ wirnik helikoptera ma cztery łopaty, całkowity moment bezwładności będzie 4 razy większy. Tak więc:

$$I = 4 \cdot \frac{ml^2}{3} = 4 \cdot \frac{50{,}0\,\mathrm{kg} \cdot (4{,}00\,\mathrm{m})^2}{3} = 1067{,}0\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2. \quad (10.58)$$

Wstawiając wartości ω oraz I do wyrażenia na energię kinetyczną ruchu obrotowego, otrzymamy:

$$E_k = 0{,}5 \cdot 1067\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot (31{,}4\,\mathrm{rad/s})^2 = 5{,}26 \cdot 10^5\,\mathrm{J}. \quad (10.59)$$

b. Wstawiając wartości M oraz v do wyrażenia na energię kinetyczną ruchu postępowego helikoptera, otrzymujemy:

$$E_k = \frac{1}{2}Mv^2 = 0{,}5 \cdot 1000{,}0\,\mathrm{kg} \cdot (20\,\mathrm{m/s})^2 = 2{,}00 \cdot 10^5\,\mathrm{J}. \quad (10.60)$$

$$\frac{2{,}00 \cdot 10^5\,\mathrm{J}}{5{,}26 \cdot 10^5\,\mathrm{J}} = 0{,}380. \quad (10.61)$$

Znaczenie

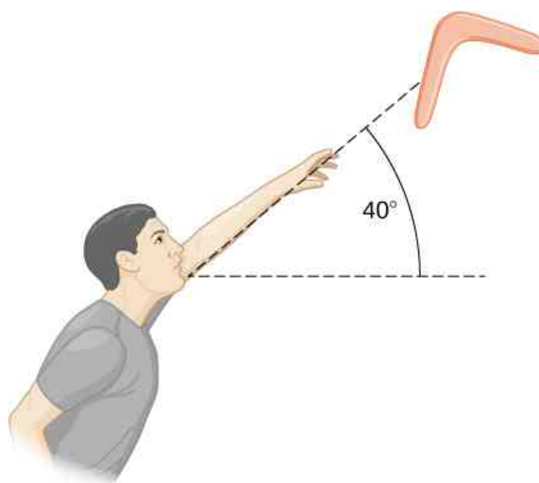
Stosunek energii kinetycznej ruchu postępowego do energii kinetycznej ruchu obrotowego wynosi zaledwie 0,380. Wielkość ta świadczy o tym, że większość energii kinetycznej helikoptera jest zawarta w jego wirujących łopatach.

Przykład 10.10

Energia bumerangu

Mężczyzna rzuca w powietrze bumerang z prędkością 30,0 m/s pod kątem $40{,}0^\circ$ względem poziomu (Rysunek 10.22). Bumerang ma masę 1,0 kg i obraca się z prędkością kątową 10,0 obr/s. Moment bezwładności bumerangu można wyliczyć ze wzoru $I = mL^2/12$, gdzie $L = 0{,}7\,\mathrm{m}$.

a. Jaka jest całkowita energia bumerangu w momencie, gdy opuszcza on rękę człowieka?
b. Jak wysoko uniesie się bumerang, licząc od wysokości wyciągniętej ręki człowieka? Można pominąć opór powietrza.



Rysunek 10.22 Bumerang wyrzucany w powietrze pod kątem 40°.

Strategia rozwiązania

Energię całkowitą bumerangu wyznaczymy jako sumę energii kinetycznej ruchu obrotowego i energii kine-

tycznej ruchu postępowego. W zadaniu podano, że można zaniedbać stratę energii związaną z oporem powietrza. W związku z tym w punkcie (b), w celu wyznaczenia maksymalnej wysokości, na jaką wzniósł się bumerang, możemy zastosować zasadę zachowania energii mechanicznej.

Rozwiązanie

a. Moment bezwładności jak dla pręta Rysunku 10.20:

$$I = \frac{1}{12} \cdot 1{,}0\,\text{kg} \cdot (0{,}7\,\text{m})^2 = 0{,}041\,\text{kg} \cdot \text{m}^2. \tag{10.62}$$

Prędkość kątowa:

$$\omega = 10{,}0\,\text{obr/s} \cdot 2\pi\,\text{rad/obr} = 62{,}83\,\text{rad/s}. \tag{10.63}$$

$$E_{\text{obr}} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}041\,\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot (62{,}83\,\text{rad/s})^2 = 80{,}93\,\text{J}. \tag{10.64}$$

$$E_{\text{pos}} = \frac{1}{2} \cdot 1{,}0\,\text{kg} \cdot (30{,}0\,\text{m/s})^2 = 450{,}0\,\text{J}. \tag{10.65}$$

b. Zastosujemy zasadę zachowania energii mechanicznej. Ponieważ bumerang rzucono pod pewnym kątem względem poziomu, jego całkowitą energię kinetyczną ruchu postępowego możemy zapisać jako sumę energii w kierunku poziomym (oś x) oraz energii ruchu postępowego w kierunku pionowym (oś y). Energia całkowita bumerangu w momencie opuszczania ręki mężczyzny może być zapisana jako:

$$E_{\text{pocz}} = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}I\omega^2. \tag{10.66}$$

Energia bumerangu w momencie osiągnięcia maksymalnej wysokości jest równa:

$$E_{\text{konc}} = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh. \tag{10.67}$$

Z zasady zachowania energii mechanicznej wynika, że $E_{\text{pocz}} = E_{\text{konc}}$. Zatem, z dwóch powyższych równań otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}mv_y^2 = mgh. \tag{10.68}$$

Ponieważ $v_y = 30{,}0\,\text{m/s} \cdot \sin 40^\circ = 19{,}28\,\text{m/s}$, otrzymamy:

$$h = \frac{(19{,}28\,\text{m/s})^2}{2 \cdot 9{,}8\,\text{m/s}^2} = 18{,}97\,\text{m}. \tag{10.69}$$

Znaczenie

Część (b) pokazuje, że zastosowanie zasady zachowania energii może dawać alternatywną metodę rozwiązywania zadań, które zwykle są rozwiązywane za pomocą równań kinematyki. W przypadku braku oporu powietrza energia kinetyczna ruchu obrotowego nie wpływa na wartość maksymalnej wysokości, jaką osiągnął bumerang.



10.4 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Śruba napędowa podwodnego okrętu o napędzie jądrowym ma moment bezwładności wynoszący $800{,}0\,\text{kg} \cdot \text{m}^2$. W chwili, gdy śruba napędowa obracała się z prędkością $4\,\text{obr/s}$, wyłączono silnik, który ją napędza. Jaka będzie wartość prędkości kątowej śruby po 5,0 s od wyłączenia silnika, jeżeli w tym czasie śruba wykonała pracę 50 000 J przeciwko siłom oporu wody?

10.5 | Obliczanie momentu bezwładności

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- obliczać moment bezwładności dla wysoce symetrycznych brył sztywnych,
- stosować twierdzenie Steinera do wyznaczania momentu bezwładności wokół dowolnej osi równoległej do osi, względem której znany jest moment bezwładności,
- obliczać moment bezwładności dla złożonych obiektów.

W poprzednim podrozdziale zdefiniowaliśmy moment bezwładności, ale nie pokazaliśmy, jak go obliczyć. Poniżej pokazujemy, jak obliczyć moment bezwładności dla kilku standardowych obiektów oraz jak wykorzystać znane momenty bezwładności, aby znaleźć moment bezwładności dla przesuniętej osi lub dla układu złożonego. Ta wiedza bardzo przydaje się, gdy chcemy zastosować ogólne równanie do złożonych układów (to umiejętności, które są kluczowe dla bardziej zaawansowanych kursów fizyki i inżynierii).

Moment bezwładności

Zdefiniowaliśmy moment bezwładności dla punktów materialnych jako: $I = \sum_i m_i r_i^2$, gdzie r_i jest odległością i-tego punktu od osi obrotu, a m_i oznacza masę i-tego punktu. Tak więc, wartość momentu bezwładności będzie zależała od wyboru osi, czyli od rozkładu masy względem osi. Aby się o tym przekonać, weźmy prosty przykład dwóch mas na końcu bezmasowej (o nieistotnie małej masie) sztangi i obliczmy moment bezwładności względem dwóch różnych osi (patrz Rysunek 10.23). W tym przypadku sumowanie jest proste: dwie masy na końcach sztangi można uważać za masy punktowe, a zatem suma ma tylko dwa składniki.

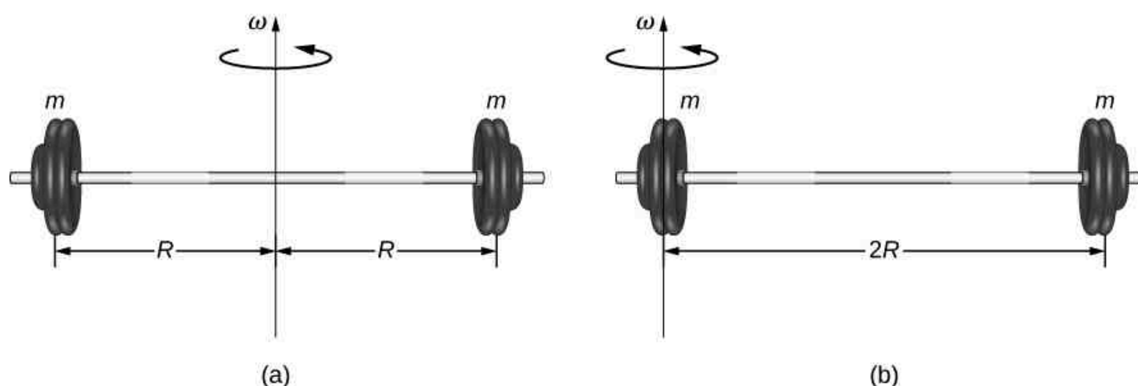
W przypadku osi przechodzącej przez środek sztangi, każda z dwóch mas m jest w takiej samej odległości R od osi, dając moment bezwładności:

$$I_1 = mR^2 + mR^2 = 2mR^2. \tag{10.70}$$

W przypadku, gdy oś umieścimy na jednym z końców sztangi, moment bezwładności jest równy:

$$I_2 = m(0)^2 + (2mR)^2 = 4mR^2. \tag{10.71}$$

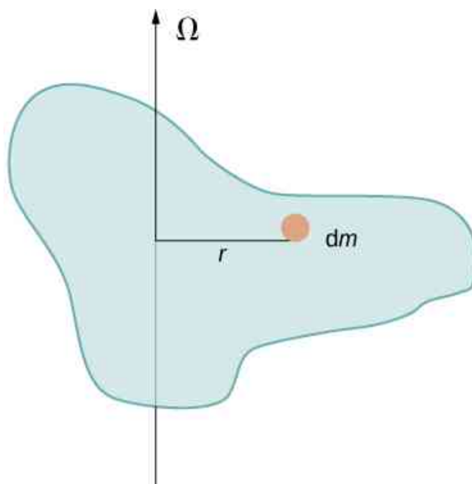
Na podstawie tego wyniku możemy stwierdzić, że znacznie trudniej będzie obrócić sztangę wokół osi przechodzącej przez jej koniec niż wokół osi w połowie jej długości.



Rysunek 10.23 (a) Oś obrotu przechodzi przez środek sztangi; (b) Oś obrotu przechodzi przez jeden z końców sztangi. Prędkość kątowa wynosi ω.

W tym przykładzie mamy dwie masy punktowe, więc suma była łatwa do obliczenia. Jednakże, aby poradzić sobie z obiektami, które nie są punktowe, musimy dokładnie przemyśleć każde z pojęć użytych w równaniu. Równanie wymaga zsumowania wkładów pochodzących od każdego „kawałka masy” znajdującego się w określonej odległości od osi obrotu. Ale co dokładnie oznacza ów każdy „kawałek masy”? Przypomnijmy, że w naszym wyprowadzeniu

tego równania każda masa miała tę samą wartość prędkości, co oznacza, że każdy kawałek musiał mieć jednakową odległość r od osi obrotu. Niestety, nie jest to możliwe. Zatem, musimy zastąpić nasz „kawałek masy” nieskończenie małym fragmentem $\text{d}m$, jak pokazano na Rysunku 10.24.



Rysunek 10.24 Idea użycia nieskończenie małego kawałka masy do obliczenia jego udziału w całkowitym momencie bezwładności.

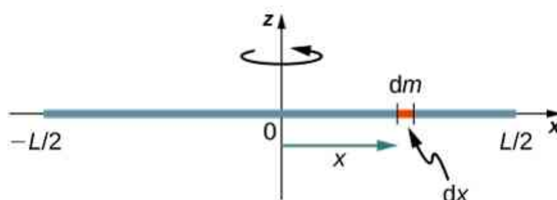
Potrzeba użycia nieskończenie małego kawałka $\text{d}m$ sugeruje, że możemy napisać równanie na moment bezwładności całkując wkłady pochodzące od nieskończenie małych mas, zamiast liczyć dyskretną sumę skończonej liczby mas. Wówczas równanie:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad \text{zmienia się w równanie} \quad I = \int r^2 \text{d}m. \tag{10.72}$$

Jest to ogólna postać równania, pozwalająca na obliczenie momentów bezwładności ciał o złożonych kształtach. W pozostałej części tego rozdziału pokażemy szczegółowo, na konkretnych przykładach, jak liczyć moment bezwładności dla ciał sztywnych o wybranych kształtach.

Moment bezwładności cienkiego pręta względem osi przechodzącej przez jego środek

Rozważmy jednorodny cienki pręt o masie m i długości L, tak jak to pokazano na rysunku (Rysunek 10.25). Zakładamy, że pręt jest tak cienki a jego pole przekroju poprzecznego tak niewielkie, że pręt może być traktowany jako struna rozciągnięta wzdłuż linii prostej. Naszym zadaniem jest obliczenie momentu bezwładności tego pręta względem osi obrotu, która jest prostopadła do pręta i przechodzi przez jego środek. Skierujmy osie układu współrzędnych tak, by oś z była osią obrotu, a oś x prostą, na której leży pręt, tak jak pokazano na rysunku. Wykonamy teraz całkowanie wzdłuż osi x.



Rysunek 10.25 Obliczanie momentu bezwładności dla jednorodnego pręta względem osi prostopadłej do pręta i przechodzącej przez jego środek.

Wybierzmy mały fragment pręta o długości $\text{d}x$ i masie $\text{d}m$. Moment bezwładności jest całką po rozkładzie mas. Jak na razie umiemy jedynie wykonać całkowanie po zmiennych przestrzennych, nie po masie. Musimy zatem znaleźć

sposób na powiązanie masy ze zmiennymi przestrzennymi. Dokonamy tego używając pojęcia **liniowej gęstości masy** (ang. **linear mass density**) λ, czyli masy liczonej na jednostkę długości. Ponieważ pręt jest jednorodny, gęstość pręta jest stała; możemy zatem napisać:

$$\lambda = \frac{m}{l} \quad \text{czyli} \quad m = \lambda l. \tag{10.73}$$

Różniczkując obustronnie otrzymujemy:

$$\mathrm{d}m = \mathrm{d}\left(\lambda l\right) = \lambda \mathrm{d}l, \tag{10.74}$$

ponieważ λ jest wielkością stałą. Zauważmy, że element pręta $\mathrm{d}l$ leży całkowicie wzdłuż osi x i ma długość $\mathrm{d}x$; czyli $\mathrm{d}l = \mathrm{d}x$. Możemy zatem napisać, że $\mathrm{d}m = \lambda\left(\mathrm{d}x\right)$, otrzymując zmienną całkowania, z którą umiemy już sobie poradzić. Odległość każdego fragmentu masy $\mathrm{d}m$ od osi obrotu jest określona przez zmienną x, jak to pokazano na rysunku. Łączymy to wszystko razem i otrzymujemy:

$$I = \int r^2 \mathrm{d}m = \int x^2 \mathrm{d}m = \int x^2 \lambda \mathrm{d}x. \tag{10.75}$$

Określmy teraz granice całkowania. Zgodnie z rysunkiem, pręt rozciąga się od $x = -L/2$ do $x = L/2$, mamy zatem:

$$I = \int\limits_{-L/2}^{L/2} x^2 \lambda \mathrm{d}x = \left[\lambda \frac{x^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{\lambda}{3}\left[\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(\frac{-L}{2}\right)^3\right] = \frac{\lambda}{3} \cdot \frac{L^3}{8} \cdot 2 = \frac{1}{12} mL^2. \tag{10.76}$$

Przejdźmy teraz do obliczenia momentu bezwładności dla tego samego jednorodnego, cienkiego pręta, ale względem innej osi, tak abyśmy mogli porównać wyniki. Spodziewamy się, że moment bezwładności będzie mniejszy względem osi przechodzącej przez środek pręta niż względem osi przechodzącej przez jego koniec, podobnie jak w przypadku sztangi omawianej na początku tego podrozdziału. Spodziewamy się tego, ponieważ większość masy jest rozłożona dalej od osi obrotu.

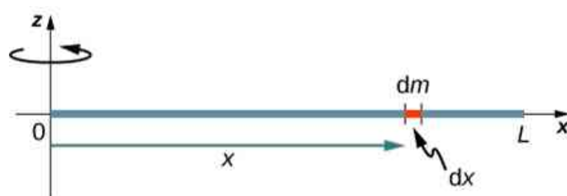
Moment bezwładności cienkiego pręta względem osi przechodzącej przez jeden z jego końców

Rozpatrzmy teraz ten sam jednorodny pręt o masie m i długości L, lecz tym razem umieścimy oś obrotu na jednym z jego końców (patrz Rysunek 10.26). Wyznaczmy moment bezwładności pręta względem tej osi. Zdefiniujemy $\mathrm{d}m$ jako nieskończenie mały fragment masy naszego pręta. Podobnie jak poprzednio otrzymamy:

$$I = \int r^2 \mathrm{d}m = \int x^2 \mathrm{d}m = \int x^2 \lambda \mathrm{d}x. \tag{10.77}$$

Jednak tym razem mamy inne granice całkowania. Pręt rozciąga się od $x = 0$ do $x = L$, ponieważ oś jest umieszczona na końcu pręta w $x = 0$. Dlatego otrzymujemy:

$$I = \int\limits_{0}^{L} x^2 \lambda \mathrm{d}x = \left[\lambda \frac{x^3}{3}\right]_0^L = \frac{\lambda}{3}\left(L^3 - 0^3\right) = \frac{\lambda}{3} \cdot L^3 = \frac{1}{3} mL^2. \tag{10.78}$$



Rysunek 10.26 Obliczanie momentu bezwładności dla jednorodnego pręta względem osi prostopadłej do pręta i przechodzącej przez jego koniec.

Zauważmy, że „bezwładność obrotowa” pręta przy obrotach względem jego końca jest czterokrotnie większa niż „bezwładność obrotowa” dla obrotów wokół jego środka.

Twierdzenie Steinera

Podobieństwo między procesem obliczania momentu bezwładności pręta względem osi przechodzącej przez jego środek i względem osi przechodzącej przez jego koniec jest uderzające i sugeruje, że może istnieć prostsza metoda wyznaczenia momentu bezwładności pręta wokół dowolnej osi równoległej do osi przechodzącej przez środek masy. Taka oś jest nazywana **osią równoległą** (ang. **parallel axis**). Istnieje twierdzenie pozwalające nam wyznaczyć moment bezwładności względem osi równoległej do osi przechodzącej przez środek masy, jeżeli znamy moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy. Jest to **twierdzenie Steinera** (ang. **parallel axis theorem**, **Steiner's theorem**), które podamy tu bez dowodu.

Twierdzenie Steinera

Moment bezwładności względem osi równoległej do osi przechodzącej przez środek masy jest sumą momentu bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy oraz iloczynu masy i kwadratu odległości pomiędzy osiami:

$$I_{\text{oś równoległa}} = I_{\text{środek masy}} + md^2. \tag{10.79}$$

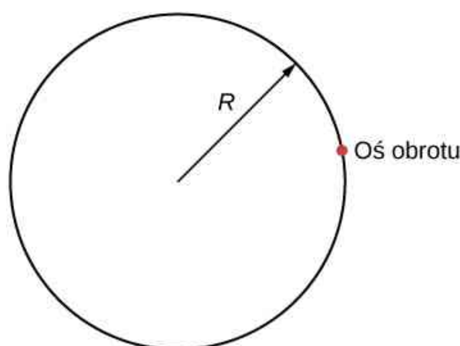
Zastosujmy to twierdzenie do wyznaczenia momentu bezwładności rozważanego poprzednio pręta:

$$I_{\text{koniec}} = I_{\text{środek masy}} + md^2 = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right)mL^2 = \frac{1}{3}mL^2. \tag{10.80}$$

Wynik ten jest zgodny z poprzednimi, znacznie dłuższymi obliczeniami. To przydatne twierdzenie zastosujemy też w kolejnych przykładach.

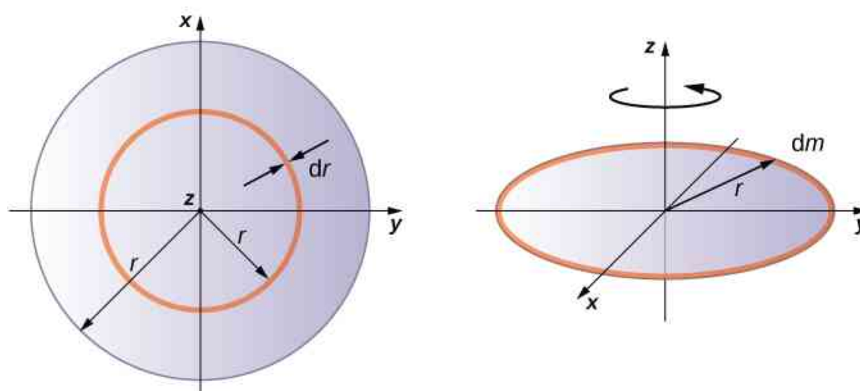


10.5 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Jaki jest moment bezwładności walca o promieniu R i masie m liczony względem osi przechodzącej przez punkt na jego powierzchni, jak pokazano na poniższym rysunku? Oś jest prostopadła do płaszczyzny rysunku.



Moment bezwładności jednorodnej tarczy względem osi przechodzącej przez jej środek

Całkowanie w celu wyznaczenia momentu bezwładności obiektu dwuwymiarowego jest nieco trudniejsze, ale na tym poziomie studiów zwykle wykonuje się jeden przykład, mianowicie wyznaczenie momentu bezwładności jednorodnej cienkiej tarczy obracającej się wokół osi przechodzącej przez jej środek (Rysunek 10.27).



Rysunek 10.27 Obliczanie momentu bezwładności cienkiej tarczy względem osi przechodzącej przez jej środek.

Ponieważ tarcza jest cienka, możemy założyć, że jej masa rozmieszczona jest całkowicie w płaszczyźnie xy. Zaczynamy od zdefiniowania **powierzchniowej gęstości masy** (ang. **surface mass density**), czyli masy na jednostkę powierzchni. Ponieważ tarcza jest jednorodna, to gęstość powierzchniowa σ jest stała:

$$\sigma = \frac{m}{S} \quad \text{czyli} \quad \sigma S = m, \quad \text{stąd} \quad \mathrm{d}m = \sigma\left(\mathrm{d}S\right). \tag{10.81}$$

Obszar zajmowany przez tarczę można uznać za złożony z szeregu cienkich pierścieni, z których każdy ma szerokość $\mathrm{d}r$ i masę $\mathrm{d}m$ równomiernie rozłożoną na okręgu o promieniu R, tak jak to pokazano na Rysunku 10.27. Powierzchnia każdego pierścienia $\mathrm{d}S$ jest zatem iloczynem długości każdego pierścienia $(2\pi r)$ i jego szerokości $\mathrm{d}r$:

$$S = \pi r^2, \quad \text{stąd} \quad \mathrm{d}S = \mathrm{d}\left(\pi r^2\right) = \pi \mathrm{d}\left(r^2\right) = 2\pi r \mathrm{d}r. \tag{10.82}$$

Powierzchnia tarczy jest sumą powierzchni wszystkich cienkich pierścieni o promieniu od 0 do R, które są naszym granicami całkowania dla $\mathrm{d}r$, tzn. całkujemy od $r = 0$ do $r = R$. Biorąc to wszystko po uwagę otrzymujemy:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^R r^2 \sigma \cdot 2\pi r \,\mathrm{d}r = 2\pi\sigma \int_0^R r^3 \,\mathrm{d}r = 2\pi\sigma \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R \\ &= 2\pi\sigma\left(\frac{R^4}{4} - \frac{0}{4}\right) = 2\pi \cdot \frac{m}{S} \cdot \frac{R^4}{4} \\ &= 2\pi \cdot \frac{m}{\pi R^2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} m R^2. \end{aligned} \tag{10.83}$$

Zauważmy, że wynik jest zgodny z rezultatem podanym na Rysunku 10.20.

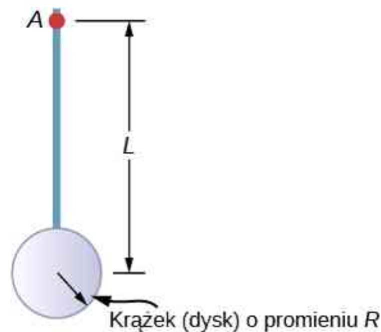
Obliczanie momentu bezwładności układów złożonych

Rozpatrzmy teraz obiekt złożony, taki jak na rysunku poniżej. Rysunek przedstawia cienką tarczę na końcu cienkiego pręta. Nie można tego łatwo scałkować w celu wyznaczenia momentu bezwładności, ponieważ nie jest to obiekt o jednolitym kształcie. Jeśli jednak wrócimy do pierwotnej definicji momentu bezwładności jako sumy, możemy przypuścić, że moment bezwładności obiektu złożonego można wyznaczyć jako sumę momentów bezwładności każdej z jego części:

$$I_{\text{całkowite}} = \sum_i I_i. \tag{10.84}$$

Należy dodać, że momenty bezwładności obiektów w (Równaniu 10.84) dotyczą momentów bezwładności liczonych

względem wspólnej osi. W przypadku tego obiektu byłby to pręt o długości L obracający się wokół jego końca, oraz cienki krążek o promieniu R, obracający się wokół osi przesuniętej od środka masy krążka o odległość $L + R$. Oznaczmy masę pręta jako m_r, a masę krążka jako m_d .



Rysunek 10.28 Obiekt złożony składający się z krążka zawieszonego na końcu pręta. Oś obrotu jest prostopadła do płaszczyzny rysunku i przechodzi przez punkt A.

Oś przechodzi przez koniec pręta, więc jego moment bezwładności względem tej osi jest równy $m_r L/2$. Aby wyznaczyć moment bezwładności krążka względem podanej osi, musimy zastosować twierdzenie Steinera. Moment bezwładności krążka liczony względem osi przechodzącej przez jego środek masy ma wartość $m_d R^2/2$; po zastosowaniu twierdzenia Steinera $I_{\text{oś równoległa}} = I_{\text{środek masy}} + md^2$ otrzymamy:

$$I_{\text{oś równoległa}} = \frac{1}{2} m_{\text{d}} R^2 + m_{\text{d}} (L + R)^2. \tag{10.85}$$

Dodając moment bezwładności pręta do momentu bezwładności krążka przy przesuniętej osi obrotu stwierdzimy, że moment bezwładności dla przedmiotu złożonego jest równy:

$$I_{\text{całkowity}} = \frac{1}{3} m_{\text{r}} L^2 + \frac{1}{2} m_{\text{d}} R^2 + m_{\text{d}} (L + R)^2. \tag{10.86}$$

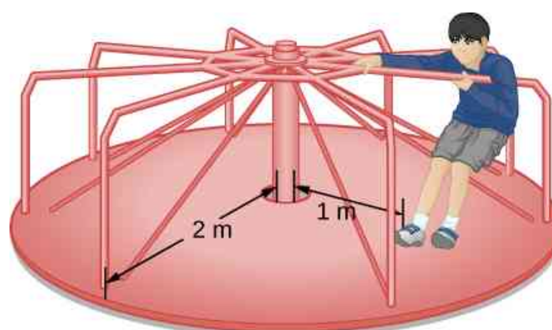
Obliczanie momentu bezwładności przy rozwiązywaniu zadań

Rozpatrzmy teraz kilka praktycznych zastosowań obliczeń momentu bezwładności.

Przykład 10.11

Dziecko na karuzeli

Dziecko o masie 25 kg siedzi na karuzeli w odległości $r = 1{,}0\ \text{m}$ od jej osi obrotu (Rysunek 10.29). Karuzelę możemy rozpatrywać jako jednolitą tarczę o promieniu 2,0 m i masie 500 kg. Wyznacz moment bezwładności tego układu.



Rysunek 10.29 Obliczanie momentu bezwładności dla dziecka na karuzeli.

Strategia rozwiązania

W tym zadaniu mamy obliczyć moment bezwładności całego układu. Mamy podaną masę i odległość dziecka do osi obrotu, a także masę i promień karuzeli. Ponieważ masa i rozmiar dziecka są znacznie mniejsze niż karuzeli, możemy rozpatrywać dziecko jako masę punktową. Wprowadźmy oznaczenia dla danych: $m_c = 25\,\text{kg}$, $r_c = 1{,}0\,\text{m}$, $m_m = 500\,\text{kg}$, $r_m = 2{,}0\,\text{m}$.

Naszym celem jest wyznaczenie całkowitego momentu bezwładności układu $I_{\text{całkowity}} = \sum_i I_i$.

Rozwiązanie

Moment bezwładności dziecka $I_{\text{c}} = m_{\text{c}} r^2$, a karuzeli $I_m = m_m r^2/2$, stąd:

$$\begin{aligned} I_{\text{całkowity}} &= 25\,\text{kg} \cdot (1\,\text{m})^2 + \frac{1}{2} \cdot 500\,\text{kg} \cdot (2\,\text{m})^2 \\ &= 25\,\text{kg} \cdot \text{m}^2 + 1000\,\text{kg} \cdot \text{m}^2 = 2025\,\text{kg} \cdot \text{m}^2. \end{aligned} \tag{10.87}$$

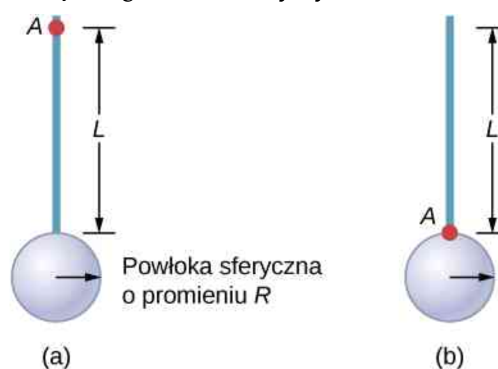
Znaczenie

Wartość $I_{\text{całkowity}}$ powinna być zbliżona do momentu bezwładności pustej karuzeli, ponieważ karuzela ma dużo większą masę niż położona dalej od osi obrotu masa dziecka.

Przykład 10.12

Pręt i cienka powłoka sferyczna

Wyznacz moment bezwładności układu: pręt połączony z cienką powłoką sferyczną. Obliczeń dokonaj dla dwóch przypadków pokazanych na rysunku poniżej. Oś jest prostopadła do rysunku i umieszczona w punkcie A. Pręt ma długość 0,5 m i masę 2,0 kg. Promień sfery wynosi 20,0 cm i ma ona masę 1,0 kg.



Strategia rozwiązania

Ponieważ w obu przypadkach mamy złożony obiekt, możemy użyć twierdzenia Steinera do wyznaczenia momentu bezwładności względem każdej osi. W przypadku (a) środek masy sferycznej powłoki znajduje się w odległości $L + R$ od osi obrotu. W przypadku (b) środek masy sferycznej powłoki znajduje się w odległości R od osi obrotu. W obu przypadkach moment bezwładności pręta jest momentem bezwładności liczonym względem osi przechodzącej przez jego koniec. Informacje na temat momentów bezwładności poszczególnych obiektów można znaleźć w podrozdziale Moment bezwładności i energia kinetyczna w ruchu obrotowym.

Rozwiązanie

a. $I_{\text{całkowity}} = \sum_i I_i = I_{\text{pręt}} + I_{\text{powłoka}}$,

$I_{\text{sfera}} = I_{\text{środek masy}} + m_{\text{sfera}}(L+R)^2 = \frac{2}{5} m_{\text{sfera}} R^2 + m_{\text{sfera}}(L+R)^2$,

$I_{\text{całkowity}} = I_{\text{pręt}} + I_{\text{sfera}} = \frac{1}{3} m_{\text{pręt}} L^2 + \frac{2}{5} m_{\text{sfera}} R^2 + m_{\text{sfera}}(R+L)^2$,

$I_{\text{całkowity}} = \frac{1}{3} \cdot 2{,}0\,\text{kg} \cdot (0{,}5\,\text{m})^2 + \frac{2}{5} \cdot 1{,}0\,\text{kg} \cdot (0{,}2\,\text{m})^2 + 1{,}0\,\text{kg} \cdot (0{,}5\,\text{m} + 0{,}2\,\text{m})^2$,

$I_{\text{całkowty}} = 0{,}167\,\text{kg} \cdot \text{m}^2 + 0{,}016\,\text{kg} \cdot \text{m}^2 + 0{,}490\,\text{kg} \cdot \text{m}^2 = 0{,}673\,\text{kg} \cdot \text{m}^2$.

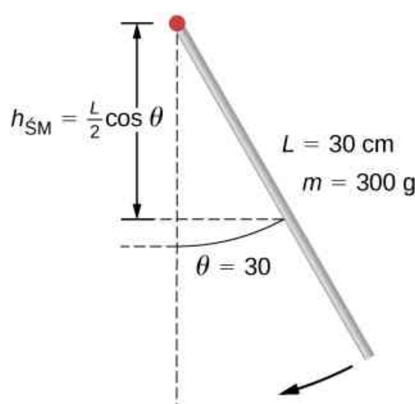
b. $I_{\text{sfera}} = \frac{2}{5}m_{\text{sfera}}R^2 + m_{\text{sfera}}R^2$, $I_{\text{całkowity}} = I_{\text{pręt}} + I_{\text{sfera}} = \frac{1}{3}m_{\text{pręt}}L^2 + \frac{2}{5}m_{\text{sfera}}R^2 + m_{\text{sfera}}R^2$,
$I_{\text{całkowity}} = \frac{1}{3} \cdot 2{,}0\text{ kg} \cdot (0{,}5\text{ m})^2 + \frac{2}{5} \cdot 1{,}0\text{ kg} \cdot (0{,}2\text{ m})^2 + 1{,}0\text{ kg} \cdot (0{,}2\text{ m})^2$,
$I_{\text{całkowity}} = 0{,}167\text{ kg} \cdot \text{m}^2 + 0{,}016\text{ kg} \cdot \text{m}^2 + 0{,}04\text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Znaczenie

Wykorzystanie twierdzenia Steinera ułatwia obliczenie momentu bezwładności obiektów złożonych. Widzimy, że moment bezwładności jest większy w przypadku (a) niż w przypadku (b). Dzieje się tak, ponieważ w przypadku (b) oś obrotu jest bliżej środka masy systemu. Prostą analogią jest tu moment bezwładności pręta. Moment bezwładności względem końca wynosi $mL^2/3$, a moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy wynosi $mL^2/12$.

Przykład 10.13

Prędkość kątowa wahadła. Wahadło w kształcie pręta (Rysunek 10.30) wychylono o kąt 30°, a następnie puszczono swobodnie. Wahadło ma długość 30 cm i masę 300 g. Jaka jest jego prędkość kątowa w najniższym punkcie?



Rysunek 10.30 Wahadło w kształcie pręta puszczone swobodnie.

Strategia rozwiązania

Zmiana energii potencjalnej wahadła jest równa zmianie jego energii kinetycznej ruchu obrotowego $\Delta E_p + \Delta E_k = 0$.

Rozwiązanie

W maksymalnym wychyleniu energia potencjalna wahadła wynosi $E_p = mgh_{ŚM} = mg\,(L/2)\cos\theta$. W najniższym położeniu $E_p = mgL/2$.

W maksymalnym wychyleniu energia kinetyczna wahadła wynosi $E_k = 0$, a w najniższym $E_k = I\omega^2/2$. Tak więc:

$$\Delta E_p + \Delta E_k = 0 \implies \left[mg\frac{L}{2} \cdot (1 - \cos\theta) - 0\right] + \left(0 - \frac{1}{2}I\omega^2\right) = 0, \quad (10.88)$$

stąd:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = mg\frac{L}{2} \cdot (1 - \cos\theta). \quad (10.89)$$

Wyliczając z powyższych równań ω otrzymujemy:

$$\omega = \sqrt{mg\frac{L}{I}(1 - \cos\theta)} = \sqrt{mg\frac{L}{1/3mL^2}(1 - \cos\theta)} = \sqrt{g\frac{3}{L}(1 - \cos\theta)}. \quad (10.90)$$

Wstawiając wartości numeryczne otrzymujemy:

$$\omega = \sqrt{9{,}8\ \mathrm{m/s^2} \cdot \frac{3}{0{,}3\ \mathrm{m}} \cdot (1 - \cos 30^\circ)} = 3{,}6\ \mathrm{rad/s}. \quad (10.91)$$

Znaczenie

Należy zauważyć, że prędkość kątowa wahadła nie zależy od jego masy.

10.6 | Moment siły

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

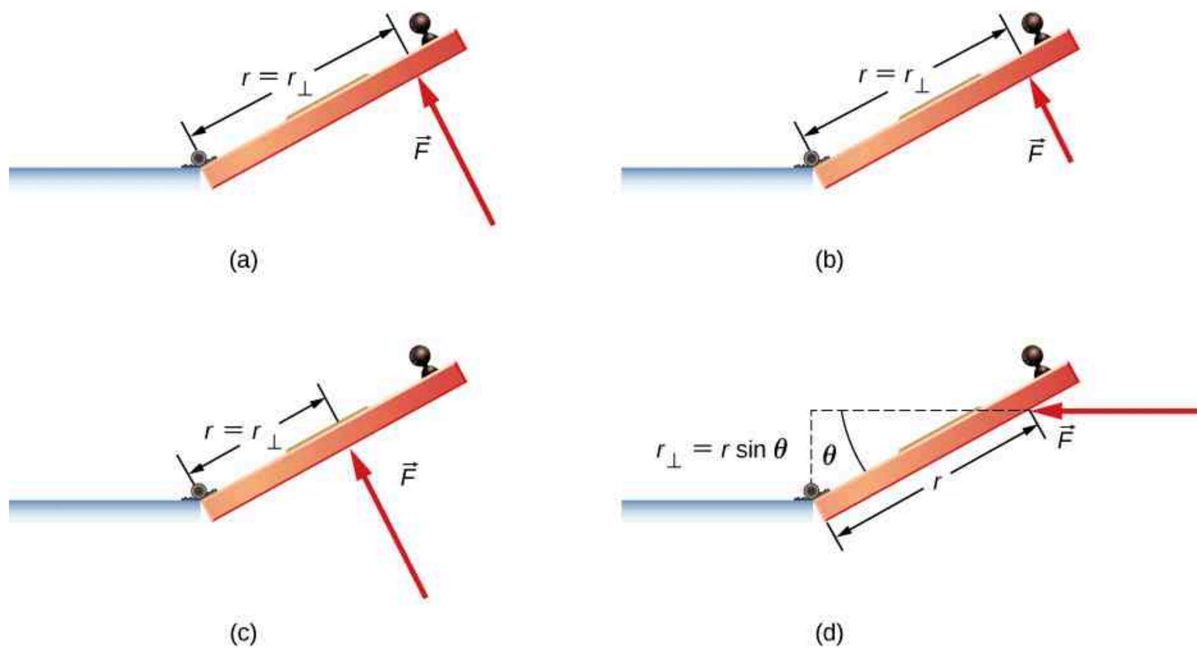
- opisywać, jak wartość momentu siły zależy od wartości ramienia siły i kąta, jaki tworzy wektor siły z ramieniem siły;
- określać znak (dodatni lub ujemny) momentu siły używając reguły prawej dłoni;
- obliczać poszczególne momenty siły wokół wspólnej osi i sumować je w celu uzyskania wypadkowego momentu siły.

Ważną wielkością związaną z dynamiką ruchu obrotowego ciała sztywnego jest moment siły, nazywany też momentem obrotowym. Efekty jego działania można obserwować na co dzień w naszym najbliższym otoczeniu. Moment siły odczuwamy używając dużego klucza do wykręcenia trudnej do odkręcenia śruby. Działa on w niewidoczny sposób, gdy naciskamy pedał gazu w samochodzie nadając silnikowi dodatkowy moment obrotowy. Za każdym razem, gdy spacerujemy, czy biegniemy, towarzyszy temu moment siły przyłożony do naszego ciała. W tym podrozdziale zdefiniujemy moment siły i metody jego obliczania dla brył sztywnych obracających się wokół stałej osi.

Definicja momentu siły

Do tej pory zdefiniowaliśmy wiele zmiennych obrotowych będących odpowiednikami zmiennych w ruchu postępowym. Zastanówmy się teraz, co jest odpowiednikiem siły. Ponieważ siły zmieniają ruch postępowy obiektów, odpowiednikiem w ruchu obrotowym musi być wielkość zmieniająca ruch obrotowy obiektu wokół osi. Jest to **moment siły** (ang. **torque**).

W codziennym życiu obracamy różne obiekty wokół ich osi, przez co intuicyjnie wiemy już wiele o momencie siły. Zastanówmy się na przykład, jak obracamy drzwi, aby je otworzyć. Po pierwsze, wiemy, że drzwi otwierają się powoli, jeśli naciskamy na nie zbyt blisko zawiasów. Łatwiejsze jest otwieranie drzwi przez naciskanie z dala od zawiasów. Po drugie, wiemy, że powinniśmy naciskać prostopadle do płaszczyzny drzwi. Jeśli naciskamy równolegle do płaszczyzny drzwi, nie jesteśmy w stanie ich otworzyć. Po trzecie, im większa jest siła, tym skuteczniej otwieramy drzwi; im mocniej naciskamy, tym szybciej drzwi ustępują. Pierwszy punkt oznacza, że im dalej od osi obrotu znajduje się punkt przyłożenia siły, tym większe jest przyspieszenie kątowe drzwi. Drugi oznacza, że skuteczność zależy od kąta, pod którym siła jest przyłożona. Trzeci oznacza, że musimy uwzględnić także wartość siły. Zauważmy, że dla obrotów w płaszczyźnie możliwe są dwa kierunki obrotu: zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara albo przeciwny, a tym samym dwa kierunki momentu siły. Rysunek 10.31 przedstawia obroty w lewo.



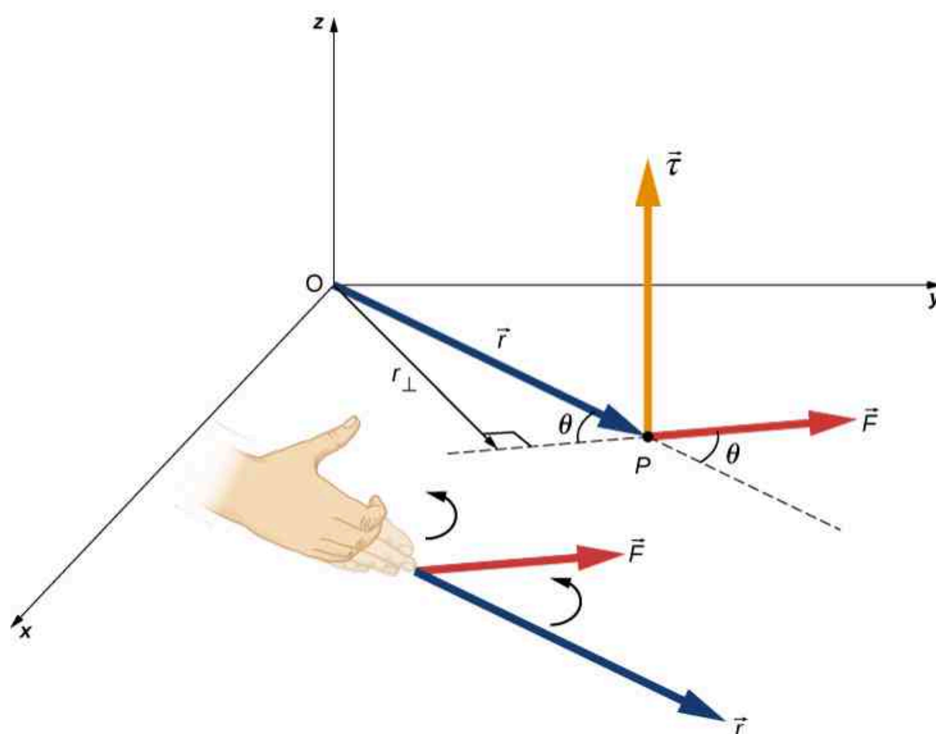
Rysunek 10.31 Od wartości momentu siły zależy skuteczność obrotu lub skrętu. Na rysunku przedstawiono to na przykładzie otwierania drzwi (widok z góry). Moment siły ma zarówno wartość, jak i kierunek. (a) i (b) Obroty w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara są wytwarzane przez siłę $\vec{F}$, działającą w odległości r od zawiasów (punkt obrotu). (b) Zmniejszenie wartości siły zmniejsza wartość momentu siły, trudniej otworzyć drzwi. (c) Ta sama siła jak w (a) i (b) powoduje mniejszy moment sił, gdy jest przyłożona w mniejszej odległości od zawiasów. d) Mniejszy moment siły jest wytwarzany przez tę samą siłę co w (a), przyłożoną w tej samej odległości co w (a), ale pod kątem θ mniejszym niż 90°.

Rozważmy teraz, jak zdefiniować momenty siły w ogólnym trójwymiarowym przypadku.

Definicja momentu siły

Momentem siły $\vec{F}$ względem punktu O, działającym w punkcie P, nazywamy wielkość wektorową $\vec{M}$ zdefiniowaną jako iloczyn wektorowy wektora położenia punktu P (wektor $\vec{r}$) względem punktu O i wektora siły $\vec{F}$ (patrz Rysunek 10.32):

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{10.92}$$



Rysunek 10.32 Moment siły $\vec{M}$ jest prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{r}$ i $\vec{F}$. Jego zwrot określić można przy pomocy reguły prawej dłoni.

Z definicji iloczyn wektorowy $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ jest wektorem prostopadłym do wektorów $\vec{r}$ i $\vec{F}$. Jego wartość jest równa:

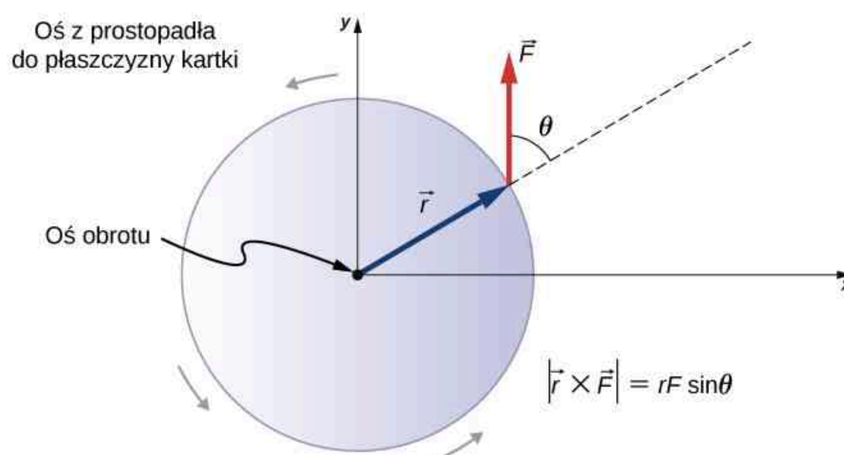
$$\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{r} \times \vec{F}\right| = rF \sin\theta, \tag{10.93}$$

gdzie θ jest kątem pomiędzy wektorami $\vec{r}$ i $\vec{F}$. W układzie jednostek SI jednostką momentu siły jest $\mathrm{N \cdot m}$. Wielkość $r_\perp = r \sin\theta$ jest odległością punktu O od prostej, na której leży siła $\vec{F}$. Nazywamy ją **ramieniem siły** (ang. **arm force**). Im większa wartość ramienia siły, tym większa wartość momentu siły. Tak więc wartość momentu siły można przedstawić jako:

$$\left|\vec{M}\right| = r_\perp F. \tag{10.94}$$

Iloczyn wektorowy $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ wskazuje nam także znak momentu siły $\vec{M}$. Przedstawiony na Rysunku 10.32 iloczyn wektorowy $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ skierowany jest wzdłuż dodatniej części osi z;w oparciu o przyjętą konwencję uważamy go za dodatni. Jeśli ma zwrot przeciwny, to mówimy, że ma wartość ujemną.

Jeśli weźmiemy pod uwagę krążek, który może swobodnie obracać się wokół osi przechodzącej przez jego środek, jak pokazano na Rysunku 10.33, to możemy zobaczyć, jak kąt między promieniem $\vec{r}$ a siłą $\vec{F}$ wpływa na wartość momentu siły. Jeśli kąt jest równy zero, moment siły wynosi zero. Jeśli kąt wynosi $90°$, to moment siły jest maksymalny. Moment siły przedstawiony na Rysunku 10.33 jest dodatni i skierowany przed płaszczyznę rysunku, wzdłuż dodatniego zwrotu osi z. W wyniku działania tego momentu siły krążek obraca się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara – w tym samym kierunku, co działanie momentu siły nadającej dodatnie przyspieszenie kątowe.



Rysunek 10.33 Krążek może swobodnie obracać się wokół osi przechodzącej przez jego środek. Wartość momentu siły działającego na krążek wynosi $rF \sin\theta$. Gdy $\theta = 0^\circ$, moment siły wynosi zero, a krążek nie obraca się. Gdy $\theta = 90^\circ$, moment siły jest maksymalny, a krążek obraca się z maksymalnym przyspieszeniem kątowym.

Jeżeli na ciało sztywne obracające się wokół danej osi działają różne siły i związane z nimi momenty sił, to wypadkowy moment sił będzie sumą wektorową poszczególnych momentów siły.

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i \tag{10.95}$$

Obliczanie wartości wypadkowego momentu siły w przypadku obrotów ciał sztywnych wokół stałej osi

W poniższych przykładach obliczamy moment siły zarówno dla przykładów czysto rachunkowych, jak i dla występujących w ruchu obrotowym ciała sztywnego.

Najpierw przedstawimy strategię rozwiązywania zadań.

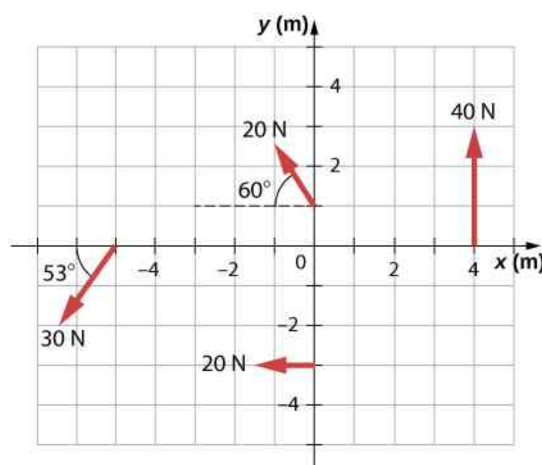
Strategia rozwiązywania zadań: wyznaczanie wypadkowego momentu siły

1. Wybierz układ współrzędnych z punktem obrotu lub osią obrotu jako początkiem wybranego układu współrzędnych.
2. Określ kąt między wektorem położenia punktu, w którym przyłożona jest siła, a wektorem siły.
3. Oblicz iloczyn wektorowy $\vec{r} \times \vec{F}$, aby określić, czy moment siły względem punktu obrotu lub osi obrotu jest dodatni czy ujemny.
4. Wyznacz wartość momentu siły M korzystając z wartości $r_\perp$ i F.
5. Przypisz odpowiedni znak, dodatni lub ujemny, do obliczonej wartości M.
6. Dodaj wszystkie momenty sił, aby wyznaczyć wartość wypadkowego momentu siły. Założyliśmy tutaj, że mamy do czynienia z układem liniowym, dlatego wartość wypadkowego momentu siły może być obliczona jako suma wszystkich momentów sił. Jest to przykład popularnej w fizyce zasady superpozycji, którą stosuje się tylko dla układów liniowych. W rzeczywistości jednak większość układów to układy nieliniowe, dla których z tej zasady skorzystać nie możemy.

Przykład 10.14

Obliczanie momentu siły

Na rysunku poniżej pokazano cztery siły o różnych orientacjach w danym układzie współrzędnych xy, przyłożone w określonych miejscach. Znajdź moment siły dla każdej z nich, a następnie wyznacz wypadkowy moment siły.



Rysunek 10.34 Cztery siły przyczyniające się do wypadkowego momentu siły.

Strategia rozwiązania

W tym zadaniu mamy obliczyć wypadkowy moment sił. Wszystkie znane wielkości – wartości sił z kierunkami ich działania oraz ramionami sił – podano na rysunku. Celem jest wyznaczenie wartości każdego momentu siły i wypadkowego momentu poprzez zsumowanie poszczególnych momentów sił. Uważaj, aby przypisać prawidłowy znak każdemu momentowi, używając iloczynu wektorowego wektora $\vec{r}$ i wektora $\vec{F}$.

Rozwiązanie

Wartość momentu siły wyznaczymy z zależności $\left|\vec{M}\right| = r_{\perp} F$, a znak ustalimy na podstawie iloczynu wektorowego $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$.

1. Dla siły o wartości 40 N przyłożonej w pierwszej ćwiartce otrzymujemy: $M_1 = 4\text{ m} \cdot 40\text{ N} \cdot \sin 90^\circ = 160\text{ N} \cdot \text{m}$. Iloczyn wektorowy $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ skierowany jest przed rysunek, jest więc dodatni.
2. Dla siły o wartości 20 N przyłożonej w trzeciej ćwiartce: $M_2 = -3\text{ m} \cdot 20\text{ N} \cdot \sin 90^\circ = -60\text{ N} \cdot \text{m}$. Iloczyn wektorowy $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ jest skierowany za rysunek, moment ujemny.
3. Dla siły o wartości 30 N przyłożonej w trzeciej ćwiartce otrzymamy: $M_3 = 4\text{ m} \cdot 30\text{ N} \cdot \sin 53^\circ = 120\text{ N} \cdot \text{m}$. Iloczyn wektorowy $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ jest skierowany przed rysunek, moment dodatni.
4. Dla siły o wartości 20 N przyłożonej w drugiej ćwiartce otrzymamy: $M_4 = 1\text{ m} \cdot 20\text{ N} \cdot \sin 30^\circ = 10\text{ N} \cdot \text{m}$. Iloczyn wektorowy $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ jest skierowany przed rysunek, moment dodatni.
5. Wartość wypadkowego momentu sił jest równa: $M_{\text{wyp}} = \sum_{i=1}^{4} M_i = 160\text{ N} \cdot \text{m} - 60\text{ N} \cdot \text{m} + 120\text{ N} \cdot \text{m} + 10\text{ N} \cdot \text{m} = 230\text{ N} \cdot \text{m}$.

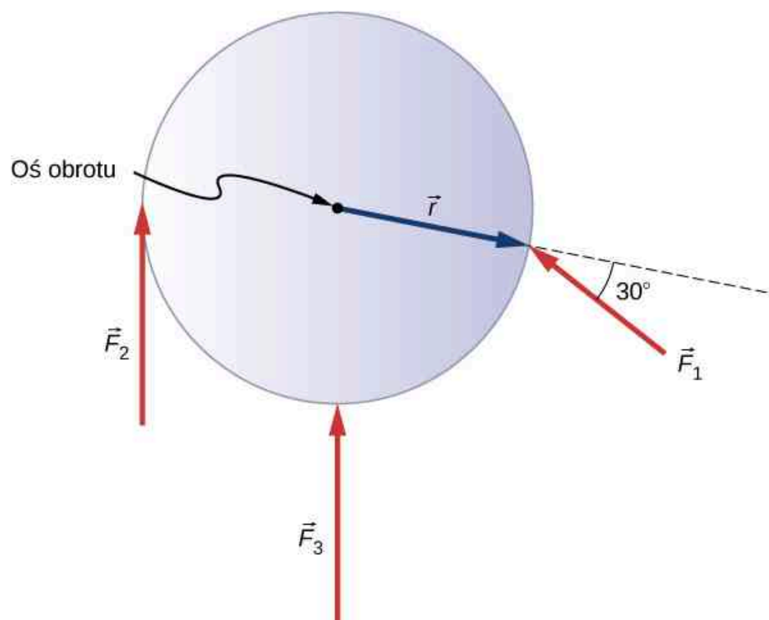
Znaczenie

Zauważmy, że moment każdej siły działającej w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara jest dodatni, podczas gdy moment siły działającej w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara jest ujemny. Moment obrotowy jest większy, gdy siła lub ramię siły są większe.

Przykład 10.15

Obliczanie momentu siły działającej na ciało sztywne

Na rysunku poniżej przedstawiono trzy siły o różnej wartości i kierunku, działające na koło zamachowe. Dane są: $\left|\vec{F}_1\right| = 20\,\text{N}$, $\left|\vec{F}_2\right| = 30\,\text{N}$, $\left|\vec{F}_3\right| = 30\,\text{N}$ oraz $r = 0{,}5\,\text{m}$. Wyznacz wypadkowy moment tych sił względem osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez środek koła.



Rysunek 10.35 Trzy siły działające na koło zamachowe.

Strategia rozwiązania

Korzystając z iloczynu wektorowego wyliczamy momenty sił dla każdej z sił z osobna. Następnie wyznaczamy moment wypadkowy jako sumę momentów siły dla poszczególnych sił.

Rozwiązanie

Rozwiązanie rozpocznijmy od wyznaczenia momentu siły $\vec{F}_1$. Widzimy, że siła $\vec{F}_1$ tworzy kąt $90^\circ + 60^\circ$ z wektorem $\vec{r}$. Zatem wartość momentu siły $\vec{F}_1$ wyraża się zależnością:

$$\left|\vec{M}_1\right| = rF_1 \sin 150^\circ = 0{,}5\,\text{m} \cdot 20\,\text{N} \cdot 0{,}5 = 5{,}0\,\text{N} \cdot \text{m}. \tag{10.96}$$

Następnie wyliczamy moment dla siły $\vec{F}_2$. Kąt pomiędzy siłą $\vec{F}_2$ i wektorem $\vec{r}$ wynosi 90°, a iloczyn wektorowy skierowany jest w stronę rysunku, więc jest ujemny. Jego wartość wynosi:

$$\left|\vec{M}_2\right| = -rF_2 \sin 90^\circ = -0{,}5\,\text{m} \cdot 30\,\text{N} = -15{,}0\,\text{N} \cdot \text{m}. \tag{10.97}$$

W przypadku siły $\vec{F}_3$ widzimy, że jest prostopadła do wektora $\vec{r}$, zatem $\vec{r} \times \vec{F}_3 = 0$. Tak więc siła $\vec{F}_3$ nie przyczynia się do momentu wypadkowego.

Wartość wypadkowego momentu pędu jest zatem równa:

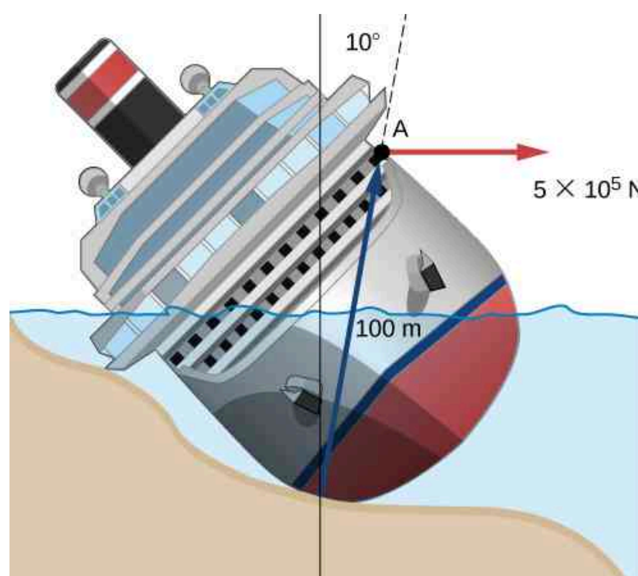
$$M_{\text{wyp}} = \sum_{i=1}^{3} M_i = 5\,\text{N} \cdot \text{m} - 15\,\text{N} \cdot \text{m} + 0\,\text{N} \cdot \text{m} = -10\,\text{N} \cdot \text{m}. \quad (10.98)$$

Znaczenie

Oś obrotu koła zamachowego przechodzi przez środek masy. Koło zamachowe umieszczone jest na stałej osi, a więc nie może poruszać się ruchem postępowym. Gdyby koło nie było zamocowane na nieruchomej osi i położono by go na chropowatej powierzchni (występuje tarcie między kołem a powierzchnią) wówczas siły $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ spowodowałyby ruch koła po tej powierzchni. W takim przypadku każdy punkt koła uczestniczyłby w dwóch ruchach jednocześnie: w ruchu postępowym i w ruchu obrotowym.



10.6 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Duży statek oceaniczny opływając wybrzeże zderza się ze skałą, osiada na mieliźnie i przechyla się, tak jak to pokazano na Rysunku 10.36. Zespół ratowniczy ma za zadanie obrócić statek w celu ustawienia go pionowo na wodzie. Dlatego w punkcie A należy przyłożyć siłę o wartości $5{,}0 \cdot 10^5$ N. Oblicz, jaki jest moment tej siły względem podłoża (patrz rysunek).



Rysunek 10.36 Statek osiadł na mieliźnie i się przechylił. Przywrócenie go do pozycji pionowej wymaga zastosowania momentu siły przyłożonego do punktu A.

10.7 | Druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego

Cel dydaktyczny

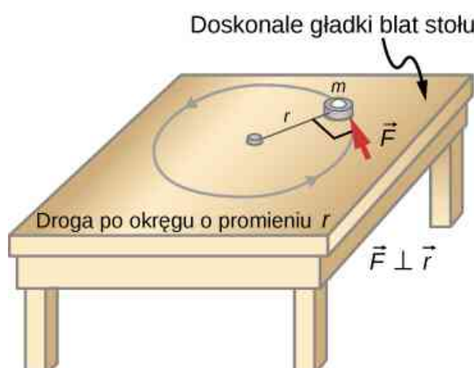
W tym podrozdziale nauczysz się:

- obliczać, w celu wyznaczenia przyspieszenia kątowego, moment siły dla układu ciał obracających się wokół ustalonej osi;
- wyjaśniać, jak zmiany momentu bezwładności układu wpływają na przyspieszenie kątowe przy stałej wartości momentu siły;
- analizować dynamikę ruchu obrotowego na podstawie wszystkich informacji omawianych do tej pory.

Do tej pory analizowaliśmy energię kinetyczną ruchu postępowego i ruchu obrotowego, ale nie powiązaliśmy ich jeszcze z siłami i momentami sił działających na układ. W tym podrozdziale wprowadzimy równanie analogiczne do drugiej zasady dynamiki Newtona dla ruchu postępowego i zastosujemy je do analizy dynamiki ciał sztywnych obracających się wokół stałej osi.

Równanie Newtona dla ruchu obrotowego

Dotychczas wiele z omówionych wielkości używanych do opisu ruchu obrotowego ma swoje odpowiedniki w wielkościach opisujących ruch postępowy. Ostatnią taką wielkością, którą omawialiśmy, był moment siły – obrotowy odpowiednik siły. Powstaje pytanie: czy dla ruchu obrotowego istnieje równanie analogiczne do drugiego prawa Newtona dla ruchu postępowego, $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, które zawiera moment siły? Aby odpowiedzieć na to pytanie, przeanalizujmy na początek ruch cząstki punktowej o masie m poruszającej się dookoła pewnej osi, po okręgu o promieniu r. Niech na tę cząstkę działa stała co do wartości siła F (patrz rysunek).



Rysunek 10.37 Leżący na idealnie gładkim stole (brak tarcia) przywiązany do sznurka krążek porusza się po okręgu o promieniu r. Siłą dośrodkową jest siła naprężenia sznurka. Na krążek działa prostopadła do promienia siła F, nadająca mu stałe przyspieszenie styczne.

Zastosujmy drugą zasadę dynamiki dla ruchu postępowego, aby określić przyspieszenie liniowe naszej cząstki. Siła ta powoduje, że cząstka porusza się z przyspieszeniem stycznym o wartości $a = F/m$. Wartość przyspieszenia stycznego jest proporcjonalna do wartości przyspieszenia kątowego, zgodnie z zależnością $a = r\varepsilon$. Wstawiając to wyrażenie do równania dla drugiej zasady dynamiki dla ruchu postępowego otrzymujemy:

$$F = mr\varepsilon. \tag{10.99}$$

Mnożąc obie strony przez r otrzymujemy:

$$rF = mr^2\varepsilon. \tag{10.100}$$

Zauważmy, że lewa strona tego równania jest momentem siły liczonym względem osi obrotu, gdzie r jest ramieniem siły, a F jest wartością siły. Siła F jest prostopadła do promienia r. Przypomnijmy, że moment bezwładności cząstki punktowej jest równy $I = mr^2$. Moment siły prostopadłej do promienia okręgu w naszym przypadku (Rysunek 10.37) można zapisać jako:

$$M = I\varepsilon. \tag{10.101}$$

Moment siły działającej na cząstkę jest równy momentowi bezwładności liczonemu względem osi obrotu pomnożonemu przez przyspieszenie kątowe. Możemy uogólnić to równanie na równanie dla ciała sztywnego obracającego się wokół ustalonej osi.

Druga zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego

Jeśli więcej niż jeden moment siły działa na ciało sztywne obracające się wokół stałej osi, wówczas suma momentów siły jest równa momentowi bezwładności pomnożonemu przez przyspieszenie kątowe:

$$\sum_i M_i = I\varepsilon. \tag{10.102}$$

Iloczyn $I\varepsilon$ jest wielkością skalarną i może być dodatni lub ujemny (przeciwny lub zgodny z ruchem wskazówek zegara), zależnie od znaku wypadkowego momentu siły. Należy pamiętać o konwencji, że przyspieszenie kątowe przeciwne do ruchu wskazówek zegara jest dodatnie. Zatem, jeśli ciało sztywne obraca się zgodnie z ruchem wskazówek zegara pod wpływem dodatniego momentu siły (przeciwnego do ruchu wskazówek zegara), to jego przyspieszenie kątowe jest dodatnie.

Powyższe równanie (Równanie 10.102) jest drugim prawem Newtona dla dynamiki ruchu obrotowego i mówi nam, jaki jest związek momentu siły z momentem bezwładności i przyspieszeniem kątowym. Nazywamy je **drugą zasadą dynamiki dla ruchu obrotowego** (ang. **Newton's second law for rotation**). Korzystając z tego równania możemy rozwiązać całą grupę zagadnień związanych z siłami i obrotami. Nic dziwnego, że formuła opisująca skutki działania momentu siły na ciało sztywne (a więc obrót) zawiera moment bezwładności, ponieważ jest to wielkość, która określa, jak łatwo lub trudno jest zmienić ruch obrotowy obiektu.

Wyprowadzenie drugiej zasady dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego w postaci wektorowej

Podobnie jak poprzednio, kiedy wyznaczaliśmy przyspieszenie kątowe, możemy również wyznaczyć wektor momentu siły. Drugie prawo dynamiki $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ określa związek między siłą wypadkową a wielkością kinematyczną ruchu postępowego obiektu. Równoważnik tego równania dla ruchu obrotowego można otrzymać stosując zależność pomiędzy przyspieszeniem kątowym, położeniem i wektorem przyspieszenia stycznego:

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}. \tag{10.103}$$

Policzmy iloczyn wektorowy $\vec{r} \times \vec{a}$ wykorzystując własności iloczynu wektorowego (należy pamiętać, że $\vec{r} \cdot \vec{\varepsilon} = 0$):

$$\vec{r} \times \vec{a} = \vec{r} \times \left(\vec{\varepsilon} \times \vec{r}\right) = \vec{\varepsilon}\left(\vec{r} \cdot \vec{r}\right) - \vec{r}\left(\vec{r} \cdot \vec{\varepsilon}\right) = \vec{\varepsilon} r^2. \tag{10.104}$$

Policzmy teraz wypadkowy moment siły:

$$\sum \left(\vec{r} \times \vec{F}\right) = \vec{r} \times \left(m\vec{a}\right) = m\vec{r} \times \vec{a} = mr^2\vec{\varepsilon}. \tag{10.105}$$

Ponieważ mr^2 jest momentem bezwładności masy punktowej, otrzymujemy:

$$\sum \vec{M} = I\vec{\varepsilon}. \tag{10.106}$$

Jest to równanie wyrażające drugą zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego zapisane w postaci wektorowej. Wektor momentu siły ma ten sam kierunek, co wektor przyspieszenia kątowego.

Zastosowanie równań dynamiki ruchu obrotowego

Zanim zastosujemy równanie dynamiki ruchu obrotowego do opisu konkretnych codziennych sytuacji, ustalmy ogólną strategię rozwiązywania zadań w tej kategorii.

Strategia rozwiązywania zadań: dynamika ruchu obrotowego

1. Przeanalizuj sytuację i ustal, czy mamy do czynienia z działaniem momentów sił i na jakie ciała one działają. Wykonaj starannie szkic sytuacyjny.
2. Określ, jakie wielkości będą analizowane i jakie wartości będą wyznaczane.
3. Narysuj diagram sił, tj. wszystkie zewnętrzne siły działające na rozpatrywany w zadaniu układ.

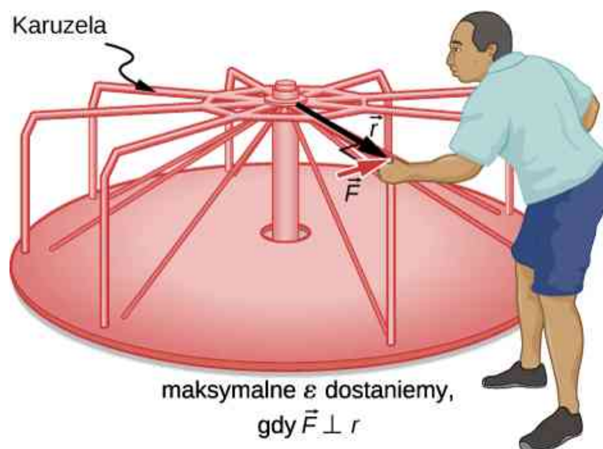
4. Określ punkt obrotu. Jeśli obiekt jest w stanie równowagi, musi być w równowadze dla wszystkich możliwych punktów obrotu – wybierz ten, który upraszcza obliczenia.
5. Zastosuj równanie $\sum \vec{M} = I\vec{\varepsilon}$, tj. drugą zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego. Należy użyć właściwego wzoru dla momentu bezwładności i wyliczyć momenty wszystkich sił względem wybranego punktu (osi) obrotu. Jak zwykle, sprawdź sensowność rozwiązania.

Przykład 10.16

Wyznaczenie wpływu rozkładu masy na ruch obrotowy karuzeli

Wyobraź sobie ojca kręcącego karuzelą na placu zabaw (Rysunek 10.38). Działa on z siłą 250 N na brzeg karuzeli o masie 200,0 kg. Promień karuzeli wynosi 1,50 m. Oblicz przyspieszenie kątowe karuzeli spowodowane przyłożeniem tej siły:

a. gdy nikogo nie ma na karuzeli;
b. gdy dziecko o masie 8,0 kg siedzi w odległości 1,25 m od środka; załóż, że karuzela jest jednorodną tarczą, a tarcie można zaniedbać.



Rysunek 10.38 Aby uzyskać maksymalny moment siły, mężczyzna popycha karuzelę przykładając siłę do punktów leżących na jej obrzeżu, prostopadle do promienia karuzeli.

Strategia rozwiązania

Wypadkowy moment pędu dany jest wyrażeniem $\sum \vec{M} = I\vec{\varepsilon}$. Aby wyznaczyć ε, musimy najpierw wyliczyć moment siły M (który jest taki sam w obu przypadkach) i moment bezwładności I (większy w drugim przypadku).

Rozwiązanie

a. Moment bezwładności jednorodnej tarczy względem jej środka jest równy

$$\frac{1}{2}mR^2. \tag{10.107}$$

Dla danych z zadania $m = 50$ kg i $R = 1{,}50$ m otrzymujemy:

$$I = 0{,}500 \cdot 50{,}0\,\text{kg} \cdot (1{,}50\,\text{m})^2 = 56{,}25\,\text{kg} \cdot \text{m}^2. \tag{10.108}$$

Wyznaczając wypadkowy moment sił zauważamy, że działająca siła jest prostopadła do promienia, a tarcie jest nieistotnie, zatem:

$$M = rF \sin\theta = 1{,}50\,\text{m} \cdot 250{,}0\,\text{N} = 375\,\text{N} \cdot \text{m}. \quad (10.109)$$

Wstawiając tę wartość do wzoru na przyspieszenie kątowe otrzymujemy:

$$\varepsilon = \frac{M}{I} = \frac{375{,}0\,\text{N} \cdot \text{m}}{56{,}25\,\text{kg} \cdot \text{m}^2} = 6{,}67\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}. \quad (10.110)$$

b. Spodziewamy się, że w tej sytuacji przyspieszenie kątowe karuzeli będzie mniejsze, ponieważ moment bezwładności jest większy, gdy na karuzeli jest dziecko. Aby wyznaczyć całkowity moment bezwładności I, najpierw wyznaczamy moment bezwładności dziecka I_d. Zastąpimy dziecko masą punktową w odległości 1,25 m od osi obrotu. Wówczas:

$$I_\text{d} = mR^2 = 18{,}0\,\text{kg} \cdot (1{,}25\,\text{m})^2 = 28{,}13\,\text{kg} \cdot \text{m}^2. \quad (10.111)$$

Całkowity moment bezwładności jest sumą momentów bezwładności karuzeli i dziecka (liczonych względem tej samej osi):

$$I = 28{,}13\,\text{kg} \cdot \text{m}^2 + 56{,}25\,\text{kg} \cdot \text{m}^2 = 84{,}38\,\text{kg} \cdot \text{m}^2. \quad (10.112)$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$\varepsilon = \frac{M}{I} = \frac{375{,}0\,\text{N}}{84{,}38\,\text{kg} \cdot \text{m}^2} = 4{,}44\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}. \quad (10.113)$$

Znaczenie

Zgodnie z oczekiwaniami, przyspieszenie kątowe jest mniejsze, gdy dziecko znajduje się na karuzeli, niż wtedy, gdy karuzela jest pusta. Otrzymane przyspieszenia kątowe są dość duże częściowo z powodu faktu, że tarcie uznano za nieistotne. Gdyby na przykład ojciec naciskał prostopadle przez 2,00 s, nadałby pustej karuzeli prędkość kątową 13,3 rad/s, a tylko 8,89 rad/s, gdyby było na niej dziecko. Jeśli chodzi o liczby obrotów na sekundę, prędkość kątowa wynosi odpowiednio 2,12 obr/s i 1,41 obr/s.



10.7 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Moment bezwładności łopatek wentylatora silnika odrzutowego jest równy $30{,}0\,\text{kg} \cdot \text{m}^2$. W ciągu 10 s od rozpoczęcia ruchu, obracając się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, osiągnęły one prędkość kątową 20 obr/s.

a. Jaki moment siły należy przyłożyć do łopatek w celu osiągnięcia w tym czasie tego przyspieszenia kątowego?

b. Jaki jest wymagany moment siły, aby łopatki osiągnęły prędkość kątową 20 obrotów na sekundę w ciągu 20 sekund?

10.8 | Praca i energia kinetyczna w ruchu obrotowym

Cel dydaktyczny

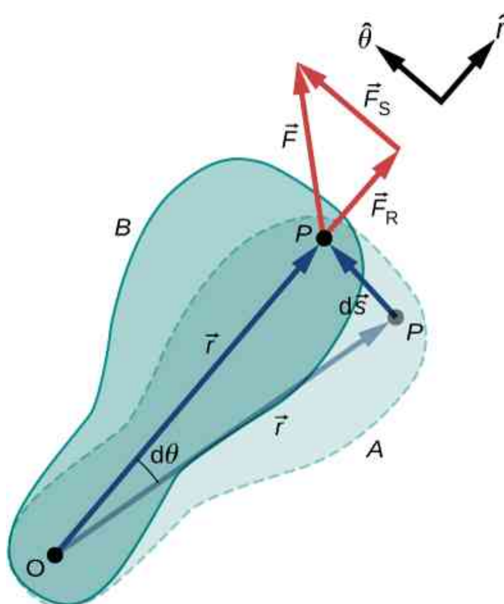
W tym podrozdziale nauczysz się:

- stosować twierdzenie o równoważności pracy i energii do analizy ruchu obrotowego i obliczania, jaką pracę należy wykonać nad układem, aby obrócić go o określony kąt wokół stałej osi;
- wyznaczać, wykorzystując twierdzenie o równoważności pracy i energii, prędkość kątową obracającej się bryły sztywnej;
- wyznaczać moc dostarczaną obracającej się bryle sztywnej, biorąc pod uwagę moment obrotowy siły i prędkość kątową;
- weryfikować uzyskane wartości zmiennych kątowych i zastosowane równania;
- wskazywać związek otrzymanych wyników i użytych praw z odpowiednimi zmiennymi i prawami w ruchu postępowym.

Do tej pory szeroko omówiliśmy zagadnienia kinematyki i dynamiki ruchu obrotowego brył sztywnych wokół stałej osi. W tym ostatnim podrozdziale zdefiniujemy pracę i moc w ruchu obrotowym wokół stałej osi, co ma istotne znaczenie zarówno w fizyce jak i w technice. Wprowadzenie pracy i mocy sprawia, że nasz opis ruchu obrotowego staje się prawie kompletny, z wyjątkiem toczenia się ciał i momentu pędu, które zostaną omówione w podrozdziale Moment pędu. Zaczynamy tę część od wprowadzenia twierdzenia o pracy i energii w ruchu obrotowym.

Praca w ruchu obrotowym

Teraz, gdy wiemy już, jak wyznaczać energię ruchu obrotowego bryły sztywnej, możemy przejść do wyznaczenia pracy wykonanej nad ciałem sztywnym obracającym się wokół stałej osi. Rysunek poniżej przedstawia bryłę sztywną, która została obrócona o kąt $\mathrm{d}\theta$ od A do B w wyniku działania siły $\vec{F}$. Siła zewnętrzna $\vec{F}$ jest przyłożona w punkcie P, określonym przez wektor położenia $\vec{r}$. Przedstawiona bryła sztywna obraca się wokół stałej osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez punkt P. Ponieważ oś obrotu nie zmienia swojego położenia, koniec wektora $\vec{r}$ zakreśla okrąg o promieniu r, stąd wektor $\mathrm{d}\vec{s}$ jest prostopadły do wektora $\vec{r}$.



Rysunek 10.39 Obrót ciała sztywnego o kąt $\mathrm{d}\theta$ od punktu A do B w wyniku działania siły zewnętrznej $\vec{F}$, przyłożonej w punkcie P.

Z definicji miary łukowej kąta (patrz rozdział Zmienne opisujące ruch obrotowy) mamy:

$$\vec{s} = \vec{\theta} \times \vec{r}. \tag{10.114}$$

Stąd stosując pochodną iloczynu dwóch wektorów (ang. **chain rule**)

$$\mathrm{d}\vec{s} = \mathrm{d}\left(\vec{\theta} \times \vec{r}\right) = \mathrm{d}\vec{\theta} \times \vec{r} + \mathrm{d}\vec{r} \times \vec{\theta} = \mathrm{d}\vec{\theta} \times \vec{r}. \tag{10.115}$$

Zauważmy, że $\mathrm{d}\vec{r} = 0$, bo $\vec{r}$ nie zmienia się jako wektor łączący oś obrotu z punktem P. Stosując definicję pracy otrzymujemy:

$$W = \int \sum \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int \sum \vec{F} \cdot \left(\mathrm{d}\vec{\theta} \times \vec{r}\right) = \int \left(\vec{r} \times \sum \vec{F}\right) \mathrm{d}\vec{\theta}, \tag{10.116}$$

gdzie skorzystaliśmy z tożsamości $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b} \cdot \left(\vec{c} \times \vec{a}\right)$. Ponieważ $\vec{r} \times \sum \vec{F} = \sum \vec{M}$, otrzymujemy wyrażenie na **pracę w ruchu obrotowym (ang. rotational work)**:

$$W = \int \sum \vec{M} \cdot \mathrm{d}\vec{\theta}. \tag{10.117}$$

Całkowita praca wykonana nad ciałem sztywnym jest całką z sumy momentów pędu obliczonej po kącie obrotu ciała sztywnego. Różniczka pracy (praca wykonana, aby obrócić ciało o kąt $\mathrm{d}\theta$) wyraża się zależnością:

$$\mathrm{d}W = \left(\sum_i M_i\right) \mathrm{d}\theta, \tag{10.118}$$

gdzie w sumowaniu występują jedynie składowe momentu siły wzdłuż osi obrotu. W przypadku bryły sztywnej wszystkie jej punkty obracają się wokół tej samej osi, tak więc praca siły zewnętrznej jest równa momentowi siły pomnożonemu przez wspólny kąt $\mathrm{d}\theta$. Wielkość $\sum_i M_i$ jest wypadkowym momentem sił zewnętrznych działających na bryłę.

Podobnie, poprzez sumowanie energii kinetycznej każdej cząstki tworzącej bryłę sztywną, wyznaczyliśmy energię kinetyczną bryły sztywnej obracającej się wokół ustalonej osi. Ponieważ twierdzenie o pracy i energii $W_i = \Delta E_{\mathrm{ki}}$ jest ważne dla każdej cząstki, jest słuszne również dla sumy cząstek, a w konsekwencji dla całej bryły.

Twierdzenie o pracy i energii

Twierdzenie o pracy i energii w ruchu obrotowym (ang. work-energy theorem for rotation) wokół stałej osi ma postać:

$$W_{AB} = K_B - K_A, \tag{10.119}$$

gdzie

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2, \tag{10.120}$$

a praca wykonana przez wypadkową siłę nad ciałem sztywnym obracającym się od punktu A do punktu B wyraża się zależnością:

$$W_{AB} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\sum_i M_i\right) \mathrm{d}\vec{\theta}. \tag{10.121}$$

Pokażemy teraz, w jaki sposób wykorzystać powyższe zależności w analizie ruchu obrotowego.

Strategia rozwiązywania zadań: twierdzenie o pracy i energii w ruchu obrotowym

1. Określ siły działające na bryłę i narysuj diagram sił. Wyznacz moment siły dla każdej z nich.
2. Wyznacz pracę wykonaną przez każdy z momentów siły w czasie obrotu bryły.
3. Zastosuj twierdzenia o równoważności pracy i energii, przyrównując pracę wykonaną nad ciałem do zmiany jego energii kinetycznej ruchu obrotowego.

Spójrzmy na dwa przykłady, w których zastosujemy twierdzenie o energii i pracy do analizy ruchu obrotowego.

Przykład 10.17

Praca i energia w ruchu obrotowym

Do koła zamachowego o momencie bezwładności $30{,}0\,\mathrm{kg \cdot m^2}$, obracającego się wokół nieruchomej osi, przyłożono moment siły o wartości $12{,}0\,\mathrm{N \cdot m}$. Jeżeli w chwili początkowej koło nie obracało się, to jaka jest wartość jego prędkości kątowej po 8 obrotach?

Strategia rozwiązania

Stosujemy twierdzenie o pracy i energii. Z opisu problemu wiemy, jaka jest wartość momentu siły i przemieszczenie kątowe koła zamachowego. Zatem możemy wyznaczyć końcową prędkość kątową.

Rozwiązanie

Koło zamachowe wykonało 8 obrotów, co stanowi 16π radianów. Praca została wykonana przez stały moment siły i jej wartość wynika z informacji w zadaniu. Stąd możemy wyznaczyć końcową prędkość kątową. Praca wyniosła:

$$W_{AB} = M(\theta_B - \theta_A). \tag{10.122}$$

Zastosujmy teraz twierdzenie o pracy i energii:

$$W_{AB} = M(\theta_B - \theta_A) = \frac{1}{2}I\omega_B^2 - \frac{1}{2}I\omega_A^2. \tag{10.123}$$

Podstawiając wartości $M = 12{,}0\,\mathrm{N \cdot m}$, $\theta_B - \theta_A = 16{,}0\pi\,\mathrm{rad}$, $I = 30{,}0\,\mathrm{kg \cdot m^2}$ oraz $\omega_A = 0$ otrzymujemy:

$$12{,}0\,\mathrm{N \cdot m} \cdot 16{,}0\pi\,\mathrm{rad} = \frac{1}{2} \cdot 30{,}0\,\mathrm{kg \cdot m^2} \cdot \omega_B^2 - 0, \tag{10.124}$$

stąd wartość prędkości kątowej koła zamachowego po 8 obrotach wynosi:

$$\omega_B = 6{,}3\,\mathrm{rad/s}. \tag{10.125}$$

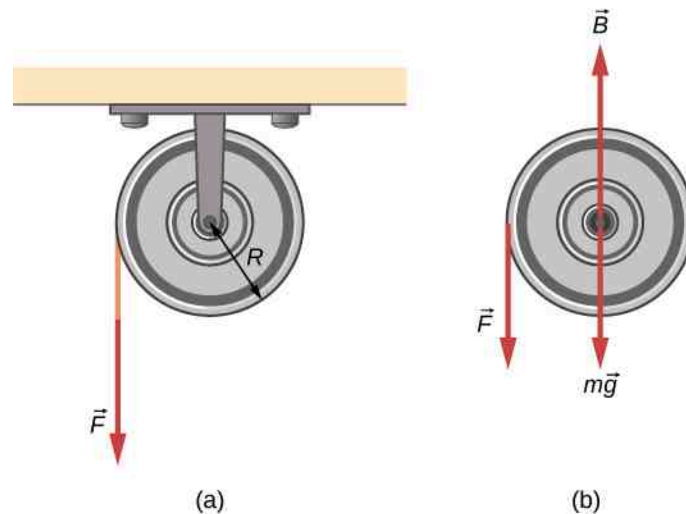
Znaczenie

Twierdzenie o pracy i energii stanowi skuteczny sposób analizy ruchu obrotowego, ponieważ łączy moment siły z energią kinetyczną ruchu obrotowego.

Przykład 10.18

Praca w ruchu obrotowym: Krążek

Nawinięty wokół krążka sznurek (Rysunek 10.40) jest ciągnięty pionowo w dół z siłą $\vec{F}$ o wartości 50 N. Promień krążka $R = 0{,}10\,\mathrm{m}$, a jego moment bezwładności $I = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg \cdot m^2}$. Jeżeli sznurek nie ślizga się po krążku, to jaka jest prędkość kątowa krążka po odwinięciu się 10 m sznurka? Załóż, że początkowo krążek się nie obracał.



Rysunek 10.40 (a) Sznurek nawinięty na krążek o promieniu R. (b) Diagram sił.

Strategia rozwiązania

Patrząc na rysunek widzimy, że zarówno moment siły ciążenia $m\vec{g}$ jak i moment siły $\vec{F}$ związanej z reakcją łożysk są równe zero, ponieważ przyłożone są one w punkcie, przez który przechodzi oś obrotu, czyli ich odległość od osi obrotu wynosi zero. W czasie obrotów krążka siła $\vec{F}$ działa w stałej odległości R od osi obrotu, zatem działa ona na drodze $s = R\theta$.

Rozwiązanie

Ponieważ moment siły ma wartość $M = RF$, możemy napisać:

$$W = M\theta = (FR)\theta = Fs. \tag{10.126}$$

Jako że siła działa w stałej odległości 1,0 m, na podstawie twierdzenia o pracy i energii otrzymujemy:

$$\begin{aligned} W_{AB} &= K_B - K_A, \\ Fs &= \frac{1}{2}I\omega^2 - 0, \\ 50{,}0\,\mathrm{N} \cdot 1{,}0\,\mathrm{m} &= \frac{1}{2} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \omega^2. \end{aligned} \tag{10.127}$$

Rozwiązując to równanie otrzymujemy:

$$\omega = 200{,}0\,\mathrm{rad/s}. \tag{10.128}$$

Moc w ruchu obrotowym

Moc pojawia się w każdej dyskusji na temat praktycznych zastosowań ruchu obrotowego w inżynierii i fizyce. Moc w ruchu obrotowym jest równie ważna jak moc w ruchu postępowym i można ją opisać w podobny sposób jak w ruchu postępowym, gdy działa stała siła. Moc stałej siły w ruchu postępowym wyraża się wzorem $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$. Jeżeli wypadkowy moment siły jest stały w czasie całego przesunięcia kątowego, to równanie na pracę upraszcza się i wartość momentu siły może być wyłączona przed całkę. W dalszych rozważaniach będziemy zakładać, że moment siły jest stały. Możemy zatem zastosować definicję mocy wyprowadzoną w rozdziale Praca i energia kinetyczna. Tamże, moc chwilowa (lub po prostu moc) definiowana była jako szybkość wykonywania pracy:

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}. \tag{10.129}$$

Jeżeli działa stały moment siły, to równanie na pracę przybiera postać $W = M\theta$, a równanie na moc:

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M\theta) = M\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}, \tag{10.130}$$

czyli

$$P = M\omega. \tag{10.131}$$

Przykład 10.19

Moment obrotowy śruby łodzi

Silnik łodzi pracujący z mocą $9{,}0 \cdot 10^4\ \mathrm{N \cdot m/s}$ obraca się wykonując 300 obr/min. Jaki moment siły działa na wał śruby napędowej?

Strategia rozwiązania

Mamy podaną liczbę obrotów na minutę i zużycie energii. Dzięki tym danym możemy łatwo obliczyć moment siły.

Rozwiązanie

$$300{,}0\ \mathrm{obr/min} = 31{,}4\ \mathrm{rad/s}, \tag{10.132}$$

$$M = \frac{P}{\omega} = \frac{9{,}0 \cdot 10^4\ \mathrm{N \cdot m/s}}{31{,}4\ \mathrm{rad/s}} = 2864{,}8\ \mathrm{N \cdot m}. \tag{10.133}$$

Znaczenie

Warto zauważyć, że radian jest jednostką bezwymiarową, ponieważ zgodnie z definicją jest to iloraz dwóch długości. Dlatego też nie pojawia się w odpowiedzi.



10.8 Sprawdź, czy rozumiesz. Moment siły o wartości $500\ \mathrm{kN \cdot m}$ działający na turbinę wiatrową utrzymuje ją w ruchu obrotowym z prędkością 6 rad/s. Jaka jest wartość mocy potrzebna do podtrzymania obrotów turbiny?

Wielkości opisujące ruch obrotowy i postępowy.

Ruch obrotowy	Ruch postępowy	Zależności między wielkościami obrotowymi i postępowymi (r – promień okręgu)
θ	x	$\theta = s/r$
ω	v_t	$\omega = v_t/r$
ε	a_t	$\varepsilon = a_t/r$
	a_d	$a_d = v_t^2/r$

Tabela 10.6 Zmienne obrotowe i postępowe – podsumowanie

Ruch obrotowy	Ruch postępowy
$\theta_{\mathrm{k}} = \theta_0 + \bar{\omega} t$	$x = x_0 + \bar{v} t$
$\omega_{\mathrm{k}} = \omega_0 + \varepsilon t$	$v_{\mathrm{k}} = v_0 + at$
$\theta_{\mathrm{k}} = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$	$x_{\mathrm{k}} = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
$\omega_{\mathrm{k}}^2 = \omega^2{}_0 + 2\varepsilon(\Delta\theta)$	$v_{\mathrm{k}}^2 = v^2{}_0 + 2a(\Delta x)$

Tabela 10.7 Równania kinematyki dla ruchu obrotowego i postępowego

Ruch obrotowy	Ruch postępowy
$I = \sum_i m_i r_i^2$	m
$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$	$E_k = \frac{1}{2} m v^2$
$\sum_i M_i = I \varepsilon$	$\sum_i \vec{F}_i = m \vec{a}$
$W_{AB} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \left(\sum_i M_i \right) \mathrm{d}\theta$	$W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$
$P = M \omega$	$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

Tabela 10.8 Równania dynamiki w ruchu obrotowym i postępowym

PODSUMOWANIE ROZDZIAŁU 10

KLUCZOWE POJĘCIA

całkowite przyspieszenie liniowe (ang. total linear acceleration) wektorowa suma wektorów przyspieszenia dośrodkowego i stycznego

chwilowa prędkość kątowa (ang. instantaneous angular velocity) pochodna położenia kątowego po czasie

chwilowe przyspieszenie kątowe (ang. instantaneous angular acceleration) pochodna prędkości kątowej po czasie

druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego (ang. Newton's second law for rotation) wypadkowy moment sił jest równy iloczynowi momentu bezwładności i przyspieszenia kątowego

dynamika ruchu obrotowego (ang. kinematics of rotational motion) analiza ruchu obrotowego z wykorzystaniem wypadkowego momentu siły i momentu bezwładności, w celu wyznaczenia przyspieszenia kątowego

energia kinetyczna ruchu obrotowego (ang. rotational kinetic energy) część całkowitej energii kinetycznej ciała

gęstość liniowa masy (ang. linear mass density) masa na jednostkę długości obiektu liniowego

gęstość powierzchniowa masy (ang. surface mass density) masa na jednostkę powierzchni obiektu dwuwymiarowego

kinematyka ruchu obrotowego (ang. kinematics of rotational motion) opisuje w funkcji czasu zależność między drogą kątową (kątem obrotu), prędkością kątową i przyspieszeniem kątowym

moment bezwładności (ang. moment of inertia) miara bezwładności obrotowej, która charakteryzuje ilościowo stopień łatwości lub trudności wykonywania zmiany wartości prędkości kątowej bryły sztywnej

moment siły (ang. moment of power) iloczyn siły i jej ramienia liczonego względem danej osi (punktu)

oś równoległa (ang. parallel axis) oś obrotu, która jest równoległa do osi, względem której znany jest moment bezwładności obiektu

położenie kątowe (ang. angular position) kąt pomiędzy wektorem położenia ciała a wybraną osią układu współrzędnych

praca w ruchu obrotowym (ang. rotational work) praca wykonywana nad bryłą sztywną w wyniku działania momentów sił, dana przez całkę z momentów sił liczoną po kącie, o jaki została obrócona bryła sztywna

przyspieszenie kątowe (ang. angular acceleration) szybkość zmian prędkości kątowej

ramię siły (ang. arm force) odległość osi obrotu (punktu, względem którego mierzymy moment) od prostej, na której leży siła

twierdzenie o pracy i energii w ruchu obrotowym (ang. work-energy theorem for rotation) całkowita praca wykonana nad zmianą prędkości kątowej ciała sztywnego, równa zmianie jego energii kinetycznej ruchu obrotowego

NAJWAŻNIEJSZE WZORY

Droga kątowa	$\theta = \frac{s}{r}$
Prędkość kątowa	$\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$
Prędkość styczna w ruchu po okręgu	$v_\mathrm{t} = r\omega$
Średnie przyspieszenie kątowe	$\varepsilon = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$
Przyspieszenie styczne	$a_\mathrm{t} = r\varepsilon$
Średnia prędkość kątowa	$\bar{\omega} = \frac{\omega_0 + \omega_\mathrm{k}}{2}$
Przesunięcie kątowe	$\theta_\mathrm{k} = \theta_0 + \bar{\omega}t$
Prędkość końcowa w ruchu ze stałym przyspieszeniem kątowym	$\omega_\mathrm{k} = \omega_0 + \varepsilon t$

Końcowe położenie kątowe dla ruchu ze stałym przyspieszeniem kątowym	$\theta_{\mathrm{k}} = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$
Zmiana prędkości kątowej	$\omega_{\mathrm{k}}^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon(\Delta\theta)$
Przyspieszenie całkowite	$\vec{a} = \vec{a}_d + \vec{a}_t$
Energia kinetyczna ruchu obrotowego	$E_k = \frac{1}{2}\left(\sum_j m_j r_j^2\right)\omega^2$
Moment bezwładności	$I = \sum_j m_j r_j^2$
Energia kinetyczna ciała sztywnego w ruchu obrotowym	$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$
Moment bezwładności ciała jednolitego	$I = \int r^2 \mathrm{d}m$
Twierdzenie Steinera	$I_{\text{oś równoległa}} = I_{\text{środek masy}} + md^2$
Moment bezwładności ciał złożonych	$I_{\text{całkowite}} = \sum_i I_i$
Moment siły	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
Wartość wektora momentu siły	$\left\lvert\vec{M}\right\rvert = r_\perp F$
Wartość wypadkowego momentu siły	$M_{\text{wyp}} = \sum_i \lvert M_i \rvert$
Druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego	$\sum_i M_i = I\varepsilon$
Elementarna praca momentu sił	$\mathrm{d}W = \left(\sum_i M_i\right)\mathrm{d}\theta$
Twierdzenie praca-energia	$W_{AB} = E_{\mathrm{kB}} - E_{\mathrm{kA}}$
Praca wypadkowego momentu sił przy obrotach wokół stałej osi	$W_{AB} = \int_{\theta_A}^{\theta_B}\left(\sum_i M_i\right)\mathrm{d}\theta$
Moc w ruchu obrotowym	$P = M\omega$

PODSUMOWANIE

10.1 Zmienne opisujące ruch obrotowy

- Położenie kątowe punktu to kąt między wektorem położenia tego punktu a wybranym kierunkiem, na przykład kierunkiem jednej z osi układu współrzędnych, służącej za układ odniesienia, względem którego ruch jest opisywany.
- Prędkość kątowa, oznaczana zwykle symbolem $\vec{\omega}$, jest wyrażana w radianach na sekundę. Wartość chwilowej prędkości kątowej $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta\theta/\Delta t) = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ to granica przy $\Delta t \to 0$ średniej prędkości kątowej, czyli pochodna po czasie położenia kątowego. Związek pomiędzy styczną prędkością liniową v_{t}, a prędkością kątową jest następujący: $v_{\mathrm{t}} = r\omega$, gdzie r jest odległością od osi obrotu.
- Kierunek wektora prędkości kątowej $\vec{\omega}$ można określić na podstawie reguły prawej dłoni. Jeżeli palce zagniemy w kierunku obrotu ciała wokół stałej osi, to odchylony kciuk wskaże nam kierunek wektora $\vec{\omega}$ (patrz Rysunek 10.6).
- Jeżeli prędkość kątowa układu nie jest stała, wówczas układ ma określone przyspieszenie kątowe $\vec{\varepsilon}$. Średnie przyspieszenie kątowe w określonym przedziale czasu to zmiana prędkości kątowej podzielona przez czas, w jakim ta zmiana została osiągnięta: $\bar{\varepsilon} = \Delta\omega/\Delta t$. Chwilowe przyspieszenie kątowe to pochodna prędkości kątowej po czasie. Wektory przyspieszenia kątowego i prędkości mają ten sam kierunek. W przypadku, gdy prędkość kątowa maleje, zwrot wektora przyspieszenia kątowego jest przeciwny do zwrotu wektora prędkości, a gdy prędkość kątowa rośnie, oba wektory mają ten sam zwrot.

- Wartość przyspieszenia stycznego punktu poruszającego się po okręgu o promieniu r, jest równa iloczynowi promienia tego okręgu i przyspieszenia kątowego punktu: $a_t = r\varepsilon$.

10.2 Obroty ze stałym przyspieszeniem kątowym

- Kinematyka ruchu obrotowego opisuje zależności między drogą kątową, prędkością kątową, przyspieszeniem kątowym i czasem.
- W przypadku stałego przyspieszenia kątowego, zależność prędkości kątowej od czasu jest liniowa. Zatem średnia prędkość kątowa jest średnią arytmetyczną prędkości początkowej i prędkości końcowej w danym okresie czasu:

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_0 + \omega_\mathrm{k}}{2}.$$

- Zastosowaliśmy analizę graficzną do wyznaczenia wielkości obrotowych dla ruchu obrotowego wokół stałej osi ze stałym przyspieszeniem kątowym. Z zależności $\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ otrzymujemy, że powierzchnia pod wykresem zależności prędkości kątowej od czasu jest równa drodze kątowej: $\theta_\mathrm{k} - \theta_0 = \Delta\theta = \int_{t_0}^{t} \omega(t)\mathrm{d}t$. Otrzymany rezultat analizy graficznej można analogicznie zweryfikować przy pomocy równań kinematycznych dla ruchu ze stałym przyspieszeniem kątowym. Ponieważ $\varepsilon = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$, pole powierzchni pod wykresem przyspieszenia kątowego w funkcji czasu daje nam zmianę wartości prędkości kątowej $\omega_\mathrm{k} - \omega_0 = \Delta\omega = \int_{t_0}^{t} \varepsilon(t)\mathrm{d}t$.

10.3 Związek między wielkościami w ruchach obrotowym i postępowym

- Równania ruchu postępowego mają swoje odpowiedniki w równaniach ruchu obrotowego. Istnieje odwzorowanie: $x \to \theta, \quad v \to \omega, \quad a \to \varepsilon$.
- Ruch jednostajny po okręgu to ruch, w którym cząstka porusza się po okręgu ze stałą co do wartości prędkością liniową i kątową. Jednakże ze względu na ciągłą zmianę kierunku wektora prędkości, cząstka ma przyspieszenie dośrodkowe, zależne od odległości od osi obrotu.
- Układ obracający się ruchem niejednostajnym obraca się z pewnym przyspieszeniem kątowym, a tym samym każdy punkt układu położony w odległości r od osi obrotu ma przyspieszenie dośrodkowe i związane z nim przyspieszenie styczne.
- Całkowite przyspieszenie liniowe jest sumą wektorową wektora przyspieszenia dośrodkowego i wektora przyspieszenia stycznego. Ponieważ w ruchu po okręgu wektory przyspieszenia odśrodkowego i stycznego są prostopadłe do siebie, wartość całkowitego przyspieszenia liniowego jest równa: $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_d^2 + a_t^2}$.

10.4 Moment bezwładności i energia kinetyczna w ruchu obrotowym

- Energia kinetyczna ruchu obrotowego to suma energii kinetycznych cząstek ciała sztywnego lub punktów materialnych, wynikająca z ich ruchu po okręgu wokół wspólnej osi. Można ją wyrazić w postaci $E_k = I\omega^2/2$, gdzie I jest momentem bezwładności ciała sztywnego lub układu punktów materialnych.
- Moment bezwładności punktów materialnych poruszających się wokół stałej osi jest definiowany jako $I = \sum_j m_j r_j^2$, gdzie m_j jest masą j-tego punktu, natomiast r_j jest jego odległością od osi obrotu. Wartość momentu pędu rośnie z kwadratem odległości punktów od osi obrotu. Moment bezwładności jest odpowiednikiem masy w ruchu postępowym.
- W układach, które obracają się i przemieszczają, można zastosować zasadę zachowania energii mechanicznej tylko wtedy, gdy na układ działają siły zachowawcze. W tym przypadku całkowita energia mechaniczna jest zachowana i jest sumą energii kinetycznej ruchu obrotowego i ruchu postępowego oraz energii potencjalnej wynikającej z grawitacji.

10.5 Obliczanie momentu bezwładności

- Momenty bezwładności można wyznaczyć przez zsumowanie lub scałkowanie wartości masy „każdego fragmentu” tworzącego obiekt, pomnożonej przez kwadrat odległości fragmentu od osi. W postaci całkowej moment bezwładności wynosi $I = \int r^2 \mathrm{d}m$.
- Moment bezwładności jest większy, gdy masa obiektu znajduje się dalej od osi obrotu.
- Można wyznaczyć moment bezwładności obiektu względem nowej osi obrotu, gdy znany jest moment bezwładności dla osi do niej równoległej i przechodzącej przez środek masy układu. Mówi o tym twierdzenie Steinera: $I_{\text{oś równoległa}} = I_{\text{środek masy}} + md^2$, gdzie d jest odległością pomiędzy osiami.

- Moment bezwładności dla złożonego obiektu jest sumą momentów bezwładności każdego pojedynczego obiektu składającego się na obiekt złożony.

10.6 Moment siły

- Wartość momentu siły względem nieruchomej osi oblicza się poprzez wyznaczenie ramienia siły względem osi obrotu i zastosowanie równania $\left|\vec{M}\right| = r_{\perp} F$, gdzie $r_{\perp}$ jest ramieniem siły, tj. odległością osi obrotu od prostej, na której leży siła.
- Znak momentu obrotowego określa się przy pomocy reguły prawej dłoni. Jeśli wektory $\vec{r}$ i $\vec{F}$ leżą w płaszczyźnie rysunku, to wektor $\vec{r} \times \vec{F}$ jest prostopadły do płaszczyzny rysunku i skierowany w jego stronę, gdy ma wartość ujemną, a gdy ma wartość dodatnią, wychodzi z płaszczyzny rysunku.
- Wypadkowy moment siły można obliczyć dodając indywidualne momenty sił wokół danej osi.

10.7 Druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego

- Druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego $\sum_i M_i = I\varepsilon$ mówi, że suma momentów siły działających na układ obracający się wokół stałej osi jest równa iloczynowi momentu bezwładności i przyspieszenia kątowego. Jest to odpowiednik drugiej zasady dynamiki dla ruchu postępowego.
- W postaci wektorowej, drugie prawo dynamiki ruchu obrotowego bryły wokół stałej osi stwierdza, że wektor momentu siły $\vec{M}$ ma ten sam kierunek, co przyspieszenie kątowe $\vec{\varepsilon}$. Jeśli przyspieszenie kątowe obracającej się bryły sztywnej jest dodatnie, to moment siły działającej na bryłę też jest dodatni, a jeśli przyspieszenie kątowe jest ujemne, moment siły jest ujemny.

10.8 Praca i energia kinetyczna w ruchu obrotowym

- Elementarna praca $\mathrm{d}W$ wykonana nad obracającą się wokół stałej osi bryłą sztywną jest sumą iloczynu momentu siły, liczonego względem osi obrotu, i elementarnego przemieszczenia kątowego $\mathrm{d}\theta$.
- Całkowita praca wykonana przy obróceniu bryły sztywnej o kąt θ wokół ustalonej (nieruchomej) osi jest całką, liczoną względem przesunięcia kątowego, z sumy momentów siły. Jeżeli moment siły nie zależy od θ, wówczas $W_{AB} = M(\theta_B - \theta_A)$.
- Twierdzenie o pracy i energii wiąże pracę wykonaną w ruchu obrotowym z energią kinetyczną ruchu obrotowego: $W_{AB} = E_{kB} - E_{kA}$, gdzie $E_k = I\omega^2 / 2$.
- Moc w przypadku bryły sztywnej obracającej się wokół ustalonej osi jest równa iloczynowi momentu siły i prędkości kątowej: $P = M\omega$.

PYTANIA

10.1 Zmienne opisujące ruch obrotowy

1. Zegar wisi na ścianie. Jaki jest kierunek i zwrot wektora prędkości kątowej wskazówki sekundowej?

2. Jaka jest wartość przyspieszenia kątowego wskazówki minutowej zegara na ścianie?

3. Kij baseballowy jest obracany wokół jednego z jego końców. Czy wszystkie punkty na kiju mają tę samą prędkość kątową oraz taką samą prędkość styczną?

4. Wskazówki licznika obracają się zgodnie z ruchem wskazówek zegara, gdy patrzysz na niego z góry. Jaki będzie kierunek i zwrot wektora przyspieszenia kątowego wskazówek w czasie zwiększania prędkości kątowej wskazówek?

10.2 Obroty ze stałym przyspieszeniem kątowym

5. Jeżeli przyspieszenie kątowe obracającego się ciała sztywnego ma stałą wartość, to jaką funkcją czasu jest jego prędkość kątowa?

6. Jeżeli przyspieszenie kątowe obracającego się ciała sztywnego ma stałą wartość, to jaką funkcją czasu jest jego położenie kątowe?

7. Jeżeli przyspieszenie kątowe obracającego się ciała sztywnego jest równe zero, to jaką funkcją czasu jest jego prędkość kątowa?

8. Kij o znikomo małej masie, do którego obu końców przyczepiono ciężarki, obraca się ze stałą prędkością kątową wokół osi przechodzącej przez jego środek. Czy całkowite przyspieszenie tego układu może być równe zero, jeżeli prędkość kątowa kija jest stała?

10.3 Związek między wielkościami w ruchach obrotowym i postępowym

9. Wyjaśnij, dlaczego przyspieszenie dośrodkowe zmienia kierunek prędkości w ruchu po okręgu, lecz nie zmienia jego wartości.

10. Dlaczego w ruchu po okręgu przyspieszenie styczne może zmieniać wartość prędkości, ale nie jej kierunek? Uzasadnij swoją odpowiedź.

11. Załóżmy, że kawałek marchewki znajduje się na obrzeżu płyty obrotowej kuchenki mikrofalowej. Czy doświadcza on działania przyspieszenia stycznego, przyspieszenia dośrodkowego, czy też obu, gdy:
a. Płyta zaczyna wirować szybciej?
b. Płyta obraca się ze stałą prędkością kątową?
c. Płyta powoli zatrzymuje się?

10.4 Moment bezwładności i energia kinetyczna w ruchu obrotowym

12. Gdyby na orbicie wokół Słońca umieszczono by dodatkowo inną planetę o rozmiarach takich jak Ziemia, to czy moment bezwładności Układu Słonecznego by wzrósł, zmalał czy pozostał bez zmian?

13. Jednorodna kula obraca się ze stałą prędkością kątową wokół osi przechodzącej przez jej środek. Sfera o tej samej masie i promieniu obraca się wokół jej osi symetrii przechodzącej przez środek sfery, z taką samą prędkością kątową jak kula. Który obiekt ma większą energię kinetyczną ruchu obrotowego?

10.5 Obliczanie momentu bezwładności

14. Jeśli dziecko idzie w kierunku środka karuzeli, to moment bezwładności wzrasta czy maleje?

15. Dyskobol, zanim wypuści dysk, obraca się trzymając dysk w dłoni. (a) Jak zmieni się jego moment bezwładności po wypuszczeniu dysku? (b) Jak dobre przybliżenie należy zrobić, aby obliczyć moment bezwładności dyskobola i dysku?

16. Czy zwiększenie liczby łopatek śruby napędowej zwiększa czy zmniejsza moment bezwładności? Dlaczego?

17. Moment bezwładności długiego pręta obracającego się wokół osi przechodzącej przez jeden z jego końców i prostopadłej do jego długości wynosi $mL^2/3$. Dlaczego ten moment bezwładności jest większy niż gdyby umieścić masę punktową m w odległości równej odległości środka masy pręta od osi obrotu $(L/2)$ (tzn. $mL^2/4$)?

18. Dlaczego moment bezwładności obręczy o masie M i promieniu R jest większy niż moment bezwładności tarczy, która ma tę samą masę i promień?

10.6 Moment siły

19. Jakie trzy czynniki wpływają na wartość momentu siły?

20. Podaj przykład, w którym moment siły o małej wartości jest duży oraz przykład małego momentu siły mimo dużej wartości.

21. Przy zmniejszaniu masy roweru wyścigowego największą korzyść uzyskujemy redukując masę opon i obręczy kół. Dlaczego pozwala to kolarzowi osiągnąć większe przyspieszenia niż identyczne zmniejszenie masy ramy roweru?

22. Czy moment pojedynczej siły może być zerowy?

23. Czy może wystąpić sytuacja, gdy siła wypadkowa kilku sił jest różna od zera, a wypadkowy moment tych sił jest równy zero?

24. Czy może wystąpić sytuacja, gdy siła wypadkowa kilku sił jest równa zero, a wypadkowy moment tych sił jest różny od zera?

25. Czy w wyrażeniu $\vec{r} \times \vec{F}$ wartość $\left|\vec{r}\right|$ może mieć mniejszą wartość niż jej ramię? Czy może być ona równa wartości jej ramienia?

10.7 Druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego

26. Jeśli mamy zamiar zatrzymać obracający się kołowrotek działając na niego stałą siłą, to gdzie na kole należy przyłożyć siłę, aby uzyskać maksymalne przyspieszenie (opóźnienie)?

27. Pręt jest obracany wokół jednego z jego końców. Na pręt działają dwie siły $\vec{F}$ i $-\vec{F}$. W jakich warunkach pręt nie będzie się obracał?

ZADANIA

10.1 Zmienne opisujące ruch obrotowy

28. Oblicz prędkość kątową Ziemi.

29. Samochód wyścigowy przejechał jedno pełne okrążenie (400 m) toru wyścigowego w ciągu 45 sekund. Jaka jest wartość jego prędkości kątowej przy założeniu, że cały czas jechał z tą samą prędkością liniową, a tor ma kształt okręgu?

30. Koło obraca się ze stałą prędkością kątową $2{,}0 \cdot 10^3$ obr/min.
a. Jaka jest wartość jego prędkości kątowej, wyrażona w radianach na sekundę?
b. Jaki kąt zakreśli dowolny punkt koła w ciągu dziesięciu sekund? Odpowiedź podaj w radianach i sekundach.

31. Cząstka przebyła drogę 3,0 m po okręgu o promieniu 1,5 metra.
a. Jaki kąt zakreślił w tym czasie jej wektor położenia?
b. Jeżeli cząstka poruszała się ze stałą prędkością i przebyła tę drogę w ciągu 1,0 s, to jaka była jej prędkość kątowa?
c. Jaka jest wartość przyspieszenia tej cząstki?

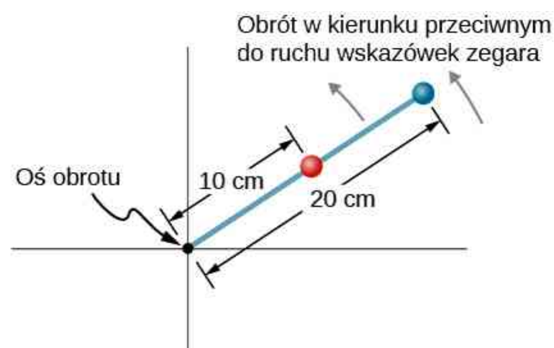
32. Płyta kompaktowa o średnicy 120 mm obraca się z prędkością kątową 500 obr/min.
a. Jaka jest prędkość styczna punktów leżących na krawędzi płyty?
b. Jaka jest prędkość styczna punktów leżących w połowie promienia?

33. **Nieracjonalne wyniki.** Śmigło samolotu wiruje z prędkością kątową 10 obr/s, gdy pilot wyłącza silnik. Prędkość kątowa skrzydła maleje ze stałym przyspieszeniem $2{,}0\ \text{rad/s}^2$, aż do zatrzymania. Jaka będzie prędkość kątowa śmigła po 40 s? Czy otrzymany wynik jest rozsądny?

34. Żyroskop zwalniał z przyspieszeniem $0{,}700\ \text{rad/s}^2$ od początkowej prędkości kątowej 32 rad/s do chwili zatrzymania się. Jak długo to trwało?

35. W czasie startu samolotu bezzałogowego jego śmigło przez 3 sekundy zwiększało swoją prędkość kątową, zgodnie ze wzorem $\omega = (25{,}0t)$ rad/s.
a. Jaka była chwilowa prędkość śmigła dla $t = 2{,}0$ s?
b. Jaka jest wartość jego przyspieszenia kątowego?

36. Położenie kątowe pręta zmienia się od chwili $t = 0$ zgodnie z wyrażeniem $20{,}0t^2$ radianów. Na pręcie umieszczono dwa koraliki, tak jak widać na rysunku. Pierwszy z nich umieszczono w odległości 10 cm od osi obrotu, a drugi w odległości 20 cm.
a. Jaka jest wartość prędkości kątowej pręta w chwili $t = 5$ s?
b. Jaka jest wartość przyspieszenia kątowego pręta?
c. Jaka jest wartość prędkości stycznej każdego z koralików w chwili $t = 5$ s?
d. Jaka jest wartość przyspieszenia stycznego każdego z koralików w chwili $t = 5$ s?
e. Jaka jest wartość przyspieszenia dośrodkowego każdego z koralików w chwili $t = 5$ s?



Rysunek 10.41

10.2 Obroty ze stałym przyspieszeniem kątowym

37. Koło obraca się ze stałym przyspieszeniem kątowym $5{,}0\ \text{rad/s}^2$. Startując od spoczynku obróciło się o 300 radianów.
a. Jaka jest jego końcowa prędkość obrotowa?
b. W jakim czasie przebyło drogę kątową 300 radianów?

38. Obracające się ze stałym przyspieszeniem kątowym koło zamachowe obróciło się w ciągu 6 sekund o 300 radianów, osiągając w ten sposób prędkość kątową 100 rad/s.
a. Jaka była wartość jego prędkości kątowej przed upływem tych 6 s?
b. Jaka jest wartość jego przyspieszenia kątowego?

39. Prędkość kątowa obracającego się ciała sztywnego w ciągu 120 s rośnie z 500 do 1500 obr/min.
a. Jaka jest wartość przyspieszenia kątowego tego ciała?
b. O jaki kąt obróciło się w ciągu tych 120 s?

40. Koło zamachowe zwalnia z 600 do 400 obr/min, wykonując w tym czasie 40 obrotów.
a. Wyznacz jego przyspieszenie kątowe.
b. Ile obrotów wykona ono w czasie 120 sekund?

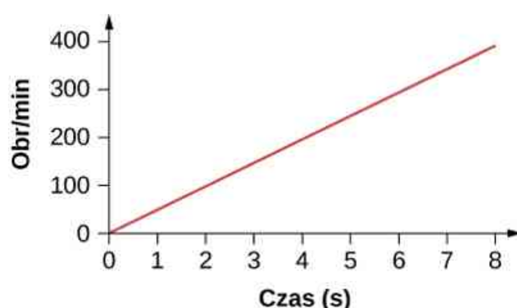
41. Koło o średnicy jednego metra obraca się z przyspieszeniem kątowym $4\ \text{rad/s}^2$.

a. Jaka jest prędkość kątowa koła po 10 sekundach, jeżeli prędkość początkowa wynosiła 2,0 rad/s.
b. O jaki kąt obróci się ono po 10 s?
c. Jaka jest prędkość styczna oraz przyspieszenie styczne punktów na obrzeżu koła po upływie owych 10 s?

42. Koło o średnicy 50 cm obraca się ze stałym przyspieszeniem kątowym $5{,}0\,\mathrm{rad/s^2}$ wokół poziomej osi przechodzącej przez jego środek. Początkowo koło było w spoczynku.
a. Gdzie po 10 sekundach znajdzie się punkt koła, który początkowo był w jego najniższym punkcie?
b. Jaka jest w tym momencie wartość jego przyspieszenia liniowego?

43. Pierścień o średnicy 10 cm obraca się ze stałym przyspieszeniem kątowym $1{,}0\,\mathrm{rad/s^2}$. W chwili $t = 0$ jego prędkość kątowa wynosiła $2{,}0\,\mathrm{rad/s}$.
a. Wyznacz prędkość kątową pierścienia w chwili $t = 5\,\mathrm{s}$.
b. O jaki kąt obrócił się w tym czasie pierścień?
c. Jaka jest wartość przyspieszenia stycznego punktu pierścienia w chwili $t = 5\,\mathrm{s}$?

44. Poniżej przedstawiona jest zależność od czasu prędkości kątowej łopatek wentylatora poduszkowca. Jaki kąt zakreśliły łopatki w ciągu pierwszych 8 sekund? Sprawdź rozwiązanie używając równań kinematyki ruchu obrotowego.



Rysunek 10.42

45. Do obu końców pręta o długości 20 cm przyczepiono koraliki. W chwili początkowej pręt się nie obracał. Jeżeli koraliki mają osiągnąć prędkość liniową 20 m/s w ciągu 7 sekund, to z jakim przyspieszeniem kątowym pręt powinien się poruszać?

10.3 Związek między wielkościami w ruchach obrotowym i postępowym

46. Trąba powietrzna ma średnicę 60,0 m, a prędkość wirującego powietrza ma wartość 500 km/h. Jaka jest, wyrażona w obrotach na sekundę, prędkość kątowa trąby powietrznej?

47. Człowiek stoi na karuzeli obracającej się z prędkością kątową 2,5 rad/s. Jeżeli współczynnik tarcia statycznego między butami człowieka i karuzelą jest równy $\mu_S = 0{,}5$, to jak daleko od osi obrotu może on stać bez poślizgu?

48. Ultrawirówka przyspiesza od spoczynku do 100 000 obrotów na minutę w ciągu 2,00 min.
a. Jakie jest średnie przyspieszenie kątowe w $\mathrm{rad/s^2}$?
b. Jakie jest przyspieszenie styczne w punkcie odległym o 9,50 cm od osi obrotu?
c. Jakie jest przyspieszenie dośrodkowe tego punktu w $\mathrm{m/s^2}$ i w wielokrotności g w momencie, gdy wirówka osiąga maksymalną prędkość obrotową?
d. Jaka jest całkowita droga przebyta przez punkt oddalony o 9,5 cm od osi obrotu ultrawirówki, licząc od początku ruchu do osiągnięcia przez ultrawirówkę maksymalnej prędkości?

49. Turbina wiatrowa obracająca się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara z prędkością 0,5 obr/s zaczyna zwalniać i po 10 s zatrzymuje się. Łopatki turbiny mają długość 20 m.
a. Jakie jest przyspieszenie kątowe łopatek turbiny?
b. Jakie jest przyspieszenie dośrodkowe punktów na końcach łopatek w chwili rozpoczęcia spowalniania ($t_0 = 0\,\mathrm{s}$)?
c. Jaka jest wartość i kierunek całkowitego przyspieszenia liniowego końcówki łopatek w chwili $t_0 = 0\,\mathrm{s}$?

50. Jaka jest wartość (a) prędkości kątowej oraz (b) prędkości liniowej punktu na powierzchni Ziemi, na $30°$ szerokości geograficznej północnej. Promień Ziemi wynosi 6370 km. (c) Na jakiej szerokości geograficznej prędkość liniowa wynosi 10 m/s?

51. Dziecko o masie 40 kg siedzi na skraju karuzeli w odległości 3,0 m od osi obrotu. Karuzela przyspiesza od spoczynku do 0,4 obr/s w ciągu 10 s. Jeśli współczynnik tarcia statycznego pomiędzy dzieckiem a powierzchnią karuzeli wynosi 0,6, to czy dziecko spadnie z karuzeli przed upływem 5 s od początku przyspieszania, czy nie?

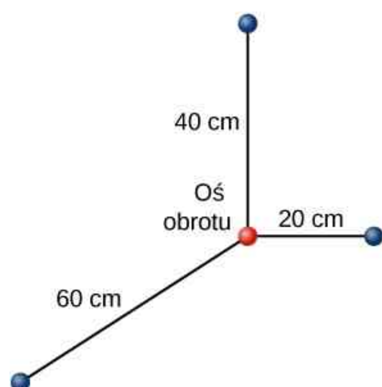
52. Koło rowerowe o promieniu 0,3 m obraca się osiągając prędkość kątową 3 obr/s po upływie 5 s od rozpoczęcia obrotów. Jaka jest wartość i kierunek wektora całkowitego przyspieszenia punktu na krawędzi koła w chwili $t = 1{,}0\,\mathrm{s}$?

53. Prędkość kątowa koła zamachowego o promieniu 1,0 m zmienia się zgodnie z zależnością $\omega(t) = 2{,}0t$. Narysuj, dla punktu położonego w odległości $r = 1{,}0\,\mathrm{m}$ od osi obrotu, wykres $a_d(t)$ i $a_t(t)$ dla $t \in \langle 0\,\mathrm{s};\ 3{,}0\,\mathrm{s}\rangle$. Przeanalizuj te wykresy, aby wyjaśnić, kiedy dla punktu koła oddalonego o 1,0 m od osi obrotu $a_\mathrm{d} \gg a_\mathrm{t}$ oraz kiedy $a_\mathrm{d} \ll a_\mathrm{t}$.

10.4 Moment bezwładności i energia kinetyczna w ruchu obrotowym

54. Na rysunku przedstawiono układ trzech cząstek punktowych leżących w tej samej płaszczyźnie. Masa każdej cząstki wynosi 0,3 kg.

a. Wyznacz moment bezwładności układu względem osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez zaznaczony punkt.
b. Oblicz wartość energii kinetycznej ruchu obrotowego, jeżeli układ obraca się wokół zaznaczonej osi z prędkością kątową 5 obr/s.



55. a. Wyznacz energię kinetyczną ruchu obrotowego Ziemi wokół jej osi obrotu.
b. Jaka jest wartość energii kinetycznej ruchu obrotowego Ziemi związana z jej ruchem wokół Słońca?

56. Oblicz energię kinetyczną ruchu obrotowego 12-kilogramowego koła motocykla, jeżeli jego prędkość kątowa wynosi 120 rad/s. Promień wewnętrzny koła ma 0,2080 m, a zewnętrzny 0,330 m.

57. W baseballu, miotacz wyrzuca piłkę wykonując m.in. obrót przedramieniem wokół stawu łokciowego. Jeżeli prędkość liniowa piłki względem stawu łokciowego wynosi 20 m/s, to jaka jest wartość energii kinetycznej ruchu obrotowego przedramienia? Odległość piłki od stawu biodrowego wynosi 0,480 m, a moment bezwładności przedramienia wynosi $0{,}500\ \mathrm{kg \cdot m^2}$.

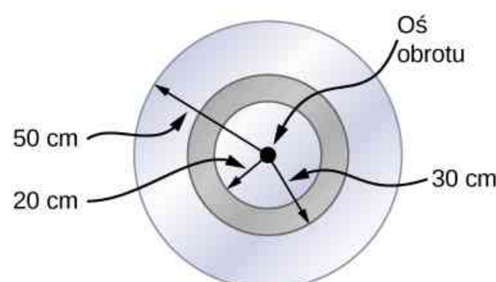
58. Samolot lecący poziomo z prędkością 40,0 m/s podchodzi do lądowania. W momencie, gdy znajduje się na wysokości 300 m, urywa się śmigło o masie 200 kg i momencie bezwładności $70{,}0\ \mathrm{kg \cdot m^2}$. W chwili oderwania się prędkość kątowa śmigła wynosiła 20 obr/s. Zaniedbując opory powietrza wyznacz: (a) prędkość liniową, z jaką śmigło uderzy o ziemię, (b) prędkość kątową śmigła w momencie uderzenia o ziemię.

59. Jaka będzie w momencie zderzenia z ziemią prędkość kątowa śmigła z poprzedniego zadania, jeżeli uwzględnimy, że opory powietrza w ciągu całego ruchu zmniejszyły jego energię kinetyczną ruchu obrotowego o 30%?

60. Jaka jest energia kinetyczna ruchu obrotowego gwiazdy neutronowej o masie $2 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}$, promieniu 10 km i okresie obrotu 0,02 s? Gwiazdę neutronową można uważać za jednorodną kulę.

61. Szlifierka elektryczna składająca się z tarczy obrotowej o masie 0,7 kg i promieniu 10 cm obraca się z prędkością 15 obr/min. Przy szlifowaniu surowej ściany drewnianej jej prędkość obrotowa zmniejsza się o 20%.
a. Jaka jest końcowa energia kinetyczna ruchu obrotowego tarczy?
b. O ile zmniejszyła się energia kinetyczna jej ruchu obrotowego?

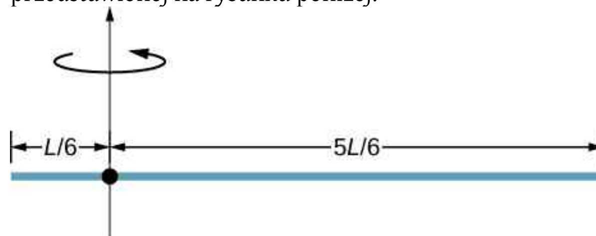
62. Urządzenie składa się z tarczy o masie 2,0 kg i promieniu 50 cm, na której zamocowany jest pierścień o masie 1,0 kg oraz promieniu wewnętrznym 20 cm i zewnętrznym 30 cm (patrz poniżej). Urządzenie obraca się wokół osi przechodzącej przez środek tarczy i pierścienia, a prędkość kątowa wynosi 10 obr/s.
a. Jaki jest moment bezwładności urządzenia względem osi obrotu?
b. Jaka jest energia kinetyczna jego ruchu obrotowego?



10.5 Obliczanie momentu bezwładności

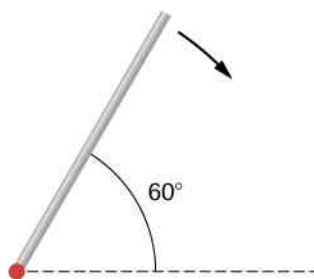
63. Podczas kopnięcia piłki nożnej piłkarz obraca nogę w stawie biodrowym. Moment bezwładności nóg wynosi $3{,}75\ \mathrm{kg \cdot m^2}$, a energia kinetyczna ruchu obrotowego nogi to 175 J. (a) Jaka jest prędkość kątowa nogi? (b) Jaka jest prędkość końcówki buta zawodnika, jeśli jest ona w odległości 1,05 m od stawu biodrowego?

64. Korzystając z twierdzenia Steinera wyznacz moment bezwładności pręta o masie m względem osi przedstawionej na rysunku poniżej.

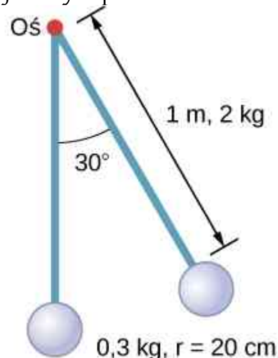


65. Wyznacz moment bezwładności pręta z poprzedniego zadania przez bezpośrednie całkowanie.

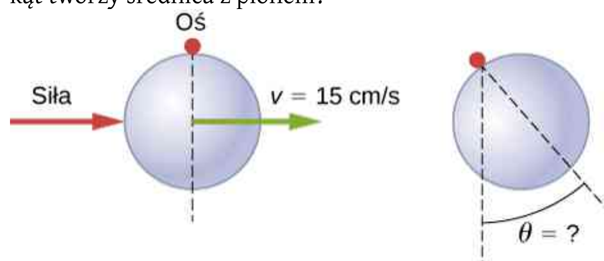
66. Jednorodny pręt o masie 1,0 kg i długości 2,0 m może obracać się swobodnie wokół jednego z jego końców (patrz poniższy rysunek). Jeśli pręt zostanie puszczony swobodnie po wcześniejszym odchyleniu go o kąt 60° , liczony względem poziomu, to z jaką prędkością końcówka pręta przechodzi przez pozycję poziomą?



67. Wahadło składa się z pręta o masie 2 kg i długości 1 m oraz jednorodnej kuli umieszczonej na jednym z jego końców. Kula ma masę 0,3 kg i promień 20 cm (patrz poniższy rysunek). Jeśli wahadło odchylono o kąt 30° i puszczono swobodnie, to jaka jest prędkość kątowa pręta w najniższym punkcie?

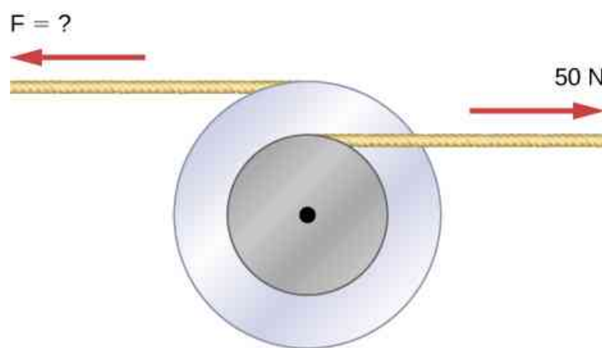


68. Jednorodna kulka o promieniu 10 cm może swobodnie obracać się wokół osi zaznaczonej na rysunku poniżej. Kulkę pchnięto gwałtownie tak, że jej środek masy rozpoczął ruch od położenia pokazanego na poniższym rysunku, z prędkością 15 cm/s. Jaki maksymalny kąt tworzy średnica z pionem?



10.6 Moment siły

69. Dwa koła zamachowe o zaniedbywalnie małej masie i różnych promieniach są połączone ze sobą i obracają się wokół wspólnej osi (patrz poniżej). Do mniejszego koła zamachowego o promieniu 30 cm doczepiono sznurek, za pośrednictwem którego na koło działa siła 50 N. Jaką siłę naciągu należy przyłożyć do sznurka doczepionego do większego koła zamachowego o promieniu 50 cm, aby układ nie obracał się?

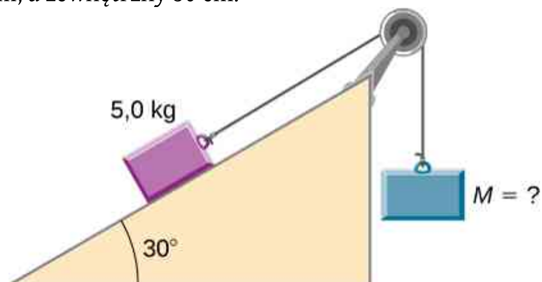


70. Śrubę w samochodzie należy dokręcić używając momentu siły o wartości $62{,}0\ \text{N} \cdot \text{m}$. Jeżeli mechanik używa klucza o długości 20 cm, to siłę o jakiej wartości musi on przyłożyć do końca klucza, aby prawidłowo dokręcić śrubę? Siła jest przykładana prostopadle do klucza.

71. a. Podczas otwierania drzwi naciskasz na nie prostopadle siłą 55,0 N w odległości 0,850 m od zawiasów. Jaki jest moment tej siły liczony względem zawiasów?
b. Czy ma to znaczenie, jeśli naciskasz na tej samej wysokość co zawiasy? Jest tylko jedna para zawiasów.

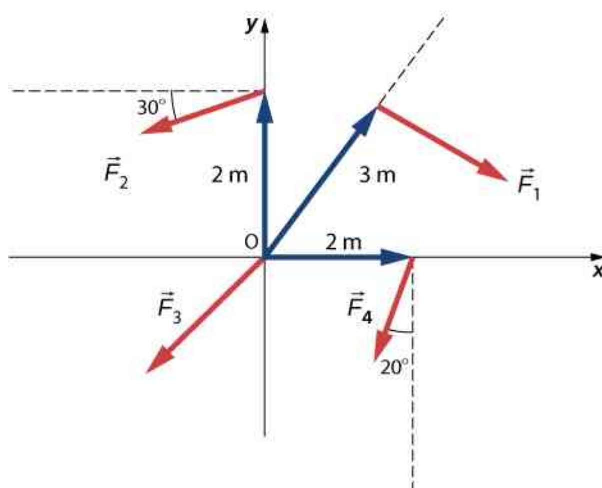
72. Podczas dokręcania śruby naciskasz prostopadle na klucz siłą 165 N, w odległości 0,140 m od środka śruby. Z jakim momentem siły, względem środka śruby, działasz na śrubę? Wynik podaj w niutonometrach.

73. Jaka musi być wartość wiszącej masy, aby koło pasowe się nie obracało (patrz poniższy rysunek)? Masa ciała na równi wynosi 5,0 kg, a równia jest doskonale gładka. Promień wewnętrzny koła pasowego wynosi 20 cm, a zewnętrzny 30 cm.

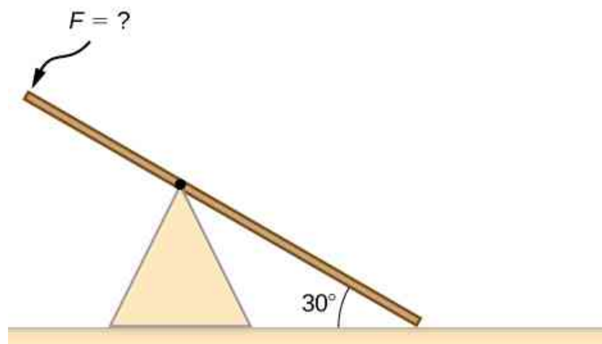


74. Proste wahadło składa się z paska o znikomo małej masie i długości 50 cm, zaczepionego na przegubie, a na drugim końcu doczepiono małe ciało o masie 1,0 kg. Jaki jest moment siły względem przegubu, gdy wahadło znajduje się pod kątem 40° względem pionu?

75. Obliczyć wypadkowy moment sił przedstawionych na rysunku. Wyznacz go względem osi z, która jest prostopadła do rysunku i wychodzi z niego w stronę widza. Wartości sił są następujące: $F_1 = 3\ \text{N}$, $F_2 = 2\ \text{N}$, $F_3 = 3\ \text{N}, F_4 = 1{,}8\ \text{N}$.

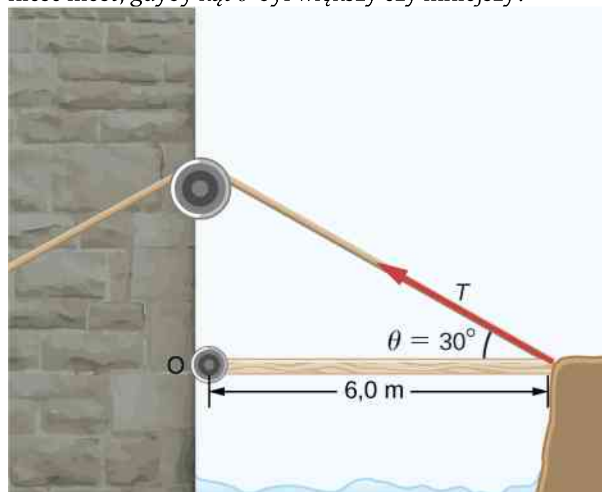


76. Huśtawka ma długość 10,0 m i jednorodnie rozłożoną masę 10,0 kg. Spoczywa ona pod kątem 30° do podłoża (patrz poniższy rysunek). Trzpień obrotowy znajduje się w odległości 6,0 m. Wyznacz wartość siły, jaką należy przyłożyć prostopadle do huśtawki, do jej podniesionego końca, aby huśtawka zaczęła się obracać.

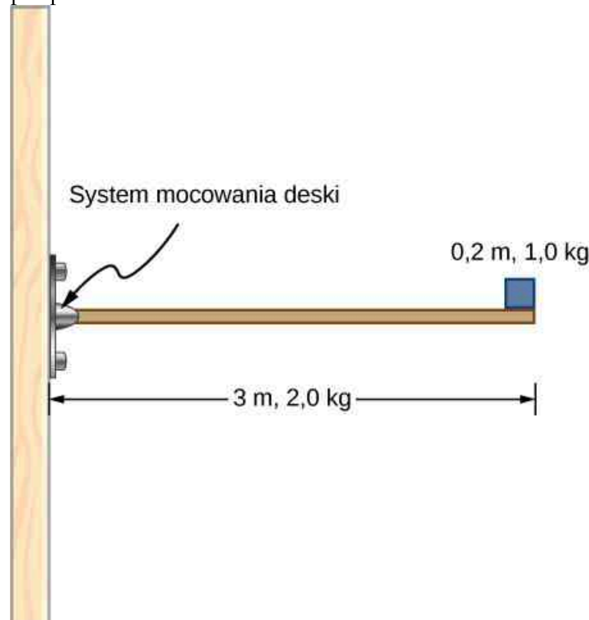


77. Wahadło składa się z pręta o masie 1 kg i długości 1 m oraz przymocowanej do niego kuli o masie 0,5 kg i promieniu 30 cm. Jaki jest moment sił działających na wahadło, gdy jest ono odchylone o kąt 30° od pionu?

78. Do podniesienia zwodzonego mostu potrzebny jest moment siły o wartości $5{,}00 \cdot 10^3$ N · m (patrz poniższy rysunek). Jakie naprężenie liny jest niezbędne do wytworzenia tego momentu? Czy łatwiej byłoby podnieść most, gdyby kąt θ był większy czy mniejszy?



79. Na końcu poziomej belki o długości 3 m i masie 2,0 kg umieszczono klocek o masie 1,0 kg i szerokości 0,2 m (patrz poniższy rysunek). Jaki jest wypadkowy moment sił działających na deskę, liczony względem systemu podparcia deski?



80. Z jaką siłą należy działać na koniec pręta o długości 2,0 m, ułożonego wzdłuż osi x, w celu wytworzenia momentu siły $8{,}0\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m} \cdot \hat{k}$? Moment siły liczymy względem drugiego końca.

81. Wyznacz moment siły $\vec{F} = 5{,}0\,\mathrm{N} \cdot \hat{i} - 2{,}0\,\mathrm{N} \cdot \hat{j} + 1{,}0\,\mathrm{N} \cdot \hat{k}$ względem początku układu współrzędnych, jeżeli siła działa w punkcie $\vec{r} = -2{,}0\,\mathrm{m} \cdot \hat{i} + 4{,}0\,\mathrm{m} \cdot \hat{j}$.

10.7 Druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego

82. Kamień szlifierski (jednorodna tarcza) o masie 90,0 kg i promieniu 0,340 m obraca się z prędkością kątową 90,0 obr/ min. Naciskasz na niego stalowym kluczem z siłą 20,0 N skierowaną wzdłuż promienia. (a) Zakładając, że współczynnik tarcia kinetycznego między kluczem i tarczą kamienia wynosi 0,20, oblicz przyspieszenie kątowe kamienia szlifierskiego. (b) Ile obrotów zrobi kamień, zanim się zatrzyma?

83. Załóżmy, że działasz siłą styczną o wartości 180 N na kamień szlifierski (jednorodna tarcza) o promieniu 0,280 m i masie 75,0 kg.
a. Jaki moment siły jest wywierany na kamień?
b. Jakie jest przyspieszenie kątowe, przyjmując, że siły tarcia są do zaniedbania?
c. Jakie jest przyspieszenie kątowe, jeśli siła tarcia wynosi 20,0 N i jest wywierana na kamień w odległości 1,50 cm od osi obrotu?

84. Koło zamachowe ($I = 50\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$) rozpoczynające ruch uzyskuje w ciągu 5 s prędkość kątową 200,0 rad/

s, pod wpływem działania stałego momentu siły pochodzącego od silnika.
a. Jakie jest przyspieszenie kątowe koła zamachowego?
b. Jaka jest wielkość momentu siły?

85. Do ciała sztywnego o momencie bezwładności $4{,}0\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$ (liczonym względem osi obrotu) przyłożono określony moment siły. Jeżeli ciało zaczyna ruch od spoczynku i po 10 sekundach uzyskuje prędkość kątową 20 rad/s, to jaka jest wartość zastosowanego momentu siły?

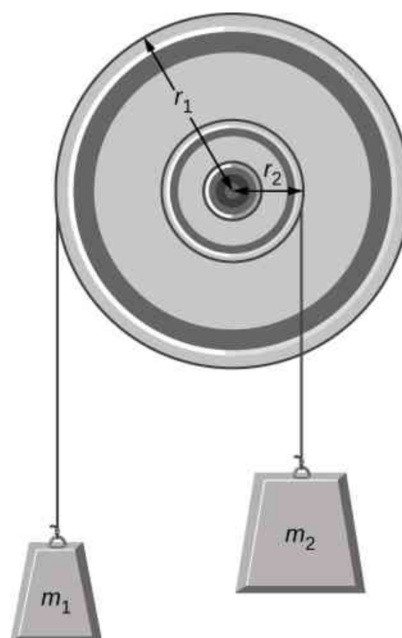
86. Moment obrotowy $50\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$ działał na szlifierkę ($I = 20{,}0\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$) przez 20 s.
a. Jeśli ruch zaczyna się od spoczynku, jaka jest prędkość kątowa szlifierki po zaprzestaniu działania momentu siły?
b. O jaki kąt obróciło się koło szlifierki w czasie działania tego momentu siły?

87. Koło zamachowe ($I = 100{,}0\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$) obracające się z prędkością kątową 500,0 obr/min zatrzymuje się po upływie 2,0 min w wyniku działania sił tarcia. Jaka jest wartość momentu siły tarcia działającej na koło zamachowe?

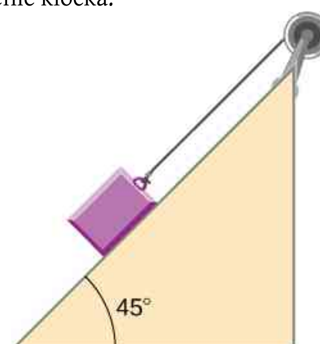
88. Jednorodną tarczę szlifierską o masie 50 kg i średnicy 1 m napędza silnik elektryczny. Tarcie jest zaniedbywalnie małe.
a. Jaki moment sił należy zastosować, aby nadać jej prędkość kątową 120 obrotów na minutę w ciągu 20 obrotów. Początkowo tarcza nie obracała się.
b. Narzędzie, którego współczynnik tarcia kinetycznego o powierzchnię koła wynosi 0,6, jest przyciskane prostopadle do koła z siłą 40 N. Jaki moment siły trzeba zastosować, aby silnik utrzymywał stałą prędkość kątową tarczy o poprzedniej wartości?

89. Załóżmy, że w momencie swojego powstania Ziemia nie obracała się. Potem, w wyniku działania stałego momentu siły, po upływie 6 dni uzyskała prędkość kątową 1 obr/dobę.
a. Jaka była wartość przyspieszenia kątowego w ciągu tych 6 dni?
b. Jaki moment siły działał w tym okresie na Ziemię?
c. Jaką wartość musiałaby mieć siła styczna przyłożona do Ziemi na jej równiku, aby wytworzyć ten moment?

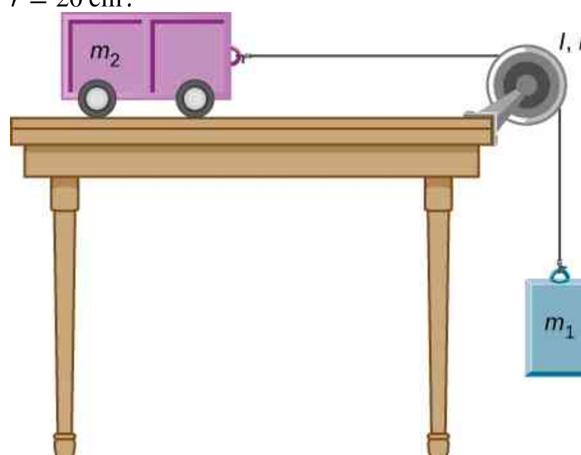
90. Do ściany przymocowane jest koło pasowe o momencie bezwładności $2{,}0\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$, tak jak to pokazano na poniższym rysunku. Lekkie sznurki, na końcach których zamocowano odważniki, owinięte są wokół dwóch obwodów koła pasowego. Jakie jest (a) przyspieszenie kątowe koła pasowego i (b) liniowe przyspieszenie ciężarków? Załóżmy, że znamy następujące dane: $r_1 = 50\,\mathrm{cm}$, $r_2 = 20\,\mathrm{cm}$, $m_1 = 1{,}0\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 2{,}0\,\mathrm{kg}$.



91. Klocek o masie 3 kg zsuwa się po nachylonej pod kątem 45° równi (patrz rysunek). Klocek przymocowany jest za pomocą sznurka o znikomo małej masie do koła pasowego umieszczonego na szczycie równi. Koło ma masę 1 kg i promień 0.5 m. Współczynnik tarcia kinetycznego klocka o równię jest równy 0,4. Wyznacz przyspieszenie klocka.

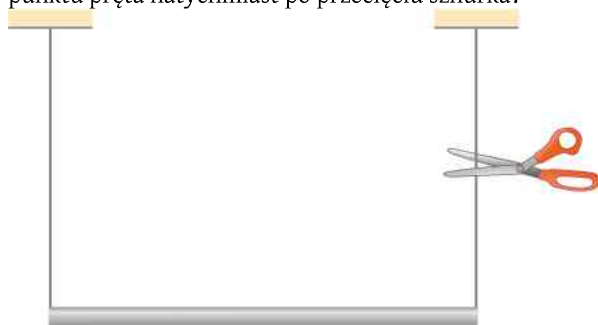


92. Pokazany poniżej wózek porusza się po blacie stołu podczas opadania klocka. Jaka jest wartość przyspieszenia klocka? Zaniedbaj tarcie i przyjmij następujące dane: $m_1 = 2{,}0\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 4{,}0\,\mathrm{kg}$, $I = 0{,}4\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$, $r = 20\,\mathrm{cm}$.

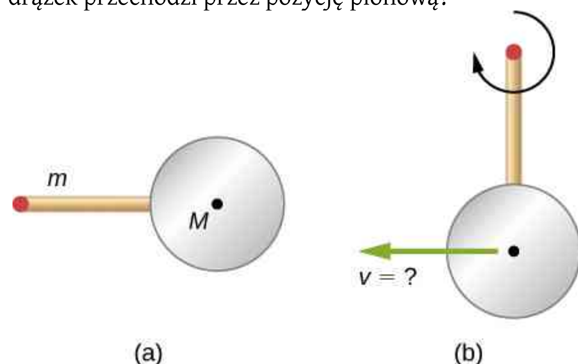


93. Jednorodny pręt o masie m i długości L zawieszony

jest poziomo na dwu sznurkach o nieznacznej masie, tak jak pokazano poniżej.
a. Jakie jest przyspieszenie liniowe wolnego końca pręta natychmiast po przecięciu sznurka?
b. Jakie jest przyspieszenie liniowe środkowego punktu pręta natychmiast po przecięciu sznurka?



94. Cienki drążek o masie 0,2 kg i długości 0,5 m przymocowany jest do obrzeża metalowego krążka o masie 2 kg i promieniu 0,3 m. Drążek może swobodnie obracać się wokół poziomej osi przechodzącej przez jego drugi koniec (patrz rysunek).
a. Jaka będzie prędkość środka krążka, gdy pręt, uwolniony z pozycji poziomej, osiągnie pozycję pionową?
b. Jakie jest przyspieszenie środka krążka w chwili uwolnienia krążka?
c. Jakie jest przyspieszenie środka krążka w chwili, gdy drążek przechodzi przez pozycję pionową?



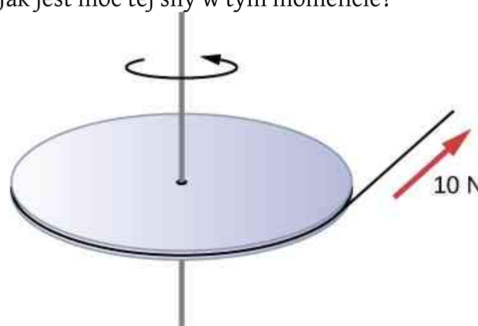
10.8 Praca i energia kinetyczna w ruchu obrotowym

95. Turbina wiatrowa obraca się z prędkością kątową 20 obr/min. Jeśli jej moc wynosi 2,0 MW, to jaki jest generowany przez wiatr moment siły działający na turbinę?

96. Gliniany walec o promieniu 20 cm znajdujący się na kole garncarskim obraca się ze stałą prędkością kątową wynoszącą 10 obr/s. Garncarz przykłada rękami siłę 10 N do gliny. Współczynnik tarcia między jego dłonią a gliną wynosi 0,1. Jaką moc garncarz musi przyłożyć do koła, aby utrzymać jego stałą prędkość kątową?

97. Jednorodna, cylindryczna tarcza szlifierska ma masę 10 kg i promień 12 cm.
a. Jaka jest jej energia kinetyczna podczas szlifowania, gdy obraca się ona z prędkością kątową $1{,}5 \cdot 10^3$ obr/min ?
b. Po wyłączeniu silnika napędzającego tarczę, do zewnętrznej krawędzi tarczy dociśnięto, prostopadle do kamienia, ostrze noża. Siła nacisku wynosiła 5,0 N, a współczynnik tarcia kinetycznego między tarczą a ostrzem wynosił 0,80. Stosując twierdzenie o pracy i energii wyznacz, ile obrotów wykona tarcza do zatrzymania się.

98. Jednorodny krążek o masie 500 kg i promieniu 0,25 m jest zamontowany na łożysku mogącym obracać się bez tarcia, dzięki czemu może on obracać się swobodnie wokół pionowej osi przechodzącej przez jego środek (patrz rysunek). Sznurek owinięty wokół obręczy krążka jest ciągnięty z siłą 10 N.
a. Jaką pracę wykonała ta siła do chwili wykonania przez krążek 3 obrotów, jeśli zaczynał od spoczynku?
b. Wyznacz moment tej siły, a następnie oblicz pracę wykonaną przez ten moment siły do zakończenia 3 obrotów.
c. Jaka jest wartość prędkości kątowej w momencie zakończenia trzeciego obrotu?
d. Jak jest moc tej siły w tym momencie?

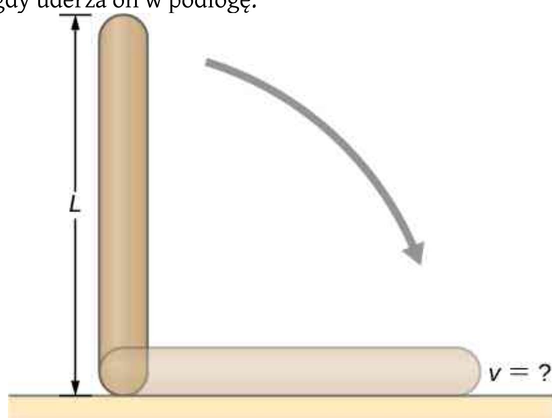


99. W wyniku działania stałego momentu sił o wartości $2{,}0 \cdot 10^3$ N · m, śmigło przyspiesza od spoczynku do prędkości kątowej 1000 obr/min w czasie 6 s.
a. Jaki jest moment bezwładności śmigła?
b. Jaka moc jest dostarczana do śmigła po upływie 3,0 s od rozpoczęcia obrotów?

100. Kulę o masie 1,0 kg i promieniu 0,5 m przymocowano do jednego z końców pręta o znikomo małej masie i długości 3 m (patrz rysunek poniżej). Układ obraca się w próżni w płaszczyźnie poziomej, dookoła pionowej osi, z prędkością kątową 400 obrotów na minutę. Następnie, po włączeniu nadmuchu powietrza, na wirujący początkowo z taką prędkością kątową układ zaczyna działać siła oporu powietrza o wartości 0,15 N. Siła działa na kulę w kierunku przeciwnym do kierunku jej ruchu. Jaka jest moc siły oporu powietrza po upływie 100,0 s licząc od momentu, w którym zaczęła ona działać?



101. Jednorodny pręt o długości L i masie M jest trzymany pionowo, z jednym końcem spoczywającym na podłodze, jak pokazano poniżej. Kiedy pręt zostaje puszczony, obraca się wokół swojego dolnego końca, aż do uderzenia w podłogę. Zakładając, że dolny koniec pręta nie ślizga się, wyznacz liniową prędkość górnego końca, gdy uderza on w podłogę.

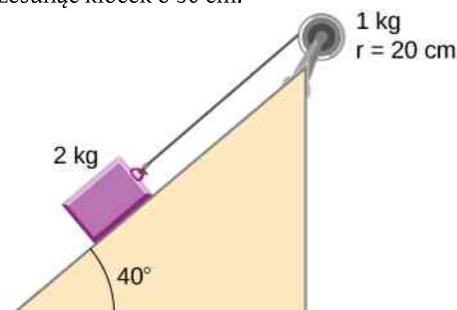


102. Sportowiec na siłowni działa na pedały roweru ze stałą siłą 50 N, aby utrzymać stałą prędkość kątową koła równą 10 obr/s. Ramiona pedałów mają długość 30 cm. Jaką moc dostarcza rowerowi sportowiec?

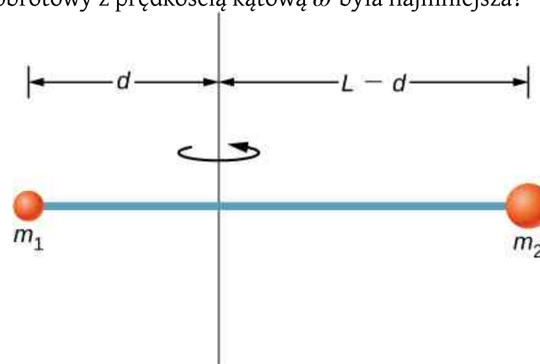
103. Klocek o masie 2 kg umieszczono na doskonale gładkiej powierzchni, nachylonej pod kątem 40° do poziomu. Za pośrednictwem sznurka klocek połączony jest z krążkiem o masie 1 kg i promieniu 20 cm (patrz rysunek).

a. Wyznacz przyspieszenie klocka.

b. Wyznacz pracę wykonaną przez siłę ciążenia, aby przesunąć klocek o 50 cm.



104. Dwa małe ciała o masach m_1 i m_2 przymocowane są na przeciwległych końcach cienkiego, sztywnego pręta o długości L i masie M. Pręt jest zamontowany tak, że może swobodnie obracać się w płaszczyźnie poziomej wokół osi pionowej (patrz rysunek poniżej). Jaka powinna być odległość d osi obrotu od masy m_1, aby praca potrzebna na wprowadzenie pręta w ruch obrotowy z prędkością kątową ω była najmniejsza?



ZADANIA DODATKOWE

105. Rowerzysta nadaje kołom roweru prędkość kątową równą 3,0 obr/s. Jeśli zacznie hamować, zmniejszając prędkość kątową z opóźnieniem $0{,}3\ \text{obr/s}^2$, to po jakim czasie rower się zatrzyma?

106. Oblicz prędkość kątową ruchu orbitalnego Ziemi wokół Słońca.

107. Talerz gramofonu początkowo obracający się z prędkością kątową $100/3\ \text{obr/min}$ zwolnił i zatrzymał się po 1,0 min.

a. Wyznacz przyspieszenie talerza gramofonu zakładając, że było ono stałe.

b. Ile obrotów wykonał talerz, zanim się zatrzymał?

108. W ciągu 0,40 s żyroskop został rozpędzony za pomocą sznurka od spoczynku do prędkości kątowej 32 rad/s. Przyspieszenie kątowe żyroskopu jest stałe.

a. Jakie jest jego przyspieszenie kątowe w rad/s^2?

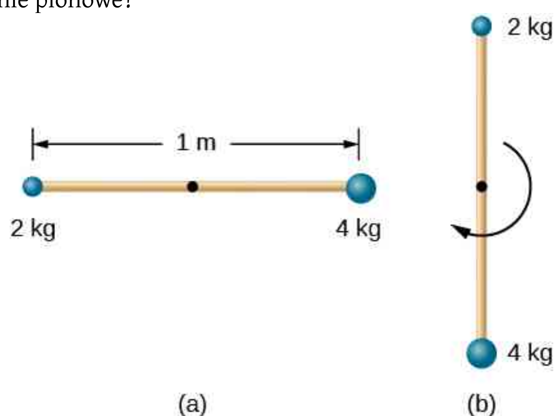
b. Ile obrotów wykonał on w czasie tego przyspieszania?

109. Załóżmy, że mały pyłek kurzu spadł na płytę CD. Jeśli szybkość wirowania płyty CD wynosi 500 obr/min, a pyłek upadł w odległości 4,3 cm od środka płyty, to jaką całkowitą drogę pokonał pyłek w ciągu 3 minut? (Załóż, że pyłek leży cały czas w tej samej odległości od środka płyty).

110. Układ cząstek punktowych obraca się wokół stałej osi z prędkością kątową 4 obr/s. Wzajemne odległości cząstek i ich odległość od osi obrotu są stałe. Masy cząstek i ich odległości od osi obrotu to $m_1 = 0{,}1\ \text{kg}$, $r_1 = 0{,}2\ \text{m}$, $m_2 = 0{,}05\ \text{kg}$, $r_2 = 0{,}4\ \text{m}$, $m_3 = 0{,}5\ \text{kg}$, $r_3 = 0{,}01\ \text{m}$. (a) Ile wynosi moment bezwładności tego układu względem osi obrotu? (b) Jaka jest energia kinetyczna ruchu obrotowego tego układu?

111. Oblicz moment bezwładności łyżwiarza mając następujące informacje:
a. Łyżwiarza o masie 60,0 kg można w przybliżeniu uznać za walec o promieniu 0,110 m.
b. Łyżwiarza z wysuniętymi rękami można uznać za walec o masie 52,5 kg i promieniu 0,110 m, z którego wystają dwa pręty o długości 0,900 m i masie 3,75 kg każdy.

112. Kij o długości 1,0 m oraz masie 6,0 kg może swobodnie obracać się wokół poziomej osi przechodzącej przez jego środek. Małe ciała o masach 4,0 i 2,0 kg przymocowano do dwóch jego końców (patrz poniższy rysunek). Kij zostaje zwolniony z pozycji poziomej. Jaka jest prędkość kątowa kija, gdy przechodzi on przez położenie pionowe?



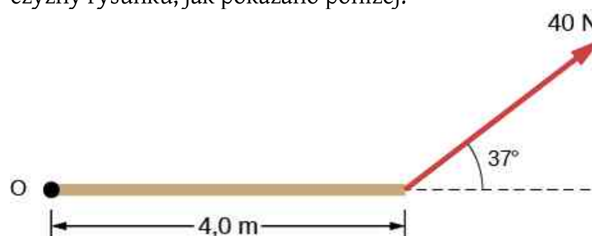
113. Wahadło składa się z pręta o długości 2 m i masie 3 kg oraz kuli o masie 1 kg i promieniu 0,3 m, przymocowanej do jednego jego końców. Oś obrotu jest taka, jak pokazano poniżej. Ile wynosi prędkość kątowa wahadła w najniższej pozycji, jeśli pręt został puszczony swobodnie z pozycji pod kątem $30°$?



ZADANIA TRUDNIEJSZE

119. Zależność przyspieszenia kątowego wirującej bryły sztywnej od czasu ilustruje równanie $\varepsilon = (2{,}0 - 3{,}0t)\ \text{rad/s}^2$. Jeżeli bryła rozpoczyna ruch obrotowy w chwili $t = 0$, to:

114. Oblicz moment siły o wartości 40 N względem osi przechodzącej przez punkt O i prostopadłej do płaszczyzny rysunku, jak pokazano poniżej.



115. Dwoje dzieci naciska na drzwi po przeciwnych stronach. Oba naciski są skierowane poziomo i prostopadle do drzwi. Jedno dziecko popycha z siłą 17,5 N w odległości 0,600 m od zawiasów, a drugie w odległości 0,450 m. Z jaką siłą musi działać drugie dziecko, aby drzwi się nie poruszyły? Załóż, że tarcie jest nieistotne.

116. Siła $\vec{F} = 20\,\text{N} \cdot \hat{j}$ jest przyłożona w punkcie $\vec{r} = 4{,}0\,\text{m} \cdot \hat{i} - 2{,}0\,\text{m} \cdot \hat{j}$. Wyznacz moment tej siły względem początku układu współrzędnych.

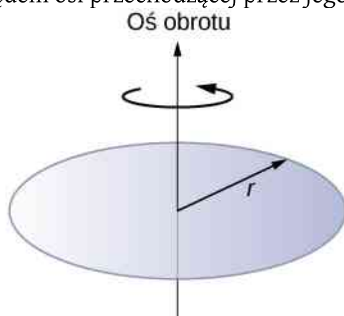
117. Silnik samochodowy może wytworzyć moment obrotowy $200\ \text{N} \cdot \text{m}$. Oblicz przyspieszenie kątowe, jeśli 95,0% momentu obrotowego zostanie przyłożone do wału napędowego, osi i tylnych kół samochodu, biorąc pod uwagę następujące informacje: samochód jest zawieszony tak, że koła mogą obracać się swobodnie; obręcz każdego koła można uznać za tarczę o masie 15,0 kg i promieniu 0,180 m; każdą oponę można uznać za pierścień o masie 2,00 kg, którego wewnętrzny promień jest równy 0,180 m a zewnętrzny 0,320 m; bieżnik każdej opony można uznać za 10,0 kg obręcz o promieniu 0,330 m; oś można uznać za pręt o masie 14,0 kg i promieniu 2,00 cm; wał napędowy można uznać za pręt o masie 30,0 kg i promieniu 3,20 cm.

118. Tarcza szlifierki o masie 50 kg i promieniu 0,8 m dzięki pracy silnika utrzymuje stałą prędkość kątową wynoszącą 4,0 obr/s, podczas gdy do jej krawędzi dociskany jest nóż. Nóż dociskany jest z siłą 5,0 N, a współczynnik tarcia kinetycznego między tarczą a ostrzem wynosi 0,8. Jaką moc dostarcza silnik, jeśli tarcza szlifierki utrzymuje stałą prędkość kątową?

a. Jaka jest zależność jej prędkości kątowej od czasu?
b. Jaka jest zależność jej położenia kątowego od czasu?
c. O jaki kąt obróciła się w ciągu pierwszych 10 s?
d. Jeżeli wektor wodzący pewnej cząstki tej bryły w chwili $t = 0$ wskazywał kąt $0°$, to jaki kąt wskazuje on w chwili $t = 10$ s?

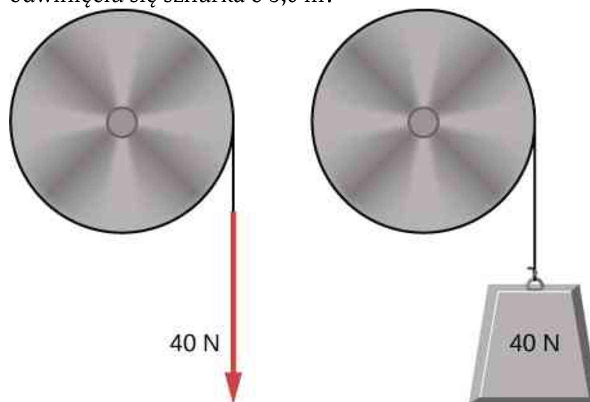
120. Przez ostatnie 100 lat długość ziemskiego dnia wzrosła o 0,002 s. Jeśli ten wzrost będzie trwał, to po jakim czasie Ziemia się zatrzyma?

121. Gęstość powierzchniowa krążka o masie m, promieniu R i powierzchni A zmienia się wraz z odległością osi obrotu, zgodnie ze wzorem $\sigma = mr/AR$, gdzie r jest odległością od środka krążka (patrz poniższy rysunek). Wyznacz wartość momentu bezwładności krążka liczonego względem osi przechodzącej przez jego środek.



122. Wyobraź sobie, że chciałbyś wydłużyć ziemski dzień do 28,0 h. Możesz tego dokonać przykładając na równiku siłę równoległą do jego płaszczyzny i skierowaną przeciwnie do kierunku obrotu Ziemi. Niestety, dysponujesz jedynie siłą $4{,}00 \cdot 10^7$ N. Ile czasu zajęłoby ci wydłużenie dnia do takiej wartości?

123. Sznurek nawinięty na walcu o promieniu 0,25 m jest ciągnięty z siłą 40 N (jak pokazano na poniższym rysunku). Walec jest zamontowany na łożyskach, których tarcie można pominąć, a jego moment bezwładności wynosi $6{,}0\ \mathrm{kg \cdot m^2}$.
a. Użyj twierdzenia o pracy i energii do obliczenia prędkości kątowej walca po rozwinięciu się sznurka o 5,0 m.
b. Jeśli siła 40 N zostanie zastąpiona ciężarkiem o wadze 40 N, to jaka będzie prędkość kątowa walca po odwinięciu się sznurka o 5,0 m?



11 | MOMENT PĘDU



Rysunek 11.1 Śmigłowiec (helikopter) unosi się w powietrzu dzięki wirnikowi nośnemu. Składa się on z 2–6 (Rysunek 11.1) łopat śmigłowych osadzonych w głowicy, które obracając się, utrzymują samolot w powietrzu. Ze względu na zasadę zachowania momentu pędu korpus śmigłowca ma tendencję do obracania się w kierunku przeciwnym do kierunku obrotu wirnika nośnego. Temu obrotowi wokół własnej osi zapobiega śmigło ogonowe umieszczone pionowo na ogonie helikoptera.

Treść rozdziału

Wstęp

Moment pędu w ruchu obrotowym jest odpowiednikiem pędu w ruchu postępowym. Wszelkie masywne obiekty, które obracają się wokół osi, w tym wirujące koła zamachowe, planety, gwiazdy, huragany, tornada, itp. posiadają moment pędu. Dla zilustrowania koncepcji momentu pędu można wykorzystać śmigłowiec pokazany na rysunku powyżej. Łopaty śmigieł głównego wirnika, obracające się wokół pionowej osi korpusu głównego, wytwarzają niezerowy moment pędu. Jak dowiemy się z treści tego rozdziału, korpus śmigłowca, zgodnie z zasadą zachowania momentu pędu, ma tendencję do obracania się w kierunku przeciwnym do kierunku obrotu wirnika nośnego. Aby do tego nie dopuścić, na ogonie śmigłowca umieszcza się małe wirniki, które wirując, wywierają siłę na ogon śmigłowca w celu ustabilizowania jego kierunku lotu. Zasada zachowania momentu pędu jest omówiona w dalszej części tego podrozdziału. W głównej jego części odkryjemy tajemnice momentu pędu brył sztywnych, takich jak np. góry, a także cząstki i układy cząstek punktowych. Zaczniemy od omówienia toczenia (ruchu tocznego), które opiera się na ideach zaprezentowanych w poprzednim rozdziale (i jest jego rozszerzeniem).

11.1 | Toczenie się ciał

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać zjawisko toczenia się ciał bez poślizgu;
- wyjaśniać, jak w przypadku ruchu tocznego bez poślizgu zmienne liniowe związane są ze zmiennymi kątowymi;
- znajdować przyspieszenia liniowe i kątowe w ruchu tocznym bez poślizgu;
- obliczać statyczną siłę tarcia związaną z toczeniem się bez poślizgu;
- analizować ruch toczny ciał, używając zasady zachowania energii.

Toczenie się lub **ruch toczny** ciał (ang. **rolling motion**) to ruch, który jest złożeniem ruchu obrotowego i postępowego ciał i obserwujemy go w wielu codziennych sytuacjach. Wystarczy pomyśleć o kołach samochodu poruszającego się po autostradzie, kołach startującego lub lądującego samolotu na pasie startowym lub obracających się łopat turbiny wiatrowej. Do precyzyjnego opisu ruchu toczenia się ciała niezbędne jest dogłębne zrozumienie pojęcia siły i momentu siły.

Przy analizowaniu w tym rozdziale ruchu tocznego wokół stałej osi obrotu powołujemy się na Rysunek 10.20, rozdział Obroty wokół stałej osi, gdzie można znaleźć wyrażenia opisujące moment bezwładności wybranych, powszechnie występujących, obiektów geometrycznych. Podrozdział ten może się również okazać przydatny do wykonywania obliczeń parametrów różnych ruchów ciał, którym towarzyszy ruch obrotowy.

Toczenie bez poślizgu

Ludzie obserwowali toczenie się ciał bez poślizgu od czasu wynalezienia koła. Spójrzmy na przykład na wzajemne oddziaływanie opon samochodu i nawierzchni drogi. Jeśli kierowca podczas ruszania maksymalnie naciśnie pedał gazu, tak że opony obracają się, ale samochód nie porusza się do przodu, mamy do czynienia z tarciem kinetycznym pomiędzy oponami kół a powierzchnią drogi. Jeśli jednak kierowca będzie naciskał pedał gazu powoli, to spowoduje, że samochód ruszy do przodu, a opony kół będą toczyły się bez poślizgu. Wielu ludzi dziwi, że w rzeczywistości dolna część koła znajduje się w spoczynku w stosunku do podłoża, co oznacza, że tarcie między oponami a nawierzchnią drogi musi być tarciem statycznym. Na Rysunku 11.2, rower wraz z rowerzystką jadącą w pozycji pionowej porusza się. Opony mają kontakt z nawierzchnią drogi, a nawet jeśli podczas toczenia część będąca w kontakcie, odkształca się nieznacznie, to nie dochodzi do poślizgu i opony przez pewien czas pozostają w stanie spoczynku w stosunku do powierzchni drogi. Aby tak było, tarcie między oponą i nawierzchnią drogi musi być tarciem statycznym.

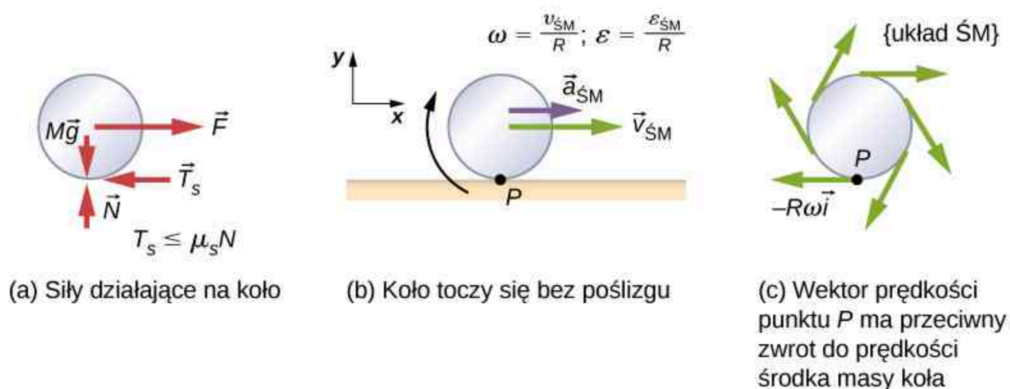




(a) (b)

Rysunek 11.2 (a) Rower porusza się do przodu, a jego opony się nie ślizgają. Najniższe fragmenty opon mają kontakt z nawierzchnią drogi, a nawet jeśli podczas toczenia ich części odkształcają się nieznacznie, to nie dochodzi do poślizgu i dolne fragmenty opon przez jakiś czas są w stanie spoczynku w stosunku do powierzchni drogi. (b) Zdjęcie pokazuje, że górna część toczącego się koła jest rozmyta w czasie ruchu (zobacz obraz szprych), a dolna jest w stanie spoczynku. (Źródło (a) modyfikacja pracy Nelsona Lourenço; źródło (b) modyfikacja pracy Colin Rose)

Przystępując do analizy ruchu tocznego bez poślizgu, wprowadzimy najpierw związki między wielkościami liniowymi prędkości i przyspieszenia środka masy koła jak również zmiennymi kątowymi, które opisują ruch obrotowy koła. Sytuację tę przedstawiono na Rysunku 11.3.



Rysunek 11.3 (a) Koło jest ciągnięte po poziomej powierzchni przez siłę $\vec{F}$. Siła tarcia statycznego $\vec{T}_s$, przy czym $T_s \leqslant \mu_s N$, jest wystarczająco duża, aby uchronić je przed poślizgiem. (b) Pokazano wektory prędkości liniowej i przyspieszenia środka masy oraz odpowiednie wyrażenia dla prędkości i przyspieszenia kątowego. Punkt P jest w stanie spoczynku w stosunku do powierzchni. (c) Punkt P ma prędkość liniową $-R\omega\hat{i}$ względem środka masy (ŚM) koła.

Na Rysunku 11.3(a) pokazano wektory sił zapobiegające poślizgowi koła. Na Rysunku 11.3(b), punkt P, który dotyka powierzchni, pozostaje w stosunku do niej w spoczynku. Punkt P ma prędkość $-R\omega\hat{i}$ względem środka masy, R oznacza tu promień koła, ω jest prędkością kątową obrotu koła wokół własnej osi, zaś $\hat{i}$ jest wektorem jednostkowym. Ponieważ koło toczy się bez poślizgu, prędkość punktu P względem powierzchni jest równa sumie jego prędkości względem środka masy i prędkość środka masy względem powierzchni:

$$\vec{v}_P = -R\omega\hat{i} + v_{ŚM}\hat{i}.$$

Ponieważ prędkość P względem powierzchni jest równa zero, $v_P = 0$, oznacza to, że

$$v_{ŚM} = R\omega. \tag{11.1}$$

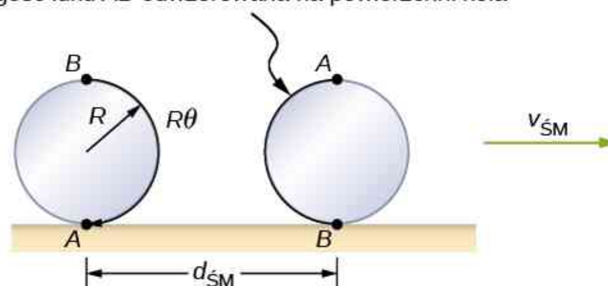
Tak więc prędkość środka masy koła jest równa iloczynowi jego prędkości kątowej wokół osi i jego promienia. Powyższe równanie pokazuje związek zmiennej liniowej (prędkości) po lewej stronie równania ze zmienną kątową (prędkością kątową) po prawej stronie równania. Podobny związek występuje w przypadku przyspieszenia liniowego.

Jeśli zróżniczkujemy lewą stronę Równania 11.1, uzyskamy wyrażenie na liniowe przyspieszanie środka masy. R po prawej stronie równania jest stałą, a ponieważ $\varepsilon = \mathrm{d}\omega / \mathrm{d}t$ otrzymujemy

$$a_{ŚM} = R\varepsilon. \tag{11.2}$$

Ponadto, odwołując się do Rysunku 11.4, można wyznaczyć odległość przebytą przez środek masy koła poprzez zmienną kątową związaną z ruchem tocznym koła. Zauważmy, że zewnętrzna powierzchnia koła od punktu A do punktu B dokładnie odwzorowuje na ziemi długość, która jest równa odległości przebytej przez środek masy $d_{ŚM}$. Z rysunku wynika też, że długość odcinka, który koło odwzorowuje na podłożu, jest długością łuku $R\theta$. Z porównania tych dwóch długości otrzymujemy:

$$d_{ŚM} = R\theta. \tag{11.3}$$



Rysunek 11.4 Gdy walec toczy się po powierzchni, to długość łuku $R\theta$ od punktu A do punktu B jest odwzorowana na powierzchni będąc równa odległości $d_{ŚM}$, którą przebywa środek masy.

Przykład 11.1

Staczanie się z równi pochyłej

Walec stacza się bez poślizgu z równi pochyłej, bez prędkości początkowej. Masa walca wynosi m, a jego promień r.

a. Jakie jest jego przyspieszenie?

b. Jaki warunek musi spełniać współczynnik tarcia statycznego μ_s, aby zapobiec poślizgowi walca?

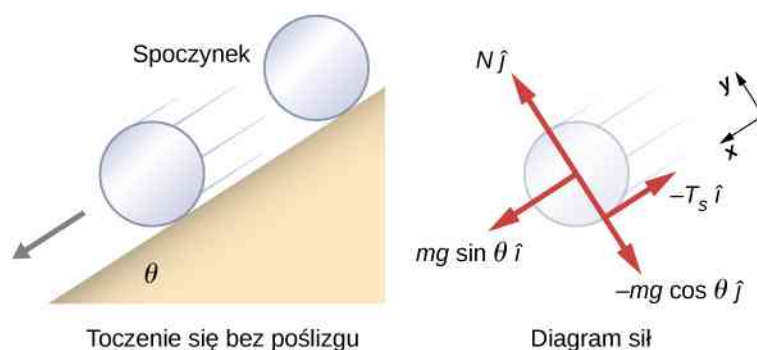
Strategia rozwiązania

Narysujmy diagram sił (działających na walec) i wybierzmy układ współrzędnych. Niech oś OX będzie równoległa do powierzchni równi i zwrócona w dół równi, zaś oś OY prostopadła do powierzchni równi i zwrócona w górę. Scharakteryzujmy siły działające na walec. Są to: siła normalna (siła reakcji podłoża (na siłę

nacisku)), siła grawitacji i siła tarcia statycznego. Zapiszmy drugą zasadę dynamiki (drugie prawo Newtona) ruchu postępowego w kierunkach x i y oraz drugą zasadę dynamiki (drugie prawo Newtona) dla ruchu obrotowego. Na podstawie zapisanych równań obliczymy przyspieszenie i siłę tarcia.

Rozwiązanie

a. Szkic sytuacyjny i diagram sił pokazane są na Rysunku 11.5, na którym zaznaczono siłę normalną, składowe siły ciężkości (ciężaru) oraz statyczną siłę tarcia. Rola siły tarcia (w stosunku do jej maksymalnej możliwej wartości) ogranicza się do zapewnienia toczenia się walca bez poślizgu. Innymi słowy, ponieważ nie dochodzi do poślizgu, wartość siły tarcia jest mniejsza lub równa $\mu_s N$. Zapisując drugą zasadę dynamiki dla kierunków x i y, otrzymujemy



Rysunek 11.5 Walec staczający się z równi pochyłej (lewy rysunek), diagram sił działających na walec (prawy rysunek).

Podstawiając odpowiednio wartości sił z diagramu sił, otrzymujemy

$$\begin{aligned} mg\sin\theta - T_s &= m(a_{ŚM})_x, \\ N - mg\cos\theta &= 0, \\ T_s &\leqslant \mu_s N. \end{aligned} \tag{11.4}$$

Z powyższych równań możemy obliczyć liniowe przyspieszenie środka masy:

$$(a_{ŚM})_x = g(\sin\theta - \mu_s\cos\theta). \tag{11.5}$$

Ponieważ w powyższym równaniu nie znamy siły tarcia, to w celu znalezienia przyspieszenia liniowego potrzebne jest nam drugie równanie, w którym wyrazimy moment siły tarcia przez moment bezwładności. Zapiszmy drugą zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego,

$$\sum M_{ŚM} = I_{ŚM}\varepsilon.$$

W powyższym równaniu momenty sił obliczamy względem osi przechodzącej przez środek masy walca. Jedynym niezerowym momentem siły jest moment siły tarcia. Mamy zatem:

$$rT_s = I_{ŚM}\varepsilon,$$

gdzie, jak wiemy, przyspieszenie liniowe związane jest z przyspieszaniem kątowym zależnością

$$(a_{ŚM})_x = r\varepsilon.$$

Powyższe równanie można rozwiązać, wyrażając $a_{ŚM}$, ε i T_s jako funkcje momentu bezwładności.

Walec porusza się jedynie wzdłuż osi x, dlatego w celu uproszczenia zapisu możemy opuścić wskaźnik x. Wyraźmy $a_{ŚM}$ przez składową równoległą (do równi) siłę ciężkości i siłę tarcia, wykonując następujące podstawienia (wykorzystano Równanie 11.4 i Równanie 11.5):

$$a_{ŚM} = g\sin\theta - \frac{T_s}{m},$$
$$T_s = \frac{I_{ŚM}\varepsilon}{r} = \frac{I_{ŚM}a_{ŚM}}{r^2}.$$

Stąd otrzymujemy:

$$a_{ŚM} = g\sin\theta - \frac{I_{ŚM}a_{ŚM}}{mr^2} = \frac{mg\sin\theta}{m + I_{ŚM}/r^2}.$$

Zauważmy, że wynik ten jest niezależny od współczynnika tarcia μ_s. Ponieważ dla walca z Rysunku 10.20 moment bezwładności $I_{ŚM} = mr^2/2$, uzyskujemy

$$a_{ŚM} = \frac{mg\sin\theta}{m + mr^2/2r^2} = \frac{2}{3}g\sin\theta.$$

Otrzymujemy zatem:

$$\varepsilon = \frac{a_{ŚM}}{r} = \frac{2}{3r}g\sin\theta.$$

b. Ponieważ nie występuje poślizg, czyli $T_s \leqslant \mu_s N$, to wyrażenie na siłę tarcia ma postać:

$$T_s = I_{ŚM}\frac{\varepsilon}{r} = I_{ŚM}\frac{a_{ŚM}}{r^2} = \frac{I_{ŚM}}{r^2}\frac{mg\sin\theta}{m + I_{ŚM}/r^2} = \frac{mgI_{ŚM}\sin\theta}{mr^2 + I_{ŚM}}.$$

Podstawiając to wyrażenie w miejsce równania – warunku na brak poślizgu – a także zauważając, że siła normalna $N = mg\cos\theta$, otrzymujemy:

$$\frac{mgI_{ŚM}\sin\theta}{mr^2 + I_{ŚM}} \leqslant \mu_s mg\cos\theta,$$

lub

$$\mu_s \geqslant \frac{\operatorname{tg}\theta}{1 + mr^2/I_{ŚM}}.$$

Warunek ten dla pełnego walca przyjmuje postać

$$\mu_s \geqslant \frac{\operatorname{tg}\theta}{1 + 2mr^2/mr^2} = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\theta.$$

Znaczenie

a. Przyspieszenie liniowe jest proporcjonalne do $\sin\theta$. Zatem im większy jest kąt nachylenia, tym większe jest, jak można by się spodziewać, przyspieszenie liniowe. Przyspieszenie kątowe z kolei jest wprost proporcjonalne do $\sin\theta$ i odwrotnie proporcjonalne do promienia r walca. Tak więc im większy jest jego promień, tym mniejsze jest jego przyspieszenie kątowe.

b. W przypadku, gdy nie występuje poślizg, współczynnik tarcia musi być większy niż lub równy $\operatorname{tg}(\theta)/3$, a zatem im większy jest kąt nachylenia równi, tym większy musi być współczynnik tarcia, aby zapobiec poślizgowi walca.



11.1 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Wydrążony (pusty w środku) walec (cylinder) stacza się ze zbocza o kącie nachylenia 60°. Współczynnik tarcia statycznego o powierzchnię jest równy $\mu_s = 0{,}6$.

a. Czy cylinder stacza się bez poślizgu?

b. Czy walec w tych warunkach też będzie się toczyć bez poślizgu?

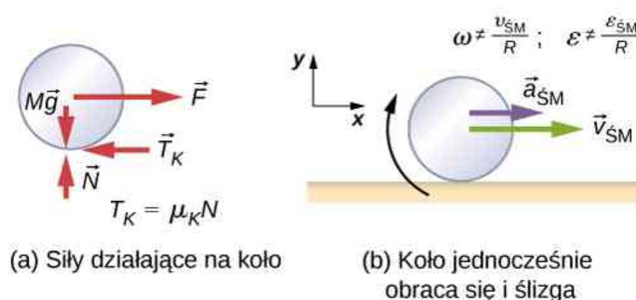
Warto jeszcze raz powtórzyć równanie uzyskane w tym przykładzie dla przyspieszania toczącego się obiektu bez poślizgu:

$$a_{\text{ŚM}} = \frac{mg \sin \theta}{m + I_{\text{ŚM}}/r^2}. \quad (11.6)$$

Jest to bardzo użyteczne równanie przy rozwiązywaniu zadań dotyczących toczenia się bez poślizgu. Należy zauważyć, że przyspieszenie to jest mniejsze niż przyspieszenie obiektu zsuwającego się bez obrotu po idealnie gładkiej powierzchni. Przyspieszenie będzie również różne dla dwóch staczających się bez poślizgu ciał z różnymi momentami bezwładności.

Toczenie się z poślizgiem

W przypadku ruchu tocznego z poślizgiem zamiast siły tarcia statycznego występuje siła tarcia kinetycznego, określona przez współczynnik tarcia μ_k. Sytuację taką przedstawiono na Rysunku 11.6. W przypadku poślizgu $v_{\text{ŚM}} - R\omega \neq 0$, gdyż punkt P na kole nie jest w stanie spoczynku względem powierzchni, oraz $v_P \neq 0$. Zatem $\omega \neq v_{\text{ŚM}}/R$ i $\varepsilon \neq a_{\text{ŚM}}/R$.



Rysunek 11.6 (a) Pomiędzy kołem a powierzchnią występuje tarcie, ponieważ koło się ślizga. (b) Proste związki między zmiennymi liniowych i kątowymi nie obowiązują dla zilustrowanego przypadku.

Przykład 11.2

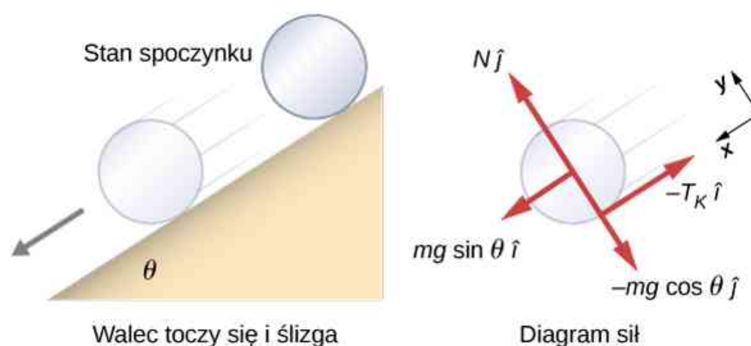
Staczanie się po równi pochyłej z poślizgiem

Walec stacza się z równi pochyłej bez prędkości początkowej z poślizgiem (Rysunek 11.7). Masa walca wynosi m, a promień r. (a) Jakie jest jego przyspieszenie liniowe? (b) Jakie jest jego przyspieszenie kątowe wokół osi przechodzącej przez środek masy?

Strategia rozwiązania

Wykonajmy rysunek wraz z diagramem działających sił. Jest on podobny do sytuacji bez poślizgu, z tą różnicą, że teraz siła tarcia jest siłą tarcia kinetycznego zamiast statycznego. Za pomocą drugiej zasady dynamiki (prawa Newtona) dla ruchu postępowego obliczymy przyspieszenie (liniowe) w kierunku osi x. Za pomocą drugiej zasady dynamiki (prawa Newtona) dla ruchu obrotowego znajdziemy rozwiązanie dla przyspieszenia kątowego.

Rozwiązanie



Rysunek 11.7 Walec stacza się z równi bez prędkości początkowej i wpada w poślizg. Układ współrzędnych wybieramy w taki sposób, że oś x jest równoległa do powierzchni równi i jest skierowana w dół równi, oś y jest prostopadła do powierzchni równi i jest skierowaną w górę. Na rysunku pokazano diagram sił, a na nim siłę reakcji podłoża, siłę tarcia statycznego oraz składowe ciężaru $m\vec{g}$.

Suma sił działających wzdłuż osi y wynosi zero, więc siła tarcia jest teraz równa $T_{\text{k}} = \mu_{\text{k}}N = \mu_{\text{k}}mg\cos\theta$.

Druga zasada dynamiki dla kierunku x daje:

$$\sum F_x = ma_x,$$

$$mg\sin\theta - T_k = ma_x,$$

$$mg\sin\theta - \mu_{\text{k}}mg\cos\theta = m\left(a_{\text{ŚM}}\right)_x,$$

lub

$$\left(a_{\text{ŚM}}\right)_x = g\left(\sin\theta - \mu_{\text{k}}\cos\theta\right).$$

Moment siły tarcia jest jedynym niezerowym momentem siły wokół osi przechodzącej przez środek masy, dlatego druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego daje:

$$\sum M_{\text{ŚM}} = I_{\text{ŚM}}\varepsilon,$$

$$T_{\text{k}}r = I_{\text{ŚM}}\varepsilon = \frac{1}{2}mr^2\varepsilon.$$

Rozwiązując powyższy układ równań ze względu na ε, otrzymujemy:

$$\varepsilon = \frac{2T_{\text{k}}}{mr} = \frac{2\mu_{\text{k}}g\cos\theta}{r}.$$

Znaczenie

Zapisujemy zależności przyspieszenia liniowego i kątowego od współczynnika tarcia kinetycznego. Przyspieszenie liniowe jest takie samo jak ciała ślizgającego się w dół równi pochyłej, na które działa siła tarcia kinetycznego. Przyspieszenie kątowe względem osi obrotu jest wprost proporcjonalne do siły tarcia, która z kolei zależy od kosinusa kąt nachylenia. Gdy kąt $\theta \to 90°$, siła ta dąży do zera, a tym samym przyspieszenie kątowe też dąży do zera.

Zachowanie energii mechanicznej podczas toczenia się

W poprzednim podrozdziale przedstawiliśmy energię kinetyczną ruchu obrotowego. Każdy toczący się obiekt posiada energię kinetyczną ruchu obrotowego, a także energię kinetyczną ruchu postępowego i ewentualnie energię potencjalną. Łącznie z grawitacyjną energią potencjalną całkowita energia mechaniczna toczącego się ciała wynosi:

$$E_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2} m v_{\text{ŚM}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{ŚM}} \omega^2 + mgh.$$

Przy braku sił niezachowawczych, które, jak wiadomo powodują rozpraszanie energii układu, całkowita energia mechaniczna toczącego się bez poślizgu ciała jest zachowana i jest stała podczas trwania całego ruchu. Przykładem, gdzie energia mechaniczna nie jest zachowana, jest toczący się obiekt. Mamy tu do czynienia również z tarciem, wynikającym z poślizgu. Zatem rozpraszana jest energia kinetyczna.

Można zapytać, dlaczego podczas toczenia się bez poślizgu ciało zachowuje energię mechaniczną, chociaż statyczna siła tarcia jest niezachowawcza? Odpowiedź można znaleźć, wracając do Rysunku 11.3. Punkt P w czasie kontaktu z powierzchnią znajduje się względem niej w spoczynku. Dlatego też jego nieskończenie małe przemieszczenie $\mathrm{d}\vec{r}$ względem powierzchni jest równe zero, a stąd także praca siły tarcia jest równa zero. Możemy więc stosować zasadę zachowania energii podczas badania ruchu tocznego otrzymując przy tym ciekawe wyniki.

Przykład 11.3

Łazik Curiosity

Łazik Curiosity, pokazany na Rysunku 11.8, wylądował na Marsie 6 sierpnia 2012 r. Koła łazika mają promień 25 cm. Załóżmy, że astronauci docierają na Marsa w roku 2050 i znajdują tam niepracujący łazik Curiosity na zboczu niecki. Podczas demontażu łazika przez astronautę przypadkowo odrywa się jedno z kół, które toczy się bez poślizgu w dół niecki 25 m poniżej. Jeżeli koło ma masę 5 kg, to jaka jest jego prędkość na dnie niecki?



Rysunek 11.8 Łazik Curiosity w NASA Mars Science Laboratory podczas testów 3 czerwca 2011 roku. Fotografia z ośrodka Spacecraft Assembly Facility at NASA's Jet Propulsion Laboratory w Pasadenie w Kalifornii. (Źródło: NASA / JPL-Caltech)

Strategia rozwiązania

Do analizy zadania zastosujemy zasadę zachowania energii mechanicznej. W górnej części zbocza koło znajduje się w spoczynku i ma tylko energię potencjalną (względem dna niecki). W dolnej części niecki koło ma energię kinetyczną ruchu obrotowego i postępowego, która, z zasady zachowania energii, musi być równa początkowej energii potencjalnej. Ponieważ koło toczy się bez poślizgu, użyjemy zależności $v_{\text{ŚM}} = r\omega$, aby

w wyrażającym zasadę zachowania energii powiązać zmienne translacyjne (ruchu postępowego) ze zmiennymi obrotowymi (kątowymi). Następnie obliczymy prędkość. Z Rysunku 11.8 wynika, że dobrym przybliżeniem koła jest wydrążony walec (cylinder), dzięki czemu możemy korzystać ze wzoru na jego moment bezwładności w celu uproszczenia obliczeń.

Rozwiązanie

Energia w górnej części zbocza niecki jest równa energii na jej dole:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{ŚM}^2 + \frac{1}{2}I_{ŚM}\omega^2.$$

Znane są wielkości $I_{ŚM} = mr^2$, $r = 0{,}25\ \text{m}$ i $h = 25{,}0\ \text{m}$.

Przepiszmy powyższe równanie zachowania energii, eliminując ω przy użyciu $\omega = v_{ŚM}/r$. Otrzymujemy:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{ŚM}^2 + \frac{1}{2}mr^2\frac{v_{ŚM}^2}{r^2},$$

lub

$$gh = \frac{1}{2}v_{ŚM}^2 + \frac{1}{2}v_{ŚM}^2 \implies v_{ŚM} = \sqrt{gh}.$$

Na Marsie przyspieszenie grawitacyjne wynosi $3{,}71\ \text{m}/\text{s}^2$, co daje wartość prędkości u dołu zbocza równą

$$v_{ŚM} = \sqrt{3{,}71\ \text{m}/\text{s}^2 \cdot 25\ \text{m}} = 9{,}63\ \text{m}/\text{s}.$$

Znaczenie

Jest to dość dokładny wynik biorąc pod uwagę, że Mars ma bardzo rzadką atmosferę, a straty energii wynikające z oporu powietrza byłyby minimalne. Założono również, że teren jest gładki, więc koło nie napotykało kamieni i wybojów.

Ponadto w tym przypadku energia kinetyczna lub energia ruchu jest równo podzielona na ruch postępowy i obrotowy. Jeśli popatrzymy na momenty bezwładności obiektów o różnych kształtach Rysunek 10.20, widzimy, że cylinder (wydrążony walec) posiada największy możliwy moment bezwładności dla danego promienia i masy. Gdyby kształt kół łazika był bardziej zbliżony kształtem do walca, to wtedy wkład energii kinetycznej ruchu postępowego do całkowitej energii byłby większy niż wkład energii ruchu obrotowego. To dałoby kołu większą prędkość liniową. W ten sposób, walec szybciej osiągnie dno niecki niż wydrążony w środku cylinder.

11.2 | Moment pędu

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- wyznaczać wektor momentu pędu;
- obliczać całkowity moment pędu i moment siły względem punktu dla układu cząstek;
- obliczać moment pędu bryły sztywnej, obracającej się wokół stałej osi;
- obliczać moment siły przyłożony do bryły sztywnej, obracającej się wokół stałej osi;
- stosować zasadę zachowania momentu pędu do analizy ruchu ciał, które zmieniają swoją prędkość kątową (szybkość obrotów).

Dlaczego Ziemia ciągle się obraca (wiruje)? Co spowodowało ten obrót? Dlaczego grawitacyjne przyciąganie ziemskie nie spowoduje zderzenia Księżyca z Ziemią? Jak to się dzieje, że łyżwiarz na lodzie zaczyna wirować szybciej przez zwykłe przyciągnięcie rąk do tułowia? Dlaczego, aby mógł obracać się szybciej, nie musi na niego działać zewnętrzny moment siły?

Aby odpowiedzieć na to pytanie, należy zwrócić uwagę na fakt, że podobnie jak podczas ruchu postępowego, zachowany jest całkowity pęd we Wszechświecie, zachowany jest również całkowity moment pędu ruchu obrotowego. Całkowity moment pędu w ruchu obrotowym jest odpowiednikiem pędu w ruchu postępowym. W tym podrozdziale najpierw zdefiniujemy, a następnie przeanalizujemy moment pędu z różnych punktów widzenia. Najpierw jednak zajmiemy się momentem pędu pojedynczej cząstki. To pozwoli nam następnie na uogólnienie tego pojęcia na układ cząstek i bryłę sztywną.

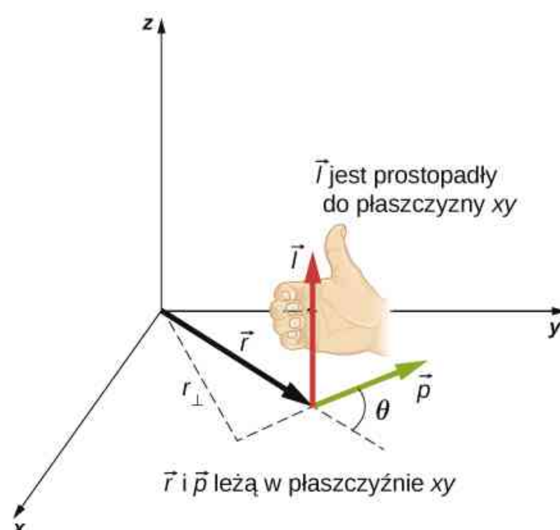
Moment pędu pojedynczej cząstki

Rysunek 11.9 pokazuje cząstkę w położeniu $\vec{r}$ z pędem $\vec{p} = m\vec{v}$ względem początku układu. Jej moment pędu można określić za pomocą wektorów położenia i pędu.

Moment pędu cząstki

Moment pędu $\vec{l}$ cząstki określa się jako wektor będący iloczynem wektorowym $\vec{r}$ i $\vec{p}$, który jest prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{r}$ i $\vec{p}$:

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}. \tag{11.7}$$



Rysunek 11.9 W przestrzeni trójwymiarowej układ współrzędnych wybrano w taki sposób, by wektor położenia $\vec{r}$ cząstki i wektor pędu $\vec{p}$ leżały w płaszczyźnie xy. Moment pędu określony jest jako $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ i ma tutaj kierunek i zwrot osi z. Jak pokazano na rysunku, kierunek $\vec{l}$ wyznaczony jest w oparciu o regułę prawej dłoni (wynika to z wyboru układu współrzędnych – jest on prawoskrętny).

Intencją przedstawionego wyboru kierunku wektora momentu pędu, prostopadłego do płaszczyzny zawierającej $\vec{r}$ i $\vec{p}$, było to, by był on podobny do wyboru kierunku momentu siły prostopadłego do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{r}$ i $\vec{p}$, co omówiono w rozdziale Obroty wokół stałej osi. Wartość momentu pędu wynika z definicji iloczynu wektorowego:

$$l = rp \sin\theta,$$

gdzie θ jest kątem między wektorami $\vec{r}$ i $\vec{p}$. Jednostką momentu pędu jest $\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}$.

Podobnie jak w przypadku definicji momentu siły możemy zdefiniować ramię (wektora) pędu $\vec{r}$, będące jest odległością początku układu współrzędnych od prostej, na której leży wektor pędu $\vec{p}$. Zgodnie z rysunkiem wynosi ono $r_\perp = r\sin\theta$. Zgodnie z tą definicją wielkość momentu pędu możemy wyrazić jako

$$l = r_{\perp}p = r_{\perp}mv.$$

Zwróćmy uwagę, że jeżeli kierunek $\vec{p}$ jest taki, że przechodzi przez początek układu, to $\theta = 0°$, a zatem moment pędu jest równy zero, ponieważ ramię pędu jest równe zero. W związku z tym zauważmy, że wielkość momentu pędu zależy od wyboru początku układu współrzędnych.

Jeżeli obliczymy pochodną po czasie momentu pędu, to okaże się, że otrzymamy wyrażenie na moment siły cząstki. Mianowicie:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{l}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}.$$

Skorzystaliśmy tutaj z definicji $\vec{p}$ oraz z faktu, że iloczyn wektorowy tych samych wektorów (tutaj prędkości) jest zerem. Z drugiej zasady dynamiki w postaci $\mathrm{d}\vec{p} / \mathrm{d}t = \sum \vec{F}$ oraz definicji momentu siły, możemy napisać

$$\frac{\mathrm{d}\vec{l}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{M}. \quad (11.8)$$

Zwróćmy uwagę na podobieństwo powyższego wzoru do drugiej zasady dynamiki w postaci $\mathrm{d}\vec{p} / \mathrm{d}t = \sum \vec{F}$. Poniższa strategia rozwiązywania zadań może służyć jako wytyczna do obliczania momentu pędu cząstki.

Strategia rozwiązywania zadań: moment pędu cząstki

1. Wybierz układ współrzędnych, w którym ma być obliczony moment pędu.
2. Zapisz wektor wodzący cząstki punktowej, używając wektorów jednostkowych osi.
3. Zapisz wektor pędu cząstki, używając wektorów jednostkowych.
4. Oblicz wartość iloczynu wektorowego $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ i użyj reguły prawej dłoni, aby ustalić kierunek i zwrot wektora momentu pędu.
5. Sprawdź, czy wektor momentu pędu zależy od czasu. Jeżeli tak, to istnieje niezerowy moment pędu względem początku układu i przy użyciu wzoru $\mathrm{d}\vec{l} / \mathrm{d}t = \sum \vec{M}$ oblicz moment siły. Jeśli nie istnieje zależność czasowa w wyrażeniu na moment pędu, to moment siły wynosi zero.

Przykład 11.4

Moment pędu i moment siły działającej na meteoroid

Obserwator z powierzchni ziemi przygląda się meteoroidowi wchodzącemu w atmosferę ziemską (Rysunek 11.10). Pozycję meteoroidu względem obserwatora określa wektor $\vec{r} = 25\ \text{km} \cdot \hat{i} + 25\ \text{km} \cdot \hat{j}$. W chwili, gdy obserwator zauważa meteoroid, ma on pęd $\vec{p} = 15\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s} \cdot \hat{j}$, a jego stałe prześpieszenie wynosi $2\ \text{m} / \text{s}^2 \cdot \hat{j}$.

(a) Jaki jest moment pędu meteoroidu względem początku układu, który przyjmujemy w miejscu obserwatora?

(b) Jaki jest moment siły grawitacji działającej na meteoroid względem tego początku układu?



Rysunek 11.10 Obserwator widzi z Ziemi meteoroid w położeniu $\vec{r}$, który ma pęd $\vec{p}$.

Strategia rozwiązania

Rozłożymy przespieszenie na składowe x i y i zastosujemy równania kinematyczne, aby wyrazić prędkość jako funkcję przespieszenia i czasu. Za ich pomocą otrzymamy wyrażenie na pęd, a następnie, korzystając z wyrażenia na iloczyn wektorowy, obliczymy moment pędu. Ponieważ wektory położenia i pędu leżą w płaszczyźnie xy, to oczekujemy, że wektor momentu pędu będzie skierowany wzdłuż osi z. Aby znaleźć moment siły, obliczamy pochodną momentu pędu po czasie.

Rozwiązanie

Ponieważ meteoroid wchodzi w atmosferę ziemską pod kątem $90{,}0^\circ$ względem poziomu, to składowe przespieszenia w kierunkach x i y wynoszą:

$$a_x = 0\,\mathrm{m/s^2},\ a_y = -2{,}0\,\mathrm{m/s^2}.$$

Zapiszmy prędkości za pomocą równań kinematycznych.

$$v_x = 0\,\mathrm{m/s},\ v_y = -2{,}0\cdot 10^3\,\mathrm{m/s} - 2{,}0\,\mathrm{m/s^2}\cdot t.$$

a. Moment pędu wynosi:

$$\begin{aligned}\vec{l} &= \vec{r}\times\vec{p} = \left(25{,}0\,\mathrm{km}\cdot\hat{i} + 25{,}0\,\mathrm{km}\cdot\hat{j}\right)\times 15{,}0\,\mathrm{kg}\left(0\hat{i} + v_y\hat{j}\right)\\ &= 15{,}0\,\mathrm{kg}\left(25{,}0\,\mathrm{km}\cdot v_y\hat{k}\right) = 15{,}0\,\mathrm{kg}\cdot 2{,}50\cdot 10^4\,\mathrm{m}\left(-2{,}0\cdot 10^3\,\mathrm{m/s} - 2{,}0\,\mathrm{m/s^2}\cdot t\right)\cdot\hat{k}.\end{aligned}$$

W chwili $t = 0$ s moment pędu meteoru względem początku układu wynosi:

$$\vec{l}_0 = 15{,}0\,\mathrm{kg}\cdot 2{,}50\cdot 10^4\,\mathrm{m}\cdot\left(-2{,}0\cdot 10^3\,\mathrm{m/s}\right)\cdot\hat{k} = 7{,}50\cdot 10^8\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m^2/s}\cdot\left(-\hat{k}\right).$$

To jest chwila, gdy obserwator zauważył meteor.

b. Aby znaleźć moment siły, liczymy pochodną momentu pędu po czasie. Wyznaczając pochodną po czasie $\vec{l}$, którą wyznaczyliśmy wcześniej, otrzymujemy:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = -15{,}0\,\text{kg} \cdot 2{,}50 \cdot 10^4\,\text{m} \cdot 2{,}0\,\text{m/s}^2 \cdot \hat{k}.$$

Następnie, ponieważ $d\vec{l}/dt = \sum \vec{M}$ otrzymujemy:

$$\sum \vec{M} = -7{,}5 \cdot 10^5\,\text{N} \cdot \text{m} \cdot \hat{k}.$$

Jednostka momentu siły została podana jako $\text{N} \cdot \text{m}$. Jednostki tej jednak nie należy mylić z dżulem, mimo że dżul jest iloczynem $\text{N} \cdot \text{m}$. W celu sprawdzenia, możemy zauważyć, że ramię siły jest x – ową składową wektora $\vec{r}$ na Rysunku 11.10, ponieważ jest ono prostopadłe do siły działającej na meteor, która ma kierunek prześpieszenia $\vec{a}$, które z kolei jest skierowane pionowo w dół równolegle do toru ruchu meteoru. Według drugiej zasady dynamiki siła ta jest równa:

$$\vec{F} = ma\left(-\hat{j}\right) = 15{,}0\,\text{kg} \cdot 2{,}0\,\text{m/s}^2 \cdot \left(-\hat{j}\right) = 30{,}0\,\text{kg} \cdot \text{m/s}^2 \cdot \left(-\hat{j}\right).$$

Ponieważ wektor ramienia siły wynosi:

$$\vec{r}_\perp = 2.5 \cdot 10^4\,\text{m} \cdot \hat{i}.$$

zatem, moment sił jest równy:

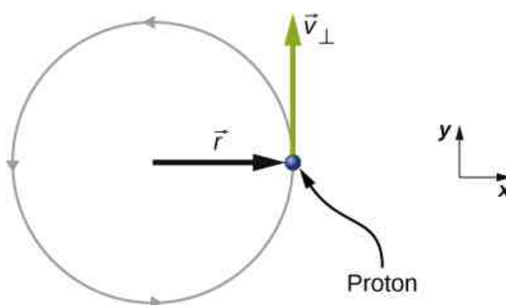
$$\sum \vec{M} = \vec{r}_\perp \times \vec{F} = \left(2{,}5 \cdot 10^4\,\text{m} \cdot \hat{i}\right) \times \left(-30{,}0\,\text{kg} \cdot \text{m/s}^2 \cdot \hat{j}\right) = 7{,}5 \cdot 10^5\,\text{N} \cdot \text{m} \cdot \left(-\hat{k}\right).$$

Znaczenie

Ponieważ meteor ma prześpieszenie skierowane w dół w kierunku Ziemi, a jego wektor wodzący i prędkość zmieniają się, to moment pędu $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ również zmienia się w funkcji czasu. Moment siły działający na meteor względem początku układu jest jednak stały, ponieważ ramię siły $\vec{r}_\perp$ i siła działająca na meteor są stałymi. Ten przykład pokazuje, że moment pędu zależy od wyboru punktu, względem którego jest on obliczany. I to jest bardzo ważny wniosek. Metody stosowane w tym przykładzie są również istotne w zastosowaniu do układów takich jak układ cząstek i bryła sztywna, gdzie wielkość fizyczna – moment pędu również ma zastosowanie.



11.2 Sprawdź, czy rozumiesz. Proton poruszający się spiralnie wokół linii pola magnetycznego wykonuje ruch kołowy w płaszczyźnie kartki, jak pokazano poniżej. Promień toru jest równy 0,4 m, a proton ma prędkość $4{,}0 \cdot 10^6\,\text{m/s}$. Ile wynosi moment pędu protonu względem początku układu?



Moment pędu układu cząstek

Moment pędu układu cząstek to ważna wielkość fizyczna dla wielu dyscyplin naukowych, z których jedną jest astronomia. Rozważmy galaktykę spiralną, tj. obracającą się wyspę gwiazd, taką jak nasza Droga Mleczna. Poszczególne

gwiazdy mogą być traktowane jako cząstki punktowe, z których każda ma swój własny moment pędu. Wektorowa suma poszczególnych momentów pędu daje łączny moment pędu galaktyki. W tej części opracujemy narzędzia dzięki którym będzie możliwe wyznaczenie całkowitego momentu pędu układu cząstek.

W poprzedniej części wprowadziliśmy pojęcie momentu pędu pojedynczej cząstki względem określonego punktu początkowego. Wyrażenie dla tego momentu pędu miało postać $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$, gdzie wektor $\vec{r}$ jest poprowadzony od punktu początkowego do cząstki, a $\vec{p}$ jest pędem cząstki. Jeśli mamy układ N cząstek, z których dana i – gdzie położenie i-tej cząstki określa wektor $\vec{r}_i$, a jej pęd $\vec{p}_i$, to całkowity moment pędu układu cząstek jest sumą wektorową momentów pędu poszczególnych cząstek układu

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \cdots + \vec{l}_N. \tag{11.9}$$

Podobnie, jeśli na i-tą cząstkę działa moment siły $\vec{M}_i$, to możemy znaleźć wypadkowy moment sił względem początku układu współrzędnych dla układu cząstek przez zróżniczkowanie powyższego Równania 11.9:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\mathrm{d}\vec{l}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{M}_i.$$

Suma poszczególnych momentów wytwarza zewnętrzny moment obrotowy działający na układ, który określamy jako $\sum \vec{M}$. A zatem

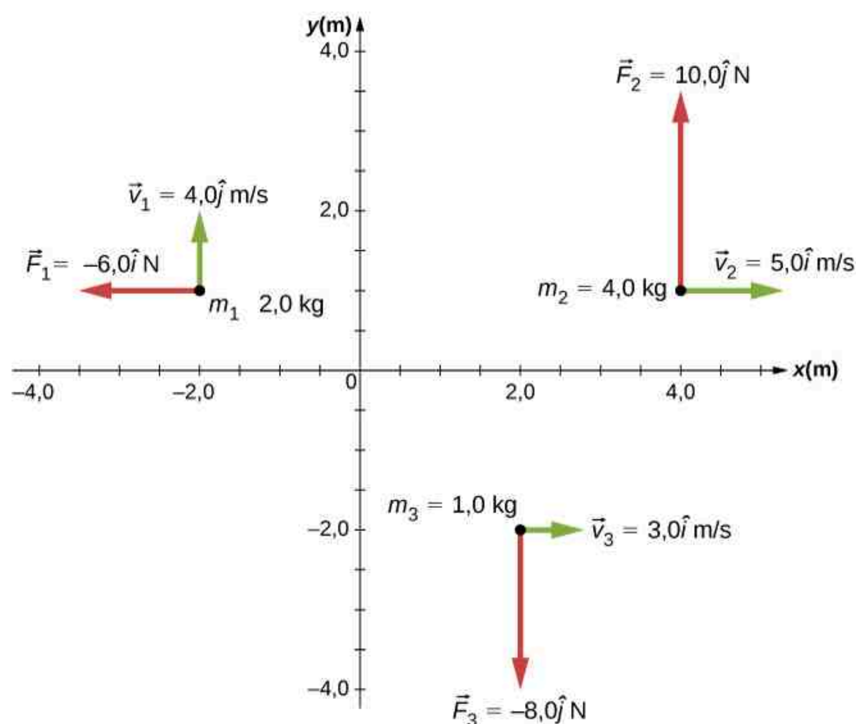
$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{M}. \tag{11.10}$$

Równanie 11.10 stwierdza, że *szybkość zmian całkowitego momentu pędu układu równa jest wypadkowemu momentowi sił zewnętrznych działających na układ, gdy obie wielkości są mierzone względem określonego punktu początkowego.* Równanie 11.10 może być stosowane do każdego układu, który ma wypadkowy moment pędu, w tym do brył sztywnych, jak będzie to opisane w następnym rozdziale.

Przykład 11.5

Moment pędu trzech cząstek

Na podstawie Rysunku 11.11 (a) należy określić całkowity moment pędu trzech cząstek względem początku układu. (b) Jaka jest szybkość zmiany momentu pędu?



Rysunek 11.11 Układ trzech cząstek rozmieszczonych na płaszczyźnie *xy* różniących się położeniem i wartością pędu.

Strategia rozwiązania

Określimy wektory położeń i pędów dla trzech cząstek. Obliczymy poszczególne momenty pędu i dodamy je wektorowo w celu znalezienia całkowitego momentu pędu. Następnie zrobimy to samo dla momentów sił.

Rozwiązanie

a. Cząstka 1: $\vec{r}_1 = -2{,}0\,\text{m} \cdot \hat{i} + 1{,}0\,\text{m} \cdot \hat{j}$, $\vec{p}_1 = 2{,}0\,\text{kg} \cdot 4{,}0\,\text{m/s} \cdot \hat{j} = 8{,}0\,\text{kg} \cdot \text{m/s} \cdot \hat{j}$,

$$\vec{l}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 = -16{,}0\,\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \cdot \hat{k}.$$

Cząstka 2: $\vec{r}_2 = 4{,}0\,\text{m} \cdot \hat{i} + 1{,}0\,\text{m} \cdot \hat{j}$, $\vec{p}_2 = 4{,}0\,\text{kg} \cdot 5{,}0\,\text{m/s} \cdot \hat{i} = 20{,}0\,\text{kg} \cdot \text{m/s} \cdot \hat{i}$,

$$\vec{l}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = -20{,}0\,\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \cdot \hat{k}.$$

Cząstka 3: $\vec{r}_3 = 2{,}0\,\text{m} \cdot \hat{i} - 2{,}0\,\text{m} \cdot \hat{j}$, $\vec{p}_3 = 1{,}0\,\text{kg} \cdot 3{,}0\,\text{m/s} \cdot \hat{i} = 3{,}0\,\text{kg} \cdot \text{m/s} \cdot \hat{i}$,

$$\vec{l}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{p}_3 = 6{,}0\,\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \cdot \hat{k}.$$

Dodajmy poszczególne momenty pędu, aby znaleźć ich sumę względem początku układu:

$$\vec{l}_T = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \vec{l}_3 = -30\,\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \cdot \hat{k}.$$

b. Poszczególne siły i ramiona sił oraz momenty sił wynoszą

$$\vec{r}_{1\perp} = 1{,}0\,\mathrm{m} \cdot \hat{j}, \quad \vec{F}_1 = -6{,}0\,\mathrm{N} \cdot \hat{i}, \quad \vec{M}_1 = 6{,}0\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m} \cdot \hat{k},$$
$$\vec{r}_{2\perp} = 4{,}0\,\mathrm{m} \cdot \hat{i}, \quad \vec{F}_2 = 10{,}0\,\mathrm{N} \cdot \hat{j}, \quad \vec{M}_2 = 40{,}0\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m} \cdot \hat{k},$$
$$\vec{r}_{3\perp} = 2{,}0\,\mathrm{m} \cdot \hat{i}, \quad \vec{F}_3 = -8{,}0\,\mathrm{N} \cdot \hat{j}, \quad \vec{M}_3 = -16{,}0\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m} \cdot \hat{k}.$$

Stąd

$$\sum_{i=1}^{3} \vec{M}_i = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = 30\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m} \cdot \hat{k}.$$

Znaczenie

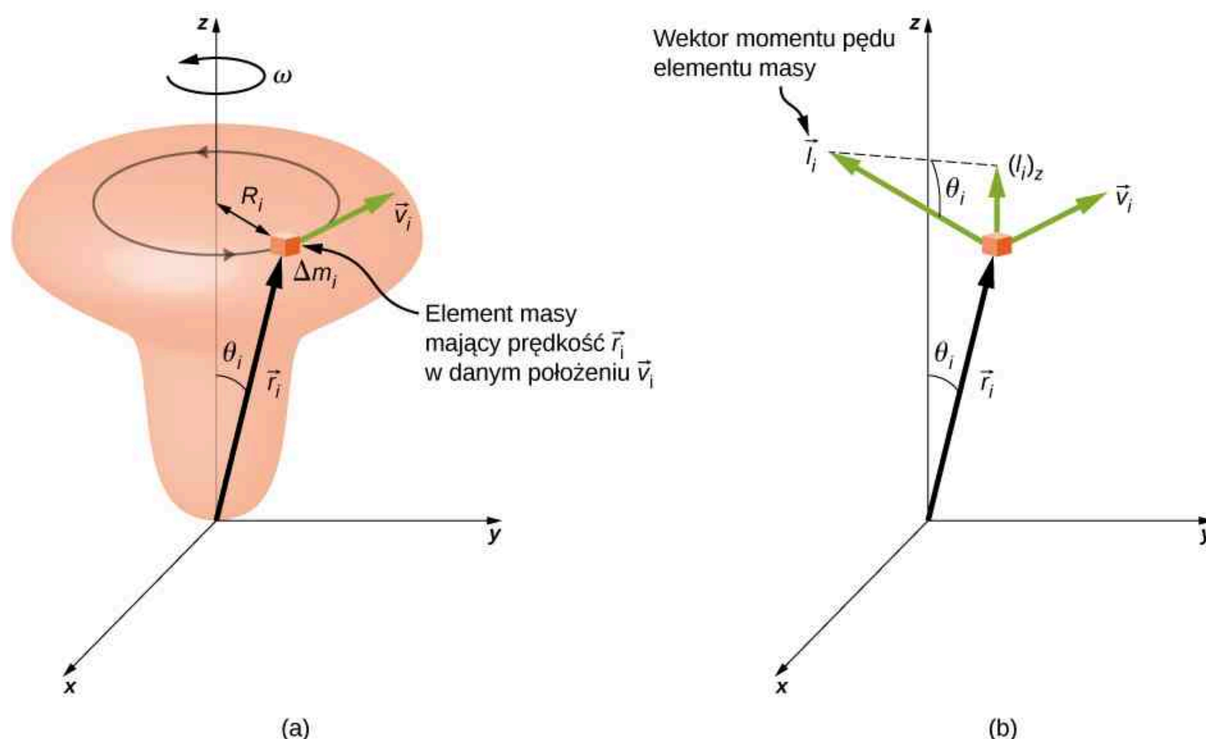
Przykład ten ilustruje zasadę superpozycji dla momentów pędu i momentów sił układu cząstek. Należy być ostrożnym określając wektory położenia $\vec{r}_i$ cząstek przy obliczaniu momentów pędu i ramion sił $\vec{r}_{i\perp}$ przy obliczaniu momentów sił, ponieważ są to zupełnie różne wielkości.

Moment pędu bryły sztywnej

Badaliśmy moment pędu pojedynczej cząstki, który uogólniliśmy na układ cząstek. Teraz zastosujemy omówione w poprzednim rozdziale metody, aby wprowadzić i rozwinąć koncepcję momentu pędu dla bryły sztywnej. Ciała niebieskie, takie jak planety, mają moment pędu spowodowany zarówno ich obrotem wokół osi, jak i ruchem orbitalnym wokół gwiazd. W inżynierii, wszystko, co obraca się wokół osi, posiada moment pędu, czego przykładem są koła zamachowe, śmigła samolotów oraz wirujące części w silnikach. Znajomość momentów pędu tych obiektów ma zasadnicze znaczenie przy konstrukcji układu, którego są one częścią.

W celu wprowadzenia momentu pędu bryły sztywnej będziemy ją modelować przez sztywno ze sobą połączony układ, składający się z małych elementów masy Δm_i. Na Rysunku 11.12, ruch bryły sztywnej ograniczony jest do obrotu wokół osi (symetrii) z prędkością kątową ω. Wszystkie elementy masy, które tworzą bryłę sztywną, okrążają oś z taką samą prędkością kątową. W części (a) rysunku mamy element masy Δm_i wskazywany przez wektor wodzący $\vec{r}_i$ wyprowadzony z początku układu współrzędnych, oraz promień R_i okręgu, po którym porusza się masa Δm_i wokół osi z. Wartość jego prędkości stycznej jest równa $v_i = R_i \omega$. Ponieważ wektory $\vec{r}_i$ i $\vec{v}_i$ są prostopadłe do siebie, wartość momentu pędu tego elementu masy jest równa

$$l_i = r_i \Delta m_i v_i \sin 90^\circ.$$



Rysunek 11.12 (a) Ruch obrotowy bryły sztywnej wokół stałej, nieruchomej osi obrotu. Bryła sztywna jest symetryczna względem osi z. Element masy Δm_i znajduje się w położeniu $\vec{r}_i$, który tworzy kąt θ_i z osią z. Pokazano ruch obrotowy nieskończenie małego elementu masy. (b) $\vec{l}_i$ oznacza moment pędu elementu masy Δm_i, a jego składowa równoległa do osi z wynosi $\left(\vec{l}_i\right)_z$.

Z reguły prawej dłoni, znajdujemy kierunek wektora momentu pędu, tak jak pokazano w części (b) rysunku. Suma momentów pędu wszystkich elementów masy rozpatrywanej bryły zawiera składowe, zarówno wzdłuż, jak i prostopadle do osi obrotu. Każdy element masy Δm_i ma składową momentu pędu prostopadłą do osi obrotu, która dodana do momentu pędu takiej samej masy Δm_i, znajdującej się po przeciwnej stronie osi obrotu, daje wypadkowy zerowy moment pędu bryły sztywnej w kierunku prostopadłym do osi obrotu. Tak więc składowe momentów pędu elementów masy Δm_i wzdłuż osi obrotu są jedynymi składnikami, które nadają wartość niezerową sumarycznemu momentowi pędu bryły sztywnej, skierowanemu równolegle do osi obrotu. Z części (b) rysunku składnik $\vec{l}_i$ jest wektorem równoległym do osi obrotu, a jego wartość wynosi

$$\left(\vec{l}_i\right)_z = l_i \sin\theta_i = r_i \Delta m_i v_i \sin\theta_i = r_i \sin\theta_i \cdot \Delta m_i v_i = R_i \Delta m_i v_i .$$

Wypadkowy moment pędu bryły sztywnej wzdłuż osi obrotu wynosi więc

$$L = \sum_i \left(\vec{l}_i\right)_z = \sum_i R_i \Delta m_i v_i = \sum_i R_i \Delta m_i \cdot R_i \omega = \omega \sum_i \Delta m_i R_i^2 .$$

Jak widać w powyższym wzorze, czynnik $\sum_i \Delta m_i R_i{}^2$ jest momentem bezwładności bryły sztywnej względem osi obrotu. Dla cienkiej obręczy, o promieniu R, obracającej się wokół osi symetrii prostopadłej do płaszczyzny obręczy, $R_i = R$ dla każdego i, więc sumowanie ogranicza się do $R^2 \sum_i \Delta m_i = mR^2$, co daje moment bezwładności cienkiej obręczy przedstawionej na Rysunek 10.20. Zatem wartość momentu pędu wzdłuż osi obrotu bryły sztywnej obracającej się z prędkością kątową ω wokół osi jest równa

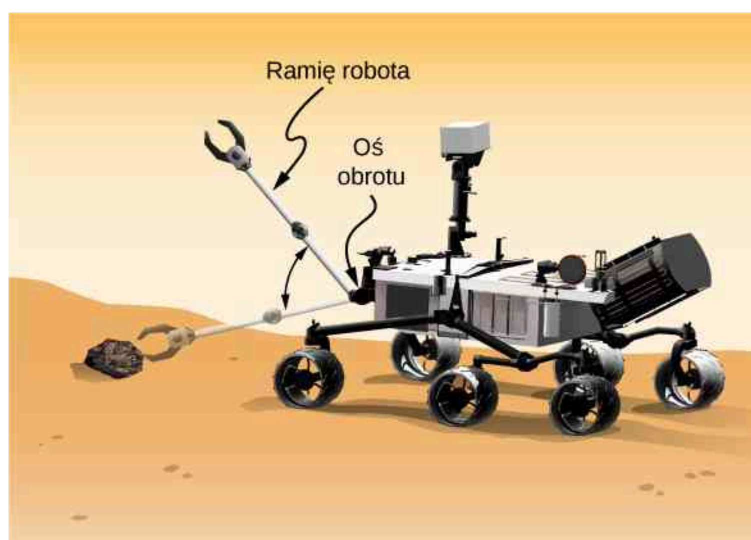
$$L = I\omega. \quad (11.11)$$

Równanie to jest analogiczne do równania na wartość pędu $p = mv$. Kierunek wektora **momentu pędu** (ang. **angular momentum**) (dla bryły sztywnej obracającej się wokół stałej osi na określenie momentu pędu także używa się nazwy **kręt**) jest skierowany wzdłuż osi obrotu, a jego kierunek i zwrot określa reguła prawej dłoni.

Przykład 11.6

Moment pędu ramienia robota

Ramię robota łazika marsjańskiego podobnego do Curiosity pokazanego na Rysunku 11.8 ma długość 1,0 m, a jego swobodny koniec wyposażony jest w kleszcze (chwytniki) do pobierania skał. Masa ramienia wynosi 2,0 kg, a masa kleszczy 1,0 kg – patrz Rysunek 11.13. Ramię robota i kleszcze zaczynają się poruszać, osiągając prędkość kątową $\omega = 0{,}1\pi \mathrm{rad/s}$ w czasie 0,1 s. Dalej ramię obraca się i podnosi marsjański kamień, o masie 1,5 kg. Osią obrotu jest punkt, w którym ramię robota łączy się z łazikiem.
(a) Jaki jest moment pędu ramienia robota wokół osi obrotu po 0,1 s, czyli po tym, gdy przestało ono przespieszać?
(b) Jaki jest moment pędu ramienia robota, gdy jego kleszcze uchwyciły marsjańską skałę i jego ramię obraca się do góry?
(c) W przypadku gdy kleszcze ramienia nie uchwyciły skały, jaki jest moment siły działającej na ramię względem punktu, w którym łączy się ono z łazikiem, gdy jego przespieszenie zwiększa prędkość kątową od stanu spoczynku do prędkości końcowej?



Rysunek 11.13 Ramię robota łazika na Marsie odchyla się i podnosi marsjańską skałę. (Źródło: praca zmodyfikowana przez NASA / JPL-Caltech)

Strategia rozwiązania

Użyjemy Równania 11.11, aby znaleźć moment pędu dla różnych przypadków. Gdy ramię obraca się w dół, reguła prawej dłoni daje wektor momentu pędu skierowany przed kartkę (do czytelnika), który to kierunek nazwiemy dodatnim kierunkiem osi z. Gdy ramię obraca się w górę, reguła prawej ręki daje kierunek wektora momentu pędu za kartkę, tj. w ujemnym kierunku osi z. Moment bezwładności jest sumą poszczególnych momentów bezwładności. Ramię robota może być przybliżone jednorodnym prętem, a kleszcze i marsjańska skała mogą być przybliżone masami punktowymi, znajdującymi się w odległości 1 m od punktu początkowego. W etapie (c), aby znaleźć moment siły działający na ramię robota, użyjemy drugiej zasady dynamiki ruchu obrotowego.

Rozwiązanie

a. Wypisując poszczególne momenty bezwładności, otrzymujemy:
Ramię robota: $I_\mathrm{R} = \frac{1}{3} m_\mathrm{R} r^2 = \frac{1}{3} \cdot 2{,}00\,\mathrm{kg} \cdot (1{,}00\,\mathrm{m})^2 = \frac{2}{3}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$.
Kleszcze: $I_\mathrm{K} = m_\mathrm{K} r^2 = 1{,}0\,\mathrm{kg} \cdot (1{,}0\,\mathrm{m})^2 = 1{,}0\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$.
Marsjańska skała: $I_\mathrm{MS} = m_\mathrm{MS} r^2 = 1{,}5\,\mathrm{kg} \cdot (1{,}0\,\mathrm{m})^2 = 1{,}5\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$.
Zatem bez marsjańskiej skały całkowity moment bezwładności jest równy

$$I_c = I_R + I_K = 1{,}67\,\text{kg}\cdot\text{m}^2.$$

$$L = I\omega = 1{,}67\,\text{kg}\cdot\text{m}^2 \cdot 0{,}1\pi\,\text{rad/s} = 0{,}17\pi\,\text{m}^2/\text{s}.$$

Wektor momentu pędu skierowany jest przed kartkę, w kierunku wektora $\hat{k}$, dlatego ramię robota obraca się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

b. Teraz w obliczeniach momentu bezwładności musimy uwzględnić masę marsjańskiej skały, otrzymujemy zatem:

$$I_c = I_R + I_K + I_{MS} = 3{,}17\,\text{kg}\cdot\text{m}^2,$$

oraz

$$L = I\omega = 3{,}17\,\text{kg}\cdot\text{m}^2 \cdot 0{,}1\pi\,\text{rad/s} = 0{,}32\pi\,\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}.$$

Wektor momentu pędu skierowany jest teraz za kartkę w kierunku $-\hat{k}$ i dlatego ramię robota obraca się zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

c. Znajdźmy teraz moment siły, gdy kleszcze ramienia nie trzymają skały, licząc pochodną momentu pędu zgodnie z Równaniem 11.10 $\mathrm{d}\vec{L}/\mathrm{d}t = \sum \vec{M}$. Ale ponieważ $L = I\omega$ i wiedząc, że kierunki wektorów momentu pędu i momentu siły znajdują się wzdłuż osi obrotu, możemy opuścić notację wektorową, otrzymując równanie

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(I\omega)}{\mathrm{d}t} = I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = I\varepsilon = \sum M,$$

które jest postacią drugiej zasady dynamiki dla ruchu obrotowego. Ponieważ $\varepsilon = 0{,}1\pi\,\text{rad/s}/\,(0{,}1\text{ s}) = \pi\,\text{rad/s}^2$, możemy obliczyć wypadkowy moment siły:

$$\sum M = I\varepsilon = 1{,}67\,\text{kg}\cdot\text{m}^2 \cdot \pi\,\text{rad/s}^2 = 1{,}67\pi\,\text{N}\cdot\text{m}.$$

Znaczenie

Moment pędu w punkcie (a) jest mniejszy niż (b), ponieważ moment bezwładności w (a) jest większy niż (b), podczas gdy prędkość kątowa jest taka sama w obu przypadkach.



11.3 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Co ma większy moment pędu: kula o masie m, obracająca się ze stałą prędkością kątową ω_0 względem osi z, czy walec o tej samej masie, promieniu i prędkości kątowej obracający się wokół osi z?



Wejdź na stronę University of Colorado's Interactive Simulation of Angular Momentum (https://openstaxcollege.org/l/21angmomintsim) , aby dowiedzieć się więcej na temat momentu pędu.

11.3 | Zasada zachowanie momentu pędu

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- stosować zasadę zachowania momentu pędu w celu określenia prędkości kątowej w obracającym się układzie, w którym zmieniają się momenty bezwładności;
- wyjaśniać zmiany energii kinetycznej ruchu obrotowego, gdy w układzie zmienia się zarówno moment bezwładności, jak i prędkość kątowa.

Do tej pory zajmowaliśmy się momentami pędów (i krętami) układów składających się z cząstek punktowych i ciał (brył) sztywnych. Analizowaliśmy też wpływ zewnętrznych momentów sił na zmiany momentów pędu, stosując związek pomiędzy wypadkowym momentem sił zewnętrznych i szybkością zmiany momentu pędu (Równanie 11.10). Przykłady układów, które spełniają to równanie, to swobodny obrót kół rowerowych, który jest spowalniany w miarę upływu czasu z powodu działania momentu siły tarcia, lub spowolnienie obrotów Ziemi przez miliony lat z powodu działania momentu siły tarcia, powstającego na skutek tzw. deformacji pływowych (patrz rozdział Siły pływowe).

Załóżmy jednak, że nie ma wypadkowego momentu sił zewnętrznych działających na układ, tj. $\sum \vec{M} = 0$. W tym przypadku (Równanie 11.10) obowiązuje **zasada (prawo) zachowania momentu pędu** (ang. **law of conservation of angular momentum**).

Prawo (zasada) zachowania momentu pędu

Moment pędu układu cząstek wokół punktu, w ustalonym inercjalnym układzie odniesienia, jest zachowany, jeśli wypadkowy moment sił zewnętrznych względem tego punktu jest równy zero. Stąd:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{11.12}$$

lub

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \ldots + \vec{l}_N = \text{constant}. \tag{11.13}$$

Należy zauważyć, że to całkowity moment pędu $\vec{L}$ jest zachowany. Każdy z poszczególnych momentów pędu układu może się zmieniać, ale tak aby ich suma pozostała stała. Prawo to jest analogiczne do prawa zachowania pędu układu, gdy suma sił zewnętrznych działających na układ jest równa zero.

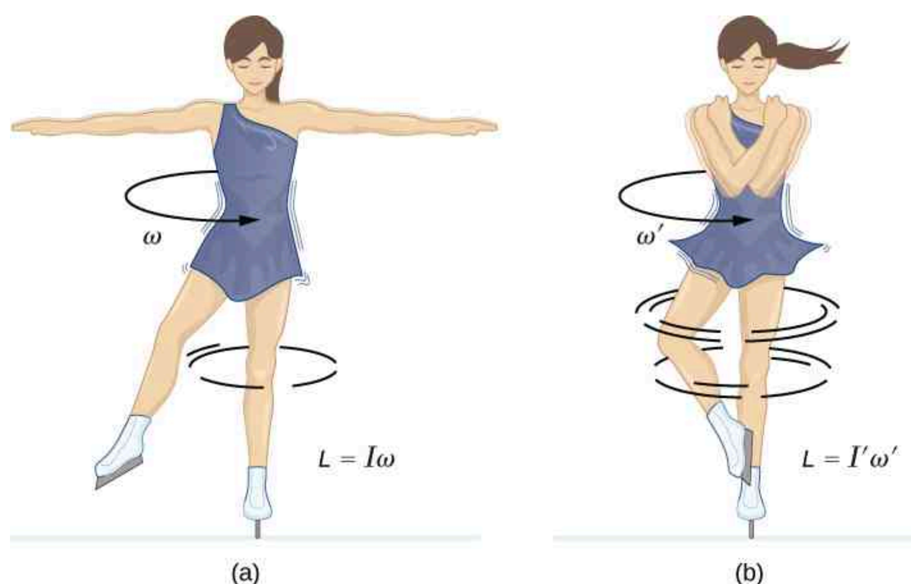
Przykład zachowania momentu pędu pokazuje Rysunek 11.14, przedstawiający łyżwiarkę wykonującą obrót. Wypadkowy moment sił działający na nią jest bliski zero, ponieważ tarcie między jej łyżwami a lodem jest zaniedbywalne. Ponadto siła tarcia działa bardzo blisko punktu, przez który przechodzi oś obrotu. Zarówno $\left|\vec{F}\right|$, jak i $\left|\vec{r}\right|$ są małe, więc $\left|\vec{M}\right|$ też jest znikomy. W związku z tym łyżwiarka może się obracać przez jakiś czas. Może również zwiększyć swoją szybkość wirowania, ściągając ramiona i nogi. Dlaczego ściąganie ramion i nóg powoduje wzrost szybkości obrotu? Ponieważ jej moment pędu jest stały, tak że

$$L' = L,$$

lub

$$I'\omega' = I\omega,$$

gdzie wielkości „primowane” odnoszą się do sytuacji z części b) rysunku, tj. po tym, jak łyżwiarka przyciągnęła ramiona i nogę do tułowia i w ten sposób zmniejszyła swój moment bezwładności. Bo jeżeli I' jest mniejsze, to prędkość kątowa ω' musiała się zwiększyć, aby utrzymać stałą wartość momentu pędu.



Rysunek 11.14 (a) Łyżwiarka wiruje na czubku łyżwy z rozłożonymi ramionami. Jej moment pędu jest zachowany, ponieważ wypadkowy moment sił działający na nią jest pomijalnie mały. (b) Jej szybkość obrotów znacznie wzrosła, gdy ściągnęła ramiona, zmniejszając swój moment bezwładności. Praca, jaką wykonała, ściągając ramiona, spowodowała wzrost energii kinetycznej ruchu obrotowego.

Interesujące jest, by zobaczyć, jak energia kinetyczna ruchu obrotowego łyżwiarki zmienia się, kiedy przyciąga ramiona do tułowia. Jej początkowa energia kinetyczna ruchu jest równa:

$$K_{\text{obr}} = \frac{1}{2} I \omega^2 ,$$

podczas gdy końcowa energia wynosi:

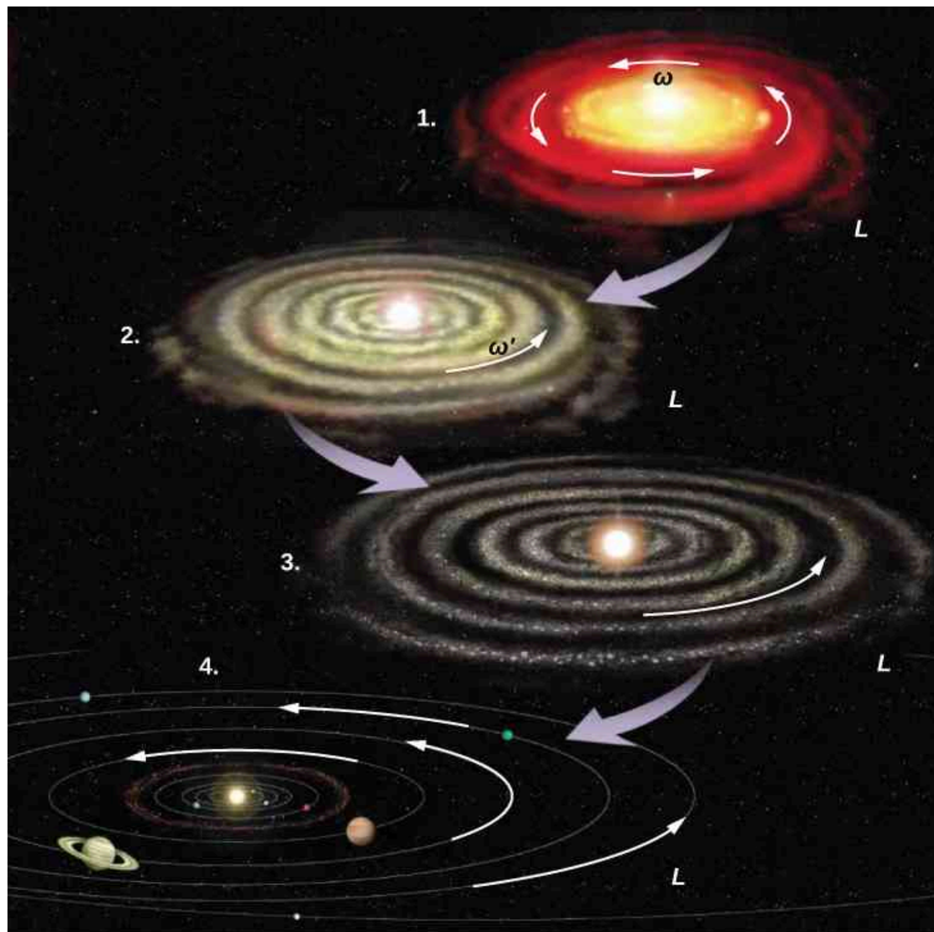
$$K'_{\text{obr}} = \frac{1}{2} I' \left(\omega'\right)^2 .$$

Ponieważ $I'\omega' = I\omega$, możemy w powyższym wzorze zastąpić ω' przez $I\omega / I'$ i otrzymać:

$$K'_{\text{obr}} = \frac{1}{2} I' \left(\omega'\right)^2 = \frac{1}{2} I' \left(\frac{I}{I'}\omega\right)^2 = \frac{1}{2} I\omega^2 \left(\frac{I}{I'}\right) = K_{\text{obr}} \left(\frac{I}{I'}\right) .$$

Ponieważ moment bezwładności łyżwiarki zmalał, $I' < I$, jej końcowa energia kinetyczna ruchu obrotowego wzrosła. Źródłem tej dodatkowej energii kinetycznej jest praca, jaką łyżwiarka musiała wykonać, przyciągając ręce do siebie. Praca ta powoduje wzrost energii kinetycznej ruchu obrotowego łyżwiarki, podczas gdy jej moment pędu pozostaje stały. Ponieważ brak jest tarcia, energia ta pozostaje w układzie. W związku z tym, gdyby łyżwiarka znów rozciągnęła ręce do pierwotnej pozycji, to do początkowej wartości zmaleją prędkość kątowa łyżwiarki (od ω' do ω) i jej energia kinetyczna (wartość energii ruchu obrotowego zmniejsza się od wartości K'_{obr} do wartości K_{obr}). Ostatnie stwierdzenia uzasadnia następujący ciąg równości:
$K_{\text{obr}} = K'_{\text{obr}} \cdot I'/I = \left[I'\left(\omega'\right)^2/2\right] \cdot \left(I'/I\right) = \left(I'\omega'\right)^2/2I = (I\omega)^2/2I = I\omega^2/2$.

Układ Słoneczny jest kolejnym przykładem pokazującym jak zasada zachowania momentu pędu działa w naszym Wszechświecie. Nasz Układ Słoneczny zrodził się z ogromnego obłoku (chmury) gazu i pyłu, który początkowo miał określoną energię kinetyczną ruchu obrotowego. Siły grawitacyjne powodowały ściskanie się tej chmury, a jej szybkość obrotów rosła w wyniku działania zasady zachowania momentu pędu (Rysunek 11.15).



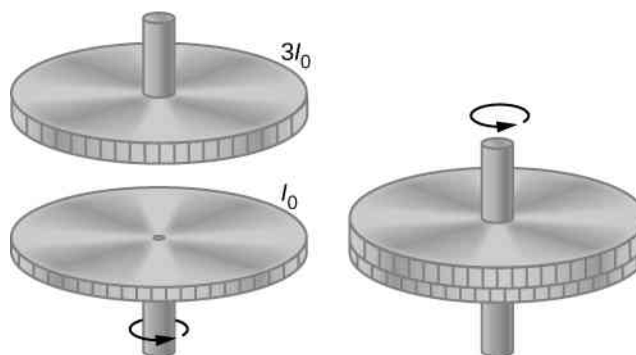
Rysunek 11.15 Układ Słoneczny formował się z obłoku gazu i pyłu, który pierwotnie wirował. Ruchy orbitalne i obroty planet odbywają się w tym samym kierunku, co pierwotny kierunek ruchu, przez co moment pędu macierzystej chmury jest zachowany. (Źródło: modyfikacja pracy przez NASA)

Kontynuujemy naszą dyskusję dotyczącą przykładu, który ma zastosowanie w inżynierii.

Przykład 11.7

Połączone koła zamachowe

Koło zamachowe obraca się bez tarcia z początkową prędkością kątową $\omega_0 = 600 \text{ obr/min}$ na pionowym wale (osi obrotu) o zaniedbywalnej wartości momentu bezwładności. Spada na nie drugie koło zamachowe, które jest w stanie spoczynku i ma moment bezwładności trzy razy większy niż obracające się koło (Rysunek 11.16). Ponieważ istnieje tarcie między powierzchniami kół zamachowych, po krótkim czasie osiągną, taką samą prędkość kątową, po czym będą obracać się razem. (a) Stosując zasadę zachowania momentu pędu, znajdź prędkość kątową połączonych kół. (b) Jaka część początkowej energii kinetycznej jest tracona podczas połączenia się kół zamachowych?



Rysunek 11.16 Dwa koła zamachowe zostają nałożone na siebie i obracają razem.

Strategia rozwiązania

Część (a) zadania jest łatwa do rozwiązania; znajdziemy w niej prędkość kątową połączonych kół. Następnie otrzymany wynik wykorzystamy w części (b), w celu porównania początkowej i końcowej energii kinetycznej układu.

Rozwiązanie

a. Na ten układ nie działa zewnętrzny moment sił. Co prawda, siła tarcia między powierzchniami kół wytwarza moment sił, ale jest to moment sił wewnętrznych, który nie wpływa na moment pędu całego układu. Z tego powodu możemy zastosować zasadę zachowania momentu pędu:

$$I_0\omega_0 = (I_0 + 3I_0)\omega_0 = 4I_0\omega \Rightarrow \omega = \frac{1}{4}\omega_0 = 150\,\text{obr} / \text{min} = 15{,}7\,\text{rad} / \text{s}.$$

b. Przed połączeniem obracało się tylko jedno koło zamachowe. Energia kinetyczna ruchu obrotowego koła zamachowego $I_0\omega^2/2$ jest równocześnie początkową energią kinetyczną ruchu obrotowego układu. Końcowa energia kinetyczna wynosi $1/2 \cdot 4I_0\omega^2 = 1/2 \cdot 4I_0 \cdot (\omega_0/4)^2 = I_0\omega_0^2/8$.

Zatem stosunek końcowej energii kinetycznej do początkowej jest równy

$$\frac{\frac{1}{8}I_0\omega_0^2}{\frac{1}{2}I_0\omega_0^2} = \frac{1}{4}.$$

Tak więc po połączeniu się dwóch kół zamachowych 3/4 początkowej energii kinetycznej zostaje stracone.

Znaczenie

Ponieważ moment bezwładności układu zwiększa się, to zgodnie z oczekiwaniami z prawa zachowania momentu pędu prędkość kątowa się zmniejsza. W tym przykładzie widzimy, że końcowa energia kinetyczna układu zmniejszyła się, a straty energii powstają w wyniku tarcia występującego między kołami zamachowymi w trakcie ich łączenia się (prędkość kątowa jednego koła maleje a drugiego (początkowo nie obracającego się) rośnie). Porównaj to z przykładem na Rysunku 11.14, gdzie łyżwiarka wykonuje pracę, ściągając ramiona do środka, zwiększając w ten sposób energię kinetyczną ruchu obrotowego.



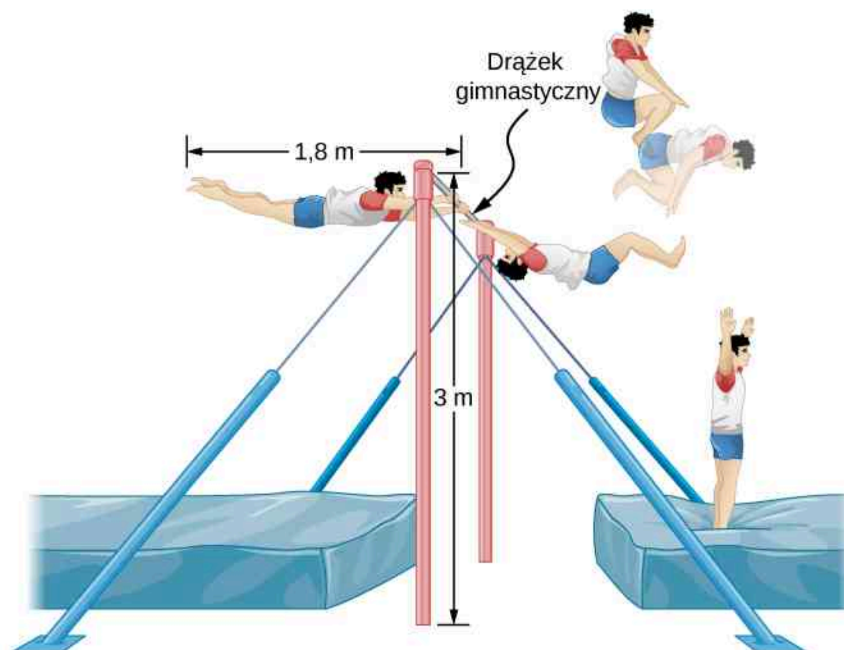
11.4 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Karuzela (podwórkowa) na boisku obraca się z częstotliwością 4,0 obr/min. Wskoczyło na nią troje dzieci i zwiększyło moment bezwładności obracającego się układu karuzela/dzieci o 25%. Jaka jest nowa częstotliwość obrotów (prędkość obrotowa)?

Przykład 11.8

Zeskok z drążka

Gimnastyk o masie 80,0 kg wykonujący ćwiczenia na drążku zwalnia uchwyt i puszcza drążek gimnastyczny. Ewolucje zaczyna od pełnego wyprostu, a następnie podwija nogi i przyciąga ręce do siebie tak, aby wyko-

nać określoną liczbę obrotów przed lądowaniem. Jego moment bezwładności przy całkowitym wyprostowaniu może być przybliżony momentem bezwładności pręta o długości 1,8 m, a gdy jest w pozycji kucznej – prętem o połowie tej długości. Jego częstotliwość obrotów (szybkość obrotowa) przy pełnym wyprostowaniu wynosi 1,0 obr/s, a przyjmuje pozycję kuczną w chwili, gdy jego środek masy jest na wysokości 3,0 m i przesuwa się poziomo względem podłogi (jego prędkość jest skierowana poziomo). Ile obrotów może wykonywać do czasu, gdy z powrotem wyprostuje się na wysokości 1,8 m? Patrz Rysunek 11.17.



Rysunek 11.17 Gimnastyk o masie 80,0 kg odrywa się od drążka gimnastycznego i wykonuje szereg obrotów w pozycji skulonej przed lądowaniem w pozycji pionowej.

Strategia rozwiązania

Korzystając z zasady zachowania momentu pędu, możemy znaleźć jego szybkość obrotową (częstotliwość obrotów), gdy jest w pozycji kucznej. Korzystając z równań kinematyki, możemy znaleźć czas, odpowiadający zmianie wysokości środka masy gimnastyka z 3,0 m do 1,8 m. Ponieważ w momencie puszczenia drążka środek masy ma prędkość skierowaną poziomo względem ziemi, to w kierunku pionowym mamy do czynienia ze spadkiem swobodnym, co upraszcza obliczenia. To pozwala nam wyznaczyć liczbę wykonywanych obrotów. Ponieważ w obliczeniach wystąpi stosunek szybkości obrotowych, możemy zachować ich jednostki obr/s i nie trzeba ich przekształcać na jednostki prędkości kątowych rad/s.

Rozwiązanie

Moment bezwładności przy pełnym rozciągnięciu ciała gimnastyka, tuż po oderwaniu się od drążka, jest równy $I_1 = mL_1^2/12 = 80{,}0\ \mathrm{kg} \cdot (1{,}8\ \mathrm{m})^2/12 = 21{,}6\ \mathrm{kg \cdot m^2}$.

a gdy był w pozycji kucznej $I_2 = mL_2^2/12 = 80{,}0\ \mathrm{kg} \cdot (0{,}9\ \mathrm{m})^2/12 = 5{,}4\ \mathrm{kg \cdot m^2}$.

Z zasady zachowania momentu pędu:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \implies \omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 = \frac{21{,}6\ \mathrm{kg \cdot m^2}}{5{,}4\ \mathrm{kg \cdot m^2}} \cdot 1{,}0\ \mathrm{obr/s} = 4{,}0\ \mathrm{obr/s}\ .$$

Przedział czasu w pozycji kucznej wynosi: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2(3{,}0\ \mathrm{m} - 1{,}8\ \mathrm{m})}{9{,}8\ \mathrm{m/s^2}}} = 0{,}5\ \mathrm{s}$.

W ciągu 0,5 s gimnastyk będzie mógł wykonać dwa obroty z szybkością kątową 4,0 obr/s.

Znaczenie

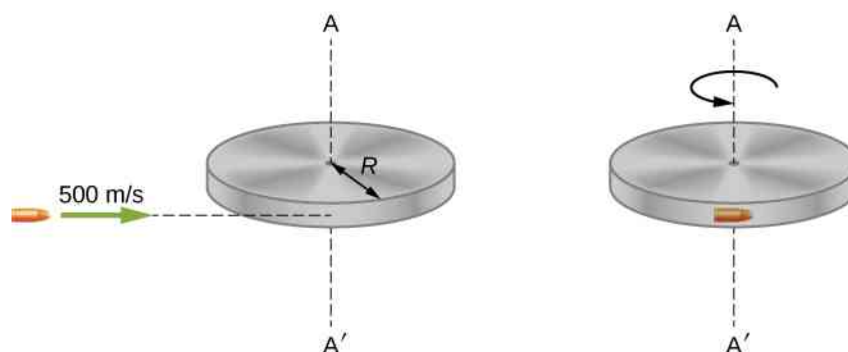
Należy zauważyć, że liczba obrotów, jaką gimnastyk może wykonać, będzie zależeć od tego, jak długo jest on w powietrzu. W rozważanym przez nas przykładzie puszcza on drążek w momencie, gdy jego wyprosto-

wane ciało jest ustawione poziomo. Może on też puścić drążek, będąc pod kątem, zarówno dodatnim, jak i ujemnym, a to odpowiednio wydłuża lub skraca czas ruchu w powietrzu. Zawodnicy muszą wziąć to pod uwagę przy wykonywaniu zeskoku z drążka.

Przykład 11.9

Zachowanie momentu pędu podczas zderzenia

Pocisk o masie $m = 2{,}0\ \mathrm{g}$, poruszając się poziomo z prędkością 500,0 m/s, uderzył w brzeg tarczy i utkwił w nim. Tarcza ma masę $M = 3{,}2\ \mathrm{kg}$ oraz promień $R = 0{,}5\ \mathrm{m}$. Może się ona swobodnie obracać wokół swojej osi. Jeżeli tarcza była początkowo w spoczynku (Rysunek 11.18), to jaka jest prędkość kątowa tarczy natychmiast po tym, jak pocisk utkwił w jej brzegu?



Rysunek 11.18 Pocisk poruszając się poziomo uderzył w brzeg tarczy i utkwił w jej krawędzi. Tarcza może swobodnie się obracać wokół osi pionowej.

Strategia rozwiązania

W układzie pocisk – tarcza nie działa żaden zewnętrzny moment sił wzdłuż osi pionowej przechodzącej przez centrum dysku. W ten sposób moment pędu wzdłuż tej osi jest zachowany. Początkowy, tuż przed zderzeniem, moment pędu pocisku, liczony względem osi obrotu tarczy, wynosi mvR, a początkowy moment pędu tarczy ma wartość zero. Zatem całkowity moment pędu układu przed zderzeniem jest równy mvR. Ponieważ moment pędu jest zachowany, końcowy moment pędu układu jest równy momentowi pędu tarczy z tkwiącym w niej pociskiem po uderzeniu.

Rozwiązanie

Początkowy moment pędu układu jest równy

$$L_1 = mvR.$$

Moment bezwładności układu z pociskiem osadzonym w tarczy wynosi

$$I = mR^2 + \frac{1}{2}MR^2 = \left(m + \frac{M}{2}\right)R^2.$$

Końcowy moment pędu układu jest równy

$$L_2 = I\omega_2.$$

W ten sposób, z zasady zachowania momentu pędu $L_1 = L_2$

$$mvR = \left(m + \frac{M}{2}\right)R^2\omega_2.$$

W rozwiązaniu ze względu na ω_2 otrzymujemy:

$$\omega_2 = \frac{mv}{(m + M/2)R} = \frac{2{,}0 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg} \cdot 500{,}0\ \mathrm{m/s}}{\left(2{,}0 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg} + 1{,}6\ \mathrm{kg}\right) \cdot 0{,}50\ \mathrm{m}} = 1{,}2\ \mathrm{rad/s}.$$

Znaczenie

Układ składa się zarówno z punktowej cząstki, jak i bryły sztywnej. Należy zachować ostrożność przy formułowaniu wyrażenia na moment pędu przed zderzeniem i po nim. W naszym przypadku moment pędu pocisku przed zderzeniem i po nim był liczony względem osi obrotu tarczy.

11.4 | Precesja żyroskopu

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

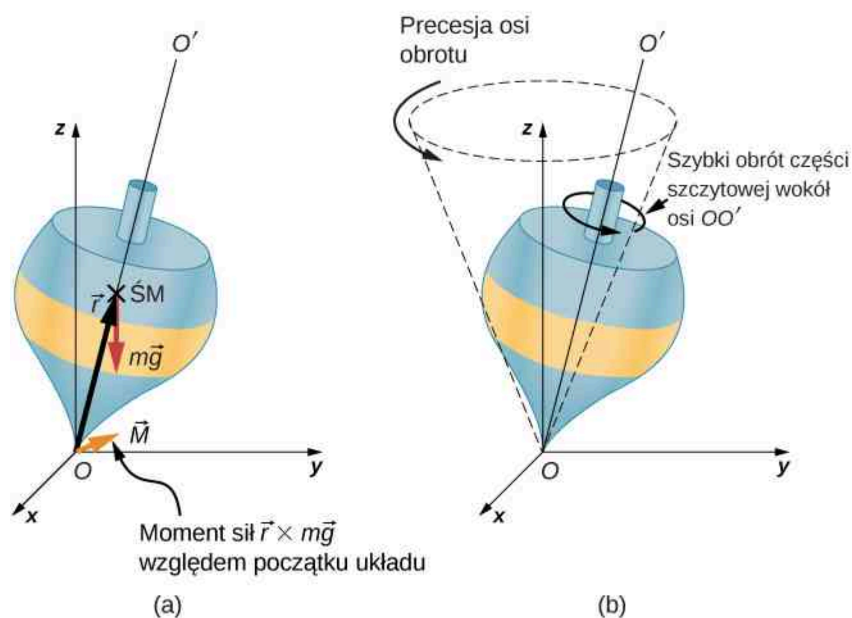
- opisywać procesy fizyczne leżące u podstaw zjawiska precesji;
- obliczać prędkość kątową precesji żyroskopu.

Rysunek 11.19 przedstawia **żyroskop**, który definiujemy jako wirujący dysk (ciało – bryłę sztywną o symetrii osiowej), obracający się wokół włsnej osi symetrii, przy czym oś obrotu jest osią swobodną, to znaczy może przyjąć dowolny kierunek przestrzeni. Podczas wirowania kierunek osi obrotu żyroskopu jest niezależny od orientacji układu, w którym żyroskop jest umieszczony. Żyroskop można przenosić z miejsca na miejsce, a orientacja (kierunek) osi obrotu pozostaje taka sama. To sprawia, że żyroskopy są bardzo przydatne w nawigacji, w szczególności gdy nie można stosować kompasów magnetycznych, na przykład w załogowych i bezzałogowych statkach kosmicznych, międzykontynentalnych pociskach balistycznych, bezzałogowych statkach powietrznych oraz satelitach takich jak Hubble Space Teleskop.



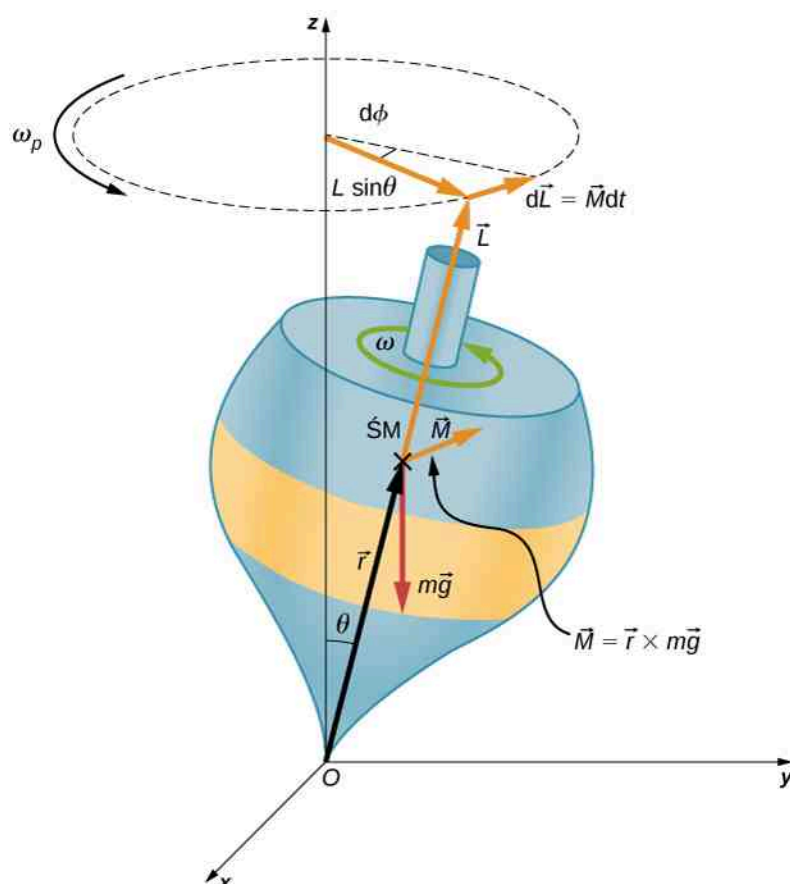
Rysunek 11.19 Żyroskop składa się z dysku wirującego wokół osi symetrii, która może przyjmować dowolną orientację w przestrzeni.

Precesję żyroskopu zilustrujmy na przykładzie zachowania się bączka na dwóch poniższych rysunkach. Jeśli punkt podparcia bączka jest umieszczony na płaskiej powierzchni w pobliżu powierzchni Ziemi, oś symetrii tworzy kąt z pionem, a bączek nie kręci się, to moment siły działający na środek ciężkości żyroskopu powoduje jego przewrócenie. Jest to pokazane na Rysunku 11.20(a). Jednakże, jeśli bączek wiruje wokół swojej osi symetrii, to zamiast się przewrócić, z powodu działania momentu siły ciężkości, oś obrotu wykonuje ruch precesyjny (dokonuje precesji), tzn. oś symetrii bączka obraca się wokół określonego kierunku w przestrzeni, zakreślając powierzchnię boczną stożka, co przedstawiono w części (b) Rysunku 11.20.



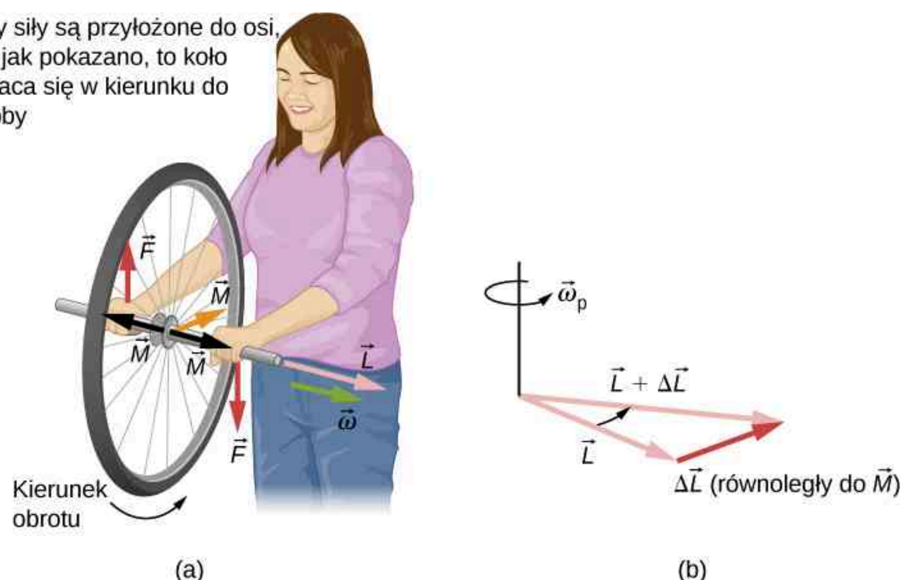
Rysunek 11.20 (a) Jeżeli bączek się nie kręci, to moment siły $\vec{r} \times m\vec{g}$ względem punktu podparcia O (w rzeczywistości punkt, względem którego liczymy moment sił, nie ma znaczenia, gdyż na ciało działa para sił) powoduje jego przewrócenie. (b) Jeżeli bączek obraca się wokół swojej osi OO', to nie przewraca się, ale porusza się ruchem precesyjnym wokół osi z.

Rysunek 11.21 przedstawia siły działające na bączek. Wektor momentu sił działa prostopadle do wektora momentu pędu. Zmienia on kierunek wektora momentu pędu $\vec{L}$, zgodnie z zależnością $\mathrm{d}\vec{L} = \vec{M}\mathrm{d}t$, ale nie jego wartość. Oś symetrii porusza się ruchem precesyjnym wokół osi pionowej, ponieważ moment sił jest zawsze poziomy i prostopadły do $\vec{L}$. Jeśli bączek nie kręci się, to uzyskuje moment pędu w kierunku momentu sił i obraca się wokół osi poziomej, a następnie upada, jak moglibyśmy oczekiwać.



Rysunek 11.21 Wypadkowa sił działająca na środek ciężkości wytwarza moment sił $\vec{M}$ w kierunku prostopadłym do $\vec{L}$. Wartość $\vec{L}$ nie zmienia się, ale kierunek $\vec{L}$ podlega zmianom, a oś symetrii bączka dokonuje precesji wokół osi z .

Możemy zbadać to zjawisko samodzielnie, trzymając kręcące się koło rowerowe i próbując obrócić je wokół osi prostopadłej do osi obrotu. Jak pokazano na Rysunku 11.22, osoba wywiera siły prostopadłe do osi obrotu i w ten sposób próbuje obrócić koło, ale zamiast tego oś koła zaczyna zmieniać swój kierunek w lewo (tj. w stronę lewej dłoni osoby) pod wpływem przyłożonego momentu sił.



Rysunek 11.22 (a) Osoba trzymająca oburącz oś obrotu koła rowerowego próbując obrócić koło unosi oś prawą ręką w górę i popycha w dół z lewej strony. Dzięki temu powstaje wypadkowy moment sił skierowany do osoby. Ten moment sił powoduje zmianę momentu pędu w tym kierunku. (b) Diagram ilustruje dodawanie przyrostu wektora momentu pędu $\Delta\vec{L}$, równoległego do $\vec{M}$, do wektora momentu pędu koła $\vec{L}$, w wyniku czego otrzymujemy nowy wektor momentu pędu. Koło porusza się w kierunku osoby, prostopadle do wektorów sił jakie ona na nie wywiera.

Wszyscy wiemy, jak łatwo jest przewrócić się na rowerze, gdy siedzi się na nim w stanie spoczynku. Ale podczas jazdy, jest to trudniejsze (tym trudniejsze im, większa jest prędkość roweru), ponieważ, chcąc się przewrócić, musimy zmienić wektor momentu pędu obracających się kół.


Zobacz film o precesji żyroskopu (https://openstaxcollege.org/l/21gyrovideo) (*gyroscope precession*) pokazujący pełną demonstrację precesji koła rowerowego.

Spróbuj zmienić położenie odtwarzacza Blu-Ray z umieszczonym i obracającym się w nim Blu-Ray Disc (B-RD). Łatwo jest przesunąć (bez obrotu) urządzenie w wybranym kierunku, ale znacznie trudniej jest dokonać obrotu Blu-Ray wokół osi prostopadłej do osi, wokół której obraca się B-RD, ponieważ przykładamy wówczas do działającego urządzenia odtwarzającego moment siły (prostopadły do osi obrotu B-RD), który powoduje precesję wektora momentu pędu wirującego B-RD.

Możemy obliczyć szybkość precesji koła z Rysunku 11.21. Widzimy, że wielkość momentu sił wynosi

$$M = rmg\sin\theta.$$

Stąd

$$\mathrm{d}L = rmg\sin\theta\,\mathrm{d}t.$$

Kąt, o jaki zmienia się wektor momentu pędu w czasie dt, jest równy (z Rysunku 11.21 i definicji kąta płaskiego mamy $\mathrm{d}\phi = \mathrm{d}L/L\sin\theta$)

$$\mathrm{d}\phi = \frac{\mathrm{d}L}{L\sin\theta} = \frac{rmg\sin\theta}{L\sin\theta}\mathrm{d}t = \frac{rmg}{L}\mathrm{d}t.$$

Prędkość kątową precesji określa wzór $\omega_\mathrm{p} = \mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$, z którego wynika jej wartość

$$\omega_\mathrm{p} = \frac{rmg}{L} \text{ lub, ponieważ } L = I\omega.$$

$$\omega_p = \frac{rmg}{I\omega}. \quad (11.14)$$

W tym wyprowadzeniu założyliśmy, że $\omega_p \ll \omega$, to znaczy, że prędkość kątowa precesji jest znacznie mniejsza niż prędkość kątowa obrotów wokół osi żyroskopu. W rzeczywistości prędkość kątowa precesji dodaje niewielką składową do momentu pędu żyroskopu wzdłuż osi z. Objawia się to podczas precesji żyroskopu niewielkim wahaniem w górę i w dół jego osi obrotu. Zjawisko to nosi nazwę nutacji.

Sama Ziemia zachowuje się jak gigantyczny żyroskop. Wektor moment pędu Ziemi jest równoległy do jej osi i wskazuje na Gwiazdę Północną. Ale Ziemia ulega powolnej precesji (raz na około 26 000 lat) ze względu na moment siły grawitacji Słońca i Księżyca oraz na jej niesferyczny kształt (Ziemia ma kształt elipsoidy obrotowej; jest spłaszczona przy biegunach o około 23 km).

Przykład 11.10

Okres precesji

Żyroskop kręci się i jego dolny końcowy fragment umieszczony jest na poziomej powierzchni i dlatego mamy do czynienia z nieznacznym oporem siły tarcia. Dysk żyroskopu ma masę 0,3 kg i wiruje z częstotliwością 20 obr/s. Jego środek masy jest odległy 5,0 cm od osi obrotu i promień jego tarczy wynosi 5,0 cm. Jaki jest okres precesji żyroskopu?

Strategia rozwiązania

Zastosujemy Równanie 11.14, aby znaleźć prędkość kątową precesji żyroskopu. To pozwoli nam wyznaczyć okres precesji.

Rozwiązanie

Moment bezwładności tarczy wynosi

$$I = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}30\,\text{kg} \cdot (0{,}05\,\text{m})^2 = 3{,}75 \cdot 10^{-4}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2,$$

a jego prędkość kątowa

$$20{,}0\,\text{obr/s} = 20{,}0 \cdot 2\pi\,\text{rad/s} = 125{,}66\,\text{rad/s}.$$

Obie wielkości możemy teraz wstawić do Równania 11.14. Prędkość kątowa precesji jest równa

$$\omega_p = \frac{rmg}{I\omega} = \frac{0{,}05\,\text{m} \cdot 0{,}3\,\text{kg} \cdot 9{,}8\,\text{m/s}^2}{3{,}75 \cdot 10^{-4}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot 125{,}66\,\text{rad/s}} = 3{,}12\,\text{rad/s},$$

natomiast okres precesji żyroskopu wynosi

$$T_p = \frac{2\pi}{3{,}12\,\text{rad/s}} = 2{,}0\,\text{s}.$$

Znaczenie

Prędkość kątowa precesji, 3,12 rad/s, lub częstotliwość precesji równa około 0,5 obr/s, jest znacznie mniejsza niż częstotliwość 20 obr/s tarczy żyroskopu. Dlatego też nie należy się spodziewać dużej składowej momentu pędu na skutek precesji, a równanie jest dobrym przybliżeniem prędkości kątowej precesji.


11.5 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Żyroskop ma prędkość kątową precesji 5,0 rad/s na Ziemi. Jaka jest prędkość kątowa precesji na Księżycu?

PODSUMOWANIE ROZDZIAŁU 11

KLUCZOWE POJĘCIA

moment pędu (ang. angular momentum) w ruchu obrotowym, wielkość analogiczną do pędu ciała w ruchu postępowym, otrzymujemy, wyznaczając iloczyn momentu bezwładności i prędkości kątowej

prawo zachowania momentu pędu (ang. law of conservation of angular momentum) moment pędu jest zachowany, to znaczy początkowy moment pędu jest równy końcowemu momentowi pędu, gdy na układ nie działa zewnętrzny moment sił

precesja (ang. precession) zmiana kierunku osi obrotu obracającego się ciała, zachodząca pod wpływem momentu siły; oś obrotu wykonuje ruch obrotowy wokół określonego kierunku w przestrzeni, zakreślając powierzchnię boczną stożka

ruch toczny (toczenie się) (ang. rolling motion) złożenie ruchu obrotowego i translacyjnego lub/bez poślizgu

NAJWAŻNIEJSZE WZORY

Prędkość środka masy toczącego się ciała	$v_{\text{ŚM}} = R\omega$
Przyspieszenie środka masy toczącego się ciała	$a_{\text{ŚM}} = R\varepsilon$
Przemieszczenie środka masy toczącego się ciała	$d_{\text{ŚM}} = R\theta$
Przyspieszenie w ruchu tocznym bez poślizgu	$a_{\text{ŚM}} = \frac{mg\sin\theta}{m+(I_{\text{ŚM}}/r^2)}$
Moment pędu	$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$
Pochodna momentu pędu równa momentowi siły	$\frac{\mathrm{d}\vec{l}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{M}$
Moment pędu układu cząstek	$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \dots + \vec{l}_N$
W przypadku układu cząstek pochodna momentu pędu jest równa	$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{\mathrm{M}}$
Moment pędu obracającej się bryły sztywnej	$L = I\omega$
Zachowanie momentu pędu	$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = 0$
Zasada zachowania momentu pędu	$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \dots + \vec{l}_N = \text{constant}$
Prędkość kątowa precesji	$\omega_{\text{p}} = \frac{rmg}{I\omega}$

PODSUMOWANIE

11.1 Toczenie się ciał

- Podczas ruchu tocznego bez poślizgu pomiędzy toczącym się ciałem i powierzchnią występuje siła tarcia statycznego. Związki $v_{\text{ŚM}} = R\omega, a_{\text{ŚM}} = R\varepsilon$ i $d_{\text{ŚM}} = R\theta$ mają taką postać, że prędkość liniowa, przyspieszenie i odległość przebyta przez środek masy są wyrażone jako zmienne kątowe pomnożone przez promień obiektu.
- W ruchu tocznym z poślizgiem pomiędzy toczącym się przedmiotem i powierzchnią występuje siła tarcia kinetycznego. W tym przypadku $v_{\text{ŚM}} \neq R\omega, a_{\text{ŚM}} \neq R\varepsilon$ i $d_{\text{ŚM}} \neq R\theta$.
- Do analizy ruchu tocznego ciał bez poślizgu może być stosowana zasada zachowania energii mechanicznej. Natomiast podczas toczenia się ciał z poślizgiem energia mechaniczna nie jest zachowywana na skutek wytwarzania ciepła towarzyszącego wykonywaniu pracy przeciwko sile tarcia kinetycznego.

11.2 Moment pędu

- Moment pędu $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ pojedynczej cząstki względem określonego punktu (początku układu odniesienia) jest iloczynem wektorowym wektora położenia i pędu cząstki w danym układzie współrzędnych.

- Moment pędu $\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \vec{l}_3 + \ldots + \vec{l}_N$ układu cząstek względem określonego punktu jest sumą wektorową poszczególnych momentów pędu cząstek tworzących układ.
- Wypadkowy moment siły względem określonego początku układu odniesienia jest pochodną względem czasu wypadkowego momentu pędu względem tego punktu: $\mathrm{d}\vec{L}/\mathrm{d}t = \sum \vec{M}$.
- Obracająca się wokół stałej osi bryła sztywna ma moment pędu $L = I\omega$ będący wektorem skierowanym wzdłuż osi obrotu. Pochodna względem czasu momentu pędu: $\mathrm{d}L/\mathrm{d}t = \sum M$ daje wypadkowy moment siły działający na bryłę, który jest wektorem skierowanym wzdłuż osi obrotu.

11.3 Zasada zachowanie momentu pędu

- Zasada zachowania momentu pędu mówi, że w przypadku braku zewnętrznych momentów sił całkowity moment pędu w układzie jest zachowany. Jest to odpowiednik zasady zachowania pędu, która mówi, że pęd w układzie jest zachowany, gdy suma sił zewnętrznych działających na układ jest równa zero.
- W przypadku bryły sztywnej, obracającej się wokół stałej osi, zasada zachowania momentu pędu mówi, że w nieobecności zewnętrznego wypadkowego momentu sił mamy $I_2\omega_2 = I_1\omega_1$. Zgodnie z tym równaniem prędkość kątowa jest odwrotnie proporcjonalna do momentu bezwładności. Tak więc jeśli moment bezwładności zmniejsza się, to prędkość kątowa, w celu zachowania moment pędu, musi wzrosnąć.
- Układy zawierające zarówno cząstki punktowe, jak i bryły sztywne również mogą być analizowane przy użyciu zasady zachowania momentu pędu. Momenty pędu wszystkich ciał w układzie muszą być liczone względem tej samej wspólnej osi.

11.4 Precesja żyroskopu

- Gdy żyroskop jest umieszczony na obrotowym trzpieniu na powierzchni ziemi i wiruje wokół własnej osi symetrii, to wykonuje precesję wokół osi pionowej, ponieważ moment siły jest zawsze poziomy i prostopadły do $\vec{L}$. Jeżeli żyroskop nie kręci się, uzyskuje moment pędu w kierunku momentu siły i obraca się wokół osi poziomej i wypada z trzpienia, jak moglibyśmy tego oczekiwać.
- Prędkość kątową precesji wyraża wzór $\omega_\mathrm{p} = rmg/I\omega$, gdzie: r jest odległością od osi, wokół której następuje precesja, do środka masy żyroskopu, I jest momentem bezwładności wirującego dysku żyroskopu, m jest jego masą, a ω jest prędkością kątową żyroskopu.

PYTANIA

11.1 Toczenie się ciał

1. Czy okrągły obiekt spoczywający na szczycie równi, a następnie puszczony zacznie się toczyć, jeżeli między nim a równią nie ma tarcia?

2. Cylindryczna puszka o promieniu R toczy się po poziomej powierzchni bez poślizgu.
(a) Jaką odległość przebędzie środek masy po wykonaniu jednego obrotu?
(b) Gdyby doszło do poślizgu puszki, to czy ta odległość byłaby większa czy mniejsza?

3. Koło znajdujące się tuż pod wierzchołkiem zbocza zostaje puszczone w ruch. Czy jest bardziej prawdopodobne, że koło wpadnie w poślizg, gdy zbocze nachylone jest stromo, czy delikatnie?

4. Które ciało stacza się szybciej z nachylonej płaszczyzny–pełny walec czy pełna kula? Oba ciała mają taką samą masę i promień.

5. Wydrążona kula (sfera) i wydrążony walec (cylinder) o takiej samej masie i promieniu, mające taką samą prędkość początkową środka masy wtaczają się bez poślizgu na nachylone zbocze. Które z nich osiągnie większą wysokość przed zatrzymaniem się?

11.2 Moment pędu

6. Czy można przypisać moment pędu cząstce bez uprzedniego zdefiniowania punktu odniesienia?

7. Cząstka porusza się po linii prostej, przechodzącej przez początek układu współrzędnych. Czy są jakieś punkty na prostej, dla których moment pędu jest równy zero?

8. W jakich warunkach bryła sztywna ma niezerowy moment pędu, ale zerowy pęd?

9. Cząstka poruszająca się względem wybranego punktu ma pęd różny od zera. W jakich warunkach cząstka ta, względem wybranego początku układu, ma moment pędu równy zero?

10. Czy znajomość prędkości cząstek pozwala uzyskać informacje o jej momencie pędu?

11.3 Zasada zachowanie momentu pędu

11. Czemu służy małe śmigło umieszczone pionowo na ogonie śmigłowca, które obraca się w płaszczyźnie prostopadłej do dużego śmigła (wirnika nośnego)?

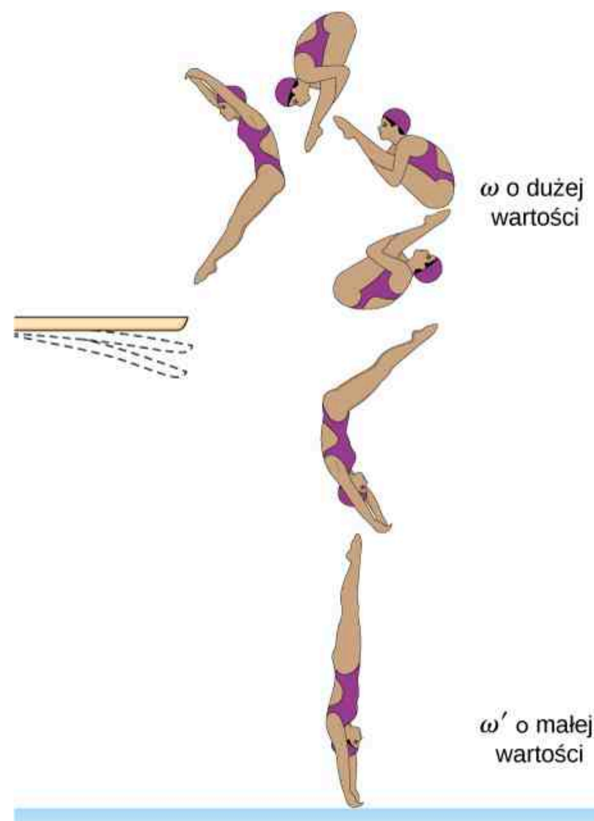
12. Załóżmy, że dziecko przechodzi od zewnętrznej krawędzi obracającej się karuzeli do jej środka. Wyjaśnij, czy prędkość kątowa karuzeli spowoduje wzrost czy spadek prędkości kątowej czy też pozostanie ona taka sama? Przyjmij, że karuzela wiruje bez tarcia.

13. Jeżeli kulka uwiązana do liny okręca się wokół słupa, to co się dzieje z prędkością kątową piłki?

14. Przypuśćmy, że polarne góry lodowe oderwały się i popłynęły w kierunku równika ziemskiego, zanim zdążyły się stopić. Co w takiej sytuacji stałoby się z prędkością kątową Ziemi?

15. Wyjaśnij, dlaczego gwiazdy obracają się szybciej, gdy zapadają się pod wpływem siły grawitacji.

16. Podczas skoku z trampoliny nurek koziołkuje, ściągając swoje kończyny i kuląc swoje ciało. Tuż przed wejściem do wody prostuje się i wyciąga swoje kończyny, aby wejść do wody prosto w dół (patrz rysunek). Wyjaśnij wpływ obydwu działań nurka (na początku i na końcu skoku) na jego prędkość kątową. Wyjaśnij również wpływ działań nurka na zmiany jego momentu pędu.



11.4 Precesja żyroskopu

17. Żyroskopy stosowane w systemach naprowadzania w celu wskazywania kierunku w przestrzeni muszą mieć niezerowy moment pędu, który nie może zmieniać kierunku. Po zainstalowaniu ich w pojeździe (również w samolocie, rakiecie, pojeździe kosmicznym) są umieszczone w komorze, która jest oddzielona od głównego kadłuba pojazdu tak, że zmiany w jego orientacji nie mają wpływu na orientację żyroskopu. Jeżeli pojazd poddawany jest działaniu dużych sił oraz przyspieszeń, to w jaki sposób kierunek momentu pędu, a tym samym osi żyroskopu, może być przez cały czas stały?

18. Ziemia porusza się ruchem precesyjnym wokół swojej osi pionowej z okresem 26 000 lat. Przedyskutuj, czy Równanie 11.14 może być wykorzystane do obliczenia prędkości kątowej precesji Ziemi?

ZADANIA

11.1 Toczenie się ciał

19. Jaka jest prędkość kątowa opony samochodu o średnicy 75,0 cm jadącego z prędkością 90,0 km/h?

20. Chłopiec przejechał na rowerze 2,00 km. Koła roweru mają promień 30,0 cm. Jaki jest całkowity kąt obrotu opon podczas tej podróży?

21. Jeżeli chłopiec na rowerze z poprzedniego zadania ,będąc najpierw w stanie spoczynku, rusza i przyspiesza do osiągnięcia prędkości 10,0 m/s w czasie 10,0 s, to jakie jest przyspieszenie kątowe kół?

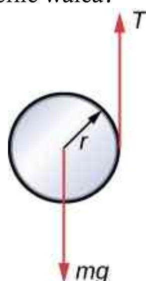
22. Opony samochodów wyścigowych Formuły 1 mają 66 cm średnicy. Jeżeli samochody (bolidy) te pokonują trasę średnio z prędkością 300 km/h, to ile obrotów wykonują opony kół, jeśli samochód pokonuje trasę w 1,5 godziny?

23. Spoczywająca kulka zaczyna staczać się z pochylni o kącie nachylenia 30°.
(a) Jakie jest jej przyspieszenie?
(b) Jaką drogę przebędzie w czasie 3,0 s?

24. Rozwiąż poprzednie zadanie, zastępując kulkę pełnym walcem. Wyjaśnij otrzymany wynik.

25. Bryła sztywna o cylindrycznym przekroju poprzecznym zostaje puszczona z wierzchołka pochylni o nachyleniu $30°$. Bryła ta stacza się 10,0 m do dna pochylni w 2,60 s. Znajdź moment bezwładności bryły i wyraź go przez jego masę m i promień r.

26. Jo-jo można traktować jako pełny walec o masie m, a promieniu r, który ma nawinięty lekki sznurek wokół swojego obwodu (patrz niżej). Jeden koniec sznurka jest przymocowany do stałego punktu w przestrzeni. Jeśli walec opada, gdy sznurek odwija się bez poślizgu, to jakie jest przyspieszenie walca?



27. Pełny walec o promieniu 10,0 cm stacza się z równi z poślizgiem. Kąt nachylenia równi wynosi $30°$, a współczynnik tarcia kinetycznego o jej powierzchnię 0,40. Jakie jest przyspieszenie kątowe walca? Ile wynosi jego przyspieszenie liniowe?

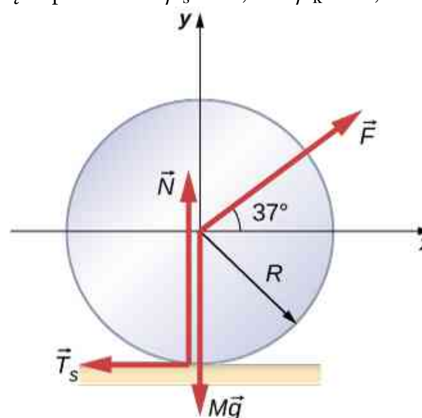
28. Kula do gry w kręgle toczy się, do przechowalni, w górę rampy o wysokości 0,5 m bez poślizgu. Jej środek masy ma prędkość początkową 3,0 m/s. (a) Jaka jest jej prędkość na szczycie rampy? (b) Czy kula dotrze do szczytu w przypadku, gdy rampa ma 1 m wysokości?

29. Walec o masie 40,0 kg toczy się po poziomej powierzchni z prędkością 6,0 m/s. Jaka potrzebna jest praca, żeby go zatrzymać?

30. Kula o masie 40,0 kg toczy się po poziomej powierzchni z prędkością 6,0 m/s. Jaka jest potrzebna praca, żeby ją zatrzymać? Porównaj otrzymany wynik z wynikiem poprzedniego zadania.

31. Walec wtacza się w górę równi o nachyleniu $20°$. Jeśli ruch zaczyna się od dołu z prędkością 10 m/s, to jak daleko w górę równi będzie toczyć się ten walec?

32. Walec o masie M i promieniu R jest ciągnięty z siłą $\vec{F}$ przyłożoną do jego środka pod kątem $37°$ do płaszczyzny poziomej (patrz rysunek). Jeśli koło ma się toczyć bez poślizgu, to jaka jest maksymalna wartość $|\vec{F}|$? Współczynniki tarcia statycznego i kinetycznego wynoszą odpowiednio $\mu_s = 0{,}40$ i $\mu_k = 0{,}30$.



33. Pusty w środku cylider mający prędkość 5,0 m/s wtacza się pod nachylenie do wysokości 1,0 m. Jak wysoko wtoczy się pod to nachylenie sfera o takiej samej masie i promieniu oraz takiej samej prędkości początkowej?

11.2 Moment pędu

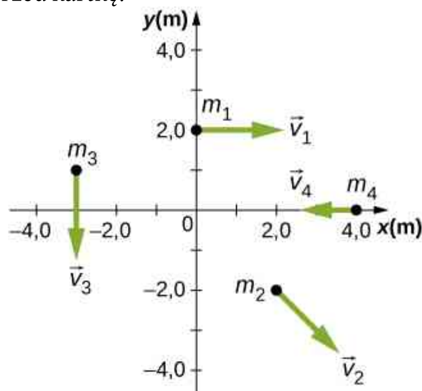
34. Cząstka o masie 0,2 kg porusza się wzdłuż prostej o równaniu $y = 0{,}2\ \text{m}$, z prędkością 5,0 m/s. Jaki jest moment pędu cząstki względem początku układu współrzędnych?

35. Ptak leci nad tobą na wysokości 300,0 m z prędkością skierowaną poziomo względem ziemi o wartości 20,0 m/s. Ptak ma masę 2,0 kg. Wektor położenia (promień wodzący) ptaka, który ma początek w miejscu, gdzie stoisz, tworzy kąt θ z powierzchnią ziemi. Niech wektor położenia i pęd ptaka leżą w płaszczyźnie xy. Oblicz moment pędu ptaka względem miejsca, w którym stoisz.

36. Samochód wyścigowy Formuły 1 o masie 750,0 kg, prześpieszając na torze wyścigowym w Monako wchodzi w zakręt kołowy z szybkością 220,0 km/h, w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara. W innej części toru samochód wchodzi w drugi zakręt kołowy z szybkością 180 km/h, także w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara. Wiedząc, że promień krzywizny pierwszego zakrętu jest równy 130,0 m, a drugiego 100,0 m, porównaj momenty pędu samochodu, liczone względem środków krzywizny toru, w obu przypadkach.

37. Cząstka o masie 5,0 kg znajduje się w pozycji opisanej wektorem $\vec{r} = 2{,}0\ \text{m} \cdot \hat{i} - 3{,}0\ \text{m} \cdot \hat{j}$ w chwili, gdy jej prędkość wynosi $\vec{v} = 3{,}0\ \text{m/s} \cdot \hat{i}$, w przyjętym układzie odniesienia.
(a) Jaki jest moment pędu cząstki?
(b) Jeżeli na cząstkę w tej chwili czasu działa siła $\vec{F} = 5{,}0\ \text{N} \cdot \hat{j}$, to jaki jest moment siły względem początku układu odniesienia?

38. Użyj reguły prawej dłoni do określenia kierunków momentów pędu cząstek względem początku układu współrzędnych pokazanego poniżej. Oś z jest skierowana przed kartkę.



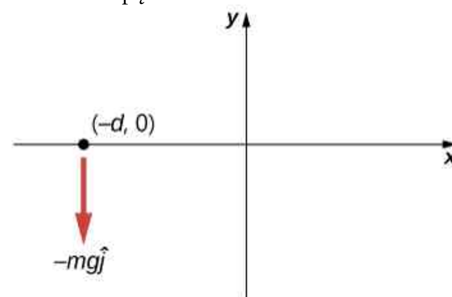
39. Przypuśćmy, że cząstki z poprzedniego zadania mają masy: $m_1 = 0{,}10\,\text{kg}$, $m_2 = 0{,}20\,\text{kg}$, $m_3 = 0{,}30\,\text{kg}$, $m_4 = 0{,}40\,\text{kg}$. Prędkości cząstek wynoszą: $\vec{v}_1 = 2{,}0\,\text{m/s} \cdot \hat{i}$, $\vec{v}_2 = 3{,}0\,\text{m/s} \cdot \hat{i} - 3{,}0\,\text{m/s} \cdot \hat{j}$, $\vec{v}_3 = -1{,}5\,\text{m/s} \cdot \hat{j}$, $\vec{v}_4 = -4{,}0\,\text{m/s} \cdot \hat{i}$.
(a) Oblicz moment pędu każdej cząstki względem początku układu współrzędnych.
(b) Jaki jest całkowity moment pędu wszystkich czterech cząstek?

40. Dwie cząstki o równych masach poruszają się z tą samą wartością prędkości w przeciwnych kierunkach, wzdłuż równoległych linii, które dzieli odległość d. Pokaż, że moment pędu tego układu jest taki sam bez względu na to, gdzie znajduje się punkt, względem którego obliczamy momentu pędu.

41. Samolot o masie $4{,}0 \cdot 10^4\,\text{kg}$ leci poziomo na wysokości 10 km ze stałą prędkością 250 m/s w stosunku do Ziemi.
(a) Jaka jest wartość momentu pędu samolotu względem obserwatora na powierzchni ziemi bezpośrednio pod samolotem?
(b) Czy moment pędu zmienia się, gdy samolot dalej leci wzdłuż swojego toru (jest na swojej ścieżce)?

42. W danym momencie, cząstka o masie 1,0 kg znajduje się w położeniu: $\vec{r} = 2{,}0\,\text{m} \cdot \hat{i} - 4{,}0\,\text{m} \cdot \hat{j} + 6{,}0\,\text{m} \cdot \hat{k}$ i ma prędkość $\vec{v} = -1{,}0\,\text{m/s} \cdot \hat{i} + 4{,}0\,\text{m/s} \cdot \hat{j} + 1{,}0\,\text{m/s} \cdot \hat{k}$, a siła działająca na nią wynosi $\vec{F} = 10{,}0\,\text{N} \cdot \hat{i} + 15{,}0\,\text{N} \cdot \hat{j}$.
(a) Ile wynosi moment pędu cząstki względem początku układu współrzędnych?
(b) Ile wynosi moment siły działającej na cząstkę względem początku układu współrzędnych?
(c) Jaka jest szybkość zmiany momentu pędu cząstki w tym momencie?

43. Cząstka o masie m zostaje upuszczona w punkcie $(-d,\ 0)$ i opada pionowo w polu grawitacyjnym Ziemi z przyśpieszeniem $-g\hat{j}$.
(a) Jakie jest wyrażenie na moment pędu cząstki względem osi z, na podstawie poniższego rysunku?
(b) Oblicz moment siły działającej na cząstkę względem osi z.
(c) Czy moment siły jest równy czasowej szybkości zmian momentu pędu?



44. (a) Oblicz moment pędu Ziemi na jej orbicie w ruchu wokół Słońca.
(b) Porównaj ten moment pędu z momentem pędu Ziemi w ruchu obrotowym wokół własnej osi (z krętem Ziemi).

45. Głaz o masie 20 kg i promieniu 20 cm zaczyna się staczać ze wzgórza o wysokości 15 m. Ile wynosi jego moment pędu gdy:
(a) jest w połowie drogi staczania się?
(b) jest na końcu drogi staczania się?

46. Satelita obraca się z częstotliwością 6,0 obr/s. Satelita składa się z korpusu w kształcie kuli o promieniu 2,0 m i masie 10000 kg oraz dwóch anten wystających ze środka masy korpusu, których kształt może być przybliżony prętami o długości 3,0 m i masie 10 kg. Anteny leżą w płaszczyźnie obrotu. Ile wynosi moment pędu satelity?

47. Śmigło składa się z dwóch łopat o długości 3,0 m i masie 120 kg każde. Śmigło można przybliżyć pojedynczym prętem obracającym się wokół osi przechodzącej przez jego środek masy i prostopadłej do pręta. Śmigło zaczyna się obracać za stałym prześpieszeniem kątowym i osiąga 1200 obrotów na minutę, w 30 sekund.
(a) Ile wynosi moment pędu śmigła w chwili $t = 10\,\text{s}$ i $t = 20\,\text{s}$?
(b) Ile wynosi moment siły działającej na śmigło?

48. **Pulsar** to szybko obracająca się gwiazda neutronowa. Pulsar w gwiazdozbiorze Byka w mgławicy Kraba ma okres $33{,}5 \cdot 10^{-3}\,\text{s}$, promień 10,0 km i masę $2{,}8 \cdot 10^{30}\,\text{kg}$. Okres obrotu pulsara rośnie z czasem na skutek emisji promieniowania elektromagnetycznego, która nie zmienia jego promienia, ale zmniejsza energię jego ruchu obrotowego.
(a) Jaki jest moment pędu pulsara?
(b) Przypuśćmy, że prędkość kątowa zmniejsza się w tempie $10^{-14}\,\text{rad/s}$. Jaki jest efektywny moment siły działającej na pulsar?

49. Łopatki turbiny wiatrowej mające 30 m długości obracają się z maksymalną częstotliwością (prędkością obrotową) 20 obr/min.

(a) Jeżeli każda łopatka ma masę 6000 kg, a zespół turbiny ma trzy łopatki, oblicz moment pędu turbiny dla tej częstotliwości.
(b) Jaki moment siły jest wymagany, aby uzyskać maksymalną częstotliwość obrotów łopatek w ciągu 5 minut?

50. Kolejka w wesołym miasteczku (*roller-coaster*) ma masę 3000,0 kg i musi pokonać bezpiecznie pionową okrągłą pętlę o promieniu 50,0 m. Jaki jest, minimalny moment pędu kolejki w dolnej części pętli, aby mogła ona bezpiecznie przejechać przez pętlę? Zignoruj tarcie między kolejką a torem kolejki. Załóż, że kolejka jest cząstką punktową.

51. Górski rowerzysta podczas wyścigu wykonuje skok i porusza się w powietrzu. Zanim znajdzie się w powietrzu, rower górski porusza się z szybkością 10,0 m/s. Jeżeli masa koła przedniego roweru wynosi 750 g i ma ono promień 35 cm, to jaki jest moment pędu kręcącego się koła w powietrzu tuż po oderwaniu się roweru od ziemi?

11.3 Zasada zachowanie momentu pędu

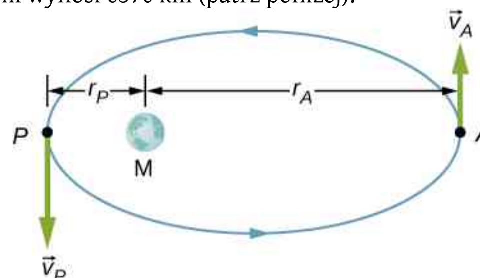
52. Krążek o masie 2,0 kg i promieniu 60 cm o małej masie 0,05 kg przyczepionej na jego brzegu obraca się z częstotliwością 2,0 obr/s. Mała masa oddziela się nagle od krążka. Jaka jest końcowa prędkość obrotowa (częstotliwość obrotów) krążka?

53. Masa Słońca wynosi $2 \cdot 10^{30}$ kg, jego promień $7{,}0 \cdot 10^{5}$ km, a jego okres obrotu to około 28 dni. Gdyby Słońce zapadło się (nastąpił kolaps grawitacyjny Słońca) do rozmiarów białego karła o promieniu $3{,}5 \cdot 10^{3}$ km, to jaki byłby jego okres obrotu, przy założeniu, że podczas zapadania się część masy nie została wyrzucona na zewnątrz i w obu przypadkach Słońce można traktować jako kulę o stałej gęstości?

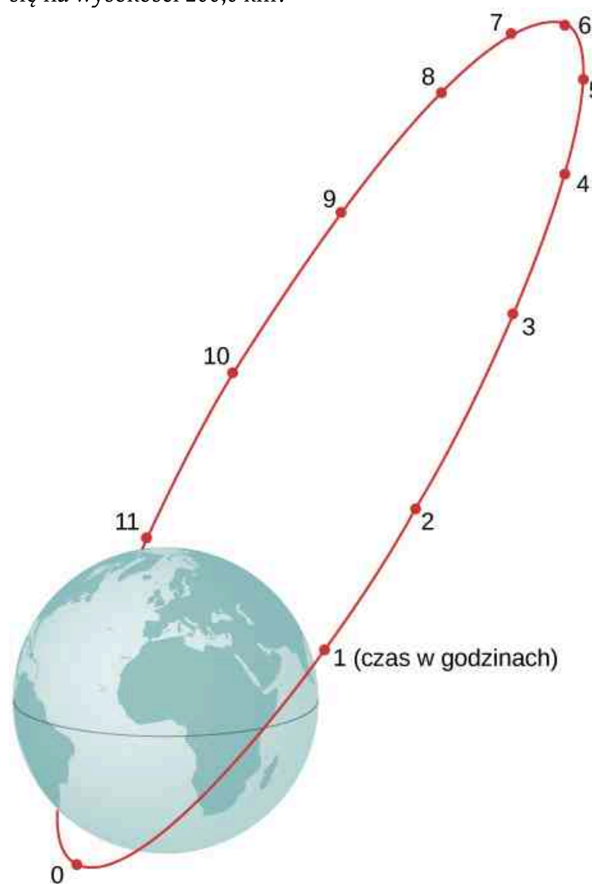
54. Walec o momencie bezwładności $I_1 = 2{,}0\ \mathrm{kg \cdot m^2}$ obraca się zgodnie z ruchem wskazówek zegara wokół pionowej osi przechodzącej przez jego środek z prędkością kątową $\omega_1 = 5{,}0\ \mathrm{rad/s}$. Drugi walec o momencie bezwładności $I_2 = 1{,}0\ \mathrm{kg \cdot m^2}$ obraca się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara wokół tej samej osi z prędkością kątową $\omega_2 = 8{,}0\ \mathrm{rad/s}$. Jeśli para walców łączy się i obraca wokół tej samej osi obrotu, to jaka jest prędkość kątowa połączonych walców? Jaka część (w procentach) początkowej energii kinetycznej jest tracona podczas tarcia, występującego przy wyrównywaniu się prędkości kątowych walców?

55. Nurek podczas odbicia z trampoliny uzyskuje wstępny obrót ciała w pozycji całkowicie wyprostowanej, następnie ściąga swoje kończyny, kuląc się, a potem wykonuje trzy koziołki przed uderzeniem w wodę. Jego moment bezwładności, gdy jego ciało jest rozciągnięte, wynosi $16{,}9\ \mathrm{kg \cdot m^2}$, a podczas salta (w pozycji skulonej) $4{,}2\ \mathrm{kg \cdot m^2}$. Jaką szybkość obrotową (częstotliwość obrotów) musi on nadać swemu ciału bezpośrednio po odbiciu z trampoliny, jeśli wykonanie salta przed uderzeniem w wodę trwa 1,4 s?

56. Orbita satelity Ziemi ma apogeum 2500 km nad powierzchnią Ziemi, a perygeum 500 km nad powierzchnią Ziemi. W apogeum jego prędkość wynosi 730 m/s. Jaka jest jego prędkość w perygeum? Promień Ziemi wynosi 6370 km (patrz poniżej).

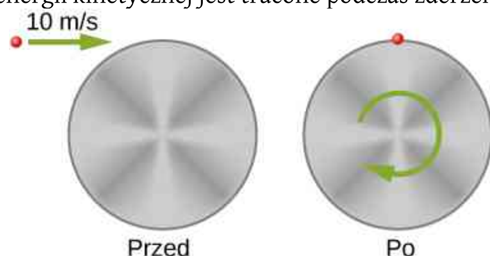


57. Rosyjski satelita komunikacyjny Mołnia (rus. *Молния* – piorun, błyskawica) ma bardzo wydłużoną orbitę, tak aby zapewnić ciągłość zasięgu komunikacji w krajach skandynawskich i w sąsiedztwie Rosji. Orbita jest tak ustawiona, aby w tych krajach satelita był widoczny przez jak najdłuższy czas (patrz poniżej). Jeżeli satelita na takiej orbicie ma apogeum w odległości 40 000 km mierzonej od środka Ziemi i prędkość 3,0 km/s, to jaka jest jego prędkość w perygeum znajdującym się na wysokości 200,0 km?



58. Poniżej pokazana jest mała cząstka o masie 20 g, poruszająca się z prędkością 10,0 m/s, która uderza w krawędź pełnego walca i przykleja się do jego brzegu. Walec może się swobodnie obracać wokół osi przechodzącej przez jego środek (wokół osi symetrii walca) i

prostopadłej do jego podstawy. Walec o masie 0,5 kg i promieniu 10 cm, znajduje się początkowo w spoczynku. (a) Jaka jest prędkość kątowa układu po zderzeniu? (b) Ile energii kinetycznej jest tracone podczas zderzenia?



59. Robak o masie 0,020 kg znajduje się na brzegu tarczy $(M = 0{,}10\ \text{kg},\ R = 0{,}10\ \text{m})$ obracającej się w płaszczyźnie poziomej wokół pionowej osi przechodzącej przez jej środek. Tarcza obraca się z prędkością kątową 10,0 rad/s. Robak czołga się do środka tarczy.
(a) Jaka będzie nowa prędkość kątowa tarczy, gdy robak doczołga się do jej środka?
(b) Ile wynosi zmiana energii kinetycznej układu?
(c) Jaka będzie prędkość kątowa tarczy w przypadku, gdy robak doczołga się z powrotem do zewnętrznej krawędzi tarczy?
(d) Jaka jest wtedy nowa energia kinetyczna układu?
(e) Co jest przyczyną wzrostu i spadku energii kinetycznej?

60. Jednorodny pręt mający masę 200 g i długość 100 cm może swobodnie obracać się w płaszczyźnie poziomej wokół stałej pionowej osi, przechodzącej przez jego środek i prostopadłej do jego długości. Dwa małe koraliki, każdy o masie 20 g, są umieszczone w rowkach wzdłuż pręta. Początkowo oba koraliki są unieruchomione przy pomocy zaczepów, symetrycznie po przeciwnych stronach środka pręta, w odległości 10 cm od osi obrotu. Gdy koraliki są w tym położeniu, pręt obraca się z prędkością kątową 10,0 rad/s. Kiedy zaczepy zostają zwolnione, koraliki przesuwają się na zewnątrz wzdłuż pręta.
(a) Jaka będzie prędkość kątowa pręta, gdy kulki dotrą do jego końców?
(b) Jaka będzie prędkość kątowa pręta, jeżeli koraliki oderwą się od pręta?

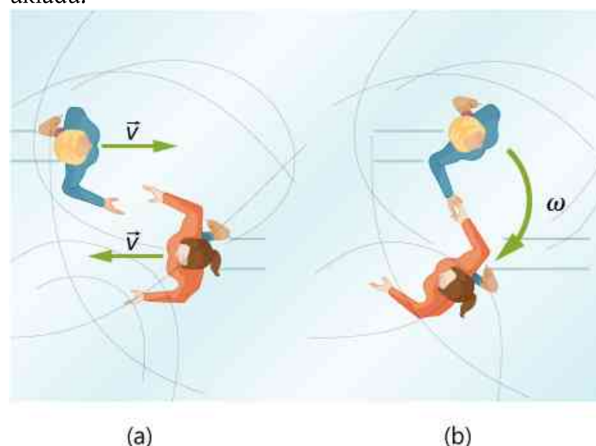
61. Karuzela ma promień 2,0 m i moment bezwładności $300\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$. Chłopiec o masie 50 kg biegnie po ziemi stycznie do obrzeża karuzeli z prędkością 4,0 m/s i wskakuje na nią. Jeżeli karuzela była początkowo w spoczynku, to jaka jest jej prędkość kątowa po wskoczeniu na nią chłopca?

62. Karuzela na placu zabaw ma masę 120 kg, promień 1,80 m i obraca się z częstotliwością 0,50 obr/s. Jaka jest jej częstotliwość obrotów po tym, gdy dziecko o masie 22,0 kg chwytając za jej zewnętrzną obręcz, wskakuje na karuzelę. Dziecko było początkowo w stanie spoczynku.

63. Troje dzieci jedzie na karuzeli, siedząc na krzesełkach przy jej krawędzi. Karuzela ma masę 100 kg, promień 1,60 m i wiruje z częstotliwością 20,0 obr/min. Dzieci mają masy 22,0, 28,0, i 33,0 kg. Jeśli dziecko, które ma masę 28,0 kg, przejdzie do środka karuzeli, to jaka będzie nowa częstotliwość obrotów karuzeli?

64. (a) Oblicz moment pędu łyżwiarza na lodzie obracającego się z częstotliwością 6,0 obr/s i mającego moment bezwładności $0{,}40\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$.
(b) Jak zmniejszy się częstotliwość obrotów (szybkość obrotowa) łyżwiarza po rozciągnięciu przez niego ramion i zwiększeniu w ten sposób momentu bezwładności? Znajdź wartość tego momentu bezwładności, jeśli częstotliwość obrotów łyżwiarza zmaleje do 1,25 obr/s.
(c) Załóżmy, że zamiast rozciągnięcia ramion łyżwiarz pozwala, aby tarcie łyżew o lód spowolniło go do 3,00 obr/s. Jaki był średni moment sił, gdy spowolnienie to zajęło 15,0 s?

65. Dwie łyżwiarki zbliżają się do siebie, jak pokazano poniżej, i chwytają się za ręce.
(a) Oblicz ich końcową prędkość kątową, jeżeli każda miała początkową prędkość 2,50 m/s względem lodu. Każda z nich ma masę 70,0 kg, a środek masy każdej z nich znajduje się 0,80 m od ich połączonych dłoni. Możesz przybliżyć ich momenty bezwładności masami punktowymi względem ich środka mas.
(b) Porównaj początkową i końcową energię kinetyczną układu.



66. W grze w baseball łapacz wyciąga swoją rękę prosto w górę, aby złapać piłkę poruszającą się z prędkością 40 m/s. Piłka ma masę 0,145 kg, a ręka łapacza ma długość 0,5 m i masę 4,0 kg.
(a) Jaka jest prędkość kątowa ręki względem gniazda (głowy) ramienia natychmiast po złapaniu piłki?
(b) Ile wynosi moment pędu, gdy chwytacz wstrzymuje obrót ramienia 0,3 s po złapaniu piłki?

67. W 2015 roku, w Warszawie, Olivia Rybicka-Oliver, 11-letnia Kanadyjka polskiego pochodzenia pobiła rekord świata jako najszybsza wykonawczyni piruetów na łyżwach. Osiągnęła ona rekordowe 342 obr/min, pobijając dotychczasowy rekord Guinnessa o 34 obroty. Jeżeli łyżwiarka rozciąga ramiona przy tej liczbie obrotów, to jaka jest jej nowa częstotliwość obrotów (szybkość obrotowa)? Załóżmy, że w celu rozwiązania zadania, w czasie pobijania rekordu łyżwiarka może być przybliżona przez 45-kilogramowy pręt, który ma 1,7 m wysokości i promień 15 cm. Gdy po pobiciu rekordu

wyciąga ręce, mogą być one przybliżone prętem o długości 130 cm i masie stanowiącej 10% masy jej ciała, zorientowanym prostopadle do osi obrotu. Zignoruj siły tarcia.

68. Satelita znajduje się na geostacjonarnej orbicie kołowej odległej o 42 164 km od centrum Ziemi. Z satelitą zderza się niewielka asteroida i wyrzuca go na eliptyczną orbitę z jej apogeum odległym o 45 000 km od centrum Ziemi. Jaka jest prędkość satelity w apogeum? Załóżmy, że jej moment pędu w czasie zderzenia został zachowany.

69. Gimnastyczka robi przewroty na podłodze, a następnie po odbiciu „wyrzuca” się w powietrze wykonując, kilka koziołków w pozycji skulonej. Jeśli jej moment bezwładności podczas robienia przewrotów wynosi $13{,}5\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$, a jej częstotliwość (szybkość) wirowania wynosi 0,5 obr/s, to ile obrotów robi ona w powietrzu, jeśli jej moment bezwładności w pozycji skulonej wynosi $3{,}4\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$, a ma ona na wykonanie koziołków w powietrzu 2,0 s?

70. Wirówka w NASA Ames Research Center ma promień 8,8 m i może dawać odśrodkowe siły bezwładności do 20*g* (20 razy siła grawitacji na powierzchni Ziemi).
(a) Ile wynosi moment pędu ładunku o masie 20 kg, który doznaje przeciążenia 10g w wirówce?
(b) Jeżeli silnik sterownika wirówki został wyłączony, a ładunek zmalał do 10 kg, to jaka będzie jego nowa szybkość (częstotliwość) wirowania, jeżeli zignorujemy siły tarcia?

71. Diabelskie koło (diabelski młyn) ma cztery szprychy, do których są podwieszone gondole, przy czym każda może pomieścić dwie osoby. Ramiona szprych mają po 15 m długości i są przymocowane do osi centralnej. Każda szprycha ma masę 200,0 kg, a gondole po 100,0 kg. Jeśli podczas jazdy koło obraca się z częstotliwością 0,2 obr/s, a w każdej kapsule znajduje się dwoje dzieci o masie po 50,0 kg każde, to jaka będzie nowa szybkość (częstotliwość) wirowania, jeśli wszystkie dzieci wyskoczą w czasie jazdy?

72. Łyżwiarz przygotowuje się do skoku z obrotem z rozszerzonymi (wyciągniętymi) rękami. Podczas gdy jego ręce są rozciągnięte obraca się on z częstotliwością 0,5 obr/s, a jego moment bezwładności wynosi $1{,}8\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$. Jeśli łyżwiarz wybija się w powietrze z prędkością 9,0 m/s, przy kącie 45° w stosunku do lodu, to ile obrotów może on wykonać podczas lotu, jeśli jego moment bezwładności w powietrzu wynosi $0{,}5\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$?

73. Stacja kosmiczna ma postać olbrzymiego obracającego się cylindra o masie $10^6\,\mathrm{kg}$ i promieniu 100 m z ludźmi na jego wewnętrznej powierzchni. W celu wytworzenia sztucznej grawitacji obraca się ona wokół własnej osi z częstotliwością 3,30 obr/min. Jeśli 100 osób o przeciętnej masie 65 kg oczekuje na mający przybyć statek kosmiczny, to jaka jest nowa częstotliwość obrotów (szybkość obrotowa), gdy wszyscy ludzie opuszczą stację?

74. Neptun ma masę $1{,}0\cdot10^{26}\,\mathrm{kg}$, dzieli go odległość $4{,}5\cdot10^9\,\mathrm{km}$ od Słońca, a jego okres obiegu wokół niego równy jest 165 lat. Według jednej z hipotez dotyczących powstania Układu Słonecznego wyewoluował on z pierwotnego gazowego dysku, który miał promień $10^{11}\,\mathrm{km}$. Z większości jego masy około 4,5 miliarda lat temu powstało Słońce, a z reszty planety – planetoidy i asteroidy. Jeśli przyjmiemy, że Neptun, zewnętrzna planeta Układu Słonecznego, powstał z tych części obłoku, które były rozłożone równomiernie na jego zewnętrznych krawędziach, to jaki był okres obrotu zewnętrznych krawędzi pierwotnego dysku?

11.4 Precesja żyroskopu

75. Żyroskop ma wbudowany dysk o masie 0,5 kg i promieniu 10 cm, który obraca się z częstotliwością 40 obr/s. Środek masy dysku znajduje się w odległości 10 cm od trzpienia obrotowego, na którym osadzona jest oś obrotu żyroskopu. Jaka jest prędkość kątowa jego precesji?

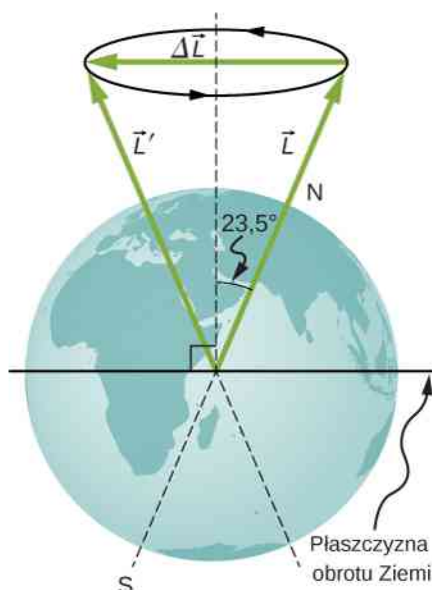
76. Prędkość kątowa precesji żyroskopu wynosi 1,0 rad/s. Jeżeli masa obracającej się tarczy (dysku) żyroskopu wynosi 0,4 kg, jego promień 30 cm, a odległość od środka masy do przegubu (trzpienia) obrotowego jest równa promieniowi, to jaka jest częstotliwość obrotów dysku?

77. Oś Ziemi tworzy kąt $23,5^\circ$ z kierunkiem prostopadłym do płaszczyzny orbity ziemskiej (ekliptyki). Tak jak pokazano poniżej, oś ta ulega precesji, przy czym jeden kompletny obrót wynosi 25 780 lat.

(a) Oblicz zmianę momentu pędu dla połowy tego czasu.

(b) Jaki jest średni moment sił, które powodują tę zmianę momentu pędu?

(c) W przypadku gdyby moment ten został wywołany przez parę sił przyłożonych w najbardziej efektywnych punktach, tj. na równiku, to jaka jest ich wartość?



ZADANIA DODATKOWE

78. Kulka toczy się po płaszczyźnie poziomej z prędkością 7,0 m/s, a następnie zaczyna się wtaczać na płaszczyznę nachyloną pod kątem 30° do płaszczyzny poziomej.
(a) Jaką odległość przebędzie kula wzdłuż nachylonej płaszczyzny przed zatrzymaniem się?
(b) Ile czasu upłynie do jej zatrzymania się?

79. Rozwiąż poprzednie zadanie, zastępując pełną kulę kulą wydrążoną. Wyjaśnij otrzymane wyniki.

80. Masa obręczy o promieniu 1,0 m wynosi 6,0 kg. Obręcz toczy się po poziomej powierzchni z prędkością 10,0 m/s. (a) Jaka praca jest potrzebna, aby zatrzymać obręcz? (b) Jeśli obręcz zaczyna wtaczać się na powierzchnię umieszczoną pod kątem 30° w stosunku do poziomu z prędkością 10,0 m/s, to jak daleko wzdłuż pochyłości będzie się toczyć przed zatrzymaniem i stoczeniem się z powrotem na dół?

81. Rozwiąż powyższe zadanie dla wydrążonej sfery o tym samym promieniu, masie i prędkości początkowej. Wyjaśnij różnice w wynikach.

82. Cząstka ma masę 0,5 kg i porusza się wzdłuż prostej $x = 5{,}0\text{ m}$ z prędkością 2,0 m/s, w dodatnim kierunku osi y. Ile wynosi moment pędu cząstki?

83. Cząstka o masie 4,0 kg porusza się po okręgu o promieniu 2,0 m. Moment pędu cząstki zmienia się w czasie, zgodnie z zależnością $l = 5{,}0t^2$. (a) Ile wynosi moment siły działającej na cząstkę względem środka okręgu w $t = 3{,}4\text{ s}$? (b) Ile wynosi prędkość kątowa cząstki w czasie $t = 3{,}4\text{ s}$?

84. Proton w cyklotronie jest przyspieszany do prędkości $5{,}0 \cdot 10^6\text{ m/s}$ w czasie 0,01 s. Torem ruchu protonu jest okrąg. Jeśli promień cyklotronu wynosi 0,5 km, to:
(a) jaki jest moment pędu protonu względem środka cyklotronu, przy jego maksymalnej prędkości?
(b) jaki jest moment siły działającej na proton względem środka cyklotronu, gdy przyspiesza on do maksymalnej prędkości?

85. (a) Jaki jest moment pędu Księżyca na jego orbicie wokół Ziemi?
(b) Porównaj ten moment pędu z momentem pędu Księżyca związanym z jego obrotem wokół osi. Pamiętaj przy tym, że Księżyc przez cały czas jest zwrócony jedną stroną w kierunku Ziemi.

86. Płyta DVD obraca się z częstotliwością 500 obr/min. Ile wynosi moment pędu płyty DVD, jeśli ma ona promień 6,0 cm i masę 20,0 g?

87. Koło garncarskie zaczyna się obracać osiągając 10 obr/s w czasie 15 s. Koło ma masę 3,0 kg i promień 30,0 cm. Ile wynosi moment pędu koła w chwilach $t = 5\text{ s}$, $t = 10\text{ s}$?

88. Załóżmy, że musisz uruchomić stary samochód przy użyciu korby, na którą działasz siłą 300 N w czasie 0,25 sek. Jaki moment pędu został przekazany silnikowi, jeżeli uchwyt korby jest w odległości 0,30 m od osi obrotu, a wywierana na korbę siła przez cały czas jest stała i równa 300 N?

89. Walec o masie 2,0 kg i promieniu 20 cm obraca się w lewo (przeciwnie do ruchu wskazówek zegara) wokół pionowej osi symetrii, z częstotliwością 600 obr/min. Drugi taki sam walec obraca się w prawo (zgodnie z ruchem wskazówek zegara), wokół tej samej osi pionowej, z częstotliwością 900 obr/min. Jeśli walce połączą się tak, że dalej będą obracać się wokół tej samej osi pionowej, to jaka będzie ich częstotliwość obrotów?

90. Chłopiec stoi na środku platformy, która obraca się bez tarcia, wykonując 1,0 obr/s. Chłopiec trzyma ciężarki tak daleko od swojego ciała, jak to jest możliwe. W tym położeniu całkowity moment bezwładności chłopca, platformy i ciężarków wynosi $5{,}0\,\text{kg} \cdot \text{m}^2$. Chłopiec ściąga ciężarki w pobliże swojego ciała, tym samym zmniejszając całkowity moment bezwładności do $1{,}5\,\text{kg} \cdot \text{m}^2$.
(a) Jaka jest końcowa prędkość kątowa platformy?
(b) O ile zwiększyła się energia kinetyczna ruchu obrotowego układu?

91. Ośmioro dzieci, każde o masie 40 kg, wspina się na małą karuzelę. Ustawiają się równomiernie wzdłuż zewnętrznej krawędzi, trzymając się za ręce. Karuzela ma promień 4,0 m oraz moment bezwładności równy $1\,000{,}0\,\text{kg} \cdot \text{m}^2$. Gdy karuzeli nadano częstotliwość 6,0 obr/min, dzieci zaczęły iść do środka karuzeli i zatrzymały się, gdy były w odległości 0,75 m od osi obrotu. Jaka jest nowa częstotliwość obrotów karuzeli? Załóżmy, że moment sił tarcia w układzie jest znikomy.

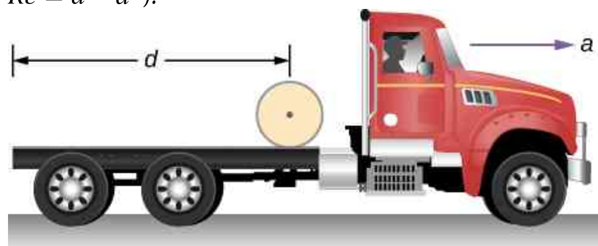
92. Cienki metrowy kij o masie 150 g obraca się wokół osi prostopadłej do osi kija z częstotliwością 240 obr/min. Ile wynosi moment pędu kija, jeżeli oś obrotu przechodzi przez:
(a) środek kija?
(b) jeden z końców kija?

93. Satelita w kształcie kuli masie 20000 kg i promieniu 5,0 m wiruje wokół osi przechodzącej przez jego środek masy. Jego częstotliwość wynosi 8,0 obr/s. W pewnej chwili w płaszczyźnie obrotu od środka satelity zostaną wysunięte dwie anteny. Każda antena może być przybliżona przez pręt o masie 200,0 kg i długości 7,0 m. Jaka jest nowa wartość częstotliwości obrotów (szybkość obrotowa) satelity?

94. Bąk ma moment bezwładności $3{,}2 \cdot 10^{-4}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2$ i odległość 4,0 cm od środka masy do punktu podparcia. Jeśli bąk obraca się z częstotliwością 20,0 obr/s i dokonuje precesji, to ile obrotów podczas niej wykona w czasie 10,0 s?

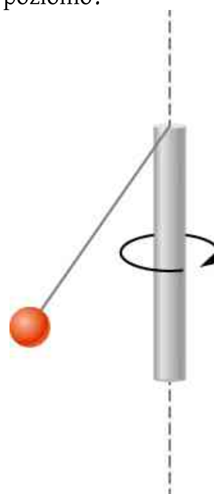
ZADANIA TRUDNIEJSZE

95. Samochód ciężarowy przedstawiony poniżej znajduje się początkowo w stanie spoczynku. Na jego przyczepie znajduje się cylindryczna rola (bela) papieru. Jeżeli samochód zacznie poruszać się do przodu ze stałym przyspieszeniem a, to jaką odległość s przebędzie on od momentu ruszenia z miejsca, do chwili, gdy rola papieru stoczy się z tyłu samochodu? (Wskazówka: Jeśli względem ziemi rola papieru przyspiesza do przodu z przyspieszeniem a', to względem samochodu przyspiesza ona do tyłu z przyspieszeniem $a - a'$. Również $R\varepsilon = a - a'$).



96. Kula do gry w kręgle o promieniu 8,5 cm została rzucona i porusza się wzdłuż toru z prędkością 9,0 m/s. Z punktu widzenia obserwatora kierunek rzutu jest w lewo, tak że kula, podczas ruchu, w wyniku tarcia o podłogę, zaczyna obracać się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Współczynnik tarcia kinetycznego na pasie wynosi 0,3. (a) Jaki jest czas potrzebny do tego, aby kula osiągnęła punkt, w którym przestanie się ślizgać? Jaka jest odległość d do tego punktu?

97. Mała kulka o masie 0,50 kg jest przyczepiona za pomocą nieważkiego sznurka do pionowego pręta, który obraca się w sposób pokazany poniżej. Gdy pręt ma prędkość kątową 6,0 rad/s, sznurek tworzy kąt $30°$ w stosunku do pionu.
(a) Jeżeli prędkość kątowa pręta zostanie zwiększona do 10,0 rad/s, to jaki jest nowy kąt między sznurkiem a pionem?
(b) Oblicz początkowy i końcowy moment bezwładności piłki.
(c) Czy obrót pręta może być tak szybki, żeby sznurek z kulką ustawił się poziomo?



98. Lecący poziomo owad z prędkością 1,0 m/s zderza się z końcem jednorodnego, wiszącego pionowo kijka. Po zderzeniu kijek wychyla się, przy czym maksymalny kąt wychylenia od pionu wynosi $5{,}0°$. Oblicz długość kijka wiedząc, że masa kija jest 10 razy większa niż owada.

12 | RÓWNOWAGA STATYCZNA I SPRĘŻYSTOŚĆ



Rysunek 12.1 Dwóch szczudlarzy w pozycji stojącej. Wszystkie siły działające na nich się równoważą i nie zmieniają ich ruchu postępowego. Ponadto wszystkie momenty sił działające na każdego z nich się równoważą, a zatem żaden nie zmienia swojego ruchu obrotowego. Rezultatem jest równowaga statyczna. (Źródło: modyfikacja pracy Stuarta Redlera)

Treść rozdziału

Wstęp

Z wcześniejszych rozdziałów dowiedzieliśmy się o siłach i prawach Newtona dla ruchu postępowego. Następnie poznałeś moment siły i ruch obrotowy ciała wokół stałej osi obrotu. Dowiedzieliśmy się również, że równowaga statyczna oznacza brak ruchu, a równowaga dynamiczna oznacza ruch bez przyspieszenia.

W tym rozdziale połączymy warunki równowagi statycznej ruchu postępowego i równowagi statycznej ruchu obrotowego, aby opisać sytuacje typowe dla każdego rodzaju konstrukcji technicznych. Jaki typ liny będzie podtrzymywał most wiszący? Na jakim rodzaju fundamentu będzie się opierał biurowiec? Czy dana proteza ręki będzie działać prawidłowo? Oto przykładowe pytania, na które współcześni inżynierowie muszą umieć odpowiedzieć.

Właściwości sprężyste materiałów są szczególnie ważne w zastosowaniach technicznych, także w bioinżynierii. Na przykład materiały, które ulegają rozciągnięciu lub ściskaniu, a następnie powracają do pierwotnego kształtu lub położenia, są dobrym tworzywem do produkcji amortyzatorów. W tym rozdziale dowiemy się o niektórych zastosowaniach, łączących równowagę ze sprężystością przy konstruowaniu rzeczywistych układów mechanicznych.

12.1 | Warunki równowagi statycznej

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- określać fizyczne warunki równowagi statycznej;
- rysować rozkład sił i momentów sił działających na ciało sztywne;
- rozumieć, w jaki sposób warunki równowagi pozwalają rozwiązywać problemy statyki.

Mówimy, że ciało sztywne jest w **równowadze** (ang. **equilibrium**), kiedy zarówno jego liniowe jak i kątowe przyspieszenie wynoszą zero względem inercjalnego układu odniesienia. To oznacza, że ciało w równowadze może się poruszać, ale tylko pod warunkiem, że jego prędkość liniowa i prędkość kątowa są stałe. Mówimy, że ciało sztywne jest w **równowadze statycznej** (ang. **static equilibrium**) kiedy jest w spoczynku w naszym wybranym układzie odniesienia. Zauważmy, że rozróżnienie stanu spoczynku i stanu ruchu jednostajnego jest sztuczne – to znaczy, że obiekt może spoczywać w naszym wybranym układzie odniesienia, ale obserwatorowi, poruszającemu się ze stałą prędkością w stosunku do naszego układu, ten sam przedmiot wydaje się znajdować w ruchu jednostajnym. Ponieważ ruch jest względny, to co pozostaje w równowadze statycznej dla nas jest w równowadze dynamicznej dla obserwatora w ruchu (i na odwrót). Ponieważ prawa fizyki są identyczne dla wszystkich inercjalnych układów odniesienia, to w takim układzie nie ma rozróżnienia równowagi statycznej i równowagi dynamicznej.

Zgodnie z drugim prawem dynamiki Newtona, liniowe przyspieszenie ciała sztywnego spowodowane jest działaniem niezrównoważonej siły na to ciało:

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}_{\text{ŚM}} \tag{12.1}$$

W powyższym zapisie sumowanie odbywa się po wszystkich siłach zewnętrznych działających na ciało, m to masa ciała, a $\vec{a}_{\text{ŚM}}$ to liniowe przyspieszenie jego środka masy ŚM (pojęcie, o którym mówiliśmy w rozdziale Pęd i zderzenia). W równowadze, przyspieszenie liniowe wynosi zero. Jeśli przyjmiemy, że przyspieszenie jest równe zero w Równaniu 12.1, otrzymamy następujące równanie:

Warunek równowagi sił

Pierwszy warunek równowagi (ang. **first equilibrium condition**) statycznej ciała sztywnego wyraża równowagę w ruchu postępowym:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}. \tag{12.2}$$

Warunek równowagi określony w Równaniem 12.2, jest warunkiem równowagi sił, który napotkaliśmy omawiając zastosowanie praw Newtona.

Równanie wektorowe (Równanie 12.2) jest równoważne następującym trzem równaniom skalarnym dla składowych siły wypadkowej:

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i F_{iy} = 0, \quad \sum_i F_{iz} = 0. \tag{12.3}$$

Analogicznie do Równanie 12.1, możemy stwierdzić, że przyspieszenie kątowe ciała sztywnego $\vec{\varepsilon}$ wokół ustalonej osi obrotu zostaje spowodowane działaniem wypadkowego momentu sił na to ciało:

$$\sum_i \vec{M}_i = I\vec{\varepsilon}. \tag{12.4}$$

Tutaj I jest momentem bezwładności ciała w ruchu obrotowym względem wybranej osi, a sumowanie przebiega po

wszystkich momentach $\vec{M}_i$ sił zewnętrznych z Równania 12.2. W równowadze przyspieszenie kątowe wynosi zero. Przyjąwszy, że prawa strona Równania 12.4 wynosi zero, otrzymamy **warunek równowagi momentów sił** (ang. **second equilibrium condition**):

Warunek równowagi momentów sił

Drugi warunek równowagi statycznej ciała sztywnego wyraża równowagę w ruchu obrotowym:

$$\sum_i \vec{M}_i = \vec{0}. \tag{12.5}$$

Warunek równowagi określony Równaniem 12.5 jest warunkiem równowagi momentów sił, który pojawił się podczas omawiania dynamiki obrotowej. Warto zauważyć, że powyższe równanie równowagi obowiązuje ogólnie dla równowagi obrotowej dla dowolnej osi obrotu (ustalonej bądź nie). Ponownie, równanie wektorowe (Równanie 12.5) jest równoważne trzem równaniom skalarnym dla składowych wypadkowego momentu sił:

$$\sum_i M_{ix} = 0, \quad \sum_i M_{iy} = 0, \quad \sum_i M_{iz} = 0. \tag{12.6}$$

Drugi warunek równowagi oznacza, że w równowadze nie ma wypadkowego zewnętrznego momentu sił, powodującego obrót wokół dowolnej osi.

Oba warunki równowagi są określone w konkretnym układzie odniesienia. Jednak drugi dotyczy momentu siły, który jest zdefiniowany jako iloczyn wektorowy $\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$, gdzie $\vec{r}_i$ to promień wodzący od osi obrotu do punktu, gdzie przyłożona została siła. W związku z tym moment siły zależy od położenia osi obrotu w układzie odniesienia. Jednak, gdy warunek równowagi momentów sił i warunek równowagi sił zachodzą jednocześnie w jednym układzie odniesienia, wtedy zachodzą również w innych inercjalnych układach odniesienia, zatem moment sił względem danej osi obrotu pozostaje zerowy. Wyjaśnienie tego jest dość proste.

Załóżmy, że wektor $\vec{R}$ określa położenie nowego inercjalnego układu odniesienia S' w starym inercjalnym układzie odniesienia S. Z rozważań o ruchu względnym, wiemy, że w nowym układzie odniesienia S', promień wodzący $\vec{r}_i$ do punktu, przyłożenia siły $\vec{F}_i$ jest związany z $\vec{r}_i$ równaniem:

$$\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{R}.$$

Teraz podsumujmy wszystkie momenty sił zewnętrznych $\vec{M}'_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ w nowym układzie odniesienia S':

$$\sum_i \vec{M}'_i = \sum_i \vec{r}' \times \vec{F}_i = \sum_i \left(\vec{r}_i - \vec{R}\right) \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i - \sum_i \vec{R} \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{M}_i - \vec{R} \times \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}.$$

Na ostatnim etapie, skorzystaliśmy z faktu, że w równowadze w starym układzie odniesienia S, pierwszy wyraz znika ze względu na Równania 12.5, a drugi wyraz znika z powodu Równania 12.2. Widzimy zatem, że wypadkowy moment sił w dowolnym inercjalnym układzie odniesienia S′ wynosi zero, pod warunkiem, że oba warunki równowagi są spełnione w inercjalnym układzie odniesienia S.

Praktycznym skutkiem jest to, że przy stosowaniu warunków równowagi ciała sztywnego możemy swobodnie wybrać położenie osi obrotu i dowolny punkt jako początek układu odniesienia. Nasz wybór układu odniesienia jest podyktowany specyfiką problemu fizycznego, który rozwiązujemy. W jednym układzie odniesienia, matematyczna postać warunków równowagi może być dość skomplikowana, podczas gdy w innym te same warunki mogą mieć prostszą postać matematyczną, która jest łatwa do rozwiązania.

W najbardziej ogólnym przypadku, warunki równowagi wyrażone są za pomocą sześciu równań skalarnych (Równanie 12.3 oraz Równanie 12.6). Dla zagadnień równowagi z rotacją wokół ustalonej osi, które rozważamy w tym rozdziale, możemy zmniejszyć liczbę równań do trzech. Standardową procedurą jest przyjęcie takiego układu odniesienia, w którym oś z jest osią obrotu. Przy takim wyborze osi wypadkowy moment sił ma tylko składową z. Wszystkie siły, o niezerowych momentach, leżą w płaszczyźnie xy, a zatem wkłady w wypadkowy moment sił pochodzą tylko ze składowych x i y sił zewnętrznych. Tak więc, w przypadku zagadnień dotyczących równowagi, w których oś obrotu jest prostopadła do płaszczyzny xy, mamy trzy następujące warunki równowagi sił i momentów sił:

$$F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{Nx} = 0 \tag{12.7}$$

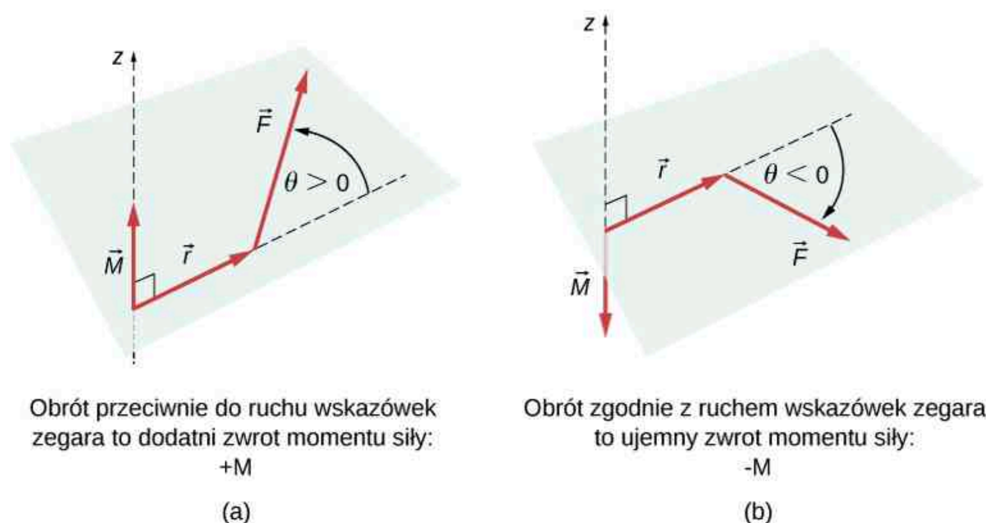
$$F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{Ny} = 0 \tag{12.8}$$

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_N = 0 \tag{12.9}$$

gdzie sumowanie przebiega po wszystkich N zewnętrznych siłach działających na ciało i wszystkich momentach sił. W Równaniu 12.9, uprościliśmy notację, opuszczając indeks dolny z, ale rozumiemy tutaj, że sumowanie przebiega po wszystkich wkładach wzdłuż osi z, która jest osią obrotu. W Równaniu 12.9 składowa z momentu sił $\vec{M}_i$, pochodząca od siły $\vec{F}_i$ to:

$$M_i = r_i F_i \sin\theta, \tag{12.10}$$

gdzie r_i jest długością ramienia siły, a F_i wartością siły (jak w rozdziale Obroty wokół stałej osi). Kąt θ jest kątem między wektorami $\vec{r}_i$ oraz $\vec{F}_i$, mierzonym od wektora $\vec{r}_i$ do wektora $\vec{F}_i$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (Rysunek 12.2). Przy użyciu Równania 12.10, często obliczamy wartość momentu siły i przypisujemy mu zwrot dodatni (+) lub ujemny (-), w zależności od kierunku obrotów wywołanego tym momentem siły. W Równaniu 12.9 wypadkowy moment sił jest sumą wyrazów, z których każdy jest obliczany przy użyciu Równania 12.10 i każdy musi mieć odpowiedni zwrot (znak + lub -). Podobnie w Równaniu 12.7, możemy przypisać znak + składowym sił w kierunku dodatnich x oraz znak - składowym w kierunku ujemnych x. Ta sama reguła musi być konsekwentnie przestrzegana w Równaniu 12.8, przy obliczaniu składowych siły wzdłuż osi y.



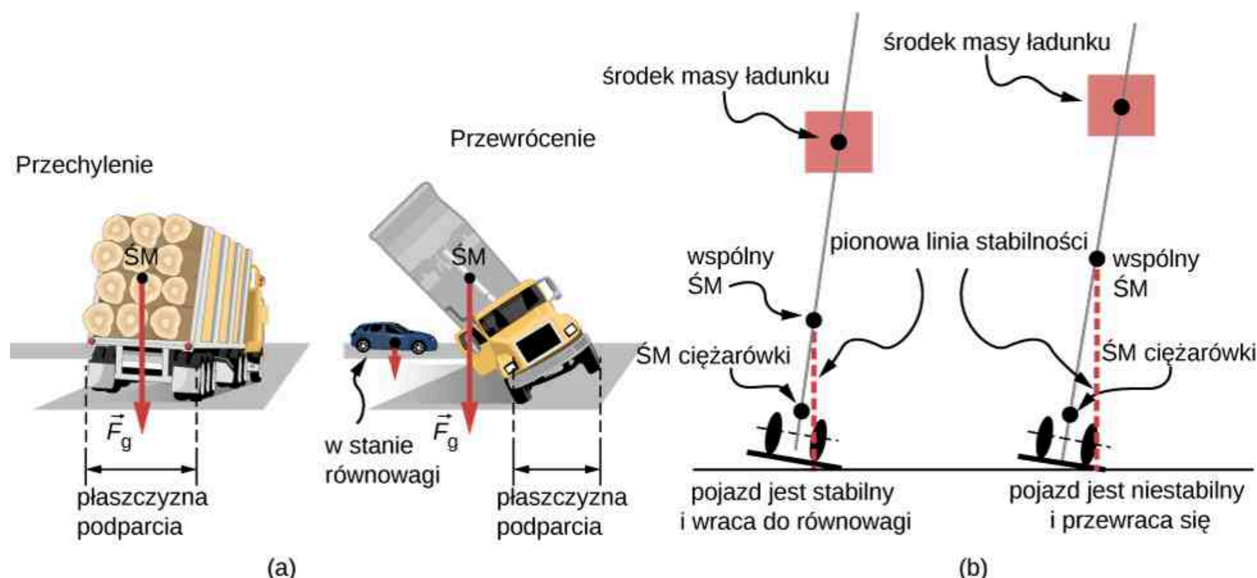
Rysunek 12.2 Moment siły: (a) Gdy moment siły powoduje obrót wokół osi obrotu w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, jego zwrot jest dodatni, co oznacza, że wektor momentu sił jest równoległy do osi obrotu. (b) Gdy moment siły powoduje obrót wokół osi w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, jego zwrot jest ujemny, co oznacza, że wektor momentu siły jest przeciwny do osi obrotu.

Obejrzyj demonstrację (https://openstaxcollege.org/l/21rigsquare) , aby zobaczyć dwie siły działające na sztywny kwadrat w dwóch wymiarach. Cały czas warunki równowagi statycznej określone przez równania od Równania 12.7 do Równania 12.9 są spełnione. Można zmieniać wielkości sił oraz ich ramiona i obserwować wpływ, jaki mają te zmiany na kwadrat.

W wielu sytuacjach równowagi jedną z sił działających na ciało jest jego ciężar (siła ciężkości). Na rysunku rozkładu sił wektor ciężkości jest przyłożony do **środka ciężkości ciała** (ang. **center of gravity**). Dla celów praktycznych przyjmuje się że, środek ciężkości jest identyczny ze środkiem masy, jak to zostało opisane w rozdziale Pęd i Zderzenia. Tylko w sytuacjach, gdy ciało ma duże wymiary, tak że pole grawitacyjne jest niejednorodne w całej jego objętości, środek ciężkości i środek masy znajdują się w różnych punktach. W praktyce nawet obiekty tak duże jak budynki lub statki wycieczkowe, znajdują się w jednorodnym polu grawitacyjnym na powierzchni Ziemi, gdzie przyspieszenie spowodowane grawitacją ma stałą wielkość $g = 9{,}81 \text{ m/s}^2$. W takich sytuacjach, środek ciężkości jest identyczny ze środkiem masy. Dlatego w tym rozdziale stosujemy pojęcie "środek masy" (ŚM) w znaczeniu punktu, w którym przyłożony jest wektor ciężkości. Przypomnijmy sobie, że ŚM ma specjalne znaczenie fizyczne – gdy do ciała przyłożona jest zewnętrzna siła, wówczas jako całość podlega ono ruchowi postępowemu i ta siła nie powoduje rotacji ciała.

Gdy ŚM znajduje się poza osią obrotu, to wypadkowy moment siły ciężkości działa na obiekt. Moment siły ciężko-

ści jest to moment spowodowany przez ciężar. Może on obracać przedmiot, jeśli ten nie ma **punktu podparcia** (ang. **pivot point**), aby go zrównoważyć. Wielkość **momentu siły grawitacji** (ang. **gravitational torque**) zależy od tego, jak daleko od osi obrotu znajduje się ŚM. Na przykład, gdy przewraca się samochód ciężarowy (Rysunek 12.3), oś obrotu znajduje się na linii, w której opony stykają się z powierzchnią drogi. Jeśli ŚM znajduje się wysoko nad powierzchnią drogi, to moment siły ciężkości może być wystarczająco duży, aby doprowadzić do przewrócenia pojazdu. Samochody osobowe z nisko położonym ŚM (blisko powierzchni drogi) są bardziej odporne na przewrócenie niż ciężarówki.



Rysunek 12.3 Rozkład masy wpływa na położenie środka masy (ŚM), do którego przykładany jest wektor siły ciężkości $\vec{F}_g$. Jeśli środek ciężkości znajduje się nad powierzchnią, pod spodem pojazdu, to ciężarówka powraca do swojego początkowego położenia po przechyleniu (patrz: (b), po lewej). Jeśli jednak środek ciężkości leży poza tym obszarem, wówczas samochód się wywraca (patrz: (b), po prawej). Oba pojazdy w (b) są poza stanem równowagi. Zauważmy, że samochód osobowy w (a) jest w stanie równowagi – niskie położenie środka ciężkości sprawia, że trudno jest go przewrócić.

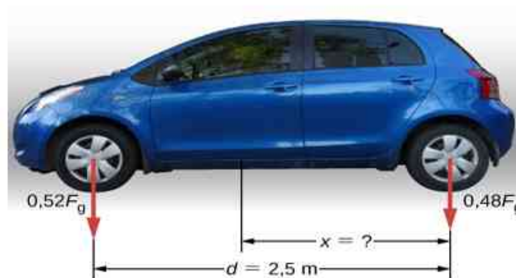


Jeśli leżące na stole pudełko przechylimy tak, aby jedna krawędź pozostała w kontakcie ze stołem,wtedy staje się ona osią obrotu. Dopóki środek ciężkości pudełka pozostaje nad podstawą pudełka, dopóty moment siły ciężkości obraca pudełko w kierunku pierwotnego położenia – stabilnej równowagi. Kiedy środek ciężkości przesuwa się na zewnątrz podstawy, moment siły ciężkości obraca pudełko w przeciwnym kierunku i przewraca się ono. Obejrzyj demonstrację (https://openstaxcollege.org/l/21unstable) , aby eksperymentować ze stabilnymi i niestabilnymi pozycjami pudełka.

Przykład 12.1

Środek ciężkości samochodu

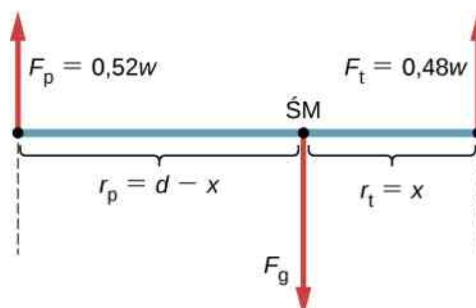
Na płaskim podłożu samochód osobowy o rozstawie osi 2,5 m wywiera na przedniej osi nacisk wynoszący 52% ciężaru pojazdu, tak jak pokazano na Rysunku 12.4. Gdzie jest położony ŚM tego samochodu w stosunku do tylnej osi?



Rysunek 12.4 Rozkład ciężaru między osiami samochodu. Gdzie znajduje się środek ciężkości?

Strategia rozwiązania

Nie znamy ciężaru F_g pojazdu. Wiemy tylko, że gdy samochód stoi na płaskiej powierzchni to $0{,}52\ F_g$ naciska na powierzchnię w punktach styku przednich kół, a $0{,}48\ F_g$ naciska na podłoże w punktach styku tylnych kół. Punkty te są oddalone od siebie o odległość $d = 2{,}5\ \text{m}.$ W tych punktach samochód doświadcza normalnych sił reakcji o wartościach $F_p\ = 0{,}52\ F_g$ i $F_t\ = 0{,}48\ F_g$ odpowiednio na przedniej i tylnej osi. Wiemy również, że samochód jest przykładem ciała sztywnego w stanie równowagi, którego cały ciężar F_g działa na jego ŚM znajdujący się gdzieś pomiędzy punktami, gdzie działają normalne siły reakcji w odległości x od punktu działaniaF_t. Naszym zadaniem jest znalezienie x. Określiliśmy trzy siły działające na ciało (samochód), możemy więc narysować rozkład sił działających na rozciągłe ciało sztywne, jak pokazano na Rysunku 12.5.



Rysunek 12.5 Rozkład sił działających na samochód z zaznaczonymi wektorami sił działających na pojazd i ich odległościami do środka masy (ŚM). Kiedy ŚM wybiera się jako położenie osi obrotu, te odległości są ramionami normalnych sił reakcji. Zwróćmy uwagę, że wartości wektorów i ramion sił nie muszą być narysowane w skali, ale wszystkie istotne wielkości muszą być wyraźnie oznaczone.

Jesteśmy gotowi zapisać warunki równowagi dla samochodu zgodnie z równaniami od Równania 12.7 do Równania 12.9, ale najpierw musimy wybrać układ odniesienia. Załóżmy, że wzdłuż osi samochodu wybraliśmy oś x, oś pionową jako y oraz oś z prostopadłą do płaszczyzny xy. Przy takim wyborze potrzebujemy zapisać tylko Równanie 12.8 i Równanie 12.9, ponieważ wszystkie składowe x są tożsamościowo równe zero. Teraz musimy zdecydować o położeniu punktu obrotu. Możemy wybrać dowolny punkt, jako położenie osi obrotu (osi z). Załóżmy, że umieszczamy oś obrotu w ŚM, jak zaznaczono na rysunku z rozkładem sił działających na samochód. W tym momencie jesteśmy gotowi, aby zapisać warunki równowagi dla samochodu.

Rozwiązanie

Każdy warunek równowagi zawiera tylko trzy wyrazy, ponieważ istnieją $N = 3$ siły działające na samochód. Pierwszy warunek równowagi – dla sił (Równanie 12.8) - ma postać:

$$+F_p - F_g + F_t = 0. \tag{12.11}$$

Ten warunek jest łatwo spełnić, ponieważ gdy wstawimy dane, to Równanie 12.11 przyjmie postać $+0{,}52F_g - F_g + 0{,}48F_g - 0$. Drugi warunek równowagi – dla momentów sił (Równanie 12.9) ma postać:

$$M_p + M_g + M_t = 0, \tag{12.12}$$

gdzie M_p jest momentem siły F_p , M_g - momentem siły ciężkości F_g a M_t - momentem siły F_t. Gdy oś obrotu przechodzi przez ŚM, moment siły ciężkości tożsamościowo wynosi zero, ponieważ ramię siły ciężkości względem osi, która przechodzi przez ŚM, wynosi zero. Kierunki działania obu normalnych sił reakcji są prostopadłe do ich ramion sił, więc w Równaniu 12.10, mamy $|\sin\theta| = 1$ dla obu sił. Z rysunku przedstawiającego rozkład sił dowiadujemy się, że moment siły M_p powoduje obrót w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara wokół osi obrotu przechodzącej przez środek masy, więc zwrot momentu jest ujemny, natomiast moment siły M_t powoduje obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, dlatego jego zwrot jest dodatni. Dzięki tym informacjom, zapisujemy warunek równowagi dla momentów sił jako:

$$-r_pF_p + r_tF_t = 0. \tag{12.13}$$

Z rysunku rozkładu sił uzyskujemy ich wartości $F_t = 0{,}48F_g$ i $F_p = 0{,}52F_g$ oraz odpowiadające im ramiona sił $r_t = x$ i $r_p = d - x$. Możemy teraz zapisać drugi warunek równowagi z Równania 12.13, jako jawnie zależny od nieznanej odległości x:

$$-0{,}52\,(d - x)\,F_g + 0{,}48xF_g = 0. \tag{12.14}$$

Tutaj siła ciężkości F_g ulega redukcji i możemy rozwiązać równanie dla nieznanego położenia środka masy x. Odpowiedź to $x = 0{,}52d = 0{,}52 \cdot 2{,}5\text{ m} = 1{,}3\text{ m}$.

Rozwiązanie

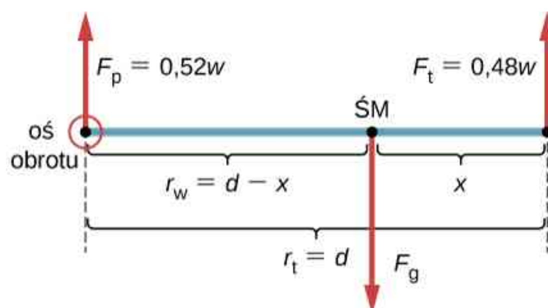
Wybór osi obrotu na przedniej osi samochodu nie zmienia rezultatu. Rozkład sił dla takiego wyboru osi obrotu przedstawiony jest na Rysunku 12.6. Dla takiego wyboru osi obrotu, warunek równowagi dla momentów sił to:

$$-r_gF_g + r_tF_t = 0. \tag{12.15}$$

Po podstawieniu wielkości zaznaczonych na rysunku z rozkładem sił otrzymujemy:

$$-\,(d - x)\,F_g + 0{,}48dF_g = 0. \tag{12.16}$$

Odpowiedź uzyskana w wyniku rozwiązania Równania 12.13 to ponownie $x = 0{,}52d = 1{,}3$ m.



Rysunek 12.6 Równoważny schemat rozkładu sił dla samochodu z zaznaczoną inną niż na Rysunku 12.5 osią obrotu.

Znaczenie

Ten przykład pokazuje, że podczas rozwiązywania problemów równowagi statycznej, mamy swobodę wyboru położenia osi obrotu. Dla różnych osi obrotu mamy różne zestawy warunków równowagi, które trzeba rozwiązać. Jednak wszystkie wybory prowadzą do tego samego rozwiązania.



12.1 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Rozwiąż Przykład 12.1 dla tylnej osi pojazdu.



12.2 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Wyjaśnij, która z poniższych sytuacji spełnia oba warunki równowagi: (a) piłka tenisowa, która nie kręci się podczas lotu w powietrzu; (b) pelikan, który leci w powietrzu ze stałą prędkością na jednej wysokości; lub (c) wał korbowy w silniku zaparkowanego samochodu.

Szczególny przypadek równowagi statycznej występuje, gdy wszystkie siły zewnętrzne działają na obiekt w osi obrotu lub wzdłuż niej, albo gdy można pominąć wymiary obiektu. W takiej szczególnej sytuacji przedmiot może być traktowany jak masa punktowa (punkt materialny) i nie musimy uwzględniać drugiego warunku równowagi dla momentów sił (Równanie 12.9), ponieważ wszystkie momenty są tożsamościowo równe zero, a pierwszy warunek równowagi (dla sił) jest jedynym do spełnienia. Schemat rozkładu sił oraz strategia rozwiązywania zadań w tym szczególnym przypadku zostały przedstawione w rozdziałach Prawa dynamiki Newtona i Zastosowanie praw dynamiki Newtona. Typowy przykład równowagi obejmujący tylko warunek równowagi dla sił omówimy w następnym przykładzie.

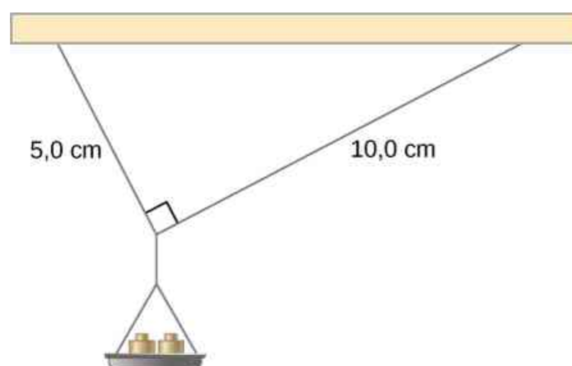


Obejrzyj demonstrację (https://openstaxcollege.org/l/21pulleyknot) , aby zobaczyć trzy ciężarki, które są połączone nićmi i krążkami (bloczkami ruchomymi). Można eksperymentować z masami ciężarków, aby zobaczyć, jak wpływa to na położenie równowagi układu i jednocześnie rozkład wektorów, przedstawiający warunek równowagi dla sił w praktyce.

Przykład 12.2

Naprężenie zrywające nić

Mała szalka o masie 42 g podtrzymywana jest przez dwie nici, jak pokazano na Rysunku 12.7. Maksymalne naprężenia, jakie wytrzyma nić to 2,8 N. Na szalkę stopniowo dodajemy masę, do chwili aż jedna z nici się zerwie. Która będzie to nić? Ile masy musimy dodać, aby doszło do zerwania nici?

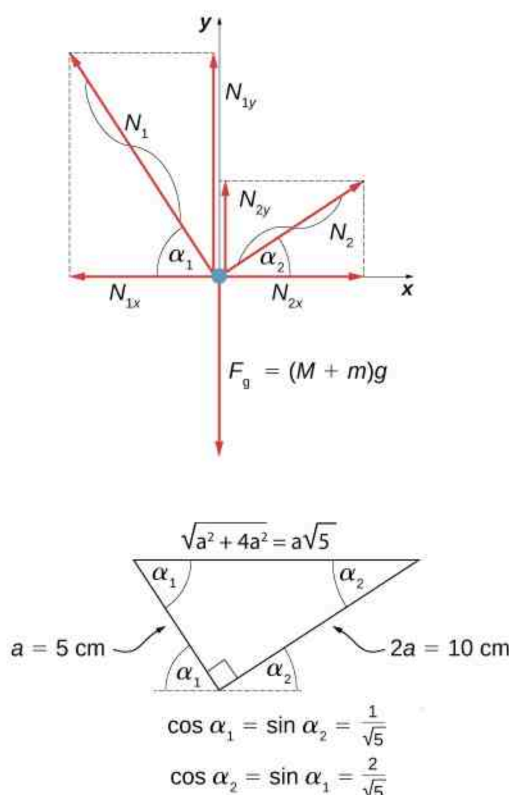


Rysunek 12.7 Masa jest dodawana stopniowo na szalkę, aż do zerwania jednej z nici.

Strategia rozwiązania

Ten układ mechaniczny składający się z nici, mas i szalki pozostaje w równowadze statycznej. W szczególności węzeł, który łączy nici z szalką, jest w równowadze statycznej. Węzeł można traktować jako punkt,

dlatego potrzebujemy tylko warunku równowagi dla sił. Trzy siły działające na węzeł to: naprężenie $\vec{N}_1$ nici o długości 5 cm, naprężenie $\vec{N}_2$ nici 10 cm oraz ciężar $\vec{F}_g$ szalki z nałożoną masą. Możemy przyjąć układ współrzędnych prostokątnych z osią y skierowaną przeciwnie do kierunku siły ciężkości i narysować rozkład sił na węźle (patrz: Rysunek 12.8). Aby znaleźć składowe naprężeń, musimy określić kąty α_1 i α_2, jakie nici tworzą z kierunkiem poziomym czyli osią x. Jak widać na Rysunku 12.7, tworzą one dwa ramiona trójkąta prostokątnego. Możemy użyć twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta, pokazanego na Rysunku 12.8, oraz wyznaczyć sinus i cosinus kątów α_1 i α_2. Wtedy rozłożymy naprężenia na ich składowe prostokątne i podstawimy do warunku równowagi dla sił (Równanie 12.7 i Równanie 12.8), aby znaleźć naprężenia nici. Nić z większym naprężeniem zerwie się pierwsza.



Rysunek 12.8 Rozkład sił działających na węzeł w Przykładzie 12.2.

Rozwiązanie

Ciężar F_g napręża węzeł masą szalki M i masą m dołożoną na szalkę czyli $F_g = (M + m)\,g$. Przy pomocy rozkładu sił z Rysunku 12.8, możemy ustalić warunki równowagi węzła:

W kierunku x: $-N_{1x} + N_{2x} = 0$,

W kierunku y: $+N_{1y} + N_{2y} - F_g = 0$.

Wartości składowych w tych równaniach wynoszą:

$N_{1x} = N_1 \cos\alpha_1 = \frac{N_1}{\sqrt{5}}$, $N_{1y} = N_1 \sin\alpha_1 = \frac{2N_1}{\sqrt{5}}$,

$N_{2x} = N_2 \cos\alpha_2 = \frac{2N_2}{\sqrt{5}}$, $N_{2y} = N_2 \cos\alpha_2 = \frac{N_2}{\sqrt{5}}$.

Podstawiamy te składowe do warunków równowagi i upraszczamy. Otrzymujemy wtedy dwa równania równowagi dla naprężeń:

W kierunku x: $N_1 = 2N_2$,

W kierunku y: $\frac{2N_1}{\sqrt{5}} + \frac{N_2}{\sqrt{5}} = (M + m)\,g$.

Równanie równowagi dla kierunku x mówi nam, że naprężenie N_1 nici 5 cm jest 2 razy większe od naprężenia N_2 nici 10 cm. Dlatego zerwie się krótsza nić. Używając pierwszego równania do wyeliminowania N_2 z drugiego równania, otrzymujemy zależność między masą m na szalce a naprężeniem N_1 w krótszej nici:

$$\frac{2{,}5N_1}{\sqrt{5}} = (M + m)\,g.$$

Nić zrywa się, gdy naprężenie osiągnie krytyczną wartość $N_1 = 2{,}8\ \text{N}$. Powyższe równanie można rozwiązać dla masy krytycznej m, która zrywa nić:

$$m = \frac{2{,}5}{\sqrt{5}} \cdot \frac{N_1}{g} - M = \frac{2{,}5}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2{,}8\ \text{N}}{9{,}80\ \text{m/s}^2} - 0{,}042\ \text{kg} = 0{,}277\ \text{kg} = 277\ \text{g}.$$

Znaczenie

Załóżmy, że układ mechaniczny rozważany w tym przykładzie jest przymocowany do sufitu windy jadącej w górę. Tak długo, jak winda porusza ze stałą prędkością, wynik pozostaje taki sam, bo ciężar F_g się nie zmienia. Jeżeli winda porusza z przyspieszeniem, wówczas masa krytyczna jest mniejsza, bo masa $M + m$ staje się większa o pozorny ciężar wywołany przyspieszeniem windy. Nadal we wszystkich przypadkach krótsza nić przerwie się jako pierwsza.

12.2 | Przykłady równowagi statycznej

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- analizować sytuacje równowagi statycznej;
- wykonywać rozkład sił dla rozciągłego obiektu w równowadze statycznej;
- ustalać i rozwiązywać warunki równowagi statycznej dla obiektów w równowadze, w różnych sytuacjach fizycznych.

Wszystkie przykłady w tym rozdziale są problemami dwuwymiarowymi (na płaszczyźnie). W związku z tym stosujemy warunki równowagi dla składowych w formie równań od Równania 12.7 do Równania 12.9. Metodę rozwiązywania problemów statyki wprowadziliśmy w Przykładzie 12.1 w celu zilustrowania fizycznego znaczenia warunków równowagi. Teraz uogólniamy tę strategię na listę kroków, które należy wykonać przy rozwiązywaniu problemów równowagi statycznej dla rozciągłych ciał sztywnych. Jest to pięć praktycznych kroków.

Strategia rozwiązywania zadań: równowaga statyczna

1. Określ obiekt do analizy. W niektórych układach równowagi może być konieczne rozważenie więcej niż jednego obiektu. Określ wszystkie siły działające na obiekt. Określ pytania, na które trzeba odpowiedzieć. Określ informacje podane w danym problemie. W realnych problemach, niektóre kluczowe informacje mogą być podane w sposób pośredni, a nie wprost.
2. Wykonaj rysunek rozkładu sił działających na obiekt. (a) Wybierz układ odniesienia xy dla zagadnienia. Narysuj rozkład sił zawierający tylko te działające na obiekt. Jeśli trzeba, przedstaw siły rozłożone na składowe w wybranym układzie odniesienia. Jeśli to robisz dla każdej siły, usuń pierwotną, aby nie uwzględnić tej samej siły dwukrotnie w równaniach. Oznacz wszystkie siły – potrzebujesz tego do poprawnego obliczania sił wypadkowych w kierunkach x i y. Dla nieznanej siły kierunek musi być przypisany arbitralnie – traktuj go jako kierunek roboczy lub spodziewany kierunek. Prawidłowy kierunek zależy od znaku, który otrzymasz w ostatecznym rozwiązaniu. Znak plus $(+)$ oznacza, że kierunek roboczy jest rzeczywistym kierunkiem. Znak minus $(-)$ oznacza, że rzeczywisty kierunek jest przeciwny do zakładanego. (b) Wybierz położenie osi obrotu, w odniesieniu do której będziesz obliczać momenty działających sił. Na rysunku z rozkładem sił wskaż oś obrotu i ramiona działających sił – będą potrzebne do prawidłowego obliczenia wartości momentów sił. Przy wyborze osi obrotu należy pamiętać, że można ją umieścić w dowolnym miejscu, ale zasada przewodnia mówi, że najlepszym wyborem będzie uproszczenie jak największej liczby obliczeń wypadkowego momentu sił względem osi obrotu.
3. Ustal równania równowagi dla obiektu. (a) Wykorzystaj rysunek rozkładu sił, aby prawidłowo zapisać warunek równowagi dla składowych sił w kierunku x (Równanie 12.7). (b) Wykorzystaj rysunek rozkładu

sił, aby zapisać prawidłowo warunek równowagi dla składowych sił w kierunku y (Równanie 12.8). (c) Wykorzystaj rysunek rozkładu sił, aby prawidłowo zapisać warunek równowagi dla momentów sił względem osi obrotu (Równanie 12.9). Użyj Równania 12.10 do wyznaczenia wartości i zwrotu momentów sił.

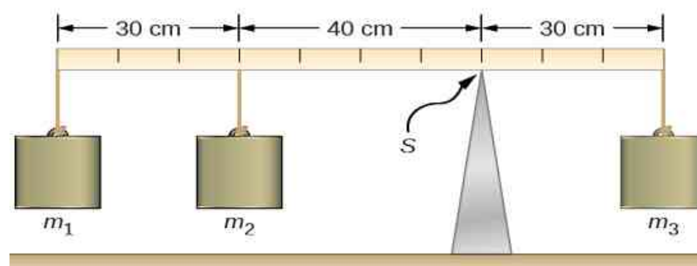
4. Uprość i rozwiąż układ równań dla równowagi w celu uzyskania nieznanych wielkości (zmiennych). W tym punkcie praca polega tylko na przekształceniach algebraicznych Należy pamiętać, że liczba równań musi być taka sama, jak liczba niewiadomych. Jeśli niewiadomych jest więcej niż równań, nie można rozwiązać problemu.
5. Oblicz wyrażenia na nieznane wielkości, które otrzymałeś w swoim rozwiązaniu. Ostateczna odpowiedź powinna mieć odpowiednią wartość liczbową i prawidłowe jednostki fizyczne. Jeśli jest inaczej, wróć do poprzednich kroków, aby wykryć źródło błędu i poprawić go. Możesz również samodzielnie sprawdzić numeryczne odpowiedzi, przesuwając oś obrotu w inne miejsce i rozwiązując problem ponownie, jak to zrobiliśmy w Przykładzie 12.1.

Zauważmy, że wykonanie rysunku rozkładu sił dla zagadnienia równowagi ciała sztywnego jest najważniejszym elementem w procesie rozwiązywania problemu. Bez prawidłowego rozkładu sił, nie będziemy w stanie napisać odpowiednich warunków równowagi. Musimy również zauważyć, że rysunek rozkładu sił dla rozciągłego ciała sztywnego, które może być poddane ruchowi obrotowemu, różni się od rysunku rozkładu sił, których doświadcza ciało będące tylko w ruchu postępowym (co omówiono w rozdziale o prawach ruchu Newtona). W ruchu postępowym ciało reprezentuje ŚM, do którego przyłożono wszystkie siły i nie występują żadne momenty sił. Nie obowiązuje to w dynamice obrotowej, gdzie ciało sztywne nie może być reprezentowane przez jeden punkt. Powodem tego jest fakt, że przy analizie ruchu obrotowego musimy określić moment siły działający na ciało, a zależy on zarówno od siły działającej, jak i od ramienia tej siły. Tutaj, rysunek rozkładu sił dla rozciągłego ciała sztywnego pomaga nam określić momenty sił zewnętrznych.

Przykład 12.3

Bilans momentu sił

Trzy masy są przymocowane do jednolitej metrowej belki, jak pokazano na Rysunku 12.9. Masa belki wynosi 150 g, a masy na lewo od punktu podparcia to $m_1 = 50$ g i $m_2 = 75$ g. Znajdź masę m_3, która równoważy układ, gdy jest przymocowana na prawym końcu belki, oraz normalną sił reakcji w punkcie podparcia S, gdy układ jest zrównoważony.



Rysunek 12.9 W warunkach równowagi sił belka pozioma jest podparta w punkcie podparcia (oznaczonym symbolem S), a masy są przymocowane po obu stronach punktu podparcia. Układ znajduje się w stanie równowagi statycznej, gdy belka się nie obraca. Jest zrównoważony, jeśli belka leży poziomo.

Strategia rozwiązania

Dla układu przedstawionego na rysunku, określamy następujące pięć sił działających na metrową belkę:

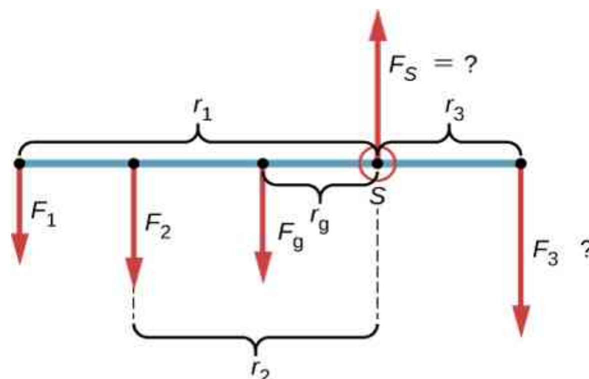
$F_1 = m_1 g$ jest ciężarem masy m_1 ;$F_2 = m_2 g$ jest ciężarem masy m_2;

$F_g = mg$ jest ciężarem całej belki; $F_3 = m_3 g$ jest ciężarem nieznanej masy m_3;

F_S jest normalną siłą reakcji w punkcie podparcia S.

Wybieramy układ odniesienia, w którym kierunek osi y jest zgodny z kierunkiem siły ciężkości, kierunek osi x jest wzdłuż belki, a oś obrotu (oś z) jest prostopadła do osi x i przechodzi przez punkt podparcia S. Innymi słowy wybieramy oś obrotu w punkcie, w którym belka dotyka podpory. Jest to naturalny wybór

osi obrotu, ponieważ ten punkt nie przemieszcza się, gdy belka się obraca. Teraz jesteśmy gotowi do przygotowania rysunku rozkładu sił dla belki. Zaznaczamy oś obrotu i przykładamy pięć wektorów sił, przyłożonych odpowiednio względem punktu podparcia, wzdłuż linii reprezentujących belkę (Rysunek 12.10). Na tym etapie możemy określić ramiona pięciu sił, wziąwszy pod uwagę informacje zawarte w problemie. W przypadku trzech mas wiszących, ich odległości od punktu podparcia zostały podane na rysunku, natomiast informację o punkcie przyłożenia ciężaru belki podano w sposób pośredni. Tutaj kluczowym słowem jest „jednolitej". Wiemy z naszych wcześniejszych rozważań, że ŚM jednolitej belki znajduje się w jej środku geometrycznym, więc przykładamy jej ciężar w połowie długości belki, tj. na znaku 50 cm.



Rysunek 12.10 Rozkład sił dla metrowej belki. Jako punkt obrotu wybrano punkt podparcia S.

Rozwiązanie

Na podstawie Rysunku 12.9 i Rysunku 12.10 zaczynamy od znalezienia ramion pięciu sił działających na belkę:

$$\begin{aligned} r_1 &= 30\,\text{cm} + 40\,\text{cm} = 70\,\text{cm} \\ r_2 &= 40\,\text{cm} \\ r_\text{g} &= 50\,\text{cm} - 30\,\text{cm} = 20\,\text{cm} \\ r_S &= 0\,\text{cm (ponieważ siła } F_S \text{ jest przyłożona na osi obrotu)} \\ r_3 &= 30\,\text{cm.} \end{aligned}$$

Teraz możemy znaleźć pięć momentów sił w odniesieniu do wybranej osi obrotu:

$$\begin{aligned} M_1 &= +r_1 F_1 \sin 90^\circ = +r_1 m_1 g && \text{(obrót przeciwny do ruchu wskazówek zegara, zwrot dodatni)} \\ M_2 &= +r_2 F_2 \sin 90^\circ = +r_2 m_2 g && \text{(obrót przeciwny do ruchu wskazówek zegara, zwrot dodatni)} \\ M_g &= +r_g F_g \sin 90^\circ = +r_g mg && \text{(moment siły ciężkości)} \\ M_S &= r_S F_S \sin\theta_S = 0 && \text{(ponieważ } r_S = 0\,\text{cm)} \\ M_3 &= -r_3 F_3 \sin 90^\circ = -r_3 m_3 g && \text{(obrót zgodny z ruchem wskazówek zegara, zwrot dodatni).} \end{aligned}$$

Warunek równowagi momentów sił dla belki to:

$$M_1 + M_2 + M_g + M_S + M_3 = 0.$$

Przy podstawianiu wartości momentów sił do tego równania możemy pominąć te dające zerowy wkład. W ten sposób warunek równowagi dla momentów sił to:

$$+r_1 m_1 g + r_2 m_2 g + r_g m_g g - r_3 m_3 g = 0. \tag{12.17}$$

Wybieramy kierunek $+y$ jako równoległy do $\vec{F}_S$ i wtedy warunek równowagi sił dla belki to:

$$-F_1 - F_2 - F_g + F_S - F_3 = 0.$$

Po podstawieniu sił otrzymujemy:

$$-m_1 g - m_2 g - mg + F_S - m_3 g = 0. \tag{12.18}$$

Rozwiązujemy te równania jednocześnie dla nieznanych wartości m_3 i F_S. W Równaniu 12.17 upraszczamy czynnik g i przekształcamy, żeby uzyskać

$$r_3 m_3 = r_1 m_1 + r_2 m_2 + r_g m.$$

Aby wyznaczyć m_3, dzielimy obustronnie przez r_3, mamy więc

$$\begin{aligned} m_3 &= \frac{r_1}{r_3} \cdot m_1 + \frac{r_2}{r_3} \cdot m_2 + \frac{r_g}{r_3} \cdot m \\ &= \frac{70}{30} \cdot 50\,\text{g} + \frac{40}{30} \cdot 75\,\text{g} + \frac{20}{30} \cdot 150\,\text{g} \\ &= 317\,\text{g}. \end{aligned} \tag{12.19}$$

Aby znaleźć normalną siłę reakcji przekształcamy Równanie 12.18 i po zamianie gramów na kilogramy otrzymujemy:

$$F_S = (m_1 + m_2 + m + m_3) \cdot g = [(50 + 75 + 150 + 317) \cdot 10^{-3}]\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 5{,}8\,\text{N}.$$

Znaczenie

Należy zauważyć, że Równanie 12.17 jest niezależne od g (przyspieszenie ziemskie). Równowagi momentów sił można zatem użyć do pomiaru masy, ponieważ wahania wartości g na powierzchni Ziemi nie wpływają na nie. Inaczej dzieje się w przypadku wagi sprężynowej, ponieważ mierzy ona siłę ciężkości.



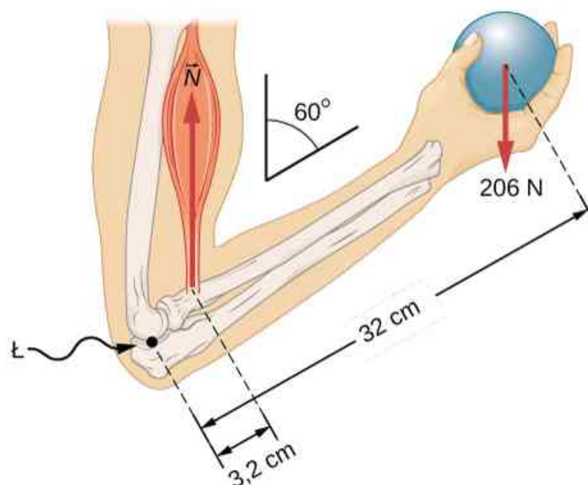
12.3 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Powtórz Przykład 12.3 użyj lewego końca belki do obliczania momentów sił; to znaczy umieść oś obrotu na jej lewym końcu.

W następnym przykładzie pokażemy, jak stosować warunek równowagi dla sił w postaci danej przez Równanie 12.7 i Równanie 12.8. Przedstawimy to rozwiązanie jako przykład znaczenia wyboru odpowiedniego układu odniesienia. Chociaż wszystkie inercjalne układy odniesienia są równoważne, a rozwiązania liczbowe uzyskane w jednym układzie są takie same jak w innych, to wybór nieodpowiedniego układu odniesienia może sprawić, że dojście do nich będzie dość długie i skomplikowane, podczas gdy przemyślany wybór układu odniesienia sprawi, że okaże się bardzo proste. Pokazujemy to w równoważnych rozwiązaniach tego samego zadania.Ten przykład ilustruje zastosowanie równowagi statycznej do biomechaniki.

Przykład 12.4

Siły w przedramieniu

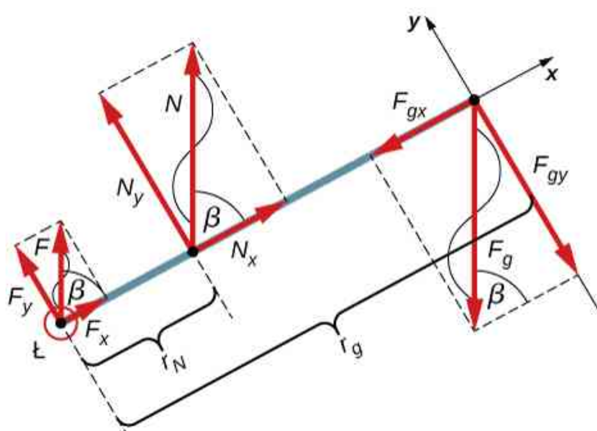
Sztangista podtrzymuje 21-kilogramowy ciężarek (równoważne 206 N) swoim przedramieniem, jak pokazano na Rysunku 12.11. Jest ono ustawione pod kątem $\beta = 60^\circ$ względem ramienia. Przedramię podtrzymuje skurcz mięśnia bicepsa, powodując moment sił wokół łokcia. Zakładając, że naprężenie w bicepsie działa wzdłuż kierunku pionowego zgodnego z kierunkiem siły ciężkości, oblicz, jakie naprężenie mięśni musi wytrzymać przedramię w przedstawionym położeniu? Jaka jest siła na stawie łokciowym? Załóżmy, że masę przedramienia można pominąć.



Rysunek 12.11 Przedramię obraca się wokół łokcia (Ł) przez skurcze mięśnia bicepsa, co powoduje naprężenie $\vec{N}$.

Strategia rozwiązania

Określamy trzy siły działające na przedramię: nieznaną siłę $\vec{F}$ na łokciu, nieznane naprężenie $\vec{N}$ w mięśniach i ciężar $\vec{F}_g$ o wartości 206 N. Możemy przyjąć układ odniesienia z osią x, wzdłuż przedramienia i osią obrotu w łokciu. Kierunek pionowy jest kierunkiem siły ciężkości, jest on taki sam jak kierunek górnej części ramienia. Oś x tworzy kąt $\beta = 60^\circ$ z pionem. Oś y jest prostopadła do osi x. Teraz rysujemy rozkład sił dla przedramienia. Najpierw osie układu, oś obrotu i trzy wektory reprezentujące trzy zidentyfikowane siły. Następnie zaznaczamy kąt β i przedstawiamy każdą siłę przez jej składowe x i y, pamiętamy o usunięciu wektorów pierwotnych sił, aby uniknąć podwójnego uwzględnienia sił. Na koniec oznaczamy siły i ich ramiona. Rozkład sił dla przedramienia pokazano na Rysunku 12.12. W tym momencie jesteśmy gotowi do ustalenia warunków równowagi przedramienia. Każda siła ma składowe x i y, dlatego mamy dwa równania dla warunku równowagi sił - jedno równanie dla każdej składowej wypadkowej siły działającej na przedramię.



Rysunek 12.12 Rozkład sił dla przedramienia. Oś obrotu jest w punkcie Ł (łokieć).

Zauważmy, że w naszym układzie odniesienia wkłady do warunku równowagi dla momentów sił pochodzą tylko z elementów składowych y sił, ponieważ składowe x sił są równoległe do ich ramion, zatem dla każdej z tych składowych mamy sin $\theta = 0$ w Równaniu 12.10. Dla składowych y mamy $\theta = \pm 90^\circ$ w równaniu

Równanie 12.10. Należy również zauważyć, że moment siły na łokciu wynosi zero, ponieważ ta siła jest przyłożona na osi obrotu. Więc wkład do wypadkowego momentu sił pochodzi tylko z momentów sił N_y i F_{gy} .

Rozwiązanie

Z rozkładu sił widać, że składowa x siły wypadkowej równanie

$$+F_x + N_x - F_{gx} = 0, \tag{12.20}$$

a składowa y siły wypadkowej spełnia równanie:

$$+F_y + N_y - F_{gy} = 0. \tag{12.21}$$

Równanie 12.20 i Równanie 12.21 są dwoma równaniami warunku równowagi sił. Następnie z rozkładu sił odczytujemy, że wypadkowy moment siły wzdłuż osi obrotu to:

$$+r_N N_y - r_g F_{gy} = 0. \tag{12.22}$$

Równanie 12.22 jest warunkiem równowagi momentów sił dla przedramienia. Rysunek rozkładu sił pokazuje, że ramiona sił to $r_N = 3{,}2 \text{ cm}$ oraz $r_g = 32 \text{ cm}.$ Korzystając z rysunku rozkładu sił, znajdujemy wartości ich składowych:

$$\begin{aligned} F_x &= F \cos\beta = F \cos 60^\circ = \tfrac{1}{2}F, \\ N_x &= N \cos\beta = N \cos 60^\circ = \tfrac{1}{2}N, \\ F_{gx} &= F_g \cos\beta = F_g \cos 60^\circ = \tfrac{1}{2}F_g, \\ F_y &= F \sin\beta = F \sin 60^\circ = \tfrac{\sqrt{3}}{2}F, \\ N_y &= N \sin\beta = N \sin 60^\circ = \tfrac{\sqrt{3}}{2}N, \\ F_{gy} &= F_g \sin\beta = F_g \sin 60^\circ = \tfrac{\sqrt{3}}{2}F_g. \end{aligned}$$

Podstawiamy te wartości do Równania 12.20, Równania 12.21 i Równania 12.22, aby otrzymać odpowiednio:

$$\begin{aligned} \frac{F}{2} + \frac{N}{2} - \frac{F_g}{2} &= 0 \\ \frac{F\sqrt{3}}{2} + \frac{N\sqrt{3}}{2} - \frac{F_g\sqrt{3}}{2} &= 0 \\ \frac{r_N N\sqrt{3}}{2} - \frac{r_g F_g\sqrt{3}}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Gdy zredukujemy te równania, pozostaną tylko dwa niezależne równania dla dwóch nieznanych wielkości sił F i N, ponieważ Równanie 12.20 dla składowych x jest równoważne Równanie 12.21 dla składowych y. W ten sposób otrzymujemy warunek równowagi sił:

$$F + N - F_g = 0 \tag{12.23}$$

i warunek równowagi momentów sił:

$$r_N N - r_g F_g = 0. \tag{12.24}$$

Wartość naprężenia w mięśniach uzyskamy rozwiązując Równanie 12.24:

$$N = \frac{r_g}{r_N} F_g = \frac{32}{3{,}2} \cdot 206\,\mathrm{N} = 2060\,\mathrm{N}.$$

Siłę na łokciu otrzymamy po rozwiązaniu Równania 12.23:

$$F = F_g - N = 206\,\mathrm{N} - 2060\,\mathrm{N} = -1854\,\mathrm{N}.$$

Ujemny znak w równaniu mówi nam, że rzeczywista siła w łokciu jest przeciwna do kierunku przyjętego roboczo przy rysowaniu rozkładu sił. Odpowiedź zatem brzmi:

$$F = 1854\,\mathrm{N} \quad \text{w dół}$$
$$N = 2060\,\mathrm{N} \quad \text{do góry.}$$

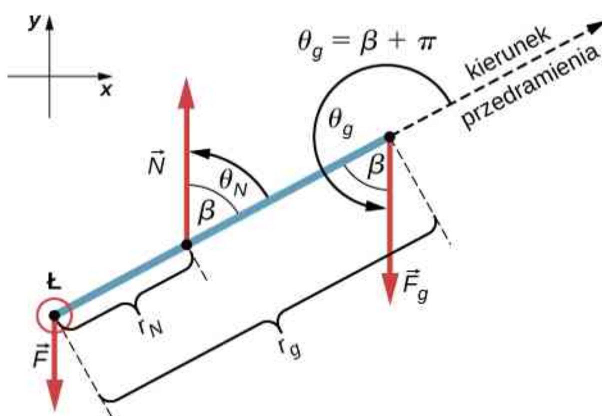
Znaczenie

Warto zwrócić uwagę na ważną kwestię dotyczącą połączeń przegubowych, takich jak łokieć. W początkowej analizie problemu należy zawsze zakładać, że siły działają w dowolnym, wybranym arbitralnie kierunku, a następnie rozwiązać układ niezależnie dla wszystkich składowych sił. W tym przykładzie siła na łokciu jest pionowa, ponieważ problem zakłada również pionowe naprężenie bicepsa. Takie uproszczenie nie stanowi jednak zasady ogólnej.

Rozwiązanie

Załóżmy, że możemy przyjąć układ odniesienia w kierunku y zgodny z kierunkiem siły ciężkości i oś obrotu umieszczoną w łokciu. Wszystkie trzy siły mają w nim tylko składowe y, więc mamy tylko jedno równanie na warunek równowagi sił. Rysujemy rozkład sił dla przedramienia, jak pokazano na Rysunku 12.13, zaznaczając oś obrotu, siły działające i ich ramiona w odniesieniu do osi obrotu i kąty θ_N oraz θ_g, które siły odpowiednio $\vec{N}$ oraz $\vec{F}_g$ tworzą ze swoimi ramionami sił. W definicji momentu siły podanym przez Równanie 12.10, kąt θ_N jest kątem kierunkowym wektora, mierzonym przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara od kierunku ramienia siły, które zawsze wskazuje od osi obrotu. W ten sam sposób kąt θ_g jest mierzony przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara od kierunku ramienia siły do wektora. W ten sposób z łatwością można obliczyć niezerowe momenty, bezpośrednio wstawiając do Równania 12.10 w następujący sposób:

$$M_N = r_n N \sin\theta_N = r_N N \sin\beta = r_N N \sin 60^\circ = +\frac{r_N N \sqrt{3}}{2}$$
$$M_g = r_g F_g \sin\theta_g = r_g F_g \sin(\beta + 180^\circ) = -r_g F_g \sin\beta = -r_g F_g \sin 60^\circ = -\frac{r_g F_g \sqrt{3}}{2}.$$



Rysunek 12.13 Rozkład sił dla przedramienia w równoważnym rozwiązaniu. Oś obrotu znajduje się w punkcie Ł (łokieć).

Warunek równowagi momentów sił $M_N + M_g = 0$ może być teraz zapisany jako:

$$\frac{r_N N\sqrt{3}}{2} - \frac{r_g F_g \sqrt{3}}{2} = 0. \tag{12.25}$$

Z rysunku z rozkładem sił warunek równowagi sił to:

$$-F + N - F_g = 0. \tag{12.26}$$

Równanie 12.25 jest identyczne z Równaniem 12.24 i daje wynik $N = 2060\ \text{N}$. Równanie Równanie 12.26 daje:

$$F = N - F_g = 2060\ \text{N} - 206\ \text{N} = 1854\ \text{N}.$$

Widzimy, że te odpowiedzi są identyczne z poprzednimi, ale drugi układ odniesienia pozwala na równoważne rozwiązanie, które jest prostsze i szybsze, ponieważ nie wymaga, aby siły zostały rozdzielone na ich prostokątne składowe.

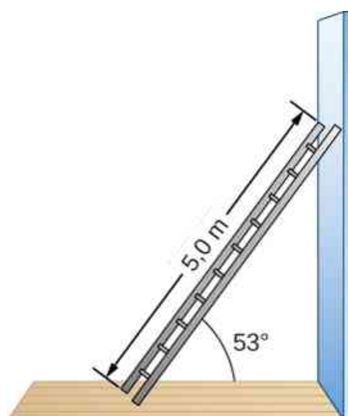


12.4 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Powtórz Przykład 12.4 przy założeniu, że przedramię jest obiektem o jednolitej gęstości o ciężarze 10 N.

Przykład 12.5

Drabina oparta o ścianę

Jednolita drabina od długości $l = 5\ \text{m}$ i ciężarze 400 N opiera się o pionową śliską ścianę, jak pokazano na Rysunku 12.14. Kąt nachylenia między drabiną a szorstką podłogą wynosi $\beta = 53^\circ$. Znajdź siły reakcji podłogi i ściany na drabinę oraz współczynnik tarcia statycznego μ_s na styku drabiny z podłogą, uniemożliwiający poślizg drabiny.

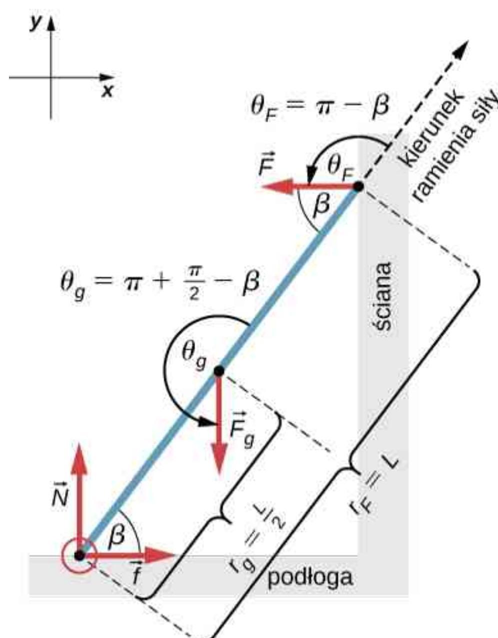


Rysunek 12.14 Pięciometrowa drabina opiera się o ścianę bez tarcia.

Strategia rozwiązania

Wyróżniamy cztery siły działające na drabinę. Pierwsza jest normalną siłą reakcji N od podłogi w kierunku pionowym do góry. Drugą jest statyczna siła tarcia $f = \mu_s N$ skierowana poziomo wzdłuż podłogi ku ścianie – uniemożliwia ona zsuwanie się drabiny. Te dwie siły działają na drabinę w punkcie styku z podłogą. Trzecia siła to ciężar F_g drabiny, przyłożony do ŚM umieszczonego w jej połowie. Czwarta siła to normalna siła reakcji F ściany w kierunku poziomym odchodzącym od ściany, przyłożona w punkcie styku ze ścianą. Nie ma innych sił, ponieważ ściana jest śliska, co oznacza, że nie ma tarcia między ścianą a drabiną. Na podstawie tej analizy, możemy przyjąć układ odniesienia z osią y w kierunku pionowym (równolegle do ściany) i osi x w kierunku poziomym (równolegle do podłogi). W tym układzie odniesienia, każda siła ma składową poziomą lub pionową, ale nie obie na raz, co ułatwia rozwiązanie. Wybieramy oś obrotu w punkcie styku z podłogą. Zaznaczmy ją na rysunku z rozkładem sił dla drabiny, wszystkie cztery siły i ich ramiona oraz

kąty pomiędzy ramionami sił i siłami, jak pokazano na Rysunku 12.15. Przy takim wyborze położenia osi obrotu, nie ma momentu siły ani z normalnej siły reakcji N, ani ze statycznego tarcia f, ponieważ obie siły są przyłożone na osi obrotu.



Rysunek 12.15 Rozkład sił dla drabiny opartej o ścianę bez tarcia.

Rozwiązanie

Z rysunku rozkładu sił wypadkowa siła w kierunku osi x to:

$$+f - F = 0 \tag{12.27}$$

siła wypadkowa w kierunku osi y to:

$$+N - F_g = 0 \tag{12.28}$$

oraz wypadkowy moment sił względem osi obrotu to:

$$M_g + M_F = 0. \tag{12.29}$$

gdzie M_g jest momentem siły ciężkości F_g, aM_F momentem siły reakcji F. Na podstawie rysunku rozkładu sił, możemy określić, że ramię siły reakcji na ścianie to $r_F = l = 5{,}0\text{ m}$ oraz ramię siły ciężkości to $r_g = l/2 = 2{,}5\text{ m}$, natomiast kąty do Równania 12.10 dla momentów sił to $\theta_F = 180^\circ - \beta$ dla momentu siły reakcji ściany oraz $\theta_g = 180^\circ + (90^\circ - \beta)$ dla momentu siły ciężkości. Teraz możemy zastosować Równanie 12.10 do obliczenia momentów sił:

$$M_g = r_g F_g \sin\theta_g = r_g F_g \sin(180^\circ + 90^\circ - \beta) = -\frac{l}{2} F_g \sin(90^\circ - \beta) = -\frac{l}{2} F_g \cos\beta,$$
$$M_F = r_F F \sin(180^\circ - \beta) = lF \sin\beta.$$

Wstawiamy momenty sił do Równania 12.29 i rozwiązujemy dla F:

$$-\frac{l}{2} F_g \cos\beta + lF \sin\beta = 0,$$
$$F = \frac{F_g}{2} \operatorname{ctg}\beta = \frac{400\text{N}}{2} \operatorname{ctg} 53^\circ = 150{,}7\text{N}. \tag{12.30}$$

Normalną siłę reakcji z podłogą otrzymujemy rozwiązawszy Równanie 12.28: $N = F_g = 400\ \mathrm{N}$. Wielkość siły tarcia uzyskuje się z Równania 12.27: $f = F = 150{,}7\ \mathrm{N}$. Współczynnik tarcia statycznego $\mu_s = f/N = 150{,}7\ \mathrm{N}/400\ \mathrm{N} = 0{,}377$.

Siła wypadkowa działająca na drabinę w punkcie styku z podłogą jest sumą wektorową normalnej siły reakcji podłogi i siły tarcia statycznego:

$$\vec{F}_{\mathrm{wyp}} = \vec{f} + \vec{N} = \left(150{,}7\hat{i} + 400\hat{j}\right)\ \mathrm{N}.$$

Jej wartość to:

$$\vec{F}_{\mathrm{wyp}} = \sqrt{f^2 + N^2} = \sqrt{(150{,}7\ \mathrm{N})^2 + (400\ \mathrm{N})^2} = 427{,}4\ \mathrm{N},$$

a jej kierunek to

$$\varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{N}{f}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{400\ \mathrm{N}}{150{,}7\ \mathrm{N}}\right) = 69,3^\circ \text{nad podłogę.}$$

Powinniśmy tu podkreślić dwie ogólne praktyczne obserwacje. Kiedy wybieramy oś obrotu, nie oczekujemy, że układ faktycznie obraca się wokół wybranej osi. Drabina w tym przykładzie nie obraca się w ogóle, ale mocno stoi na podłodze. Niemniej jednak jej punkt styku z podłogą jest dobrym wyborem dla osi obrotu. Zauważmy też, że kiedy stosujemy Równanie 12.10 do obliczania indywidualnych momentów sił, nie musimy rozdzielać sił na ich składowe normalne i poprzeczne w odniesieniu do kierunku ramienia sił, ani rozważać zwrotu momentu sił. Jeżeli kąt w Równaniu 12.10 jest prawidłowo określony za pomocą rysunku z rozkładem sił — jako kąt mierzony przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara od kierunku ramienia siły do wektora siły — Równanie 12.10 daje zarówno wartość, jak i zwrot momentu sił. Dzieje się tak, dlatego że moment siły jest iloczynem wektorowym wektora ramienia siły z wektorem siły i Równanie 12.10 wyraża składową tego iloczynu wektorowego wzdłuż osi obrotu.

Znaczenie

Otrzymany wynik jest niezależny od długości drabiny, ponieważ L ulega uproszczeniu w warunku równowagi momentów sił (Równanie 12.30). Niezależnie od długości drabiny, o ile jej ciężar wynosi 400 N, a kąt z podłogą wynosi 53°, nasze wyniki są prawidłowe. Ale drabina będzie się ślizgać, jeśli wypadkowy moment siły będzie ujemny w Równaniu 12.30. Dzieje się tak dla pewnych kątów, gdy współczynnik tarcia statycznego nie jest wystarczająco duży, aby zapobiec temu zjawisku.



12.5 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Dla sytuacji opisanej w Przykład 12.5, określ wartość współczynnika tarcia statycznego μ_S, dla którego drabina zaczyna się ślizgać, biorąc pod uwagę, że β jest kątem, jaki drabina tworzy z podłogą.

Przykład 12.6

Siły na zawiasach drzwi

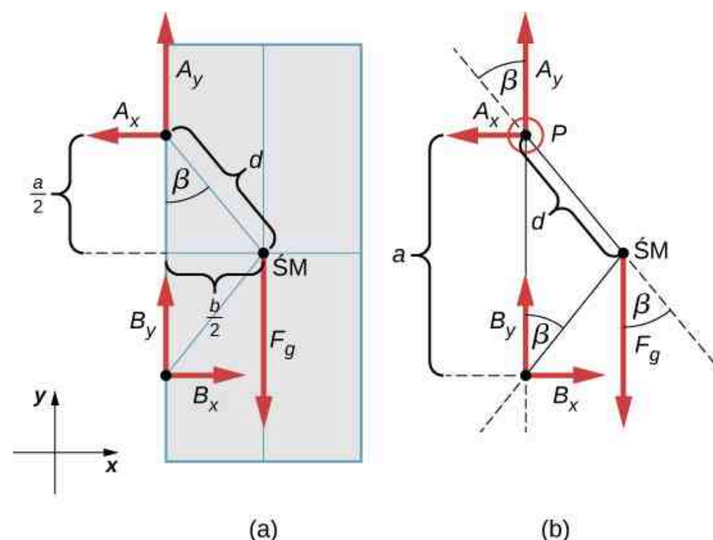
Drzwi o ciężarze $F_g = 400\ \mathrm{N}$ są zawieszone na zawiasach A i B, dzięki czemu mogą się obracać wokół pionowej osi przechodzącej przez zawiasy (Rysunek 12.16). Mają one szerokość $b = 1\ \mathrm{m}$, i jednolitą gęstość. Zawiasy umieszczono symetrycznie w odległości $a = 2\ \mathrm{m}$ od siebie na ich krawędzi, aby ciężar równomiernie rozkładał się pomiędzy nimi. Oblicz siły na zawiasach, gdy drzwi są otwarte do połowy.



Rysunek 12.16 Drzwi o ciężarze 400 N zawieszone na zawiasach umieszczonych w punktach A i B.

Strategia rozwiązania

Siły wywierane przez drzwi na zawiasach łatwo można znaleźć, odwracając kierunki sił, które zawiasy wywierają na drzwi. W związku z tym naszym zadaniem jest znaleźć siły wywierane na drzwi przez zawiasy. Trzy siły działają na płytę drzwiową: nieznana siła $\vec{A}$ z zawiasu A, nieznana siła $\vec{B}$ z zawiasu B, i znany ciężar $\vec{F}_g$ przyłożony w środku masy płyty drzwiowej. ŚM znajduje się w centrum geometrycznym drzwi, bo ich płyta ma jednolitą gęstość. Przyjmujemy układ odniesienia z osią y wzdłuż kierunku siły ciężkości oraz osią x w płaszczyźnie płyty, jak pokazano w części (a) Rysunku 12.17. Rozkładamy wszystkie siły na ich składowe. W ten sposób mamy cztery nieznane składowe sił: dwie składowe siły $\vec{A} = [A_x, A_y]$ oraz dwie składowe siły $\vec{B} = [B_x, B_y]$. Na rysunku z rozkładem sił na zawiasach, prezentujemy dwie siły przez ich składowe, których kierunki wybraliśmy arbitralnie. Ponieważ istnieją cztery niewiadome (A_x, B_x, A_y, B_y), musimy utworzyć cztery niezależne równania. Jedno jest warunkiem równowagi sił w kierunku x. Drugie - warunkiem równowagi sił w kierunku y. Trzecie - warunkiem równowagi momentów sił względem osi obrotu (na zawiasie). Ponieważ masa jest równomiernie rozłożona między zawiasami, czwarte równanie ma postać $A_y = B_y$. Aby ustalić warunki równowagi, rysujemy rozkład sił i wybieramy punkt obrotu na górnym zawiasie, jak pokazano w części (b) Rysunku 12.17. Na koniec rozwiązujemy równania dla nieznanych składowych sił i znajdujemy siły.



Rysunek 12.17 (a) Geometria i (b) rozkład sił dla drzwi.

Rozwiązanie

Z rysunku rozkładu sił dla drzwi otrzymujemy warunek równowagi sił:

$$\text{w kierunku } x\text{:} \quad -A_x + B_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = B_x$$
$$\text{w kierunku } y\text{:} \quad +A_y + B_y - F_g = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = B_y = \frac{F_g}{2} = \frac{400\,\text{N}}{2} = 200\,\text{N}.$$

Wybieramy oś obrotu w punkcie P (górny zawias na rysunku z rozkładem sił) i zapisujemy warunek równowagi dla momentów sił względem punktu P:

$$\text{obrót względem } P\text{: } M_{Fg} + M_{Bx} + M_{By} = 0. \tag{12.31}$$

Wykorzystujemy schemat rozkładu sił, aby znaleźć wszystkie wyrażenia w tym równaniu:

$$M_{Fg} = dF_G \sin(-\beta) = -dF_g \sin\beta = -dF_g \frac{b/2}{d} = -F_g \frac{b}{2}$$
$$M_{Bx} = aB_x \sin 90^\circ = +aB_x$$
$$M_{By} = aB_y \sin 180^\circ = 0.$$

Przy wyznaczaniu sin β używamy geometrii trójkąta pokazanego w części (a) rysunku. Teraz wstawiamy te momenty sił do Równania 12.31 i obliczamy B_x:

$$\text{obrót wokół P :} \quad -F_g \frac{b}{2} + aB_x = 0 \Rightarrow B_x = F_g \frac{b}{2a} = 400\,\text{N} \cdot \frac{1}{2 \cdot 2} = 100\,\text{N}.$$

Tak więc wartości poziomych składowych sił wynoszą $A_x = B_x = 100$ N. Siły na drzwiach to:

$$\text{na górnym zawiasie:} \quad \vec{F}_{\text{A na drzwi}} = \left(-100\hat{i} + 200\hat{j}\right)\ \text{N},$$
$$\text{na dolnym zawiasie:} \quad \vec{F}_{\text{B na drzwi}} = \left(+100\hat{i} + 200\hat{j}\right)\ \text{N}.$$

Siły na zawiasach wyznaczamy na podstawie trzeciego prawa Newtona jako:

$$\text{na górnym zawiasie:} \quad \vec{F}_{\text{drzwi na A}} = \left(+100\hat{i} - 200\hat{j}\right)\ \text{N},$$

$$\text{na dolnym zawiasie:} \quad \vec{F}_{\text{drzwi na B}} = \left(-100\hat{i} - 200\hat{j}\right)\ \text{N}.$$

Znaczenie

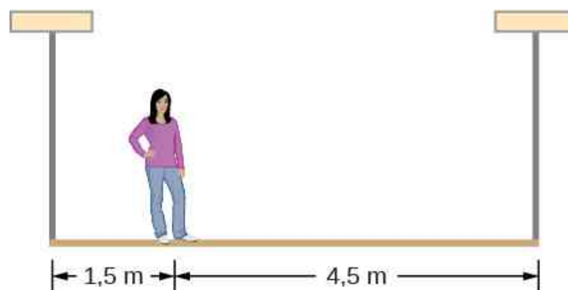
Zauważmy, że jeśli problem zostałby sformułowany bez założenia, że ciężar jest równomiernie rozłożony między dwoma zawiasami, to nie dałoby się go rozwiązać, ponieważ liczba niewiadomych byłaby większa niż liczba równań wyrażających warunki równowagi.



12.6 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Rozwiąż zadanie z Przykładu 12.6, przyjąwszy oś obrotu w środku masy.

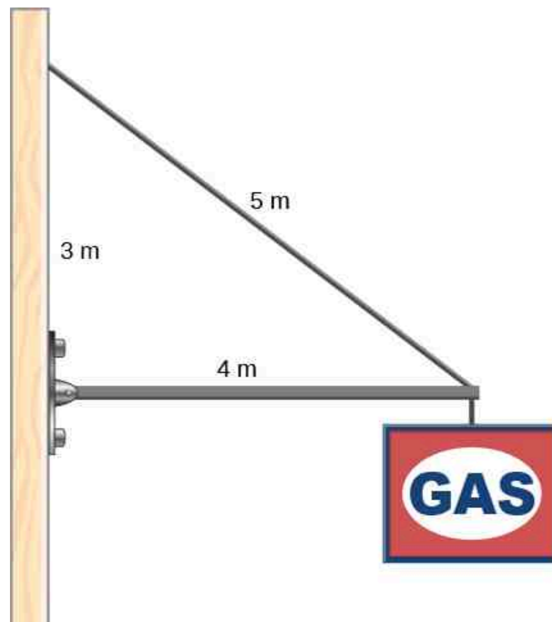


12.7 **Sprawdź, czy rozumiesz.** 50-kilogramowa osoba stoi 1,5 m od jednego końca jednolitego rusztowania o masie 70 kg oraz długości 6 m. Oblicz naprężenia w dwóch pionowych linach podtrzymujących rusztowanie.





12.8 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Znak o ciężarze 400 N wisi na końcu jednorodnego wspornika o długości 4 m i ciężarze 600 N. Wspornik podtrzymuje zawias na ścianie i kabel, którego drugi koniec przywiązany jest do ściany 3 m nad lewym końcem wspornika. Oblicz naprężenie kabla podtrzymującego i siłę zawiasu wywieraną na wspornik.



12.3 | Naprężenie, odkształcenie i moduł sprężystości

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- wyjaśniać pojęcia naprężenia i odkształcenia w opisie sprężystych deformacji materiałów;
- opisywać rodzaje sprężystych deformacji przedmiotów i materiałów.

Model ciała sztywnego to przykład wyidealizowanego obiektu, który nie ulega deformacji pod wpływem sił zewnętrznych. Jest on bardzo użyteczny przy analizie układów mechanicznych, a wiele obiektów fizycznych jest sztywnych w szerokim zakresie warunków. Stopień, w jakim obiekt może być postrzegany jako sztywny, zależy od właściwości fizycznych materiału, z którego został wykonany. Na przykład piłeczka do ping-ponga z tworzywa sztucznego jest krucha, a piłka tenisowa z gumy jest elastyczna, gdy działa na nią siła zgniatająca. Jednak w innych okolicznościach obie mogą odbijać się jak ciała sztywne. Podobnie projektant protez kończynowych, może przybliżać mechanikę kończyn ludzkich, modelując je jako ciała sztywne, jednakże rzeczywiste połączenia kości i tkanek są elastyczne.

W dalszej części, przejdziemy od sił wpływających na ruch obiektu do tych, które wpływają na kształt obiektu. Zmiana kształtu spowodowana działaniem siły nazywana jest **deformacją** (ang. **deformation**). Znane są nawet bardzo małe siły, powodujące deformację. Ulegają jej obiekty fizyczne lub ośrodki pod wpływem sił zewnętrznych, na przykład zgniatania, ściskania, (ro)zrywania, skręcania, ścinania czy rozciągania. W języku fizyki dwa terminy opisują siły na obiektach podlegających deformacji: **naprężenie** (ang. **stress**) i **odkształcenie** (ang. **strain**).

Naprężenie to wielkość opisująca wartość sił powodujących deformację. Jest ono ogólnie definiowane jako *siła na jednostkę powierzchni*. Kiedy siły oddziałują na przedmiot i powodują jego wydłużenie, podobnie jak przy rozciąganiu elastycznej taśmy (gumy), takie naprężenie nazywamy **naprężeniem rozciągającym** (ang. **tensile stress**). Kiedy siły powodują ściskanie przedmiotu, wówczas mówimy o **naprężeniu ściskającym** (ang. **compressive stress**). Kiedy obiekt jest ściskany ze wszystkich stron, jak okręt podwodny w głębi oceanu, nazywamy to **naprężeniem objętościowym** (ang. **bulk stress**). W innych sytuacjach działające siły, nie będąc ani rozciągającymi, ani ściskającymi, wciąż powodują zauważalne deformacje. Na przykład, kiedy trzymasz książkę ściśle między dłońmi, a następnie jedną ręką, naciskasz i odciągasz przednią okładkę od siebie, a drugą ręką naciskasz i pociągasz tylną okładkę w kierunku do siebie. Wówczas, gdy siły odkształcające działają stycznie do powierzchni obiektu, nazywamy je siłami ścinającymi, a naprężenie, które powodują, nazywamy **naprężeniem ścinającym** (ang. **shear stress**).

Jednostką naprężenia w układzie SI jest paskal (Pa). Gdy siła 1 N naciska na powierzchnię $1\ \mathrm{m}^2$ naprężenie wynosi 1 Pa:

$$\text{jeden paskal} = 1\ \mathrm{Pa} = \frac{1\ \mathrm{N}}{1\ \mathrm{m}^2}.$$

W systemie brytyjskim jednostką naprężenia jest psi, co oznacza funt na cal kwadratowy $(\mathrm{lb/in^2})$. Inną jednostką używaną często w przypadku naprężenia objętościowego jest atmosfera (atm). Współczynniki konwersji to:

$$1\ \mathrm{psi} = 6895\ \mathrm{Pa} \quad \text{oraz} \quad 1\ \mathrm{Pa} = 1{,}45 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{psi}$$

$$1\ \mathrm{atm} = 1{,}013 \cdot 10^{5}\ \mathrm{Pa} = 14{,}7\ \mathrm{psi}.$$

Obiekt lub ośrodek pod wpływem naprężania ulega deformacji. Wielkość, która opisuje tę deformację, nazywa się odkształceniem. Odkształcenie podawane jest albo jako względna zmiana długości (dla naprężeń rozciągających), albo jako zmiana objętości (dla naprężeń objętościowych) lub geometrii (dla naprężeń ścinających). Dlatego odkształcenie jest wartością bezwymiarową. Odkształcenie pod wpływem naprężenia rozciągającego nazywamy **odkształceniem rozciągającym** (ang. **tensile strain**) (lub liniowym), odkształcenie pod wpływem naprężenia objętościowego nazywa się **odkształceniem objętościowym** (ang. *bulk strain*), a spowodowane naprężeniem ścinającym - **odkształceniem ścinającym** (ang. **shear strain**).

Im większe naprężenie, tym większe odkształcenie, jednakże zależność między odkształceniem a naprężeniem nie musi być liniowa. Tylko gdy naprężenie jest wystarczająco małe, odkształcenie powodowane naprężeniem pozostaje wprost proporcjonalne do wartości naprężenia. Stałą proporcjonalności w tym stosunku nazywamy **modułem sprężystości** (ang. **elastic modulus**). W zakresie liniowej zależności dla małych wartości naprężeń, ogólny związek między naprężeniem a odkształceniem to:

$$\text{naprężenie} = (\text{moduł sprężystości}) \cdot \text{odkształcenie}. \tag{12.32}$$

Jak widać z analizy wymiarowej tego związku, moduł sprężystości ma tę samą jednostkę fizyczną co naprężenie, ponieważ odkształcenie jest bezwymiarowe.

Widzimy też z Równania 12.32, że gdy obiekt charakteryzuje się dużą wartością modułu sprężystości, to efekt naprężenia jest niewielki. Z drugiej strony, niewielki moduł sprężystości oznacza, że naprężenie powoduje duże odkształcenie i zauważalne deformacje. Na przykład naprężenie na taśmie gumowej powoduje większe odkształcenie niż to samo naprężenie na taśmie stalowej o tych samych wymiarach, ponieważ moduł sprężystości gumy jest o dwa rzędy wielkości mniejszy niż moduł sprężystości stali.

Moduł sprężystości dla naprężenia rozciągającego nazywa się **modułem Younga** (ang. **Young's modulus**), dla naprężenia objętościowego - **modułem Helmholtza** (ang. **bulk modulus**) (inaczej współczynnik sprężystości objętościowej lub moduł odkształcalności objętościowej), a dla naprężenia ścinającego - **modułem Kirchhoffa** (ang. **shear modulus**) (inaczej moduł sprężystości poprzecznej lub moduł odkształcalności postaciowej albo moduł ścinania). Zauważmy, że zależność między naprężeniem a odkształceniem to obserwowalny związek mierzony w laboratorium. Moduły sprężystości dla różnych materiałów mierzy się w różnych warunkach fizycznych, takich jak zmienna temperatura, i zbiera w tabelach danych inżynierskich (Tabela 12.1). Są one cennymi danymi dla przemysłu i osób zaangażowanych w prace inżynieryjne i budowlane. W następnej części omówimy relacje naprężenie - odkształcenie w pełnym zakresie wartości naprężeń, aż do punktu zerwania (pęknięcia), tj. poza granicą zależności liniowej reprezentowaną przez Równanie 12.32. Natomiast na końcu tej sekcji omówimy granicę zależności linowej wyrażoną Równaniem 12.32.

Materiał	moduł Younga E $(\cdot\ 10^{10}\text{Pa})$	moduł Helmholtza K $(\cdot\ 10^{10}\text{Pa})$	moduł Kirchhoffa G $(\cdot\ 10^{10}\text{Pa})$
Glin	7,0	7,5	2,5
Kość (rozciąganie)	1,6	0,8	8,0
Kość (ściskanie)	0,9		
Mosiądz	9,0	6,0	3,5
Cegła	1,5		
Beton	2,0		
Miedź	11,0	14,0	4,4
Szkło (kron)	6,0	5,0	2,5
Granit	4,5	4,5	2,0
Włosy (ludzkie)	1,0		
Drewno twarde	1,5		1,0
Żelazo	21,0	16,0	7,7
Ołów	1,6	4,1	0,6
Marmur	6,0	7,0	2,0
Nikiel	21,0	17,0	7,8
Polistyren	3,0		
Jedwab	6,0		
Nić pajęcza	3,0		
Stal	20,0	16,0	7,5
Aceton		0,07	
Etanol		0,09	
Gliceryna		0,45	
Rtęć		2,5	
Woda		0,22	

Tabela 12.1

Naprężenie i odkształcenie rozciągające lub ściskające oraz moduł Younga

Rozciąganie lub ściskanie występuje wtedy, gdy dwie antyrównoległe siły o równej wartości działają na obiekt wzdłuż tylko jednego z jego wymiarów w taki sposób, że nie porusza się on. Taką sytuację przedstawia Rysunek 12.18. Pręt jest rozciągany lub ściskany przez parę sił działających wzdłuż jego długości, przyłożonych prostopadle do przekroju poprzecznego. Efektem wypadkowym działania takich sił jest zmiana długości pręta z pierwotnej L_0 przed pojawieniem się sił, na nową L – pod wpływem działania sił. Zmiana ta $\Delta L = L - L_0$ może być albo wydłużeniem (gdy L jest większe niż pierwotna długość L_0) albo skróceniem (gdy L jest mniejsze niż pierwotna długość L_0). Naprężenie i odkształcenie rozciągające występują, gdy siły rozciągają obiekt, powodując jego wydłużenie, a zmiana długości ΔL jest dodatnia. Naprężenie i odkształcenie ściskające pojawiają się, gdy siły ściskają obiekt i powodują jego skrócenie, a zmiana długości ΔL jest ujemna.

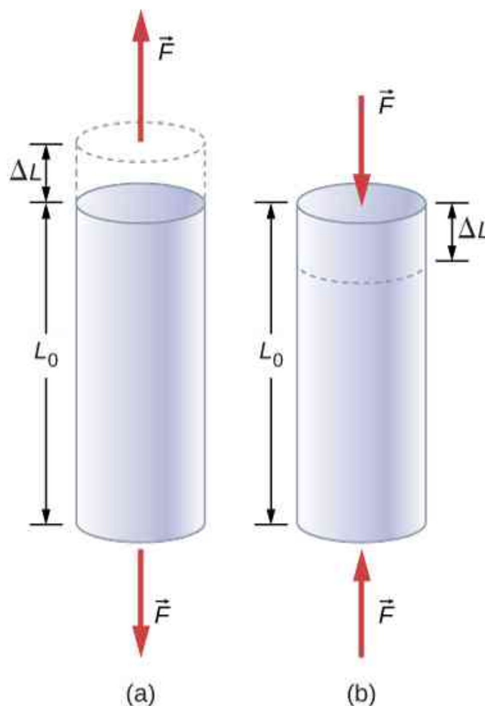
W każdej z tych sytuacji definiujemy naprężenie jako stosunek siły odkształcającej $F_\perp$ do przekroju poprzecznego A odkształconego obiektu. Symbol $F_\perp$, który rezerwujemy dla siły odkształcającej, oznacza, że ta siła działa prostopadle do przekroju poprzecznego obiektu. Siły działające równolegle do niego nie zmieniają długości obiektu. Definicja naprężenia rozciągającego to:

$$\text{naprężenie rozciągające} = \frac{F_\perp}{A}. \tag{12.33}$$

Odkształcenie rozciągające jest miarą deformacji obiektu pod wpływem naprężeń rozciągających i definiuje się je jako względną zmianę długości obiektu, gdy doświadcza on naprężenia rozciągającego:

$$\text{odkształcenie rozciągające} = \frac{\Delta L}{L_0}. \tag{12.34}$$

Naprężenie i odkształcenie ściskające są określone odpowiednio tymi samymi wzorami, tj. Równanie 12.33 oraz Równanie 12.34. Jedyną różnicą w stosunku do rozciągania jest to, że w przypadku naprężeń i odkształceń ściskających przyjmujemy bezwzględne wartości prawych stron obu równań.



Rysunek 12.18 Jeśli obiekt jest rozciągany lub ściskany, wypadkowa siła na ten obiekt wynosi zero, ale deformuje się on zmieniając swoją pierwotną długość L_0. (a) Rozciąganie: pręt jest wydłużony o ΔL. (b) Ściskanie: pręt jest skrócony o ΔL. W obu przypadkach siła odkształcająca działa wzdłuż długości pręta i prostopadle do jego przekroju poprzecznego. W liniowym zakresie małych naprężeń obszar przekroju poprzecznego pręta się nie zmienia.

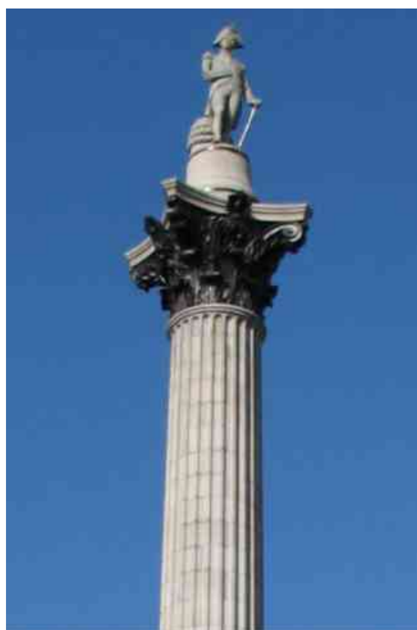
Moduł Younga E jest modułem sprężystości, gdy odkształcenie zostaje spowodowane naprężeniem rozciągającym lub ściskającym i określa je Równanie 12.32. Dzieląc to równanie przez odkształcenie rozciągające, otrzymujemy wzór na moduł Younga:

$$E = \frac{\text{naprężenie rozciągające}}{\text{odkształcenie rozciągające}} = \frac{F_{\perp}/A}{\Delta L/L_0} = \frac{F_{\perp}}{A}\frac{L_0}{\Delta L}. \tag{12.35}$$

Przykład 12.7

Naprężenie ściskające w kolumnie

Rzeźba o ciężarze 10 000 N spoczywa na poziomej powierzchni u szczytu pionowej kolumny o wysokości 6 m (Rysunek 12.19). Powierzchnia przekroju poprzecznego kolumny wynosi $0{,}2\ \text{m}^2$ i wykonana jest z granitu o gęstości $2\,700\ \text{kg/m}^3$. Oblicz **naprężenie ściskające** (ang. **compressive stress**) w przekroju znajdującym się 3 m poniżej górnej części kolumny i wartości odkształcenia ściskającego górny 3-metrowy odcinek kolumny.



Rysunek 12.19 Kolumna Nelsona na Trafalgar Square w Londynie, Wielka Brytania. (Źródło: modyfikacja pracy Cristiana Bortesa)

Strategia rozwiązania

Najpierw obliczmy ciężar 3-metrowego górnego odcinka kolumny. Siła działająca na przekrój poprzeczny usytuowany w odległości 3 m od góry to suma ciężaru fragmentu kolumny i masy rzeźby. Mając siłę normalną, używamy Równania 12.33, aby wyliczyć naprężenie. Żeby obliczyć odkształcenie ściskające, odczytujemy wartość modułu Younga dla granitu z Tabeli 12.1 i przekształcamy Równanie 12.35.

Rozwiązanie

Objętość fragmentu kolumny o wysokości $h = 3\ \text{m}$ i powierzchni przekroju $A = 0{,}2\ \text{m}^2$ to:

$$V = Ah = 0{,}2\ \text{m}^2 \cdot 3\ \text{m} = 0{,}6\ \text{m}^3.$$

Z gęstością granitu $\rho = 2{,}7 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3$ masa fragmentu kolumny to:

$$m = \rho V = 2{,}7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 0{,}6 \text{ m}^3 = 1{,}6 \cdot 10^3 \text{ kg}.$$

Ciężar fragmentu kolumny to:

$$F_k = mg = 1{,}6 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 1{,}57 \cdot 10^4 \text{ N}.$$

Ciężar rzeźby $F_r = 1 \cdot 10^4$ N, więc normalna siła na powierzchnię przekroju poprzecznego znajdującą się 3 m poniżej rzeźby to:

$$F_\perp = F_k + F_r = (1{,}57 + 1) \cdot 10^4 \text{ N} = 2{,}57 \cdot 10^4 \text{ N}.$$

Dlatego naprężenie to:

$$\text{naprężenie} = \frac{F_\perp}{A} = \frac{2{,}57 \cdot 10^4 \text{ N}}{0{,}2 \text{ m}^2} = 1{,}285 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 128{,}5 \text{ kPa}.$$

Moduł Younga dla granitu $E = 4{,}5 \cdot 10^{10}$ Pa $= 4{,}5 \cdot 10^7$ kPa. Dlatego odkształcenie ściskające w tym położeniu wynosi:

$$\text{odkształcenie} = \frac{\text{naprężenie}}{E} = \frac{128{,}5 \text{ kPa}}{4{,}5 \cdot 10^7 \text{ kPa}} = 2{,}85 \cdot 10^{-6}.$$

Znaczenie

Zwróćmy uwagę, że normalna siła działająca na pole przekroju kolumny nie jest stała na całej jej długości, ale zmienia się od swojej najmniejszej wartości na górze do największej wartości na dole kolumny. Jeśli zatem kolumna ma jednolity przekrój poprzeczny na całej długości, to naprężenie jest największe u jej podstawy.



12.9 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Oblicz naprężenie i odkształcenie ściskające u podstawy kolumny Nelsona.

Przykład 12.8

Rozciąganie pręta

Stalowy pręt o długości 2 m i przekroju poprzecznym $0{,}3 \text{ cm}^2$ jest częścią pionowego wspornika utrzymującego platformę o masie 550 kg, zawieszoną na dolnym końcu tego pręta. Oblicz jest naprężenie rozciągające w pręcie i jego wydłużenie pod wpływem naprężenia, ciężar pomiń.

Strategia rozwiązania

Najpierw obliczamy naprężenie rozciągające w pręcie wywołane ciężarem platformy zgodnie z Równaniem 12.33. Potem przekształcamy Równanie 12.35, aby znaleźć wydłużenie pręta, używając $L_0 = 2$ m. Z Tabeli 12.1 moduł Younga dla stali to $E = 2 \cdot 10^{11}$ Pa.

Rozwiązanie

Podstawienie wartości liczbowych do równań daje nam

$$\frac{F}{A} = \frac{550\text{kg} \cdot 9{,}81\text{m/s}^2}{3 \cdot 10^{-5}\text{m}} = 1{,}8 \cdot 10^8 \text{ Pa},$$

$$\Delta L = \frac{F}{A} \cdot \frac{L_0}{E} = 1{,}8 \cdot 10^8 \text{Pa} \cdot \frac{2\text{m}}{2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}} = 1{,}8 \cdot 10^{-3} \text{m} = 1{,}8 \text{ mm}.$$

Znaczenie

Podobnie jak w przykładzie z kolumną także tutaj naprężenie rozciągające nie jest jednolite wzdłuż całego pręta. W przeciwieństwie do poprzedniego przykładu, jeśli uwzględnimy ciężar pręta, to okaże się, że naprężenie w nim jest największe na górze, a najmniejsze na dole.



12.10 Sprawdź, czy rozumiesz. Drut o długości 2 m rozciąga się o 1 mm przy obciążeniu. Jakie jest odkształcenie rozciągające w drucie?

Obiekty często doświadczają naprężeń ściskających i rozciągających jednocześnie (Rysunek 12.20). Przykładem może być długa półka zastawiona ciężkimi książkami, która ugina się w środku pod ich ciężarem. Górna powierzchnia półki podlega naprężeniu ściskającemu, a dolna naprężeniu rozciągającemu. Podobnie długie i ciężkie belki uginają się pod własnym ciężarem.





Rysunek 12.20 (a) Obiekt, uginając się w dół, doświadcza naprężeń rozciągających (rozciągania) w górnej części i naprężeń ściskających (ściskania) w dolnej części. (b) Zawodnicy podnoszący ciężary często chwilowo uginają żelazne sztangi podczas podnoszenia, tak jak w konkursie olimpijskim w 2012 roku. (Źródło: modyfikacja pracy Oleksandra Kocherzhenko)

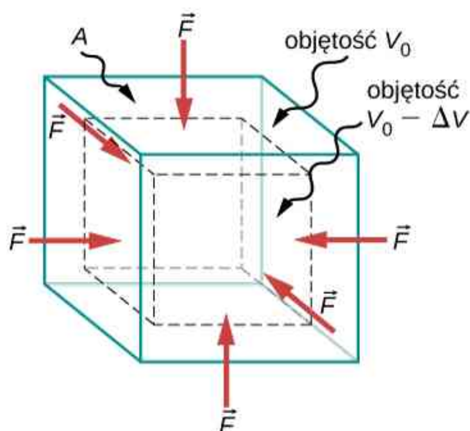


Ciężkie pudełko spoczywa na stole stojącym na trzech nogach. Obejrzyj demonstrację (https://openstaxcollege.org/l/21movebox) i przesuń pudełko, aby zobaczyć, jaki jest wpływ na ściskanie (lub rozciąganie) w nogach, gdy pudełko zmienia swoją pozycję.

Naprężenie i odkształcenie objętościowe oraz moduł Helmholtza (współczynnik sprężystości objętościowej)

Kiedy zanurzamy się w wodzie, czujemy siłę naciskającą na każdą część ciała ze wszystkich stron. To, czego doświadczamy, jest to naprężenie objętościowe, czyli ciśnienie. Naprężenie objętościowe zawsze ma tendencję do zmniejszania objętości otoczonej powierzchnią zanurzonego obiektu. Siły ściskania zawsze są prostopadłe do powierzchni zanurzonego obiektu (Rysunek 12.21). Efektem ich działania jest zmniejszenie objętości zanurzonego obiektu o wielkość ΔV w porównaniu z objętością V_0 obiektu przy braku naprężeń objętościowych. Ten rodzaj odkształcenia nazywa się odkształceniem objętościowym i określa go zmiana objętości w stosunku do pierwotnej objętości:

$$\text{odkształcenie objętościowe} = \frac{\Delta V}{V_0}. \quad (12.36)$$



Rysunek 12.21 Objętość obiektu pod rosnącym naprężeniem objętościowym zawsze ulega zmniejszeniu. Równe siły działają prostopadle do powierzchni ze wszystkich stron. Efektem jest zmniejszenie objętości o wielkość ΔV w porównaniu z pierwotną wielkością V_0.

Odkształcenie objętościowe wynika z naprężenia objętościowego, czyli normalnej do powierzchni siły $F_\perp$ naciskającej na powierzchnię A zanurzonego obiektu. Ta wielkość fizyczna oraz ciśnienie p są zdefiniowane jako:

$$\text{ciśnienie} = p \equiv \frac{F_\perp}{A}. \tag{12.37}$$

Bardziej szczegółowo ciśnienie w płynach omówimy w rozdziale Mechanika płynów. Ważną cechą ciśnienia jest to, że stanowi ono wielkość skalarną i nie ma żadnego określonego kierunku, tzn. działa ono tak samo we wszystkich możliwych kierunkach. Kiedy zanurzymy rękę w wodzie, odczujemy, że na każdą powierzchnię dłoni (górną, dolną, boczną, między palcami) działa ciśnienie o takiej samej wartości. Jest to zwiększenie ciśnienia Δp ponad to, co czujemy kiedy dłoń nie jest zanurzona w wodzie. Kiedy ręka nie jest zanurzona, odczuwamy **ciśnienie normalne** (ang. **normal pressure**) p_0 1 atm, które służy jako punkt odniesienia. Naprężeniem objętościowym jest wzrost ciśnienia Δp ponad poziom normalny p_0.

Kiedy wzrasta naprężenie objętościowe, odpowiednio zwiększa się odkształcenie objętościowe, zgodnie z Równaniem 12.32. Stała proporcjonalności w tym stosunku nazywa się modułem Helmholtza (inaczej współczynnikiem sprężystości objętościowej lub modułem odkształcalności objętościowej) K:

$$K = \frac{\text{naprężenie objętościowe}}{\text{odkształcenie objętościowe}} = -\frac{\Delta p}{\Delta V / V_0} = -\Delta p \, \frac{V_0}{\Delta V}. \tag{12.38}$$

Znak minus, który pojawia się w Równaniu 12.38 wprowadzono dla spójności, aby moduł K był wielkością dodatnią. Należy zauważyć, że jest on konieczny, ponieważ wzrost ciśnienia o Δp (dodatnia wartość) zawsze powoduje spadek objętości o ΔV, a zmniejszenie objętości jest wielkością ujemną. Odwrotność modułu Helmholtza nazywa się **modułem ściśliwości** (ang. **compressibility**) β:

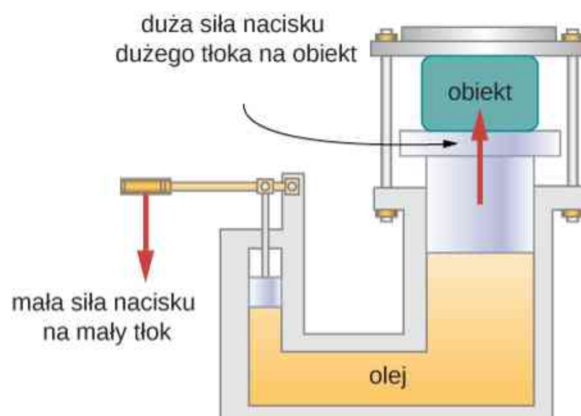
$$\beta = \frac{1}{K} = -\frac{\Delta V / V_0}{\Delta p}. \tag{12.39}$$

Określenie ściśliwość jest stosowane w odniesieniu do płynów (gazów i cieczy). Moduł ściśliwości opisuje zmianę objętości płynu w jednostce wzrostu ciśnienia. Ciecz charakteryzująca się dużym modułem ściśliwości jest stosunkowo łatwa do sprężania (ściskania). Przykładowo ściśliwość wody to $4{,}64 \cdot 10^{-5}$ atm^{-1}, a ściśliwość acetonu $1{,}45 \cdot 10^{-4}$ atm^{-1} Oznacza to, że przy podwyższeniu ciśnienia o 1 atm względny spadek objętości jest blisko trzykrotnie większy dla acetonu niż dla wody.

Przykład 12.9

Prasa hydrauliczna

W prasie hydraulicznej na Rysunku 12.22 250 l oleju podlega zwiększeniu ciśnienia do 160 atm. Ściśliwość oleju to $2 \cdot 10^{-5}$ atm^{-1}, oblicz odkształcenie objętościowe i bezwzględny spadek objętości oleju, gdy urządzenie pracuje.



Rysunek 12.22 Gdy mały tłok prasy hydraulicznej przemieszcza się w dół, ciśnienie w oleju przenosi się przez całą jego objętość do dużego tłoka. Niewielka siła przyłożona do małego tłoka powoduje powstanie siły nacisku o dużej wartości wywieranej przez duży tłok na podnoszony lub ściskany obiekt. Urządzenie działa jak mechaniczna dźwignia.

Strategia rozwiązania

Przekształcamy Równanie 12.39, aby znaleźć odkształcenie objętościowe. Objętość początkowa to $V_0 = 250\,\text{l}$.

Rozwiązanie

Wstawiwszy wartości do równania, otrzymujemy:

$$\text{odkształcenie objętościowe} = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\Delta p}{K} = \beta \Delta p = 2 \cdot 10^{-5}\,\text{atm}^{-1} \cdot 160\,\text{atm} = 0{,}0032,$$

$$\text{odpowiedź} : \Delta V = 0{,}0032 V_0 = 0{,}0032 \cdot 250\,\text{l} = 0{,}78\,\text{l}. \quad (12.40)$$

Znaczenie

Zauważmy, że ze względu na to, że ściśliwość wody jest 2,32 razy większa od ściśliwości oleju, zmiana substancji roboczej w prasie hydraulicznej w tym przykładzie na wodę spowodowałaby zwiększenie naprężenia objętościowego i zmiany objętości o 2,32 razy.



12.11 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Siła normalna działająca na każdą powierzchnię kostki stalowej o objętości $1\,\text{m}^3$ zmienia się o $1 \cdot 10^7\,\text{N}$, oblicz wynikową zmianę objętości tej kostki.

Naprężenie i odkształcenie ścinające oraz moduł Kirchhoffa

Koncepcje naprężenia i odkształcenia ścinającego dotyczą jedynie ciał stałych. Budynki i płyty tektoniczne to przykłady obiektów, narażonych na naprężenia ścinające. Zasadniczo pojęcia te nie dotyczą płynów.

Odkształcenie ścinające występuje, gdy do przeciwległych powierzchni ciała stałego przyłożone są stycznie dwie równoległe przeciwnie skierowane siły o równej wartości, nie powodujące odkształcenia w kierunku poprzecznym do kierunku siły, jak w typowym przykładzie naprężenia ścinającego przedstawionym na Rysunku 12.23. Odkształcenie ścinające charakteryzuje się stopniowym przesunięciem Δx warstw w kierunku stycznym do sił działających. Przesunięcie Δx zachodzi w poprzecznym kierunku wzdłuż pewnej odległości L_0. Odkształcenie ścinające to stosunek największego przesunięcia Δx do poprzecznej odległości L_0:

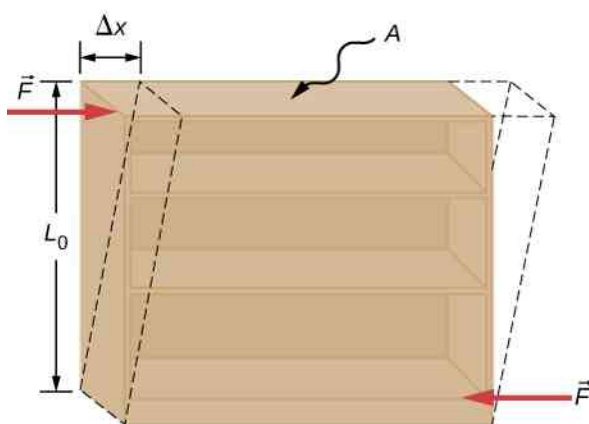
$$\text{odkształcenie ścinające} = \frac{\Delta x}{L_0}. \quad (12.41)$$

Odkształcenie ścinające jest spowodowane naprężeniem ścinającym. To ostatnie wywołują siły równoległe do powierzchni. Wartość siły $F_{\parallel}$ na pole powierzchni A, gdzie przykładana jest siła ścinająca, stanowi miarę naprężeń ścinających:

$$\text{naprężenie ścinające} = \frac{F_{\parallel}}{A}. \tag{12.42}$$

Modułem Kirchhoffa (inaczej moduł ścinania, moduł sztywności, moduł odkształcalności postaciowej albo moduł sprężystości poprzecznej) jest stała proporcjonalności w Równaniu 12.32, określona przez stosunek naprężenia do odkształcenia. Moduł Kirchhoffa powszechnie oznacza się jako G:

$$G = \frac{\text{naprężenie ścinające}}{\text{odkształcenie ścinające}} = \frac{F_{\parallel}/A}{\Delta x/L_0} = \frac{F_{\parallel}}{A}\frac{L_0}{\Delta x}. \tag{12.43}$$



Rysunek 12.23 Obiekt pod wpływem naprężenia ścinającego: dwie antyrównoległe siły o takich samych wartościach są przykładane stycznie do przeciwległych powierzchni obiektu. Linia przerywana przedstawia odkształcenie. Nie ma zmiany w kierunku poprzecznym do sił działających i poprzeczna długość L_0 pozostaje taka sama. Odkształcenie ścinające charakteryzuje się stopniowym przesunięciem Δx warstw w kierunku stycznym do sił.

Przykład 12.10

Stary regał na książki

Osoba sprzątająca stara się przesunąć ciężki regał z książkami na dywanik, naciskając (popychając) stycznie do powierzchni górnej półki. Jedyny zauważalny efekt tego wysiłku jest podobny do pokazanego na Rysunku 12.23 i znika on, gdy osoba sprzątająca przestaje naciskać. Regał ma 180 cm wysokości i 90 cm szerokości oraz cztery półki o głębokości 30 cm. Wszystkie są częściowo zastawione książkami. Całkowity ciężar szafki i książek wynosi 600 N. Jeśli dana osoba naciska na górną półkę siłą 50 N, wówczas przemieszcza ją poziomo o 15 cm w stosunku do nieruchomej półki. Oblicz moduł Kirchhoffa regału.

Strategia rozwiązania

Jedynymi istotnymi informacjami są wymiary regału, wartość siły stycznej i przesunięcie, które powoduje ta siła. Zapisujemy $F_{\parallel} = 50\,\text{N}$, $\Delta x = 15\,\text{cm}$, $L_0 = 180\,\text{cm}$, oraz $A = 30\,\text{cm} \cdot 90\,\text{cm} = 2700\,\text{cm}^2$ i używamy Równania 12.43 do obliczenia modułu Kirchhoffa.

Rozwiązanie

Podstawiwszy liczby do równania, otrzymamy moduł Kirchhoffa:

$$G = \frac{F_{||}}{A} \cdot \frac{L_0}{\Delta x} = \frac{50\,\text{N}}{2\,700\,\text{cm}^2} \cdot \frac{180\,\text{cm}}{15\,\text{cm}} = \frac{2}{9} \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \frac{20}{9} \cdot 10^3\,\text{Pa} = 2{,}222\,\text{kPa}.$$

Możemy również wyliczyć naprężenie i odkształcenie, odpowiednio:

$$\frac{F_{\parallel}}{A} = \frac{50\ \text{N}}{2700\ \text{cm}^2} = \frac{5}{27}\ \text{kPa} = 185{,}2\ \text{Pa}$$

$$\frac{\Delta x}{L_0} = \frac{15\ \text{cm}}{180\ \text{cm}} = \frac{1}{12} = 0{,}083.$$

Znaczenie

Jeśli w tym przykładzie osoba sprzątająca nacisnęłaby zbyt mocno na półkę, to spowodowane naciskiem ścinanie mogłoby zniszczyć regał. Mechanizm ścinania w znacznym stopniu odpowiada za awarie wypełnionych ziemią zapór i wałów oraz ogólnie powstawanie osuwisk.



12.12 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Wyjaśnij, dlaczego koncepcje modułu Younga i moduł Kirchhoffa nie mają zastosowania do płynów.

12.4 | Sprężystość i plastyczność

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- wyjaśniać, w jakich granicach odkształcenie materiału jest sprężyste;
- opisywać, w jakim zakresie materiały wykazują zachowanie plastyczne;
- analizować sprężystość i plastyczność na wykresie naprężenie-odkształcenie.

Dlaczego stałą proporcjonalności między naprężeniem a odkształceniem nazywamy modułem sprężystości? Co to znaczy, że obiekt ma być sprężysty i jak opisujemy jego zachowanie?

Sprężystość to tendencja ciał stałych i materiałów do powrotu do pierwotnego kształtu, gdy siły zewnętrzne (obciążenie nimi) powodujące deformację przestają oddziaływać. Obiekt jest **sprężysty** (ang. **elastic**), jeśli powraca do pierwotnego rozmiaru i kształtu, gdy obciążenie ustaje. Fizyczne czynniki powodujące sprężystość są różne w różnych materiałach i zależą od ich mikroskopowej struktury. Przykładowo sprężystość polimerów i kauczuków wynika z rozciągania łańcuchów polimerowych pod wpływem działającej siły. Z kolei, sprężystość metali warunkują zmiany rozmiaru i kształtu komórek sieci krystalicznej (które tworzą strukturę metali) pod wpływem sił zewnętrznych.

Dwa parametry określające sprężystość każdego materiału to *moduł sprężystości* i *granica sprężystości*. Duży moduł sprężystości jest typowy dla materiałów trudnych do zdeformowania, czyli wymagających dużego obciążenia w celu osiągnięcia znacznego odkształcenia, np. stalowej taśmy. Mały moduł sprężystości jest typowy dla materiałów łatwo ulegających deformacji pod wpływem obciążenia, np. taśmy gumowej. Jeśli naprężenie spowodowane obciążeniem staje się zbyt duże, wówczas nawet po ustąpieniu obciążenia materiał nie powraca już do pierwotnego kształtu i wielkości, ale odkształca się trwale do innego kształtu i wielkości, ulega trwałemu zdeformowaniu. **Granica sprężystości** (ang. **elastic limit**) to taka wartość naprężeń, po której przekroczeniu materiał przestaje być sprężysty i ulega trwałemu zdeformowaniu.

Nasze postrzeganie sprężystości materiału zależy zarówno od sprężystości, jak i od modułu sprężystości. Na przykład wszystkie kauczuki i gumy charakteryzują się niskim modułem sprężystości i wysoką granicą sprężystości, dlatego są łatwe do rozciągnięcia, a ich wydłużenie jest duże. Wśród materiałów o identycznej granicy sprężystości najbardziej sprężysty jest ten o najniższym module sprężystości.

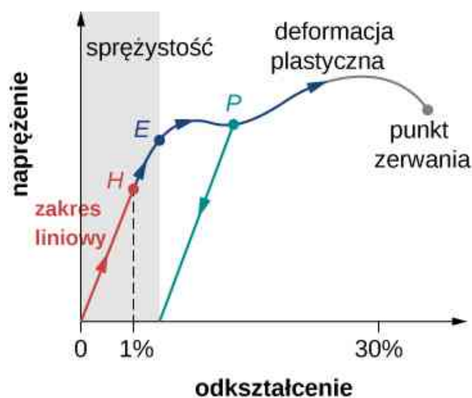
Gdy obciążenie wzrasta od zera, powstałe naprężenie jest wprost proporcjonalne do odkształcenia w sposób podany przez Równanie 12.32, ale tylko, gdy naprężenie nie przekracza pewnej wartości granicznej. Dla wartości naprężeń w tym zakresie liniowej proporcjonalności zachowanie sprężyste możemy opisać analogicznie do prawa Hooke'a dla sprężyny. Zgodnie z nim, wartość rozciągnięcia sprężyny pod wpływem siły jest wprost proporcjonalna do wartości siły. Natomiast siła reakcji sprężyny pod wpływem wydłużenia jest wprost proporcjonalna do tego wydłużenia. W ten sam sposób deformacja materiału spowodowana obciążeniem jest wprost proporcjonalna do obciążenia, a powstałe naprężenie jest wprost proporcjonalne do odkształcenia. **Granica liniowości** (lub granica proporcjonalności) (ang. **linearity limit**, **proportionality limit**) to największa wartość naprężeń, powyżej której naprężenie przestaje być wprost proporcjonalne do odkształcenia. Poza nią związek między naprężeniem a odkształceniem nie jest już liniowy. Kiedy naprężenie przekracza granicę liniowości, ale pozostaje w granicach sprężystości, zachowanie jest wciąż sprężyste, ale związek między naprężeniem a odkształceniem staje się nieliniowy.

W przypadku naprężeń przekraczających granicę sprężystości materiał wykazuje **zachowanie plastyczne** (ang.

plastic behavior), czyli odkształca się nieodwracalnie i nie powraca do pierwotnego kształtu i rozmiaru, nawet po ustąpieniu obciążenia. Gdy naprężenie wzrasta stopniowo poza granicę sprężystości, materiał ulega deformacji plastycznej. W materiałach gumopodobnych ze wzrostem naprężenia następuje wzrost odkształcenia, co oznacza, że stają się one coraz trudniejsze do rozciągania i przerywają się po osiągnięciu punktu zerwania. Materiały plastyczne (ciągliwe), takie jak metale, cechują się stopniowym zmniejszaniem naprężeń przy wzrastającym odkształceniu, co oznacza, że łatwiej je zdeformować, gdy wartości naprężenia i odkształcenia zbliżają się do punktu zerwania. Mechanizmy mikroskopowe odpowiedzialne za plastyczność materiałów różnią się w zależności od materiału.

Możemy wyznaczyć zależność między naprężeniem a odkształceniem na **wykresie naprężenie-odkształcenie** (ang. **stress-strain diagram**). Każdy materiał ma własną charakterystyczną krzywą naprężenie-odkształcenie. Typowy wykres dla plastycznego metalu podlegającego obciążeniu pokazano na Rysunku 12.24. Na tej ilustracji odkształcenie jest względnym wydłużeniem (narysowano nie w skali). Kiedy obciążenie stopniowo wzrasta, zachowanie liniowe (czerwona linia) rozpoczynające się w punkcie bez obciążenia (początek układu) kończy się na granicy liniowości (proporcjonalności) w punkcie H. W przypadku dalszego wzrostu obciążenia powyżej punktu H relacja naprężenie-odkształcenie staje się nieliniowa, ale pozostaje sprężysta. Na rysunku obszar nieliniowy znajduje się między punktami H i E. Coraz większe obciążenia przesuwają naprężenia ku granicy sprężystości E, gdzie kończy się sprężyste zachowanie i rozpoczyna odkształcenie plastyczne. Poza granicą sprężystości, gdy obciążenie ustaje, na przykład w punkcie P, materiał odkształca się do nowego kształtu i rozmiaru wzdłuż zielonej linii. Oznacza to, że jest on trwale odkształcony i nie powraca do pierwotnego kształtu i wielkości, gdy naprężenie staje się zerowe.

Materiał ulega odkształceniom plastycznym w przypadku dużych obciążeń powodujących naprężenia wykraczające poza granicę sprężystości w punkcie E. Pozostaje plastycznie odkształcony, aż naprężenie osiągnie punkt pęknięcia (punkt zerwania). Za nim nie ma już jednej próbki materiału, więc wykres się kończy. Dla kompletności tego opisu jakościowego należy powiedzieć, że granice liniowości, sprężystości i plastyczności oznaczają zakres wartości, a nie jeden wyraźny punkt.



Rysunek 12.24 Typowy wykres naprężeń i odkształceń dla metalu pod wpływem obciążenia. Wykres kończy się w punkcie zerwania. Strzałki wskazują kierunek zmian pod wpływem stale rosnącego obciążenia. Punkty H i E są odpowiednio granicą liniowości (proporcjonalności) i granicą sprężystości. Pomiędzy punktami H i E wykres ma charakter nieliniowy. Zielona linia wychodząca z P przedstawia reakcję metalu po ustaniu obciążenia. Odkształcenie trwałe ma wartość odkształcenia w punkcie, w którym zielona linia przecina oś poziomą.

Wartość naprężenia w punkcie zerwania nazywa się **naprężeniem niszczącym** (lub **naprężeniem zerwania**) (ang. **breaking stress, ultimate stress**). Materiały o podobnych właściwościach sprężystych, np. dwa metale, mogą mieć bardzo różne naprężenia zrywające: dla glinu wynosi ono $2{,}2 \cdot 10^8$ Pa, a dla stali może przyjmować tak wysokie wartości jak $20 \cdot 10^8$ Pa, w zależności od rodzaju. Możemy szybko oszacować, na podstawie Równania 12.33, że w przypadku prętów o przekroju poprzecznym $5\ \text{cm}^2$ obciążenie zrywające dla wykonanego z aluminium wynosi 110 kN, a dla stalowego jest blisko 9 razy większe.

PODSUMOWANIE ROZDZIAŁU 12

KLUCZOWE POJĘCIA

ciśnienie (ang. pressure) siła działająca (naciskająca) na powierzchnię w kierunku normalnym do powierzchni, naprężenie w płynach

ciśnienie normalne (ang. normal pressure) ciśnienie 1 atm, służy jako punkt odniesienia dla poziomu ciśnienia

granica liniowości (lub granica proporcjonalności) (ang. linearity limit, proportionality limit) największa wartość naprężenia, poza którą nie jest ono już wprost proporcjonalne do odkształcenia

granica sprężystości (ang. elastic limit) wartość naprężenia, powyżej której materiał przestaje być sprężysty i ulega trwałemu zdeformowaniu

moduł Helmholtza (współczynnik sprężystości objętościowej lub moduł odkształcalności objętościowej) (ang. bulk modulus) współczynnik sprężystości objętościowej, który charakteryzuje ściśliwość substancji; im większe K tym mniejsza ściśliwość

moduł Kirchhoffa (moduł sprężystości poprzecznej, moduł odkształcalności postaciowej lub moduł ścinania) (ang. shear modulus) moduł sprężystości dla naprężenia ścinającego

moduł sprężystości (ang. elastic modulus) stała proporcjonalności w liniowym związku między naprężeniem a odkształceniem w układzie SI wyrażana w paskalach

moduł Younga (ang. Young's modulus) moduł sprężystości dla naprężenia rozciągającego lub ściskającego

moduł ściśliwości (ang. compressibility) odwrotność współczynnika sprężystości objętościowej (modułu Helmholtza)

moment siły grawitacji (ang. gravitational torque) moment siły na ciele spowodowany jego ciężarem; występuje, gdy środek ciężkości ciała nie znajduje się na osi obrotu

naprężenie (ang. stress) wielkość informująca o sile powodującej deformację, określona jako siła działająca na powierzchnię

naprężenie objętościowe (ang. bulk stress) naprężenie wywołane siłami ściskającymi we wszystkich kierunkach

naprężenie rozciągające (ang. tensile stress) naprężenie spowodowane siłami rozciągającymi tylko w jednym kierunku, występujące, gdy siły rozciągają obiekt, powodując jego wydłużenie

naprężenie zerwania (niszczące) (ang. breaking stress, ultimate stress) wartość naprężenia w punkcie zerwania

naprężenie ścinające (ang. shear stress) naprężenie spowodowane siłami ścinającymi

naprężenie ściskające (ang. compressive stress) naprężenie spowodowane siłami ściskającymi tylko w jednym kierunku

odkształcenie (ang. strain) bezwymiarowa wielkość, która wyraża stopień deformacji przedmiotu lub medium pod wpływem naprężenia

odkształcenie objętościowe (ang. bulk strain) odkształcenie pod wpływem naprężenia objętościowego podawane jako względna zmiana objętości

odkształcenie rozciągające (ang. tensile strain) odkształcenie przy rozciąganiu, wyrażone jako względna zmiana długości, występująca, gdy siły rozciągają obiekt, powodując jego wydłużenie

odkształcenie ścinające (ang. shear strain) odkształcenie spowodowane naprężeniem ścinającym

odkształcenie ściskające (ang. compressive strain) odkształcenie, które występuje w przypadku, gdy siły obciążają przedmiot, powodując jego skrócenie

paskal (Pa) (ang. pascal) w układzie SI jednostka naprężenia i ciśnienia

równowaga (ang. equilibrium) ciało jest w stanie równowagi, gdy jego liniowe i kątowe przyspieszenia są równe zero względem inercjalnego układu odniesienia

równowaga statyczna (ang. static equilibrium) ciało znajduje się w równowadze statycznej, gdy jest w spoczynku w wybranym inercjalnym układzie odniesienia

sprężystość (ang. elastic) cecha obiektu, który powraca do pierwotnego rozmiaru i kształtu, gdy obciążenie nie oddziałuje

warunek równowagi dla sił (ang. first equilibrium condition) wyraża równowagę ruchu postępowego, wszystkie zewnętrzne siły działające na ciało muszą się równoważyć, a ich suma wektorowa wynosić zero

warunek równowagi momentów sił (ang. second equilibrium condition) wyraża równowagę obrotową, wszystkie momenty sił zewnętrznych działających na ciało muszą się równoważyć, a ich suma wektorowa wynosić zero

wykres naprężenie-odkształcenie (ang. stress-strain diagram) wykres przedstawiający zależność między naprężeniem a odkształceniem charakterystycznym dla danego materiału

zachowanie plastyczne (ang. plastic behavior) materiał odkształca się nieodwracalnie, nie powraca do swojego oryginalnego kształtu i rozmiaru, gdy obciążenie przestaje oddziaływać i naprężenie znika

środek ciężkości (ang. center of gravity) punkt, w którym przyłożony jest wektor ciężkości

NAJWAŻNIEJSZE WZORY

Warunek równowagi sił	$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$
Warunek równowagi momentów sił	$\sum_i \vec{M}_i = \vec{0}$
Liniowa relacja pomiędzy naprężeniem i odkształceniem	naprężenie = (moduł sprężystości) · odkształcenie
moduł Younga	$E = \frac{\text{naprężenie rozciągające}}{\text{odkształcenie rozciągające}} = \frac{F_\perp}{A} \cdot \frac{L_0}{\Delta L}$
moduł Helmholtza	$K = \frac{\text{naprężenie objętościowe}}{\text{odkształcenie objętościowe}} = -\Delta p \cdot \frac{V_0}{\Delta V}$
moduł Kirchhoffa	$G = \frac{\text{naprężenie ścinające}}{\text{odkształcenie ścinające}} = \frac{F_{\parallel}}{A} \cdot \frac{L_0}{\Delta x}$

PODSUMOWANIE

12.1 Warunki równowagi statycznej

- Ciało jest w równowadze, gdy znajduje się w ruchu jednostajnym (zarówno postępowym, jak i obrotowym) lub pozostaje w spoczynku. Gdy w wybranym inercjalnym układzie odniesienia nie obraca się ani się nie przemieszcza w ruchu postępowym, mówimy, że ciało znajduje się w równowadze statycznej w tym układzie odniesienia.
- Warunki równowagi wymagają, aby suma wszystkich zewnętrznych sił działających na ciało wynosiła zero (pierwszy warunek równowagi) i suma wszystkich momentów sił zewnętrznych także wynosiła zero (drugi warunek równowagi). Oba warunki muszą być spełnione równocześnie w równowadze, inaczej ciało nie będzie w równowadze.
- Rysunek z rozkładem sił jest użytecznym narzędziem pozwalającym prawidłowo policzyć wszystkie wkłady wszystkich zewnętrznych sił i ich momentów działających na ciało. Rozszerzony schemat rozkładu sił dla równowagi ciała sztywnego musi wskazywać oś obrotu i ramiona sił działających względem niej.

12.2 Przykłady równowagi statycznej

- Różne problemy inżynieryjne można rozwiązać, stosując warunki równowagi ciał sztywnych.
- W praktyce należy określić wszystkie siły działające na ciało sztywne i ich ramiona w obrotach wokół wybranej osi obrotu, a następnie wykonać rysunek rozkładu sił dla ciała. Na jego podstawie można określić wypadkową siłę zewnętrzną i wypadkowy moment sił. Dzięki temu da się ustalić warunek równowagi sił i warunek równowagi momentów sił.
- Przy ustalaniu warunków równowagi możemy przyjąć dowolny inercjalny układ odniesienia i dowolne położenie osi obrotu. Każdy wybór prowadzi do tego samego rozwiązania. Jednak niektóre mogą sprawić, że jego znalezienie będzie bardzo skomplikowane. Osiągamy ten sam rezultat bez względu na podjęte decyzje.

12.3 Naprężenie, odkształcenie i moduł sprężystości

- Siły zewnętrzne działające na ciało (lub ośrodek) powodują odkształcenie, czyli zmianę wielkości i kształtu. Wartość sił odkształcających wyrażana jest przez naprężenie, które w układzie SI mierzy się w jednostce ciśnienia (paskal). Stopień deformacji pod wpływem naprężeń wyraża odkształcenie, które jest bezwymiarowe.
- W przypadku małych naprężeń związek między nim a odkształceniem pozostaje liniowy. Moduł sprężystości jest stałą proporcjonalności w tym liniowym związku.
- Odkształcenie rozciągające (lub ściskające) jest reakcją przedmiotu lub ośrodka na naprężenia rozciągające (lub ściskające). W tym przypadku moduł sprężystości nazywa się modułem Younga. Naprężenie rozciągające (lub ściskające) powoduje wydłużenie (lub skrócenie) przedmiotu albo ośrodka i jest wywołane zewnętrznymi siłami działającymi wzdłuż tylko jednego kierunku, prostopadle do przekroju poprzecznego.
- Odkształcenie objętościowe jest reakcją przedmiotu lub ośrodka na naprężenie objętościowe. W tym przypadku moduł sprężystości nazywa się modułem Helmholtza albo współczynnikiem sprężystości objętościowej. Naprężenie objętościowe zmienia objętość obiektu lub ośrodka i jest spowodowane siłami działającymi na ciało ze wszystkich kierunków, prostopadle do jego powierzchni. Ściśliwość obiektu lub ośrodka jest odwrotnością jego modułu odkształcenia objętościowego.
- Odkształcenie ścinające to odkształcenie obiektu lub ośrodka pod wpływem naprężeń ścinających. Moduł Kirchhoffa (ścinania) jest w tym przypadku modułem sprężystości. Naprężenie wywołują siły działające wzdłuż dwóch równoległych powierzchni obiektu.

12.4 Sprężystość i plastyczność

- Obiekt lub ośrodek jest sprężysty, jeśli powraca do pierwotnego kształtu i wielkości, gdy zanika naprężenie. W odkształceniach sprężystych o wartościach naprężeń mniejszych od granicy proporcjonalności naprężenie jest wprost proporcjonalne do odkształcenia. Gdy wykracza ono poza granice proporcjonalności, odkształcenie jest ciągle sprężyste, ale staje się nieliniowe do granicy sprężystości.
- Przedmiot lub materiał jest plastyczny, gdy naprężenie przekracza granicę. W obszarze plastyczności, gdy zanika naprężenie nie powraca do pierwotnego rozmiaru lub kształtu, ale trwale się odkształca. Zachowanie plastyczne kończy się w punkcie zerwania.

PYTANIA

12.1 Warunki równowagi statycznej

1. Co możesz powiedzieć o prędkości poruszającego się ciała, które jest w równowadze dynamicznej?

2. W jakich warunkach obracające się ciało może pozostawać w równowadze? Podaj przykład.

3. Jakie trzy czynniki wpływają na moment wytworzony przez siłę w stosunku do określonej osi obrotu?

4. Mechanik czasami umieszcza długą rurę na uchwycie klucza, kiedy próbuje odkręcić mocno dokręconą śrubę. W jaki sposób to pomaga?

W następnych czterech zadaniach należy ocenić, czy stwierdzenie jest prawdziwe, czy fałszywe, i wyjaśnić odpowiedź.

5. Jeśli na ciało działa tylko jedna siła zewnętrzna (lub moment), to nie może ono być w stanie równowagi.

6. Jeśli ciało znajduje się w równowadze, musi istnieć parzysta liczba sił działających na nie.

7. Jeśli na ciało działa nieparzysta liczba sił, to nie może być ono w stanie równowagi.

8. Ciało poruszające się po okręgu ze stałą prędkością znajduje się w równowadze obrotowej.

9. W jakim celu linoskoczek używa długiego elastycznego drążka?

12.2 Przykłady równowagi statycznej

10. Czy można oprzeć drabinę o szorstką ścianę, gdy podłoże pozbawione jest tarcia?

11. Powiedz, jak waga sprężynowa i punkt podparcia mogą być użyte do zważenia obiektu, którego masa przekracza maksymalną wartość na skali wagi.

12. Malarz wspina się po drabinie. Czy jest ona bardziej podatna na poślizg, gdy malarz znajduje się w pobliżu jej dołu, czy góry?

12.3 Naprężenie, odkształcenie i moduł sprężystości

Uwaga: O ile nie zaznaczono inaczej, masy drutów, drąż-

ków, prętów i innych elementów należy pominąć. Moduły sprężystości wybranych materiałów podane są w Tabeli 12.1.

13. Dlaczego wiewiórka skacze z gałęzi drzewa na ziemię i ucieka bez uszczerbku na zdrowiu, podczas gdy człowiek przy takim upadku mógłby złamać kości?

14. Kiedy szklana butelka wypełniona octem jest ogrzewana, zarówno ocet, jak i szkło się rozszerzają, ale ocet znacznie bardziej niż szkło. Butelka pęknie, jeśli zostanie napełniona całkowicie. Wyjaśnij, w jaki sposób przestrzeń powietrza nad octem zapobiega rozerwaniu butelki.

15. Cienki drut rozciągnięty pomiędzy dwoma gwoździami w ścianie służy do podtrzymywania dużego obrazu. Czy bardziej prawdopodobne jest, że się zerwie, gdy jest mocno naciągnięty, czy gdy jest luźniejszy i bardziej się ugina?

16. Przeanalizuj ponownie związek pomiędzy naprężeniem a odkształceniem. Czy można znaleźć jakiekolwiek podobieństwa między tymi dwiema wielkościami?

17. Jakiego rodzaju naprężenie stosujesz, gdy naciskasz na końce drewnianego drążka, a jakie gdy ciągniesz za jego końce?

18. Czy naprężenie ściskające może być przyłożone do gumowej taśmy?

19. Czy moduł Younga może mieć ujemną wartość? Jak jest w przypadku modułu Helmholtza?

20. Jeśli hipotetyczny materiał ma ujemny moduł Helmholtza, to co się stanie, gdy go ściśniesz?

21. Omów, w jaki sposób możesz zmierzyć moduł ściśliwości cieczy.

12.4 Sprężystość i plastyczność

Uwaga: O ile nie zaznaczono inaczej, masy drutów, drążków, prętów i innych elementów należy pominąć. Moduły sprężystości wybranych materiałów podane są w Tabeli 12.1.

22. Co to oznacza, że żyłka wędkarska ma wytrzymałość 4 kg?

23. Pręty stalowe są powszechnie umieszczane przed wylaniem betonu. Jaki jest cel tego działania?

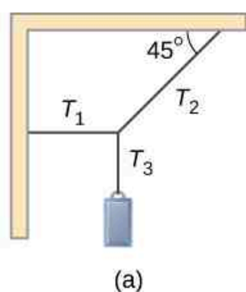
ZADANIA

12.1 Warunki równowagi statycznej

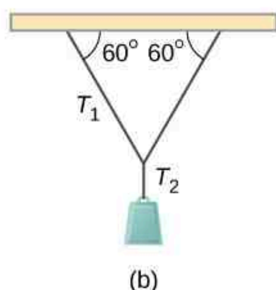
24. Podczas dokręcania śruby naciskasz prostopadle na klucz z siłą 165 N w odległości 0,14 m od środka śruby. Jaki moment siły wywierasz względem środka śruby?

25. Podczas otwierania drzwi naciskasz na nie prostopadle z siłą 55 N w odległości 0,85 m od zawiasów. Jaki moment siły wywierasz na zawiasy?

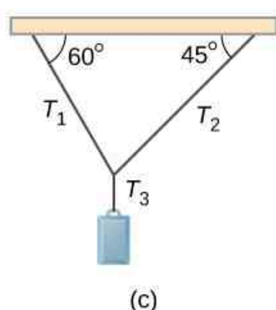
26. Znajdź wartość naprężenia dla każdej linki podtrzymującej pokazanej poniżej. W każdym przypadku ciężar zawieszonego ciała wynosi 100 N, a masy linek można pominąć.



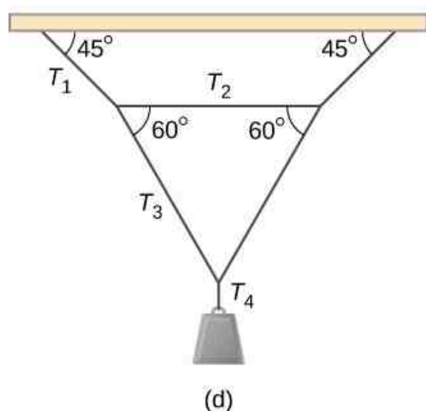
(a)



(b)

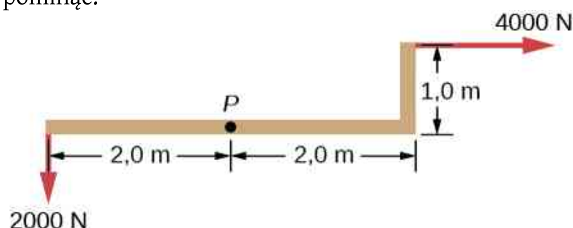


(c)

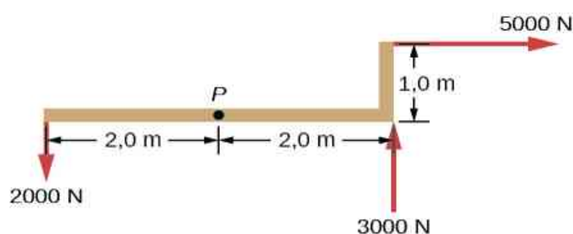


(d)

27. Jaką siłę trzeba przyłożyć w punkcie P, aby utrzymać układ w równowadze? Ciężar konstrukcji możesz pominąć.



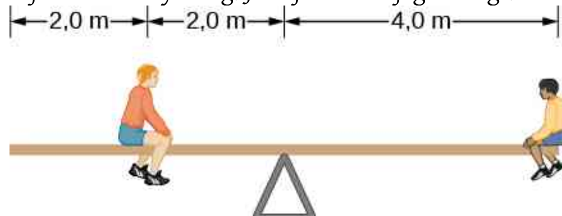
28. Czy można przyłożyć siłę w punkcie P, aby utrzymać w równowadze przedstawiony układ? Ciężar konstrukcji możesz pominąć.



29. Dwoje dzieci naciska po przeciwnych stronach drzwi podczas zabawy. Pchają poziomo i prostopadle do drzwi. Jedno dziecko pcha z siłą 17,5 N w odległości 0,6 m od zawiasów, a drugie pcha w odległości 0,45 m. Jaką siłą musi działać drugie dziecko, aby drzwi się nie poruszyły? Tarcie możesz pominąć.

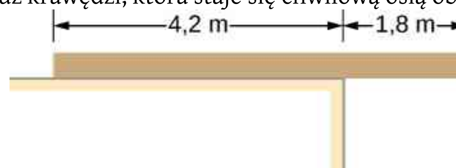
30. Mały samochód o masie 1000 kg ma rozstaw osi wynoszący 3 m. Jeśli 60% jego ciężaru opiera się na przednich kołach, to w jakiej odległości za przednimi kołami znajduje się środek masy pojazdu?

31. Jednolita huśtawka jest zrównoważona w jej środku masy, jak na rysunku poniżej. Mniejszy chłopiec po prawej stronie waży 40 kg. Jaka jest masa jego kolegi?

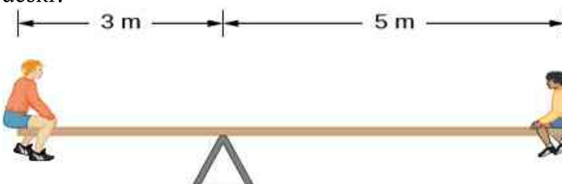


12.2 Przykłady równowagi statycznej

32. Jednolita deska o masie 30 kg i długości 6 m spoczywa na płaskiej powierzchni, jak pokazano poniżej. Jaką maksymalną masę można umieścić na jej prawym końcu, żeby się nie przewróciła? (Wskazówka: gdy deska ma się przewrócić, styka się z powierzchnią tylko wzdłuż krawędzi, która staje się chwilową osią obrotu).

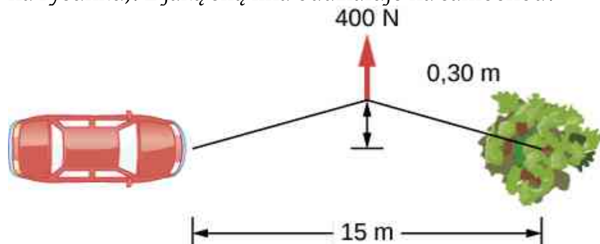


33. Jednolita huśtawka pokazana poniżej jest zrównoważona na podparciu znajdującym się 3 m od lewego końca. Mniejszy chłopiec po prawej waży 40 kg, a większy chłopiec po lewej stronie waży 80 kg. Jaka jest masa deski?



34. Aby wyciągnąć samochód z błota, mężczyzna łączy jeden koniec liny z przednim zderzakiem, a drugi przywiązuje do drzewa oddalonego o 15 m, jak pokazano poniżej. Następnie ciągnie za środek liny siłą 400 N, co

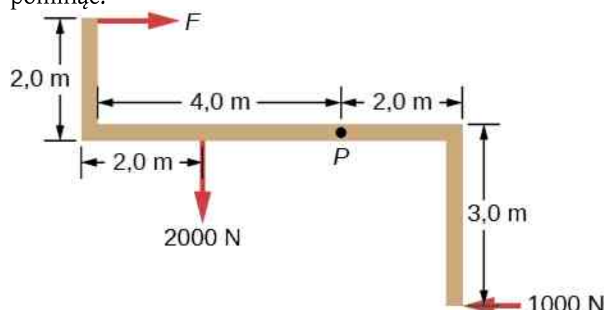
powoduje przesunięcie jej środka o 0,3 m (zaznaczone na rysunku). Z jaką siłą lina oddziałuje na samochód?



35. Jednolite rusztowanie o masie 40 kg i długości 6 m podtrzymują dwie lekkie liny, jak pokazano poniżej. 80-kilogramowy malarz stoi 1 m od lewego końca rusztowania, a jego wyposażenie malarskie znajduje się 1,5 m od prawego końca. Naprężenie lewej liny jest dwukrotnie większe niż prawej. Oblicz naprężenia lin i masę sprzętu.

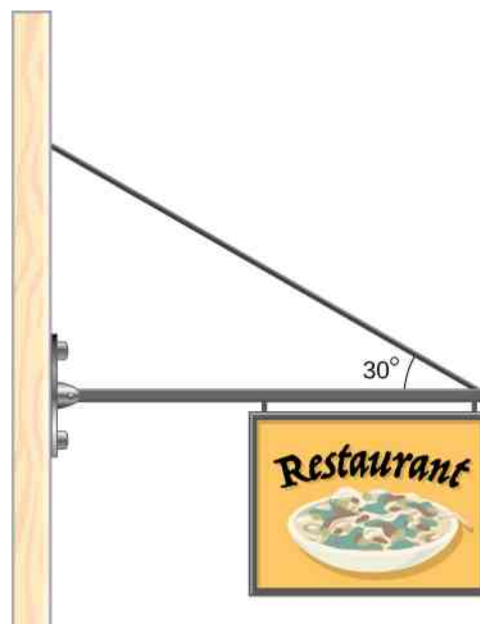


36. Gdy układ przedstawiony poniżej jest podparty w punkcie P, pozostaje w stanie równowagi. Oblicz siłę F i siłę przyłożoną w punkcie P. Ciężar konstrukcji możesz pominąć.



37. Osoba o masie 70 kg chce wejść na dach, w tym celu ustawia sobie na betonowym podłożu 6-metrową aluminiową drabinę o masie 10 kg, jej podstawa oddalona jest 2,0 m od domu. Drabina opiera się o plastikową rynnę, przy czym można założyć, że odbywa się to bez tarcia. Środek masy drabiny znajduje się 2 m od podłoża. Osoba stoi 3 m od dołu. Oblicz normalną siłę reakcji i siły tarcia u podstawy drabiny.

38. Jednolity poziomy wspornik o ciężarze 400 N ma jeden koniec zamocowany do ściany na zawiasach, a do drugiego przymocowano znak o ciężarze 200 N. Wspornik podtrzymuje także linka zamocowana pomiędzy końcem wspornika a ścianą. Przy założeniu, że cały ciężar znaku jest przyłożony na samym końcu słupka, oblicz naprężenie linki i siłę na zawiasie wspornika.

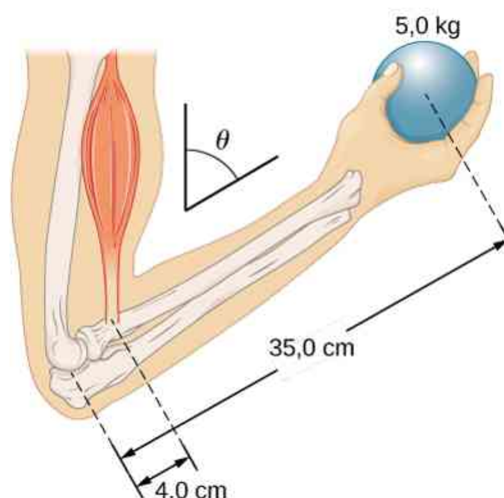


39. Przedramię pokazane poniżej tworzy kąt θ względem ramienia, a w dłoni trzymana jest masa 5 kg. Całkowita masa przedramienia i dłoni wynosi 3 kg, a ich środek masy znajduje się 15 cm od łokcia.

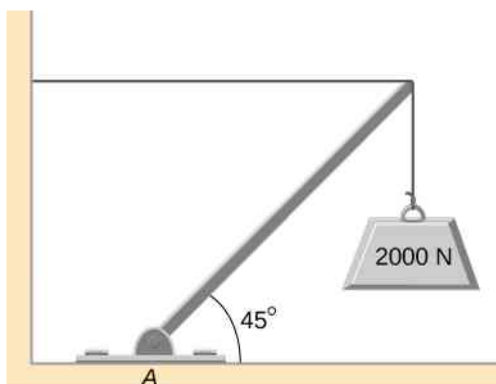
a. (Jaka jest wartość siły, którą mięśnie bicepsa wywierają na przedramię dla $\theta = 60^{\circ}$?

b. Jaka jest wartość siły na stawie łokciowym przy tym samym kącie?

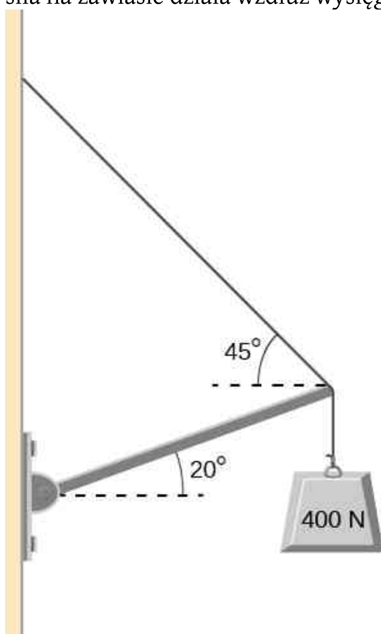
c. Jak te siły zależą od kąta θ?



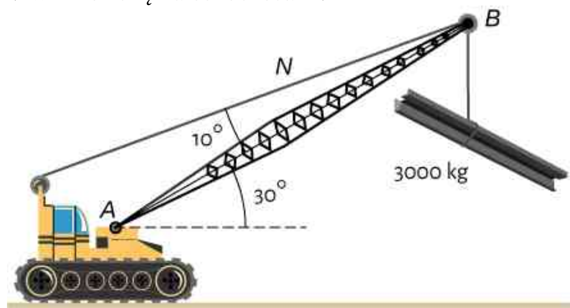
40. Jednolity wysięgnik, pokazany poniżej, o ciężarze 2000 N podtrzymywany jest przez poziomy odciąg i zawias w punkcie A. Jakie siły na wysięgniku są wywołane liną odciągu i ze względu na podparcie w punkcie A? Czy siła w A działa wzdłuż wysięgnika?



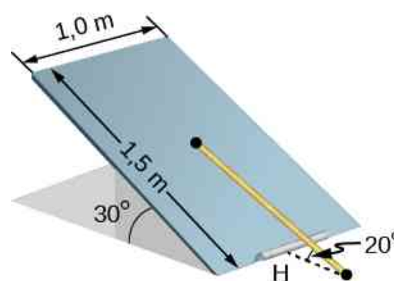
41. Jednolity wysięgnik pokazany poniżej waży 71,35 kg, a z jego prawego końca zwisa obiekt o ciężarze 400 N. Wysięgnik podtrzymują linka i zawias na ścianie. Oblicz naprężenie linki i siłę wywieraną na zawias przez wysięgnik. Czy siła na zawiasie działa wzdłuż wysięgnika?



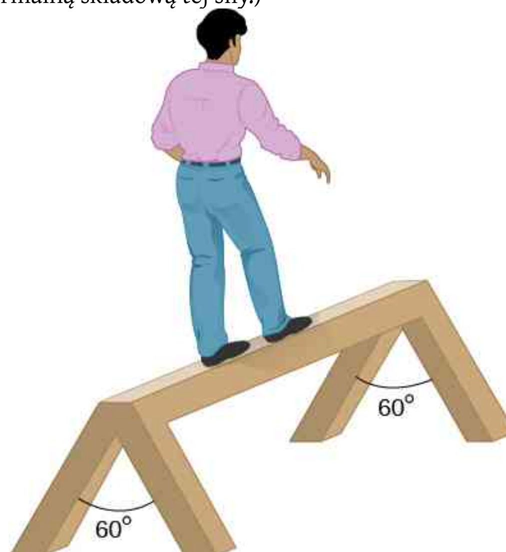
42. Wysięgnik AB dźwigu, podnoszącego ładunek 3000 kg ma długość 12 m. Środek masy wysięgnika znajduje się w jego geometrycznym środku, a jego masa wynosi 1000 kg. Dla przedstawionej sytuacji oblicz naprężenie N w linie i siłę na osi obrotu A.



43. Jednolita klapa, pokazana poniżej, o wymiarach 1 m na 1,5 m i ciężarze 300 N przymocowana jest pojedynczym zawiasem (H) oraz podtrzymywana przez linę zawiązaną pomiędzy jej środkiem a podłogą. Podłoga z klapą tworzy kąt 30°, natomiast z linią kąt 20°. Oblicz naprężenie w linie i siłę na zawiasie.



44. Człowiek o wadze 90 kg idzie po równoważni o długości 2 m, wysokości 1 m i masie 25 kg, jak pokazano poniżej. Oblicz normalną siłę reakcji na każdej nodze w punkcie styku z podłogą, gdy mężczyzna znajduje się w odległości 0,5 m od końca równoważni. (Wskazówka: Najpierw określ całkowitą siłę reakcji na każdym końcu. Jest ona sumą wektorową dwóch sił reakcji, z których każda działa wzdłuż jednej nogi. Normalna siła reakcji, w odniesieniu do podłogi, w punkcie styku z nią jest normalną składową tej siły.)



12.3 Naprężenie, odkształcenie i moduł sprężystości

45. Grafit ołówkowy ma moduł Younga wynoszący $1 \cdot 10^9\ \mathrm{N/m^2}$. Oblicz zmianę długości wkładu w automatycznym ołówku, jeśli naciśniesz go z siłą 4 N. Wkład ma średnicę 0,5 mm i długość 60 mm.

46. Anteny telewizyjne to najwyższe sztuczne konstrukcje na Ziemi. W 1987 roku, fizyk o wadze 72 kg ze sprzętem o masie 400 kg był na szczycie anteny o wysokości 610 m w celu przeprowadzenia eksperymentów grawitacyjnych. O ile antena została ściśnięta, jeśli założymy, że jest ona równoważna stalowemu cylindrowi o promieniu 0,15 m?

47. O ile 65-kilogramowy wspinacz górski rozciągnie nylonową linę o średnicy 0,8 cm, gdy wisi w odległości 35 m poniżej występu skalnego? (Dla nylonu $E = 1{,}35 \cdot 10^9\ \mathrm{Pa}$.)

48. Podczas zamarzania objętość wody wzrasta o 9,05%. Jaką siłę na jednostkę powierzchni pojemnika wywiera woda, gdy zamarza?

49. Rolnik wytwarzający sok winogronowy wypełnia szklaną butelkę po brzegi i mocno ją zakręca. Sok przy ogrzewaniu rozszerza się bardziej niż szkło, w taki sposób, że jego objętość wzrasta o 0,2%. Zakładając, że butelka nie pęknie, oblicz siłę wywieraną na centymetr kwadratowy jej powierzchni, jeśli moduł Helmholtza soku wynosi $1{,}8 \cdot 10^9 \text{ N}/\text{m}^2$

50. Krążek międzykręgowy kręgosłupa jest poddawany działaniu siły ścinającej 600 N. Oblicz jego odkształcenie ścinające, przy użyciu modułu ścinania $1 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$. Krążek międzykręgowy jest równoważny cylindrowi o wysokości 0,7 cm i średnicy 4 cm.

51. Kręgi kręgosłupa są poddawane działaniu siły ścinającej 500 N. Oblicz odkształcenie ścinające, traktując kręg jako cylinder o wysokości 3 cm i średnicy 4 cm. Odnieś ten wynik do uzyskanego w poprzednim zadaniu. Czy problemy z kręgosłupem częściej występują w krążkach czy w kręgach?

52. Oblicz, jakiej siły używa stroiciel aby rozciągnąć stalową strunę fortepianową o 8 mm, jeśli na początku ma ona długość 1,35 m, a jej średnica wynosi 0,85 mm.

53. Aluminiowy wydrążony maszt o wysokości 20 m jest równoważny pod względem wytrzymałości pełnemu cylindrowi o średnicy 4 cm. Silny wiatr ugina go tak samo, jak pozioma siła 900 N przyłożona do szczytu. Jak daleko w bok wygnie się górna część masztu?

54. Drut miedziany o średnicy 1 cm rozciąga się o 1%, kiedy podnosi ładunek z przyspieszeniem 2 m/s^2. Jaki jest ciężar ładunku?

55. W miarę wiercenia otworów każdy nowy odcinek rury podtrzymuje ciężar własny i ciężar rury oraz wiertła pod sobą. Oblicz wydłużenie nowej 6-metrowej stalowej rury, która podtrzymuje wiertło o masie 100 kg i rurę o długości 3 km o gęstości liniowej 20 kg/m. Potraktuj rurę jako pełny cylinder o średnicy 5 cm.

56. Duży jednolity pręt stalowy o gęstości $\rho = 7{,}8 \text{ g/cm}^3$ ma 2 m długości i średnicę 5 cm. Jest on przymocowany do betonowej podłogi pionowo. Jaki będzie normalny nacisk w przekroju poprzecznym pręta zlokalizowany w odległości: (a) 1 m od dolnego końca, (b) w odległości 1,5 m od dolnego końca?

57. Na nylonowej linie wisi 90-kilogramowy wspinacz i rozciąga ją o 25 cm. Jeśli lina miała pierwotnie 30 m długości, a jej średnica wynosi 1 cm, to jaki jest współczynnik Younga dla nylonu?

58. Pręt podtrzymujący most podwieszany ma długość 25 m. Jeśli wykonano go ze stali, to jaka powinna być jego średnica, aby nie rozciągnął się więcej niż 1 cm, podczas przejazdu przez most samochodu ciężarowego o masie 25 ton? Załóż, że pręt podtrzymuje cały ciężar samochodu.

59. Drut miedziany ma długość 1 m, a jego średnica wynosi 1 mm. Jeśli wisi pionowo, to jaką masę należy dodać do jego swobodnego końca, żeby rozciągnąć go o 3 mm?

60. Ciężar 100 N przymocowano do wolnego końca metalowego drutu, wiszącego z sufitu. Gdy dodany zostanie drugi ciężar 100 N, wówczas drut rozciągnie się o 3 mm. Średnica i długość przewodu to odpowiednio 1 mm i 2 m. Jaki jest moduł Younga metalu wykorzystanego do produkcji tego drutu?

61. Moduł Helmholtza materiału wynosi $1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$. O jaką względną wartość zmieni się objętość kawałka tego materiału, gdy naprężenie zwiększy się o 10^7 N/m^2? Załóż, że siła przykładana jest do powierzchni równomiernie.

62. Normalne siły o wartości $1 \cdot 10^6$ N są przykładane równomiernie do kulistej powierzchni, otaczającej objętość cieczy. Powoduje to zmniejszenie promienia z 50 cm do 49,995 cm. Jaki jest moduł Helmholtza cieczy?

63. Linoskoczek wytwarza naprężenie $3{,}94 \cdot 10^3$ N w linie rozpostartej pomiędzy dwoma słupami oddalonymi od siebie o 15 m. Ma ona średnicę 0,5 cm, gdy nie jest rozciągnięta. Jeśli linoskoczek znajdzie się na środku pomiędzy słupami, lina utworzy kąt 5° do poziomu. O ile to naprężenie rozciągnie stalową linę?

64. Używając gumki ołówkowej, wywiera się siłę pionową o wartości 6 N w odległości 2 cm od połączenia gumki z ołówkiem. Ołówek ma średnicę 6 mm i jest trzymany pod kątem 20° do poziomu. (a) O ile ołówek wygnie się prostopadle do swojej długości? (b) Ile wyniesie odkształcenie ściskające wzdłuż ołówka?

65. Normalne siły są przykładane równomiernie do powierzchni kulistej objętości wody o promieniu 20 cm. Jeśli ciśnienie na powierzchni wzrośnie o 200 MPa, to jaki będzie promień kuli?

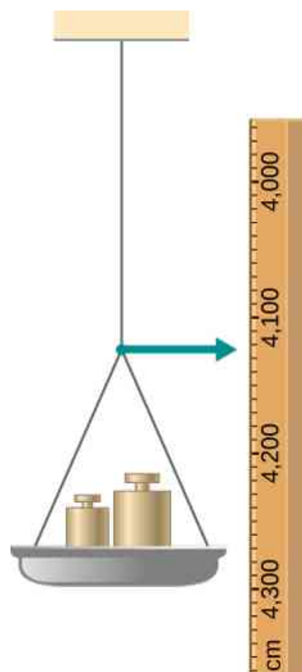
12.4 Sprężystość i plastyczność

66. Jednolita lina o przekroju poprzecznym $0{,}5 \text{ cm}^2$ przerywa się, gdy osiąga naprężenie rozciągające $6 \cdot 10^6 \text{ N}/\text{m}^2$. (a) Jakie jest maksymalne obciążenie, które można podnieść powoli przy stałej prędkości przy użyciu liny? (b) Jakie jest maksymalne obciążenie, które można podnieść przy użyciu liny z przyspieszeniem $4 \text{ m}/\text{s}^2$?

67. Jeden koniec pionowego metalowego drutu o długości 2 m i średnicy 1 mm przymocowano do sufitu, a drugi koniec do szalki o ciężarze 5 N, jak pokazano

poniżej. Położenie wskaźnika nad talerzem wynosi 4 cm. Następnie na szalkę nakładano odważniki, a pozycję wskaźnika zapisywano w przedstawionej tabeli. Narysuj zależność naprężenia od odkształcenia dla tego drutu, a następnie użyj uzyskanej krzywej do określenia modułu Younga i granicy proporcjonalności dla tego metalu. Jaki to może być metal?

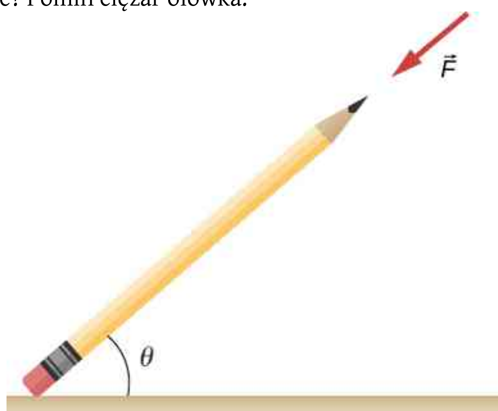
Obciążenie dodane (razem z szalką) (N)	Odczyt na skali (cm)
0	4,000
15	4,036
25	4,073
35	4,109
45	4,146
55	4,181
65	4,221
75	4,266
85	4,316



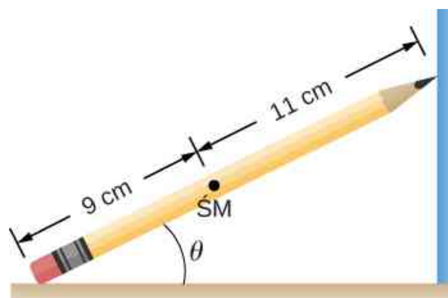
68. Drut aluminiowy o gęstości $\rho = 2{,}7\ \mathrm{g/cm^3}$ wisi z sufitu pionowo. Jak długi musi być drut, aby naprężenie na górnym końcu osiągnęło granicę proporcjonalności, która wynosi $8 \cdot 10^7\ \mathrm{N/m^2}$?

ZADANIA DODATKOWE

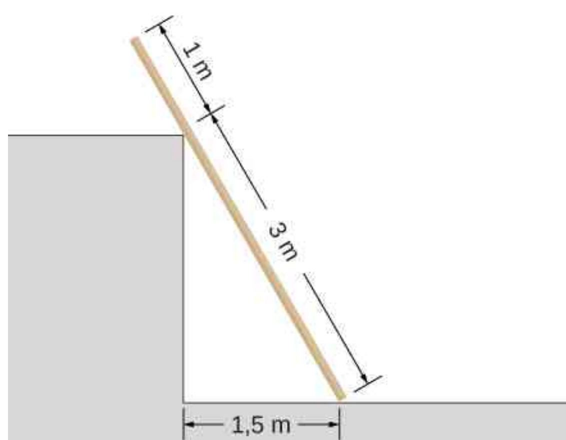
69. Współczynnik tarcia statycznego pomiędzy gumką ołówka a blatem stołu wynosi $\mu_s = 0{,}8$. Jeśli siłę $\vec{F}$ przyłożymy wzdłuż osi ołówka jak pokazano poniżej, to przy jakim minimalnym kącie ołówek nie będzie się ślizgać? Pomiń ciężar ołówka.



70. Ołówek leży w narożniku, jak pokazano poniżej. Zaostrzony koniec dotyka gładkiej pionowej powierzchni, a koniec gumki dotyka szorstkiej poziomej podłogi. Współczynnik tarcia statycznego między gumką a podłogą wynosi $\mu_s = 0{,}8$. Środek masy ołówka znajduje się w odległości 9 cm od końca gumki i 11 cm od ostrza ołówka. Oblicz minimalny kąt θ, dla którego ołówek się nie osunie.



71. Jednolita 4-metrowa deska o ciężarze 200 N opiera się o narożnik ściany, jak pokazano poniżej. Nie ma tarcia pomiędzy nią a narożnikiem ściany. (a) Oblicz siły, które narożnik i podłoga wywierają na deskę. (b) Jaki powinien być minimalny współczynnik tarcia statycznego między podłogą a deską, aby zapobiec ześlizgnięciu się deski?



72. 40-kilogramowy chłopiec skacze z wysokości 3 m, ląduje na jednej nodze i jest w spoczynku w 0,1 s po uderzeniu o ziemię. Załóż, że dochodzi do spoczynku ze stałym opóźnieniem. Jeśli całkowite pole przekroju poprzecznego jego kości w nogach tuż nad kostkami wynosi $3\,\mathrm{cm}^2$, to jakie jest w nich naprężenie ściskające? Kości nóg mogą ulec złamaniu, gdy są narażone na naprężenie większe niż $1{,}7 \cdot 10^8\ \mathrm{Pa}$. Czy chłopcu zagraża złamanie?

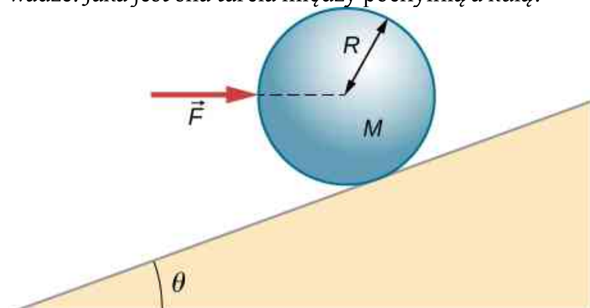
73. Dwa cienkie pręty, jeden ze stali, a drugi z aluminium, są połączone końcami. Każdy z nich ma długość 2 m i przekrój poprzeczny $9{,}1\ \mathrm{mm}^2$. Siłę rozciągającą 10 000 N przyłożono na każdym końcu połączenia. Oblicz:

a. naprężenie w każdym pręcie;
b. odkształcenie w każdym pręcie;
c. wydłużenie każdego pręta.

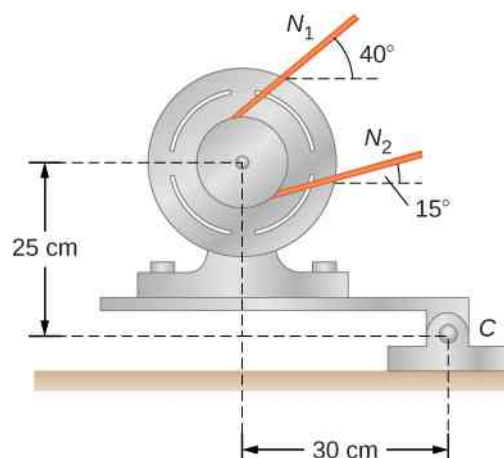
74. Dwa pręty, jeden z miedzi, a drugi ze stali, mają te same wymiary. Jeśli pręt miedziany rozciąga się o 0,15 mm pod pewnym naprężeniem, to jak bardzo rozciąga się pręt stalowy pod takim samym naprężeniem?

ZADANIA TRUDNIEJSZE

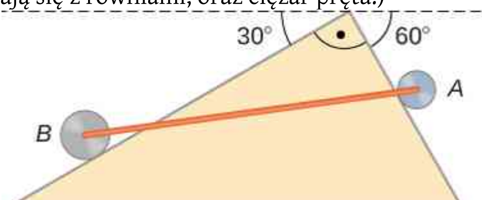
75. Siłę poziomą $\vec{F}$ przyłożono do jednolitej kuli w kierunku do jej środka, jak pokazano poniżej. Znajdź taką wartość tej siły, aby kula pozostała w statycznej równowadze. Jaka jest siła tarcia między pochylnią a kulą?



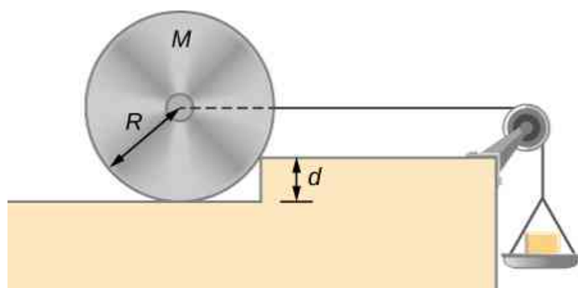
76. Gdy silnik jest zamontowany na uchwycie przegubowym, widocznym poniżej, jego ciężar można użyć do utrzymania naprężenia w pasie napędowym. Gdy silnik nie pracuje, naprężenia N_1 oraz N_2 są równe. Całkowita masa platformy i silnika wynosi 100 kg, a średnica koła pasowego napędu $16\ \mathrm{cm}$. Oblicz dla wyłączonego silnika: (a) naprężenie w pasie, (b) siłę działającą na połączenie przegubowe w punkcie C. Załóż, że środek masy platformy razem z silnikiem znajduje się w środku silnika.



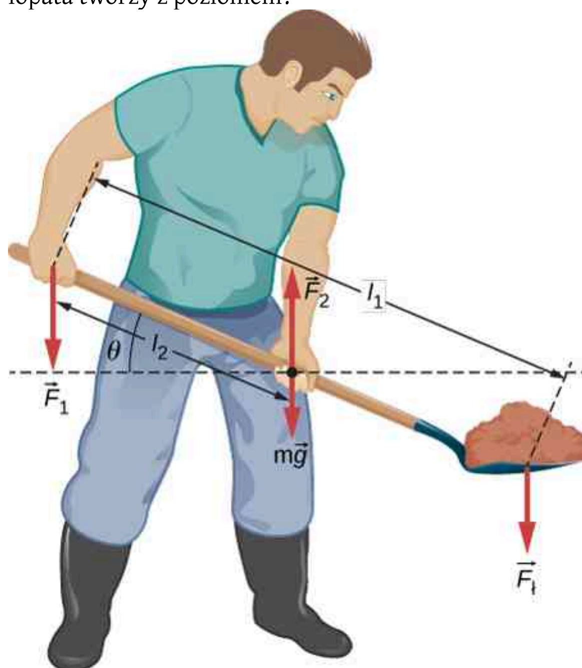
77. Dwa koła A i B o masach m i $2m$ odpowiednio, są połączone jednorodnym prętem o masie $m/2$ jak pokazano poniżej. Koła mogą się swobodnie obracać na pochyłych powierzchniach. Określ kąt, który pręt tworzy z poziomem, gdy układ jest w stanie równowagi. (*Wskazówka:* Na pręcie działa pięć sił, tj. dwa ciężary kół, dwie normalne siły reakcji w miejscach, w których koła stykają się z równiami, oraz ciężar pręta.)



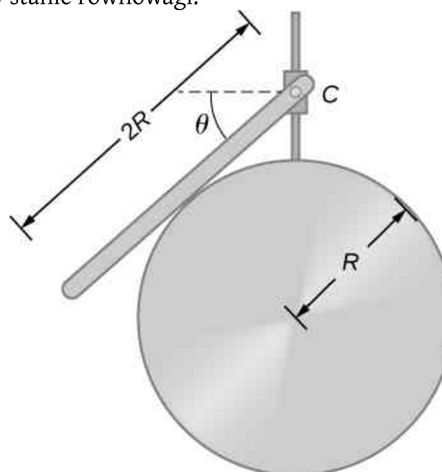
78. Odważniki stopniowo są dokładane na szalkę, aż koło o masie M i promieniu R zostanie wciągnięte na przeszkodę o wysokości d, jak pokazano poniżej. Jaka musi być minimalna masa odważników z szalką, aby to osiągnąć?



79. Żeby podnieść łopatę z ziemią, ogrodnik naciska w dół na jej końcu i podciąga w górę w odległości l_2 od końca, jak pokazano poniżej. Ciężar łopaty to mg i jest on przyłożony w punkcie przyłożenia $\vec{F}_2$. Obliczyć wartości sił $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ jako funkcje l_1, l_2, mg i ciężaru $F_ł$ ładunku. Dlaczego odpowiedź nie zależy od kąta θ, który łopata tworzy z poziomem?



80. Jednolity pręt o długości $2R$ i masie M jest dołączony do małego pierścienia C i spoczywa na powierzchni cylindra o promieniu R jak pokazano poniżej. Jeśli pierścień może przesuwać się bez tarcia wzdłuż prowadnicy pionowej, znajdź kąt θ, przy którym pręt jest w stanie równowagi.

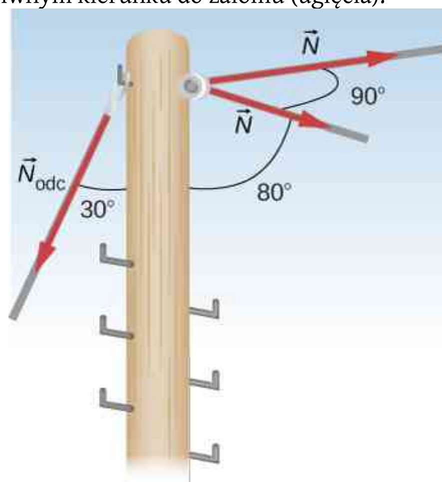


81. Słup pokazany poniżej znajduje się przy załomie $90°$ w linii energetycznej i dlatego jest poddawany większym siłom ścinającym niż słupy w prostych częściach linii. Naprężenie każdej liny wynosi $4 \cdot 10^4$ N pod pokazanymi kątami. Słup ma wysokość 15 m, średnicę 18 cm i można przyjąć, że ma połowę wytrzymałości twardego drewna. Oblicz:

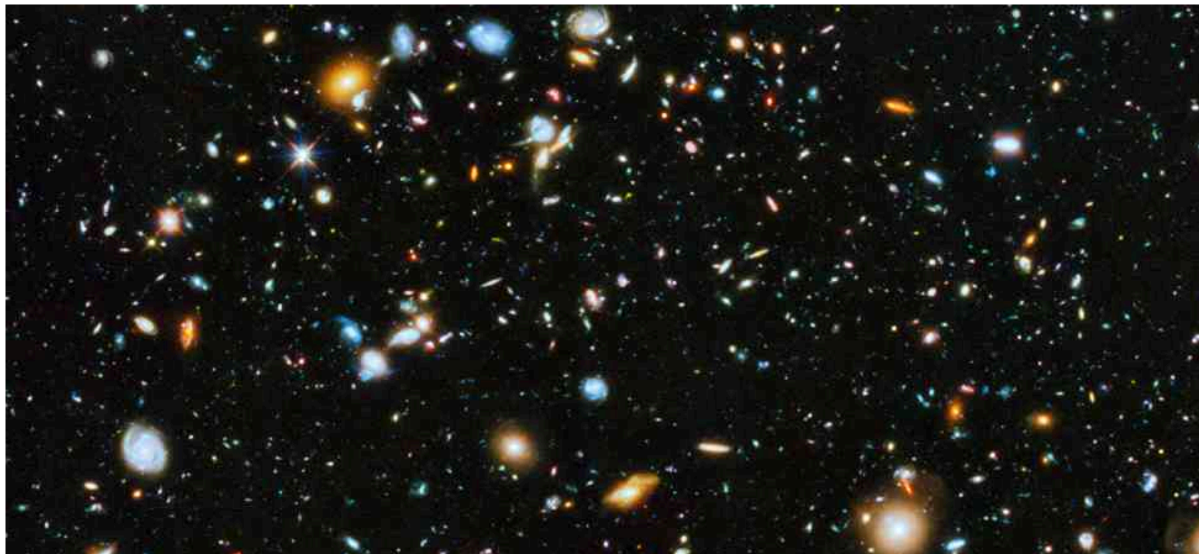
a. względne skrócenie słupa;

b. jak bardzo się ugina i w jakim kierunku;

c. naprężenie drutu w odciągu wystarczające, by utrzymać słup prosto, jeśli odciąg jest przymocowany do szczytu słupa pod kątem $30°$ do pionu. Odciąg jest w przeciwnym kierunku do załomu (ugięcia).



13 | GRAWITACJA



Rysunek 13.1 Obserwowalna część Wszechświata składa się z miliardów galaktyk, które istnieją dzięki sile grawitacji. Grawitacja jest także odpowiedzialna za produkcję energii przez wszystkie gwiazdy, inicjując reakcje termojądrowe w nich zachodzące. To dzięki niej Słońce ogrzewa Ziemię, a światło galaktyk widoczne jest z ogromnych odległości. Większość punktów widocznych na zdjęciu nie przedstawia pojedynczych gwiazd lecz całe galaktyki. (Źródło: modyfikacja zdjęcia udostępnionego przez NASA)

Treść rozdziału

Wstęp

W rozdziale tym poznamy naturę siły grawitacji na przykładzie obiektów tak małych, jak my sami oraz układów tak masywnych jak całe galaktyki. Pokażemy, w jaki sposób siła grawitacji oddziałuje na obiekty na Ziemi oraz na ruch samego Wszechświata. Grawitacja jest siłą działającą na odległość, czyli siłą dzięki której różne obiekty oddziałują na siebie bez fizycznego kontaktu. Wartość tej siły zanika dopiero w nieskończonej odległości od obiektu ją wytwarzającego. Ziemia oddziałuje siłą grawitacyjną na Ciebie, podobnie jak czyni to nasze Słońce, Droga Mleczna oraz miliardy galaktyk, takich jak te przedstawione na powyższym zdjęciu. Galaktyki te są tak odległe, że nie możemy ich zobaczyć gołym okiem.

13.1 | Prawo powszechnego ciążenia

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- wymieniać przełomowe momenty w historii powstawania teorii grawitacji;
- wyznaczać siłę grawitacji między dwiema masami punktowymi;
- szacować siłę grawitacji między grupą obiektów posiadających masę.

Na początku przyjrzymy się historii badań nad grawitacją, uwzględniając szczególnie te zjawiska, które przez tysiące lat inspirowały filozofów i naukowców do poszukiwania ich wyjaśnień. Następnie przeanalizujemy najprostszą formę prawa powszechnego ciążenia i pokażemy, jak należy je stosować.

Historia teorii grawitacji

Pierwsi filozofowie zastanawiali się, dlaczego ciała mają naturalną tendencję do spadania na ziemię. **Arystoteles** (384–322 p.n.e.) wierzył, że z natury skała szuka Ziemi, a ogień z natury szuka niebios. **Brahmagupta** (598~665 n.e.) postulował, że Ziemia jest kulą i wszystkie ciała pozostają do niej w naturalnym powinowactwie, spadając w kierunku jej środka niezależnie od tego, gdzie się znajdują.

Ruch Słońca, Księżyca i planet także był badany przez tysiące lat. Ruchy te z zadziwiającą dokładnością zostały opisane przez **Ptolemeusza** (100~170 n.e.), którego teoria geocentryczna (wszystkie ciała niebieskie krążą wokół Ziemi) przedstawiała trajektorię planet, jako punktów krążących po mniejszych okręgach (epicyklach), których środki z kolei krążą po większych okręgach (deferentach) wokół Ziemi. Aż do XVII wieku brak było jednak jasnych wywodów, w których ktokolwiek powiązałby ruch ciał niebieskich z ruchem ciał spadających na Ziemię.

Mikołaj Kopernik (1473–1543) jest powszechnie uznawany za pierwszą osobę, która sprzeciwiła się geocentrycznemu systemowi Ptolemeusza, sugerując system heliocentryczny, w którym to Słońce jest w centrum Układu Słonecznego. Idea ta została poparta przez niesamowicie precyzyjne pomiary ruchu planet dokonane gołym okiem przez **Tychona Brahe** (1546–1601) oraz ich analizę przeprowadzoną przez **Johannesa Keplera** (1571–1630) i **Galileusza** (1564–1642). Kepler pokazał, że planety poruszają się po elipsach (pierwsze z jego praw omawiane w podrozdziale Prawa Keplera), a **Robert Hooke** (1635–1703) (ten sam, który sformułował prawo Hooke'a dotyczące sprężystości) intuicyjnie zasugerował, że ruchy te wynikają z przyciągania planet przez Słońce. Jednak to **Isaac Newton** (1642–1727) powiązał przyspieszenie ciał w pobliżu powierzchni Ziemi z przyspieszeniem dośrodkowym Księżyca na orbicie okołoziemskiej.

Na koniec w podrozdziale Teoria grawitacji Einsteina, przyjrzymy się teorii względności zaproponowanej przez **Alberta Einsteina** (1879–1955) w 1916 roku. Jego teoria wywodzi się z zupełnie innego podejścia, w którym grawitacja wynika z faktu, że masa zakrzywia czas i przestrzeń. W konsekwencji jego teoria dała początek wielu niezwykłym przewidywaniom, z których zasadniczo wszystkie zostały potwierdzone w ciągu wielu dziesięcioleci po jej opublikowaniu (jednym z tych przewidywań jest także detekcja fal grawitacyjnych, pochodzących z połączenia się dwóch czarnych dziur w roku 2015).

Prawo powszechnego ciążenia

Newton zauważył, że ciała przy powierzchni Ziemi (znajdujące się w odległości R_Z od środka Ziemi) spadają swobodnie z przyspieszeniem g a przyspieszenie dośrodkowe Księżyca, znajdującego się w odległości około $60R_Z$, jest około 60^2 razy mniejsze niż g. Mógł to wyjaśnić zakładając, że pomiędzy dowolnymi dwoma ciałami istnieje siła, której wartość jest proporcjonalna do iloczynu mas tych ciał, podzielonego przez kwadrat odległości między nimi. Dzisiaj wiemy, że odwrotna proporcjonalność do kwadratu odległości jest powszechna w przyrodzie dla źródeł punktowych. Siła, pochodząca od dowolnego źródła punktowego, rozkłada się równomiernie na powierzchni kuli o promieniu r, której środek znajduje się w punkcie, w którym zlokalizowane jest źródło. Powierzchnia tej kuli jest proporcjonalna do r^2. W późniejszych rozdziałach zobaczymy tę samą zależność od odległości dla elektrostatycznej siły kulombowskiej.

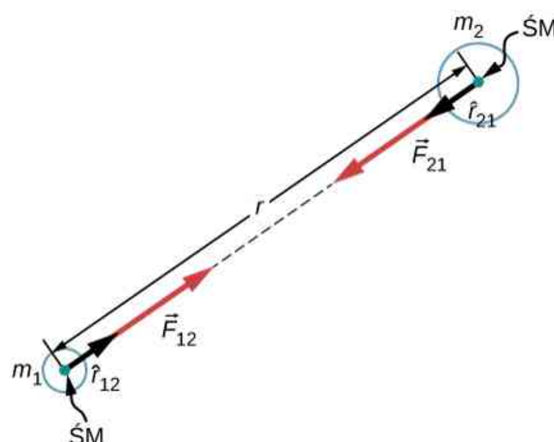
Prawo powszechnego ciążenia

Prawo powszechnego ciążenia (ang. **Newton's Law of Universal Gravitation**) można wyrazić jako

$$\vec{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}_{12}, \tag{13.1}$$

gdzie $\vec{F}_{12}$ jest siłą działająca na ciało 1 ze strony ciała 2, G jest stałą grawitacji, m_1 jest masą ciała 1, m_2 jest masą ciała 2, r jest odległością między tymi ciałami, a $\hat{r}_{12}$ jest wektorem jednostkowym o zwrocie skierowanym od ciała 1 do ciała 2.

Jak widać na Rysunku 13.2, wektor $\vec{F}_{12}$ jest skierowany od ciała 1 do ciała 2 i reprezentuje siłę przyciągania między ciałami. Równy co do wartości, ale o przeciwnym zwrocie, wektor $\vec{F}_{21}$ reprezentuje siłę grawitacji wywieraną na ciało 2 przez ciało 1.



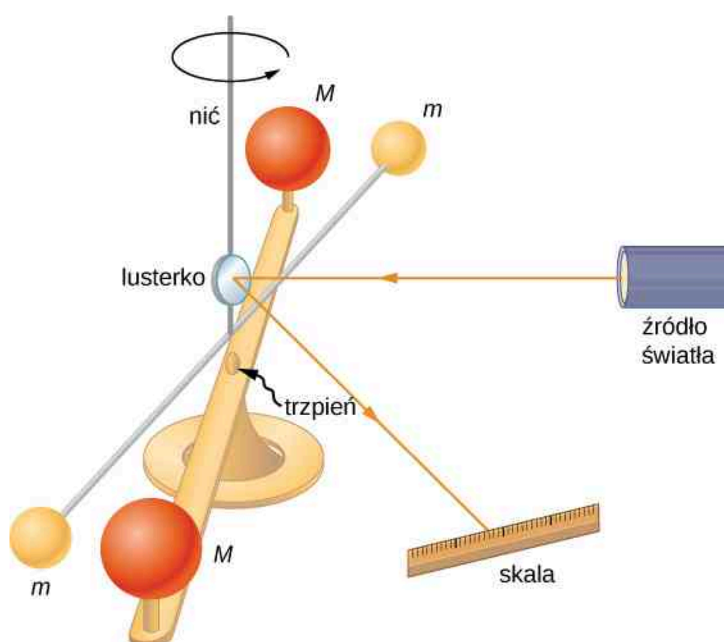
Rysunek 13.2 Siła grawitacji działająca wzdłuż prostej łączącej środki mas dwóch ciał.

Te dwie równe co do wartości lecz przeciwnie skierowane siły odzwierciedlają trzecią zasadę dynamiki Newtona, która była omawiana wcześniej. Należy zwrócić uwagę, że ściślej rzecz ujmując, Równanie 13.1 odnosi się do mas punktowych — cała masa zlokalizowana jest w jednym punkcie. Jednak wzór ten można zastosować także do dowolnych ciał o symetrii sferycznej, gdzie r jest odległością między środkami mas tych ciał. W wielu przypadkach równanie to można zastosować także dla niesymetrycznych ciał, jeśli tylko odległość między nimi jest wystarczająco duża w porównaniu do ich rozmiarów. Wówczas można przyjąć, że r jest odległością między środkami mas tych ciał. W takim przypadku ciała te możemy traktować jak obiekty punktowe.

Doświadczenie Cavendisha

Prawie wiek później, po tym jak Newton ogłosił prawo powszechnego ciążenia, **Henry Cavendish** (1731-1810) wyznaczył stałą proporcjonalności G, przeprowadzając żmudny eksperyment. Skonstruował on urządzenie podobne do przedstawionego na Rysunku 13.3. W stanie równowagi, dwie sztywno zamocowane duże masy umieszczone są symetrycznie w pobliżu dwóch mniejszych mas zawieszonych na skrętnej nici. Przyciąganie grawitacyjne między masami powoduje skręcenie nici, którego wartość można zmierzyć.

Stała G nazywana jest **uniwersalną stałą grawitacji** (ang. **universal gravitational constant**), a jej wartość wyznaczona przez Cavendisha wynosi $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 / kg^2}$. Określenie „uniwersalna” bierze się stąd, że naukowcy uważają, iż stała ta odnosi się do wszystkich mas niezależnie od ich składu oraz że ma ona tę samą wartość w całym Wszechświecie. Wartość stałej G jest niezwykle mała, co świadczy o tym, że siła grawitacji jest bardzo słaba. Siła przyciągania między ciałami o masie tak małej jak nasze ciała, czy nawet budynki, jest nieprawdopodobnie mała. Na przykład dwa ciała o masie 1 kg oddalone od siebie o 1 metr oddziałują na siebie siłą $6{,}7 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N}$. Jest to ciężar typowego ziarnka pyłku kwiatowego.



Rysunek 13.3 Cavendish wykorzystywał urządzenie podobne do przedstawionego na rysunku, aby zmierzyć przyciąganie grawitacyjne między dwiema kulami (m), powieszonymi na skrętnej nici i dwiema nieruchomymi kulami (M). Jest to typowy eksperyment przeprowadzany w laboratoriach studenckich. Wbrew pozorom jest on jednak dość wymagający. Pojazdy przejeżdżające na zewnątrz laboratorium mogą powodować wibracje, które skutecznie zakłócą pomiar siły grawitacji.

Pomimo że grawitacja jest najsłabszą z czterech podstawowych sił przyrody, jej działanie utrzymuje nas na Ziemi, powoduje ruch planet po orbitach wokół Słońca, ruch Słońca wokół środka masy naszej galaktyki oraz łączy od kilku milionów galaktyk w gromady galaktyk. Grawitacja jest siłą formującą Wszechświat.

Strategia rozwiązywania zadań: prawo powszechnego ciążenia

Aby określić ruch powodowany przez siłę grawitacji, wykonaj następujące kroki:

1. Określ dwie masy, pomiędzy którymi chcesz znaleźć siłę grawitacji.
2. Narysuj rysunek, zaznaczając siły działające na każde z ciał i oznacz odległość między ich środkami mas.
3. Zastosuj drugą zasadę dynamiki Newtona do każdej z mas, aby wyznaczyć, w jaki sposób będą się one poruszać.

Przykład 13.1

Zderzenie na orbicie

Rozważmy przypadek dwóch prawie sferycznych pojazdów kosmicznych znajdujących się na pewnej orbicie wokół Ziemi, każdy o masie 9000 kg i średnicy 4 m. Początkowo znajdują się one w spoczynku względem siebie, a odległość między ich środkami mas wynosi 10 m. (Jak zobaczymy w podrozdziale Prawa Keplera, oba pojazdy orbitują wokół Ziemi z tą samą prędkością i oddziałują ze sobą prawie tak samo, jakby znajdowały się w przestrzeni kosmicznej). Wyznacz siłę grawitacji działającą między nimi i ich przyspieszenie początkowe. Oszacuj przez jaki czas będą one dryfować razem, i jak szybko będą poruszać się w momencie zderzenia.

Strategia rozwiązania

Skorzystamy z prawa powszechnego ciążenia, by wyznaczyć siłę działającą między nimi, a następnie użyjemy drugiej zasady dynamiki Newtona, by znaleźć przyspieszenie każdego z pojazdów. Do oszacowania założymy, że ich przyspieszenie jest stałe i użyjemy równań dla ruchu jednostajnie przyspieszonego z rozdziału Ruch prostoliniowy, aby znaleźć czas trwania ruchu i ich prędkość w momencie kolizji.

Rozwiązanie

Wartość siły grawitacji między pojazdami wynosi:

$$\left|\vec{F}_{12}\right| = F_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N{\cdot}m^2}}{\mathrm{kg}} \cdot \frac{9000\ \mathrm{kg}{\cdot}9000\ \mathrm{kg}}{(10\ \mathrm{m})^2} = 5{,}4 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N}.$$

Przyspieszenie początkowe każdego z pojazdów wynosi:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{5{,}4 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N}}{9000\ \mathrm{kg}} = 6 \cdot 10^{-9}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Średnica pojazdów wynosi 4 m, więc pojazdy przemieszczają się od odległości 10 m do 4 m ku sobie, czyli każdy z nich przebywa dystans 3 m. Analogiczne obliczenia do przeprowadzonych powyżej, gdy pojazdy oddalone są od siebie o 4 m, dają wartość przyspieszenia wynoszącą $3{,}8 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m/s^2}$, a więc średnia tych dwóch wartości wynosi $2{,}2 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m/s^2}$. Zakładając stałe przyspieszenie o takiej wartości oraz przyjmując prędkość początkową pojazdów względem siebie równą zero, to pojazdy zderzą się z prędkością daną równaniem:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0), \quad \text{gdzie} \quad v_0 = 0\ \mathrm{m/s},$$

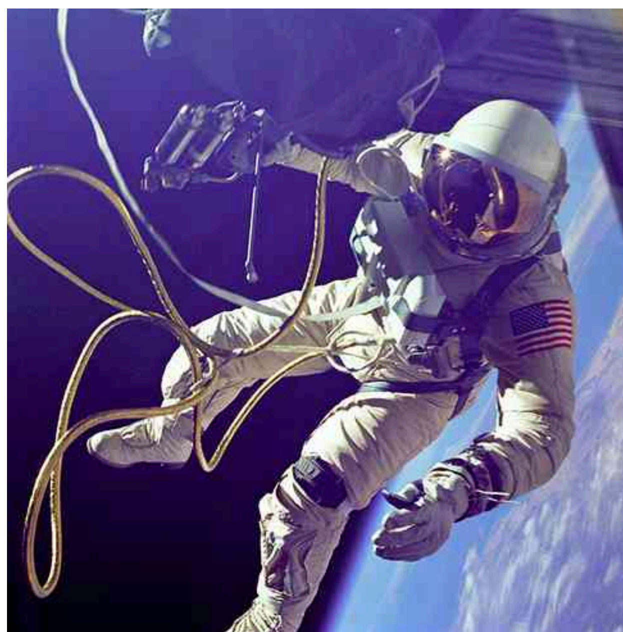
więc:

$$v = \sqrt{2 \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-8}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 3\ \mathrm{m}} = 3{,}6 \cdot 10^{-4}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Następnie, korzystając z równania $v = v_0 + at$, znajdujemy $t = v/a = 1{,}63 \cdot 10^4\ \mathrm{s}$, czyli około 4,6 godziny.

Znaczenie

Powyższe obliczenia, włączając wyznaczoną na początku siłę grawitacji, mają charakter jedynie szacunkowy, gdyż pojazdy tylko w przybliżeniu są sferycznie symetryczne. Uwidaczniają one jednak fakt, że siła ta jest niewiarygodnie mała. Astronauci podczas prac w przestrzeni kosmicznej, nawet na obiekcie tak masywnym jak **Międzynarodowa Stacja Kosmiczna** (ang. **International Space Station (ISS)**), muszą być z nią stale połączeni, jak pokazuje Rysunek 13.4. Przyciąganie grawitacyjne nie mogłoby uchronić astronauty przed odlotem w otwartą przestrzeń kosmiczną, nawet przy najmniejszym, przypadkowym odepchnięciu się od stacji.



Rysunek 13.4 Zdjęcie pokazuje Edwarda White’a przywiązanego do wahadłowca podczas spaceru kosmicznego. (Źródło: NASA)



13.1 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Co dzieje się z siłą grawitacji i przyspieszeniem w trakcie, gdy pojazdy spadają na siebie? Czy oszacowana przez nas prędkość w momencie kolizji będzie większa czy mniejsza? Co się stanie, jeśli masy pojazdów nie będą identyczne? Czy wówczas siły grawitacji działające między pojazdami będą takie same czy różne? A ich przyspieszenie – będzie takie samo czy inne?

Oddziaływanie grawitacyjne między dwoma ciałami o masach porównywalnych z masą pojazdów kosmicznych jest naprawdę niewielkie. Jednak wpływ grawitacji, jaki Ziemia wywiera na ciebie, jest na tyle istotny, że upadek na ziemię nawet z wysokości tylko kilku metrów może być niebezpieczny. W następnym podrozdziale przyjrzymy się sile grawitacji przy powierzchni Ziemi.

Przykład 13.2

Przyciąganie grawitacyjne pomiędzy galaktykami

Wyznacz przyspieszenie naszej galaktyki, **Drogi Mlecznej**, wynikające z obecności najbliższej nam galaktyki o podobnych rozmiarach, **galaktyki Andromedy** (Rysunek 13.5). Przybliżona masa każdej z galaktyk wynosi 800 miliardów mas Słońca, a odległość między nimi wynosi 2,5 miliona lat świetlnych. (Zauważ, że masa galaktyki Andromedy nie jest tak dobrze znana. Uważa się, że jej masa jest nieco większa niż masa naszej galaktyki.) Każda z tych galaktyk ma średnicę wynoszącą w przybliżeniu 100 000 lat świetlnych $(1 \text{ rok świetlny} = 9{,}5 \cdot 10^{15} \text{ m})$.



Rysunek 13.5 Galaktyki oddziałują grawitacyjnie na ogromnych odległościach. Galaktyka Andromedy jest galaktyką spiralną położoną najbliżej Drogi Mlecznej. Galaktyki te zbliżają się do siebie i w przyszłości dojdzie do ich zderzenia. (Źródło: Boris Štromar)

Strategia rozwiązania

Podobnie jak w poprzednim przykładzie skorzystamy z prawa powszechnego ciążenia, aby wyznaczyć siłę przyciągania grawitacyjnego między tymi galaktykami, a następnie wykorzystamy drugą zasadę dynamiki Newtona, aby obliczyć przyspieszenie Drogi Mlecznej. Obie galaktyki możemy traktować jako masy punktowe, gdyż odległość miedzy nimi jest 25 razy większa niż ich rozmiary. Masa Słońca (patrz Dodatek D) wynosi $2 \cdot 10^{30}$ kg. Rok świetlny to jednostka odległości stosowana w astronomii równa odległości, jaką światło pokonuje w próżni w czasie jednego roku, wynosząca $9{,}5 \cdot 10^{15}$ m.

Rozwiązanie

Wartość siły grawitacji wynosi:

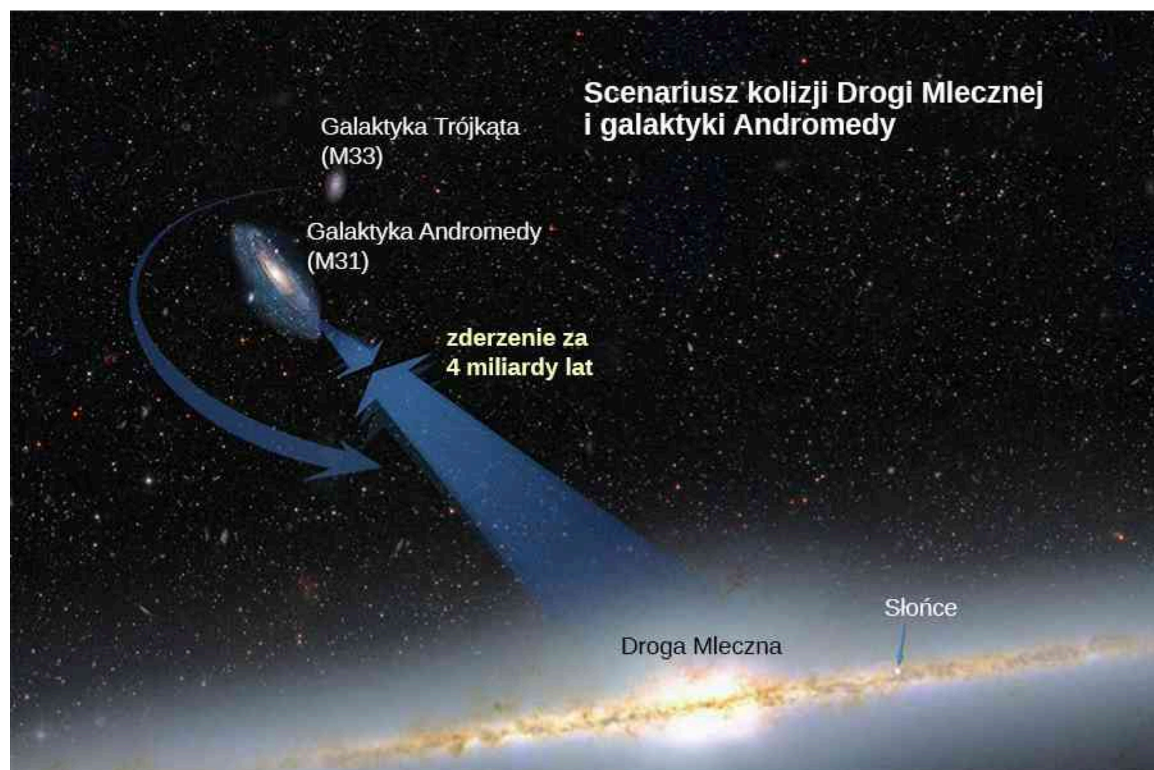
$$F_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2} \cdot \frac{(800 \cdot 10^9\ \cdot 2 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg})^2}{(2{,}5 \cdot 10^6\ \cdot 9{,}5 \cdot 10^{15}\ \mathrm{m})^2} = 3 \cdot 10^{29}\ \mathrm{N}.$$

Przyspieszenie Drogi Mlecznej jest równe:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{3 \cdot 10^{29}\ \mathrm{N}}{800 \cdot 10^9\ \cdot 2 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}} = 1{,}9 \cdot 10^{-13}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Znaczenie

Czy ta wartość przyspieszenia nie wydaje ci się zadziwiająco mała? Jeśli początkowo galaktyki były względem siebie w spoczynku, to będą przyspieszały bezpośrednio w swoim kierunku, w punkcie odpowiadającym środkowi masy galaktyk. Oszacujmy czas, po jakim dojdzie do zderzenia. Początkowe przyspieszenie jest rzędu $\sim 10^{-13}\ \mathrm{m/s}^2$ stąd na podstawie wzoru $v = at$ możemy zobaczyć, że każda z galaktyk potrzebuje $\sim 10^{13}\ \mathrm{s}$, aby osiągnąć prędkość $1\ \mathrm{m/s}$, a wówczas zbliżą się one do siebie tylko o $-0{,}5 \cdot 10^{13}\ \mathrm{m}$. Jest to odległość o dziewięć rzędów mniejsza niż początkowa odległość między nimi. W rzeczywistości takie ruchy galaktyk są bardziej złożone. Wymienione dwie galaktyki, wraz z około 50 innymi mniejszymi galaktykami, są związane grawitacyjnie w lokalną gromadę galaktyk. Nasza lokalna gromada galaktyk jest związana grawitacyjnie z innymi gromadami galaktyk, tworząc tzw. supergromadę galaktyk. Wszystko to jest częścią wielkiego kosmicznego tańca, który pokazano na Rysunku 13.6, a jego przyczyną jest grawitacja.



Rysunek 13.6 Według obliczeń wykonanych w przykładzie oraz na podstawie obserwacji Wszechświata prowadzonych przez astronomów, nasza galaktyka zderzy się z galaktyką Andromedy za około 4 miliardy lat. (Źródło: NASA)

13.2 | Grawitacja przy powierzchni Ziemi

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- wyjaśniać związki między stałymi G i g;
- wyznaczać masę ciał niebieskich na podstawie wartości przyspieszenia grawitacyjnego na ich powierzchni;
- opisywać, w jaki sposób wartość g zmienia się w zależności od położenia i prędkości obrotowej Ziemi.

W tym podrozdziale pokażemy, w jaki sposób stosuje się prawo powszechnego ciążenia na powierzchni planety i jak łączy się ono z tym, czego dowiedzieliśmy się wcześniej o spadku swobodnym. Zbadamy także efekty grawitacyjne wewnątrz ciał kulistych.

Ciężar ciała

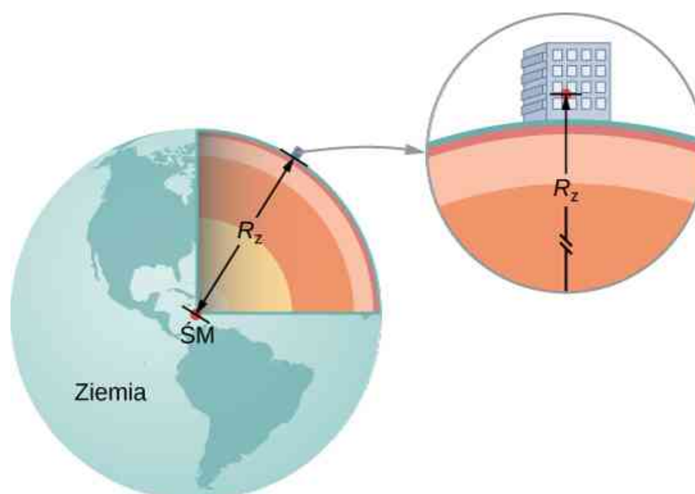
Przypomnijmy, że przyspieszenie swobodnie spadających ciał przy powierzchni Ziemi wynosi około $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$. Siła, która jest źródłem tego przyspieszenia, nazywana jest siłą ciężkości lub potocznie ciężarem ciała. Na podstawie drugiej zasady dynamiki Newtona ma ona wartość mg. Siła ta występuje niezależnie od tego, czy ciało spada swobodnie, czy nie. Teraz już wiemy, że ciężar jest to siła grawitacji działająca pomiędzy ciałem o masie m i Ziemią. Podstawiając mg w miejsce wartości siły $\vec{F}_{12}$ w prawie powszechnego ciążenia, m za m_1 oraz M_Z za m_2, otrzymujemy równanie:

$$mg = G\frac{mM_Z}{r^2},$$

gdzie r jest odległością między środkiem masy Ziemi i danego ciała. Średni promień Ziemi wynosi około 6370 km. W związku z tym dla ciał znajdujących się kilka kilometrów nad powierzchnią Ziemi możemy przyjąć $r = R_Z$ (Rysunek 13.7). Masa ciała m skraca się po obu stronach równania, dając:

$$g = G\frac{M_Z}{r^2}. \quad (13.2)$$

Równanie to tłumaczy, dlaczego wszystkie ciała spadają na Ziemię z tym samym przyspieszeniem, niezależnie od ich masy. Zignorowaliśmy fakt, że także Ziemia uzyskuje pewne przyspieszenie w kierunku spadającego na nią ciała, jednak uproszczenie to jest poprawne, jeśli tylko masa ciała jest zaniedbywalna w porównaniu z masą Ziemi.



Rysunek 13.7 Możemy przyjąć, że odległość między środkiem masy Ziemi i obiektem na jej powierzchni jest równa promieniowi Ziemi pod warunkiem, że rozmiar tego obiektu jest dużo mniejszy niż promień Ziemi.

Przykład 13.3

Masa Ziemi i Księżyca

Czy zastanawiałeś się kiedykolwiek, w jaki sposób wyznaczono masę Ziemi? Na pewno nie można jej po prostu położyć na wadze. Wartość przyspieszenia ziemskiego g oraz promień Ziemi zostały zmierzone dość precyzyjnie wieki temu.

a. Korzystając ze znanych wartości g, R_Z i Równania 13.2, wyznacz masę Ziemi.
b. Określ wartość przyspieszenia grawitacyjnego g na Księżycu. Skorzystaj ze znanej długości promienia Księżyca równej 1700 km (wartość ta także została wyznaczona z dużą dokładnością wieki temu) i załóż, że Księżyc ma taką samą średnią gęstość jak Ziemia, wynoszącą $5500\ \mathrm{kg/m^3}$.

Strategia rozwiązania

Znając wartość przyspieszenia ziemskiego g i promień Ziemi R_Z, możemy użyć Równania 13.2 do wyznaczenia masy Ziemi M_Z . Aby wyznaczyć przyspieszenie grawitacyjne na Księżycu musimy znać jego masę. Do wyznaczenia masy Księżyca wykorzystamy założenie o równej średniej gęstości Ziemi i Księżyca oraz związku między stosunkiem mas a stosunkiem promieni Ziemi i Księżyca.

Rozwiązanie

a. Przekształcając Równanie 13.2, otrzymujemy:

$$M_Z = \frac{gR_Z^2}{G} = \frac{9{,}8\ \mathrm{m/s^2} \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\ \mathrm{m})^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}} = 5{,}95 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}.$$

b. Objętość kuli jest proporcjonalna do sześcianu jej promienia, więc, korzystając z definicji gęstości, otrzymujemy proporcję:

$$\frac{M_K}{M_Z} = \frac{R_K^3}{R_Z^3} \rightarrow M_K = \frac{(1{,}7 \cdot 10^6\ \mathrm{m})^3}{(6{,}37 \cdot 10^6\ \mathrm{m})^3} \cdot 5{,}95 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg} = 1{,}1 \cdot 10^{23}\ \mathrm{kg}.$$

Następnie, używając Równania 13.2=, możemy wyznaczyć wartość przyspieszenia grawitacyjnego na Księżycu:

$$g_K = G\frac{M_K}{R_K^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}} \cdot \frac{1{,}1 \cdot 10^{23}\ \mathrm{kg}}{(1{,}7 \cdot 10^6\ \mathrm{m})^2} = 2{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}.$$

Znaczenie

Kiedy w 1798 roku Cavendish wyznaczył wartość stałej grawitacji G, można było obliczyć masę Ziemi. (W rzeczywistości był to ostateczny cel eksperymentu Cavendisha). Wyznaczona powyżej wartość przyspieszenia grawitacyjnego na Księżycu jest nieprawidłowa. W rzeczywistości średnia gęstość Księżyca wynosi jedynie $3340\ \mathrm{kg/m^3}$, a w związku z tym przyspieszenie grawitacyjne na jego powierzchni ma wartość $g_K = 1{,}6\ \mathrm{m/s^2}$. Newton próbował zmierzyć masę Księżyca przez porównanie wpływu Słońca z wpływem Księżyca na pływy oceaniczne występujące na Ziemi. Otrzymana przez niego wartość była jednak dwukrotnie zaniżona. Najdokładniejsze wartości przyspieszenia grawitacyjnego i masy Księżyca pochodzą z obserwacji ruchu statków kosmicznych, które orbitowały wokół Księżyca. Masa Księżyca może jednak być określona precyzyjnie, bez konieczności podróży na niego. Ziemia i Księżyc poruszają się wokół wspólnego środka masy, a dokładne pomiary astronomiczne pozwalają określić jego lokalizację. Stosunek masy Księżyca do masy Ziemi jest równy stosunkowi odległości między ich wspólnym środkiem masy, a środkiem Księżyca do odległości między ich środkiem masy, a środkiem Ziemi.

W dalszej części rozdziału zobaczymy, że także masa innych ciał niebieskich może zostać wyznaczona na podstawie pomiaru okresu obiegających je satelitów. Jednak zanim Cavendish wyznaczył wartość stałej grawitacji G, masy wszystkich ciał niebieskich były nieznane.

Przykład 13.4

Grawitacja ponad powierzchnią Ziemi

Ile wynosi wartość g na wysokości 400 km ponad powierzchnią Ziemi, na której orbituje Międzynarodowa Stacja Kosmiczna?

Strategia rozwiązania

Na podstawie wartości M_Z oraz podstawiając w tym wypadku $r = R_Z + 400\ \mathrm{km}$, użyjemy Równania 13.2, by obliczyć wartość g.

Z Równania 13.2 otrzymujemy:

$$g = G\frac{M_Z}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}} \cdot \frac{5{,}96 \cdot 10^{34}\ \mathrm{kg}}{(6{,}37 \cdot 10^6\ \mathrm{m} + 400 \cdot 10^3\ \mathrm{m})^2} = 8{,}67\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}.$$

Znaczenie

Często możemy zobaczyć filmy, na których astronauci na stacji kosmicznej znajdują się pozornie w stanie nieważkości, chociaż oczywiście działa na nich siła grawitacji. Porównując obliczoną właśnie wartość g z wartością przyspieszenia ziemskiego na powierzchni Ziemi ($9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$), zauważymy, że astronauci na Międzynarodowej Stacji Kosmicznej nadal mają 88% swojego ciężaru. Wydaje się jedynie, że znajdują się oni w stanie nieważkości, ponieważ w rzeczywistości spadają oni swobodnie. Powrócimy do tej kwestii w podrozdziale Orbity satelitów i ich energia.



13.2 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Jak zmieni się twój ciężar na ostatnim piętrze drapacza chmur w porównaniu do tego, jaki masz na jego pierwszym piętrze? Czy uważasz, że inżynierowie muszą brać pod uwagę zmianę wartości g podczas projektowania wysokich budynków?

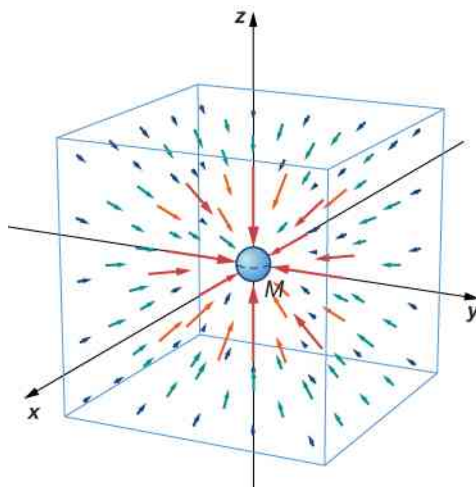
Pole grawitacyjne

Równanie 13.2 jest równaniem skalarnym, określającym zależność wartości przyspieszenia grawitacyjnego jako funkcję odległości od środka masy ciała, będącego źródłem tego przyspieszenia. Możemy jednak zachować postać wektorową siły grawitacji w Równaniu 13.1, i zapisać przyspieszenie w postaci wektorowej jako:

$$\vec{g} = G\frac{M}{r^2}\hat{r}.$$

Określamy wówczas pole wektorowe reprezentowane przez wektor $\vec{g}$ jako **pole grawitacyjne** (ang. **gravitational**

field), którego źródłem jest masa M. Możemy przedstawić to pole tak, jak pokazano na Rysunku 13.8. Linie na rysunku są skierowane wzdłuż promienia w kierunku źródła pola grawitacyjnego i są symetrycznie rozmieszczone wokół masy.



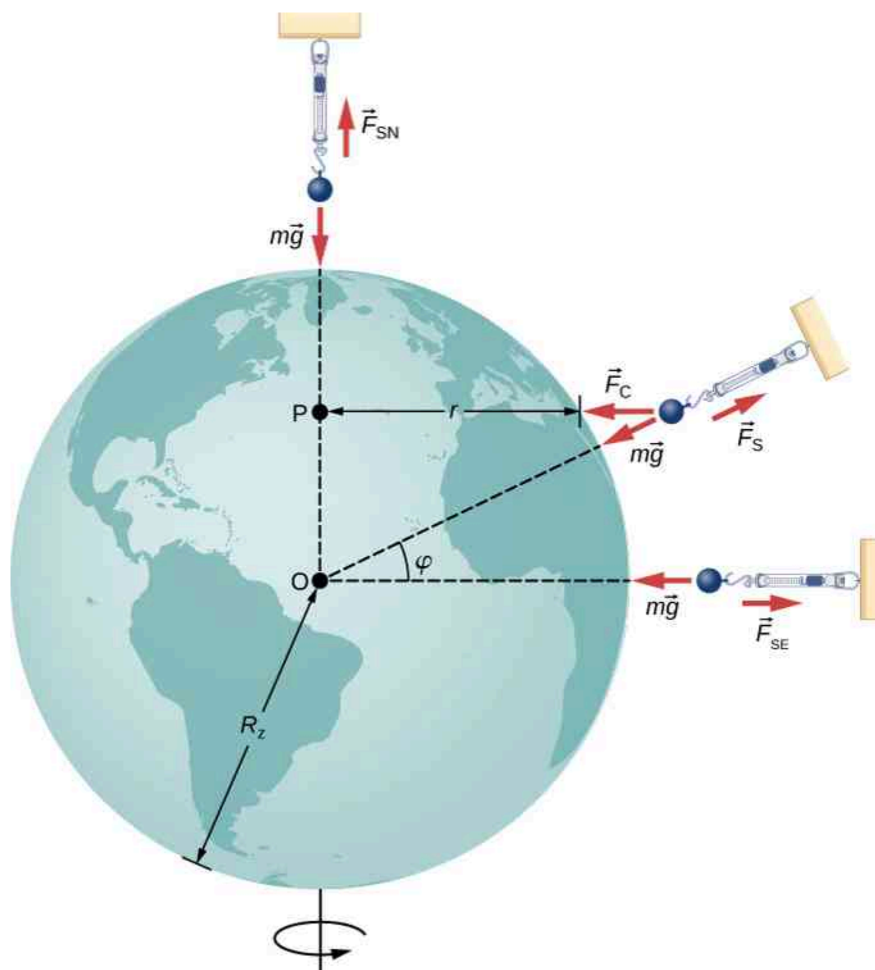
Rysunek 13.8 Trójwymiarowa reprezentacja pola grawitacyjnego wokół masy M. Należy pamiętać, że linie są równomiernie rozłożone we wszystkich kierunkach. (Sześcian został dodany jedynie w celu ułatwienia wizualizacji.)

Podobnie jak w przypadku dowolnego pola wektorowego, kierunek wektora $\vec{g}$ w każdym punkcie jest równoległy do linii pola grawitacyjnego, a jego długość w każdym z punktów jest odwrotnie proporcjonalna do odległości między tymi liniami. Inaczej mówiąc, wartość pola w każdym obszarze jest proporcjonalna do liczby linii pola, które przechodzą przez jednostkową powierzchnię, czyli do gęstości linii pola. Ponieważ linie te są równomiernie rozmieszczone we wszystkich kierunkach (jednorodne pole centralne), to ich liczba na jednostkę powierzchni w odległości r od ciała jest równa całkowitej liczbie linii sił pola, podzielonej przez pole powierzchni kuli o promieniu r, które z kolei jest proporcjonalne do r^2. Dlatego też powyższy rysunek doskonale obrazuje prawo odwrotności kwadratów, a dodatkowo wskazuje kierunek pola. Przedstawiając pole w taki sposób, mówimy, że masa m oddziałuje z polem grawitacyjnym, którego źródłem jest masa M. Koncepcja pól będzie bardzo pomocna w późniejszych rozdziałach dotyczących elektromagnetyzmu.

Ciężar pozorny: wykazanie ruchu obrotowego Ziemi

W podrozdziale Zastosowania praw Newtona dowiedzieliśmy się, że na ciała poruszające się ze stałą prędkością po okręgu działa przyspieszenie dośrodkowe, skierowane wzdłuż promienia w kierunku środka tego okręgu. Oznacza to, że musi istnieć wypadkowa siła skierowana do środka okręgu. Ponieważ wszystkie ciała na powierzchni Ziemi poruszają się po okręgu z okresem wynoszącym 24 godziny, to musi istnieć wypadkowa siła dośrodkowa, działająca na każde z nich skierowana w kierunku środka tego okręgu. O sile dośrodkowej, a nie odśrodkowej, mówimy tylko wtedy, gdy obserwator zewnętrzny, nie znajdujący się na Ziemi, stwierdza, że tą siłą dośrodkową jest w istocie realna siła grawitacji. O sile i przyspieszeniu odśrodkowym może mówić obserwator znajdujący się na Ziemi, czyli odczuwający siłę odśrodkową bezwładności.

Rozpatrzymy najpierw przypadek, gdy ciało o masie m znajduje się na równiku i jest zawieszone na wadze sprężynowej (Rysunek 13.9). Na ciało działa siła $\vec{F}_s$ skierowana w górę od środka Ziemi. Waga sprężynowa wskazuje wartość tej siły, zwanej **pozorną siłą ciężkości** lub **ciężarem pozornym** ciała. Siła ciężkości (mg) skierowana jest w kierunku środka Ziemi. Gdyby Ziemia się nie obracała, to przyspieszenie dośrodkowe byłoby równe zero i w konsekwencji także wypadkowa siła dośrodkowa byłaby równa zero, a w rezultacie otrzymalibyśmy $F_s = mg$. Takie byłoby wówczas wskazanie wagi.



Rysunek 13.9 Na równiku przyspieszenie dośrodkowe a_d ma ten sam kierunek co siła grawitacji. Na szerokości geograficznej φ, kąt pomiędzy a_d a siłą grawitacji jest równy φ. Wartość a_d maleje ze wzrostem szerokości geograficznej, jak funkcja $\cos\varphi$.

W przypadku obracającej się Ziemi, suma tych sił musi zapewnić występowanie przyspieszenia dośrodkowego a_d. Korzystając z drugiej zasady dynamiki Newtona, otrzymujemy:

$$\sum F = F_s - mg = ma_d, \quad \text{gdzie} \quad a_d = -\frac{v^2}{r}. \tag{13.3}$$

Należy zwrócić uwagę, że przyspieszenie odśrodkowe a_d, odczuwane przez obserwatora na Ziemi, ma ten sam kierunek i przeciwny zwrot niż siła ciężkości. Prędkość liniowa w ruchu po okręgu v jest prędkością ciała na równiku, a wtedy r jest równe R_Z. Prędkość tę możemy łatwo obliczyć, zauważając, że ciała na równiku pokonują odległość równą obwodowi Ziemi w czasie 24 godzin. Użyjmy w tym celu alternatywnego wyrażenia na a_d z podrozdziału Ruch w dwóch i trzech wymiarach. Przypomnijmy, że prędkość liniowa jest związana z prędkością kątową ω zależnością $v = r\omega$. Stąd otrzymujemy $a_d = -r\omega^2$. Przekształcając Równanie 13.3 i podstawiając w miejsce $r = R_Z$, pozorna siła ciężkości na równiku wynosi:

$$F_s = m(g - R_Z\omega^2).$$

Prędkość kątowa ruchu obrotowego Ziemi jest taka sama na całej jej powierzchni i wynosi:

$$\omega = \frac{2\pi\,\text{rad}}{24 \cdot 3600\,\text{s}} = 7{,}27 \cdot 10^{-5}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Podstawiając wartości w miejsce R_Z oraz ω, otrzymujemy wartość przyspieszenia odśrodkowego, odczuwanego przez obserwatora na Ziemi, która wynosi $R_Z \omega^2 = 0{,}0337 \text{m/s}^2$. Stanowi ono jedynie 0,34% wartości przyspieszenia grawitacyjnego, więc jest to naprawdę niewielka poprawka.

Przykład 13.5

Pozorna siła ciężkości równa zero

Jak szybko Ziemia musiałaby się kręcić, aby wartość pozornej siły ciężkości działającej na ciała na równiku była równa zero? Jak długo trwałby wówczas dzień?

Strategia rozwiązania

Do Równania 13.3 podstawimy wartość ciężaru pozornego (F_s) równą zero i wyznaczymy odpowiadającą temu wartość przyspieszenia odśrodkowego. Stąd wyznaczymy prędkość liniową, jaką miałyby wówczas ciała na ziemskim równiku. Następnie wyznaczymy długość dnia, wiedząc, że jest to czas potrzebny na jeden pełny obrót Ziemi.

Rozwiązanie

Z Równania 13.2 mamy $\sum F = F_s - mg = ma_d$, zakładając $F_s = 0$, otrzymujemy $g = a_d$. Używając wyrażenia na a_d i podstawiając wartości promienia Ziemi i przyspieszenia ziemskiego dostajemy:

$$a_d = \frac{v^2}{r} = g$$

$$v = \sqrt{gr} = \sqrt{9{,}80 \text{ m/s}^2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6 \text{ m}} = 7{,}91 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Okres obrotu Ziemi T jest to czas potrzebny na jeden pełny obrót Ziemi. W związku z tym prędkość liniowa ciała na równiku jest równa obwodowi okręgu, po którym porusza się ciało, czyli w tym przypadku obwodowi Ziemi, podzielonemu przez T. Dostajemy więc:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6 \text{ m}}{7{,}91 \cdot 10^3 \text{ m/s}} = 5{,}06 \cdot 10^3 \text{ s}.$$

Jest to czas około 84 minut.

Znaczenie

W dalszej części rozdziału zobaczymy, że wyznaczona tu wartości pierwszej prędkości kosmicznej $v = \sqrt{gr} = \sqrt{GM_Z/R_Z}$ jest równa prędkości orbitalnej (tzw. pierwszej prędkości kosmicznej). Z uwagi na obecność atmosfery ziemskiej, a tym samym opór powietrza, ruch satelitów nie jest możliwy w pobliżu powierzchni Ziemi. Z pewnością mogą się one jednak poruszać już na wysokości kilkuset kilometrów nad Ziemią.

Przypadek większych szerokości geograficznych

Przy zbliżaniu się do biegunów $a_d \to 0$ i na samych biegunach $F_s = mg$, tak samo jak w przypadku braku ruchu obrotowego Ziemi. Dla każdej innej szerokości geograficznej φ, sytuacja jest bardziej skomplikowana. Przyspieszenie dośrodkowe jest skierowane w kierunku zaznaczonego na rysunku punktu P, a wówczas promień okręgu $r = R_Z \cos \varphi$. Suma wektorowa siły ciężkości i ciężaru pozornego musi być skierowana do punktu P. Różnica ta jest mała i znacznie wyolbrzymiona na rysunku. W konsekwencji siła $\vec{F}_s$ nie ma już kierunku wzdłuż promienia od środka Ziemi, lecz jest nieznacznie odchylona (niewidoczne na rysunku). Ciężarek zawieszony na linie będzie zawsze wyznaczał pion także wzdłuż tego odchylonego kierunku. Wszystkie budynki na Ziemi są ustawione także wzdłuż odchylonego kierunku, a nie wzdłuż promienia Ziemi. W przypadku najwyższych budynków odchylenie to na ich szczycie wynosi około 1 metra.

Warto również zauważyć, że Ziemia nie jest idealną sferą. Jej wnętrze jest częściowo ciekłe, a to zwiększa wybrzuszenie Ziemi na równiku z powodu ruchu obrotowego. Promień Ziemi jest około 30 km większy w kierunku równika w porównaniu z kierunkiem do biegunów. Jako ćwiczenie pozostawiamy porównanie siły grawitacji na biegunach i na równiku za pomocą Równania 13.2. Różnica wynikająca z innej długości promienia Ziemi jest porównywalna z różnicą wynikającą z ruchu obrotowego i ma taki sam znak. Wydaje się, że naprawdę można się „schudnąć” przenosząc się do tropików.

Grawitacja z dala od powierzchni

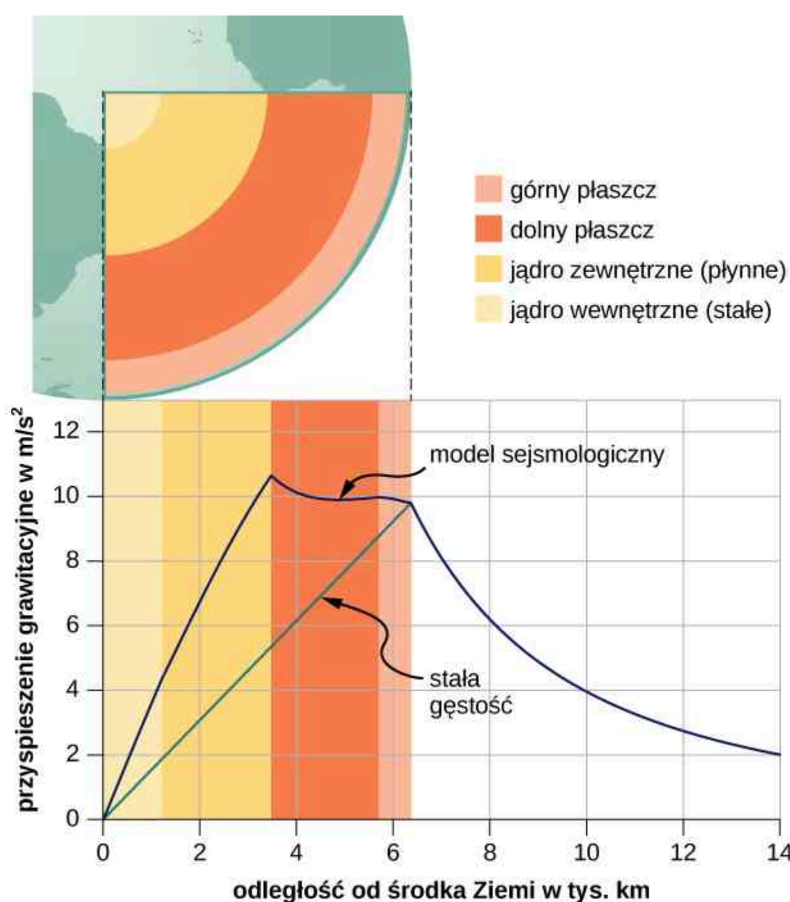
Zaczęliśmy nasze rozważania bez podania dowodu na to, że prawo powszechnego ciążenia ma zastosowanie do sferycznie symetrycznych ciał, gdzie można przyjąć, że cała masa takiego ciała zlokalizowana jest w jego środku. Ponieważ Równanie 13.2 wywodzi się z Równania 13.1, jest ono także poprawne dla sferycznie symetrycznie rozłożonej masy, ale oba równania są poprawne tylko dla $r \geq R_Z$. Jak widzieliśmy w Przykładzie 13.4, 400 km nad powierzchnią Ziemi, gdzie orbituje Międzynarodowa Stacja Kosmiczna, wartość g wynosi $8{,}67\ \text{m/s}^2$. (Dalej zobaczymy, że jest to także wartość przyspieszenia dośrodkowego stacji, czyli takiego, które rejestruje obserwator będący z dala od stacji. Astronauta na stacji odczuwa takie samo co do wartości przyspieszenie, jednak jest ono skierowane na zewnątrz orbity i nazywa się przyspieszeniem odśrodkowym).

Dla promienia $r < R_Z$, Równanie 13.1 i Równanie 13.2 nie są poprawne. Jednak możemy wyznaczyć wartość g dla tych przypadków, korzystając z prawa Gaussa. Jest ono potężnym narzędziem matematycznym, które będziemy badać bardziej szczegółowo w dalszej części kursu. Konsekwencją zastosowania prawa Gaussa do grawitacji jest fakt, że tylko część masy ciała, znajdująca się *wewnątrz kuli o promieniu* r, jest źródłem siły grawitacji. Podobnie jak poprzednio możemy przyjąć, że ta część masy ciała także znajduje się w jego środku. Efekt grawitacyjny części masy ciała, znajdującej się *na zewnątrz promienia* r, znosi się.

Występują tu dwa bardzo ciekawe przypadki szczególne. W przypadku kulistych planet o stałej gęstości, część ich masy zlokalizowanej wewnątrz promienia r jest równa gęstości pomnożonej przez objętość kuli o promieniu r. Masę tę można traktować jako zlokalizowaną w środku planety. Gdy podstawimy w miejsce M_Z tylko tę jej część, która znajduje się wewnątrz kuli o promieniu r, wtedy $M = \rho \cdot (\text{objętość kuli})$ i w miejsce R_Z podstawiamy r, Równanie 13.2 przybiera postać:

$$g = G\frac{M_Z}{R_Z^2} = G\frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{r^2} = \frac{4}{3}G\rho\pi r.$$

Wartość przyspieszenia grawitacyjnego g, i w związku z tym także twój ciężar, malałyby liniowo w miarę zbliżania się do środka dziury wydrążonej wydrążonej w kulistej planecie. Po dotarciu do jej środka byłbyś nieważki, ponieważ masa planety przyciągała by cię jednakowo we wszystkich kierunkach ku jej powierzchni. W rzeczywistości gęstość Ziemi nie jest stała, podobnie jak i cała Ziemia nie jest ciałem stałym. Rysunek 13.10 pokazuje zależność g wynikającą z prawa Gaussa, przy założeniu stałej gęstości Ziemi, oraz bardziej rzeczywistą zależność opartą na szacunkach gęstości Ziemi, pochodzących z danych sejsmicznych.



Rysunek 13.10 Dla $r < R_Z$, wartość przyspieszenia grawitacyjnego g w przypadku stałej gęstości przedstawiono za pomocą zielonej linii. Niebieska linia przedstawia profil g wyznaczony na podstawie sejsmologicznego modelu Ziemi, który jest bardziej zbliżony do rzeczywistego profilu przyspieszenia grawitacyjnego wewnątrz Ziemi.

Drugi ciekawy przypadek dotyczy życia na planecie zbudowanej w formie kulistej powłoki. Ten scenariusz został zaproponowany w wielu opowiadaniach science fiction. Pomijając istotne problemy inżynierskie, powłoka może być zbudowana z zadanym promieniem i masie całkowitej dobranych tak, że wartość przyspieszenia grawitacyjnego g na powierzchni powłoki jest taka sama jak na Ziemi. Czy wiesz, co by się stało, gdybyś zjeżdżał w windzie do wnętrza powłoki, gdzie nie byłoby żadnej masy między tobą i jej środkiem? Jakie korzyści wynikałyby z tego faktu, w przypadku podróżowania na duże odległości pomiędzy dwoma punktami na powierzchni powłoki? Jaki efekt by się pojawił, jeśli planeta by się obracała?

13.3 | Energia potencjalna i całkowita pola grawitacyjnego

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- określać zmianę energii potencjalnej pola grawitacyjnego na dużych odległościach;
- stosować zasadę zachowania energii do wyznaczania prędkości ucieczki;
- określać, czy ciała astronomiczne oddziałują grawitacyjnie.

Badaliśmy energię potencjalną pola grawitacyjnego w rozdziale Energia potencjalna i zasada zachowania energii, gdzie wartość przyspieszenia grawitacyjnego g była stała. Teraz rozszerzymy nasze rozważania na większe odległości tak, że wartość g będzie się zmieniała. Jest to konieczne, aby poprawnie obliczyć energię potrzebną do umieszczenia satelity na orbicie lub wysłać go na misję w otwartą przestrzeń kosmiczną.

Grawitacyjna energia potencjalna ponad powierzchnią Ziemi

Zdefiniowaliśmy pracę i energię potencjalną w rozdziałach Praca i energia kinetyczna oraz Energia potencjalna i zasada zachowania energii. Definicje te są przydatne głównie z uwagi na łatwość, z jaką możemy rozwiązać wiele problemów, korzystając z zasady zachowania energii. Energia potencjalna jest szczególnie użyteczna w przypadku sił, których wartość zależy od położenia, a siły grawitacyjne oddziałują na duże odległości. W rozdziale Energia potencjalna i zasada zachowania energii pokazaliśmy, że zmiana grawitacyjnej energii potencjalnej przy powierzchni Ziemi wynosi $\Delta U = mg(y_2 - y_1)$. Równanie to jest poprawne przy założeniu, że g nie zmienia się znacznie między punktami y_1 i y_2 . Wrócimy teraz do definicji pracy i energii potencjalnej, by wyprowadzić wyrażenie, które jest poprawne dla większych różnic odległości.

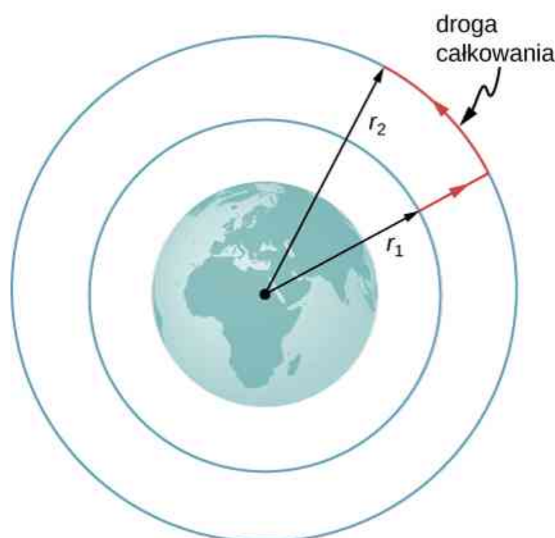
Przypomnijmy, że praca (W) jest całką iloczynu skalarnego siły i przemieszczenia, czyli jest to całka z iloczynu składowej siły wzdłuż przemieszczenia, pomnożonej przez wartość tego przemieszczenia. Przyjmujemy, że zmiana energii potencjalnej ciała ΔU ma wartość ujemną, gdy siła wykonuje pracę nad ciałem. Dla jasności wyprowadzimy wyrażenie na przemieszczanie masy m z odległości r_1 do odległości r_2 od środka Ziemi. Otrzymany wynik może być łatwo uogólniony dla dowolnych dwóch ciał, pomiędzy którymi odległość się zmienia.

Przeanalizujmy Rysunek 13.11. Na rysunku tym przemieszczamy ciało o masie m z położenia r_1 do położenia r_2 względem środka Ziemi. Pole grawitacyjne jest polem zachowawczym (energia ciała w polu jest funkcją jedynie położenia), możemy więc przemieszczać ciało wzdłuż dowolnego toru, a wykonana praca będzie zawsze taka sama. Przyjmijmy więc tor pokazany na rysunku, gdyż znacznie upraszcza to całkowanie. Najpierw przesuwamy ciało wzdłuż kierunku promienia Ziemi z odległości równej długości r_1 do r_2, a następnie poruszamy się równolegle do powierzchni Ziemi, aż dotrzemy do położenia końcowego. W pierwszym etapie ruchu (wzdłuż promienia) siła grawitacji $\vec{F}$ ma przeciwny zwrot do przemieszczenia $\mathrm{d}\vec{r}$, więc energia całkowita ciała wynosi $E = E_{K1} + U_1 = E_{K2} + U_2$ Podczas drugiego etapu ruchu równolegle do powierzchni siła $\vec{F}$ jest prostopadła do $\mathrm{d}\vec{r}$, więc $\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$. W tym etapie ruchu nie jest więc wykonywana żadna praca. Podstawiając wzór na siłę grawitacji do wyrażenia $\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ otrzymujemy:

$$\Delta U = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = GM_Z m \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = GM_Z m \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Ponieważ $\Delta U = U_2 - U_1$, otrzymujemy proste wyrażenie na U:

$$U = -\frac{GM_Z m}{r}. \tag{13.4}$$



Rysunek 13.11 Praca, jako całka określająca zmianę energii potencjalnej, może być obliczona wzdłuż drogi zaznaczonej na czerwono.

Zwróćmy uwagę na dwa istotne fakty wynikające z takiej definicji energii potencjalnej. Po pierwsze $U \to 0$, gdy

$r \to \infty$. Energia potencjalna oddziaływania między dwoma ciałami jest równa zero, dopiero gdy ciała te znajdują się w nieskończonej odległości od siebie. Jedynie zmiana U jest ważna, tak więc wybór $U = 0$ dla $r = \infty$ jest przyjęty jedynie dla wygody. (Przypomnij sobie, że we wcześniejszych zagadnieniach z grawitacji mogliśmy dowolnie przyjąć $U = 0$ na szczycie lub dole budynku, albo gdziekolwiek chcieliśmy). Po drugie zwróćmy uwagę, że U staje się coraz bardziej ujemne, gdy ciała zbliżają się do siebie. Jest to zgodne z tym, czego dowiedziałeś się o energii potencjalnej w rozdziale Energia potencjalna i zasada zachowania energii. Gdy dwa ciała są odsuwane od siebie, należy wykonać pracę przeciwko sile grawitacji i w związku z tym U rośnie (staje się mniej ujemne). Wszystkie ciała naturalnie przyciągają się ku sobie pod wpływem grawitacji w taki sposób, że energia potencjalna oddziaływania grawitacyjnego między nimi dąży do wartości minimalnej.

Przykład 13.6

Wynoszenie ładunku na orbitę

Ile energii trzeba zużyć, aby wynieść statek *Sojuz* o masie 9000 kg z powierzchni Ziemi na wysokość 400 km, by mógł on dostarczyć niezbędne wyposażenie na Międzynarodową Stację Kosmiczną?

Strategia rozwiązania

Skorzystamy z Równania 13.2, by wyznaczyć zmianę energii potencjalnej statku. Tyle właśnie energii należy mu dostarczyć, lub innymi słowy taką musi on wykonać pracę, aby dotrzeć na orbitę.

Rozwiązanie

Zwracając uwagę na fakt, że startujemy z powierzchni Ziemi i zatrzymujemy się na wysokości 400 km nad jej powierzchnią, zmiana U wynosi:

$$\Delta U = U_{\text{na orbicie}} - U_{\text{na Ziemi}} = -\frac{GM_Z m}{R_Z + 400\text{ km}} - \left(-\frac{GM_Z m}{R_Z}\right).$$

Podstawiając wartości:

$$m = 9000\text{ kg}, \quad M_Z = 5{,}96 \cdot 10^{24}\text{ kg}, \quad R_Z = 6{,}37 \cdot 10^6\text{ m}$$

i zamieniając 400 km na $4 \cdot 10^5$ m, wyznaczmy $\Delta U = 3{,}32 \cdot 10^{10}$ J. Jak można było oczekiwać, otrzymany wynik jest dodatni i wskazuje tym samym na wzrost energii potencjalnej statku. W rzeczywistości energia zużywana na wyniesienie statku na orbitę jest równa zmianie energii całkowitej a nie tylko potencjalnej. Innymi słowy, w przykładzie założono, że energia kinetyczna statku na powierzchni Ziemi, wynikająca z jej ruchu dobowego, jest równa energii kinetycznej na orbicie.

Znaczenie

Dla porównania średnie zużycie energii przez gospodarstwo domowe w Polsce wynosi około 1000 kWh miesięcznie. Jest to energia równa:

$$1000\text{ kWh} \cdot 1000\text{ W/kW} \cdot 3600\text{ s/h} = 3{,}6 \cdot 10^9\text{ Jmiesięcznie.}$$

W związku z tym nasz wynik jest równy około 10 miesięcznemu wydatkowi energetycznemu gospodarstwa domowego. Jest to tylko energia potrzebna do wyniesienia ładunku na wysokość 400 km. Jeśli chcemy, aby *Sojuz* pozostał na orbicie, a nie spadł z powrotem na Ziemię i mógł spotkać się ze stacją kosmiczną, to musi on ponadto posiadać energię kinetyczną. Jak zobaczymy w następnym rozdziale, jej wartość jest około pięć razy większa niż ΔU. Ponadto, znacznie więcej energii wydatkowanej jest na uniesienie samego układu napędowego *Sojuza*. Podróże kosmiczne nie są więc tanie.



13.3 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Dlaczego nie użyliśmy prostszego wyrażenia $\Delta U = mg(y_2 - y_1)$? Jak duży błąd otrzymalibyśmy korzystając z niego? (Przypomnij sobie poprzedni wynik z Przykładu 13.4, gdzie wartość przyspieszenia grawitacyjnego g na wysokości 400 km ponad powierzchnią Ziemi wynosi $8{,}67\text{ m/s}^2$.)

Zasada zachowania energii

W rozdziale Energia potencjalna i zasada zachowania energii, pokazaliśmy jak zastosować zasadę zachowania energii

dla układów, w których występują siły zachowawcze. Udało nam się prościej rozwiązać wiele problemów, szczególnie tych związanych z grawitacją, korzystając z zasady zachowania energii. Metody te i sposoby rozwiązywania zadań stosuje się równie dobrze tutaj. Jedyną zmianą jest umieszczenie nowego wyrażenia na energię potencjalną w równaniu zasady zachowania energii $E = E_{K_1} + U_1 = E_{K2} + U_2$.

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{GMm}{r_2} \qquad (13.5)$$

Zwróćmy uwagę, że użyliśmy oznaczenia masy M zamiast M_Z , aby podkreślić, że równanie to nie ogranicza się do problemów związanych jedynie z Ziemią. Nadal zakładamy, że $m \ll M$. (Dla przypadków, w których założenie to nie jest prawdziwe, musimy uwzględnić energię kinetyczną obu ciał i używać dodatkowo zasady zachowania pędu, by określić ich prędkości względem siebie. Jednak sposób postępowania pozostaje taki sam.)

Prędkość ucieczki

Prędkość ucieczki (ang. **escape velocity**) lub inaczej **druga prędkość kosmiczna** jest definiowana jako minimalna prędkość początkowa ciała, jaka jest potrzebna, by przestało ono oddziaływać grawitacyjnie z daną planetą (lub jakimkolwiek innym ciałem, np. Księżycem), czyli by uciekło z jej powierzchni i nigdy nie powróciło. Mimo że w atmosferze występują straty energii, to nie uwzględniamy ich w obliczeniach.

Rozważmy przypadek, w którym obiekt wystrzeliwany jest z powierzchni planety z prędkością początkową w kierunku równoległym do jej promienia i porusza się on po orbicie parabolicznej lub hiperbolicznej. Przy minimalnej prędkości potrzebnej do ucieczki spod wpływu grawitacji planety, obiekt będzie po prostu pozostawał w spoczynku, w nieskończonej odległości od niej. Straci on całą swoją energię kinetyczną, gdy osiągnie nieskończoność, gdzie siła grawitacji planety staje się równa zero. Ponieważ $U \to 0$, gdy $r \to \infty$, to wówczas energia całkowita ciała jest równa zero. Możemy znaleźć prędkość ucieczki obiektu z powierzchni ciała niebieskiego o masie M i promieniu R, przyrównując jego energię całkowitą do zera. Na powierzchni ciała obiekt znajduje się w odległości $r_1 = R$ od środka ciała i posiada prędkość równą prędkości ucieczki ($v_1 = v_u$). Gdy dotrze do odległości $r_2 = \infty$, jego prędkość wyniesie $v_2 = 0$. Podstawiając te wartości do Równania 13.5 otrzymujemy:

$$\frac{1}{2} m v_u^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2} m \cdot 0^2 - \frac{GMm}{\infty} \to 0.$$

Przekształcając to równanie, wyznaczamy prędkość ucieczki równą:

$$v_u = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \qquad (13.6)$$

Zauważmy, że masa m skróciła się po obu stronach równania. Prędkość ucieczki jest taka sama dla wszystkich ciał niezależnie od ich masy. Ponadto nie jesteśmy ograniczeni do powierzchni planety. Za promień R można podstawić dowolną odległość od środka planety ponad jej powierzchnią.

Przykład 13.7

Ucieczka z Ziemi

Zakładając, że nie ma strat energii w związku z oporem powietrza oblicz, ile wynosi prędkość ucieczki z powierzchni Ziemi (tzw. druga prędkość kosmiczna)? Porównaj tę wartość z prędkością ucieczki z wpływu grawitacyjnego Słońca, startując z ziemskiej orbity (tzw. trzecią prędkością kosmiczną).

Strategia rozwiązania

Użyjemy Równania 13.6, w którym podstawimy w miejsce wartości R i M odpowiednio wartości promienia Ziemi i jej masy, by znaleźć prędkość ucieczki z Ziemi. W przypadku Słońca podstawimy odpowiednio promień orbity ziemskiej oraz masę Słońca.

Rozwiązanie

Podstawiając wartości masy Ziemi i jej promień do Równania 13.6, otrzymujemy:

$$v_u = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2} \cdot 5{,}96 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}{6{,}37 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m}}} = 1{,}12 \cdot 10^{4}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Jest to prędkość około 11 km/s lub około 40 000 km/h. By opuścić Układ Słoneczny, startując z orbity Ziemi, podstawiamy $R = R_{S-Z} = 1{,}5 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m}$ oraz $M_S = 1{,}99 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}$. W rezultacie wartość prędkości ucieczki wynosi $v_u = 4{,}21 \cdot 10^{4}\ \mathrm{m/s}$, czyli około 42 km/s lub ponad 150 000 km/h.

Znaczenie

Prędkość potrzebna do ucieczki z wpływu grawitacyjnego Słońca i opuszczenia Układu Słonecznego (tzw. trzecia prędkość kosmiczna) jest prawie cztery razy większa niż prędkość ucieczki z powierzchni Ziemi. Jednak w obu przypadkach istnieje pewien sposób, który pomaga osiągnąć te prędkości. Ziemia obraca się i wynikająca stąd prędkość liniowa wynosi prawie 1,7 km/s przy równiku. Możemy wykorzystać tę prędkość, aby pomóc rakiecie opuścić Ziemię lub osiągnąć orbitę. Z tego powodu wiele organizacji zajmujących się wysyłaniem rakiet buduje platformy startowe w pobliżu równika. Aby uciec z wpływu grawitacji Słońca, istnieje nawet większa pomoc. Ziemia obraca się wokół Słońca z prędkością około 30 km/s. Startując w kierunku ruchu Ziemi po orbicie, musimy osiągnąć dodatkową prędkość wynoszącą tylko brakujące 12 km/s. Ponadto wykorzystanie grawitacji innych planet, tzw. techniki asysty grawitacyjnej, pozwala by sondy kosmiczne osiągały jeszcze większe prędkości. Technika ta polega na tym, że pojazd kosmiczny zbliża się do planety i jest przyspieszany przez jej przyciąganie grawitacyjne. Porusza się on z największą prędkością w chwili największego zbliżenia, a następnie jego prędkość zmniejsza się w tym samym stopniu, w miarę oddalania się pojazdu od planety. Względem planety prędkości pojazdu na długo przed zbliżeniem i długo po nim są takie same. Jednak jeżeli kierunki ruchu pojazdu i planety są poprawnie dobrane, powoduje to znaczny wzrost (lub w razie potrzeby zmniejszenie) prędkości pojazdu względem Układu Słonecznego.


Odwiedź tę stronę internetową (https://openstaxcollege.org/l/21escapevelocit) , by dowiedzieć się więcej o prędkości ucieczki.


13.4 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Czy wysyłając sondę poza granice Układu Słonecznego i startując z powierzchni Ziemi, musimy pokonać tylko przyciąganie grawitacyjne Słońca?

Energia i ciała związane grawitacyjne

Jak wspomniano powyżej, druga prędkość kosmiczna lub prędkość ucieczki może być zdefiniowana jako prędkość początkowa obiektu, który może uciec z powierzchni dowolnego księżyca lub planety. Bardziej ogólnie, jest to taka prędkość, przy której całkowita energia oddziaływania grawitacyjnego jest równa zero w dowolnym położeniu ciała. Jeżeli całkowita energia ciała wynosi zero lub jest większa, ucieka ono spod wpływu grawitacji. Jeśli całkowita energia jest ujemna, ciało nie może uciec spod wpływu grawitacji. Zobaczmy, dlaczego tak się dzieje.

Z wcześniejszej części rozdziału wiemy, że $U \to 0$, gdy $r \to \infty$. Jeśli całkowita energia ciała jest równa zero i ciało to osiąga odległość r bliską nieskończoności, jego energia potencjalna staje się równa zero i tak samo dzieje się z jego energią kinetyczną. Stąd ciało o masie m znajdzie się w spoczynku nieskończenie daleko od źródła pola grawitacyjnego o masie M. Mówimy, że ciało m „po prostu uciekło” spod wpływu M. Jeśli całkowita energia ciała jest dodatnia, to część jego energii kinetycznej pozostaje w odległości $r \to \infty$ od źródła pola grawitacyjnego i na pewno nigdy nie powróci ono do źródła pola. Gdy całkowita energia grawitacyjna ciała jest równa zero lub większa, to mówimy, że ciało nie jest grawitacyjnie związane ze źródłem pola.

Z drugiej strony, jeżeli całkowita energia ciała jest ujemna, wówczas energia kinetyczna musi osiągnąć wartość zero w pewnej skończonej odległości r od źródła pola, gdzie energia potencjalna U jest jeszcze ujemna i równa energii całkowitej ciała. Obiekt nigdy nie może przekroczyć tej skończonej odległości od masy M, ponieważ wymagałoby to dostarczenia pewnej dodatkowej energii kinetycznej. Mówimy wówczas, że ciało jest grawitacyjnie związane ze źródłem pola.

Uprościliśmy tę dyskusję, zakładając, że ciało oddalało się wprost od planety. Godny uwagi jest fakt, że wynik ten można zastosować dla dowolnej prędkości. Energia jest wielkością skalarną i stąd Równanie 13.5 jest równaniem skalarnym — kierunek prędkości nie odgrywa żadnej roli w zasadzie zachowania energii. Możliwe jest więc powstanie grawitacyjnie związanego układu także tam, gdzie ciała nie spadają na siebie, ale orbitują wzajemnie wokół siebie.

Zwróćmy uwagę na jedną ważną rzecz. Wcześniej stwierdziliśmy, że jeżeli całkowita energia wynosi zero lub jest większa, ciało ucieka. Ściśle mówiąc, Równanie 13.5 i Równanie 13.6 mają zastosowanie dla obiektów punktowych.

Znajdują jednak zastosowanie także do wszystkich obiektów sferycznie symetrycznych o skończonych rozmiarach pod warunkiem, że wartość odległości r między ciałami w Równaniu 13.5 jest zawsze większa niż suma promieni tych ciał. Jeśli r będzie mniejsze od tej sumy, ciała się zderzą. (Dla większej wartości r, ale zbliżonej do sumy promieni ciał, powstają grawitacyjne siły pływowe, które mogą wywierać znaczący wpływ na oba ciała, jeśli mają one rozmiary zbliżone do rozmiarów planety. Przyjrzymy się efektom pływowym w podrozdziale Siły pływowe). Ani dodatnia, ani ujemna wartość energii całkowitej nie wykluczają zderzenia się ciał o skończonych rozmiarach. Dla ciał rzeczywistych rolę odgrywa także kierunek ich ruchu.

Przykład 13.8

Jak daleko mogą uciec ciała?

Rozważmy ponownie poprzedni przykład, w którym obliczyliśmy prędkość ucieczki spod wpływu grawitacji Ziemi i spod wpływu grawitacji Słońca, czyli drugą i trzecią prędkość kosmiczną, startując z ziemskiej orbity. Zauważyliśmy, że Ziemia ma już prędkość orbitalną równą 30 km/s. Jak zobaczymy w następnym rozdziale, jest to liniowa prędkość styczna, potrzebna jej do pozostania na orbicie kołowej. Jeśli ciało posiadałoby taką wartość prędkości w odległości równej orbicie Ziemi, ale poruszałoby się prosto od Słońca, to jak daleko mogłoby się oddalić zanim znalazłoby się w spoczynku? Pomiń wpływ efektów grawitacyjnych innych ciał niebieskich.

Strategia rozwiązania

Ciało posiada początkową energię kinetyczną i potencjalną, które musimy obliczyć. Gdy jego prędkość osiągnie wartość zero, znajdzie się ono jednocześnie w maksymalnej możliwej odległości od Słońca. Użyjemy zasady zachowania energii z Równania 13.5, aby znaleźć odległość, przy której energia kinetyczna ciała jest równa zero.

Rozwiązanie

Początkowe położenie ciała jest równe promieniowi orbity ziemskiej, a prędkość początkowa jest równa 30 km/s. Prędkość końcowa wynosi zero, więc, korzystając z równania zasady zachowania energii, możemy wyznaczyć odległość tego punktu. Podstawiając $R_{S-Z} = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m i masę Słońca $M_S = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg, otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r_2},$$
$$\frac{1}{2}v_1^2 - \frac{GM}{r_1} = \frac{1}{2}v_2^2 - \frac{GM}{r_2},$$

skąd po skróceniu masy m i wyznaczeniu r_2 otrzymujemy wartość $r_2 = 3 \cdot 10^{11}$ m. Zauważ, że jest to odległość dwukrotnie większa od odległości Ziemi od Słońca. Miniemy więc orbitę Marsa, zatrzymując się między nim a pasem planetoid.

Znaczenie

Ciało w tym przypadku osiągnęło odległość równą dokładnie dwukrotności odległości początkowej. Przekonamy się, dlaczego tak się stało w następnym rozdziale, kiedy obliczymy jego prędkość na orbicie kołowej.



13.5 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Załóżmy, że jesteś w statku kosmicznym orbitującym wokół Słońca w odległości równej orbicie Ziemi, ale z dala od Ziemi (tak, że można zaniedbać jej wpływ). W jaki sposób możesz zmienić kierunek prędkości stycznej do orbity na kierunek radialny (skierowany wzdłuż promienia orbity) tak, abyś mógł następnie przelecieć przez orbitę Marsa? Co byłoby wymagane, abyś zmienił jedynie kierunek prędkości?

13.4 | Orbity satelitów i ich energia

Cel dydaktyczny

w tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać mechanizm ruchu po orbitach kołowych;
- znajdować okres i prędkość ruchu satelitów po orbicie;
- określać, czy ciała oddziałują grawitacyjnie.

Księżyc krąży wokół Ziemi. Z kolei Ziemia i inne planety krążą wokół Słońca. Przestrzeń nad naszą atmosferą jest wypełniona sztucznymi satelitami krążącymi po orbicie. Zbadamy najprostsze z tych orbit, orbity kołowe, aby zrozumieć zależność między prędkością, a okresem obiegu planet i satelitów, w zależności do ich położenia oraz od tego, wokół jakiego ciała orbitują.

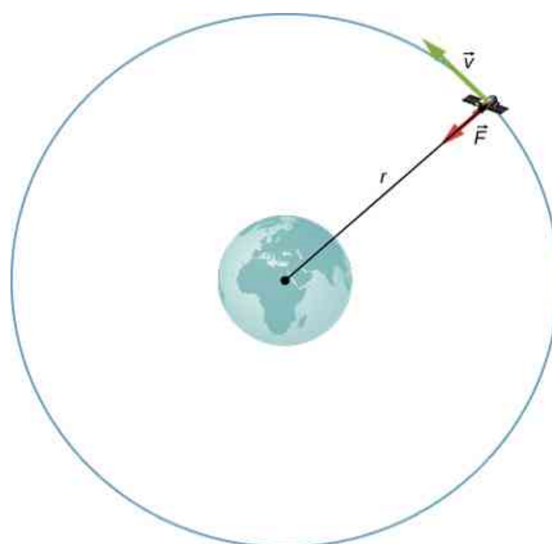
Orbity kołowe

Jak wspomnieliśmy na początku tego rozdziału, Mikołaj Kopernik pierwszy zasugerował, że Ziemia i wszystkie pozostałe planety krążą wokół Słońca po okręgu. Zauważył także, że okres obiegu po orbicie zwiększa się wraz z odległością od Słońca. Późniejsza analiza przeprowadzona przez Keplera wykazała, że orbity te są w rzeczywistości eliptyczne, chociaż orbity większości planet w Układzie Słonecznym są prawie okrągłe. Odległość orbity Ziemi od Słońca zmienia się zaledwie o 2%. Wyjątkiem jest niecentryczna orbita Merkurego, którego odległość od Słońca zmienia się o prawie 40%.

Wyznaczenie **prędkości orbitalnej** (ang. **orbital speed**) i **okresu orbitalnego** (ang. **orbital period**) satelity jest znacznie łatwiejsze dla orbit kołowych, więc poczynimy takie właśnie założenie w poniższym wyprowadzeniu. Jak pokazaliśmy w poprzednim podrozdziale, ciało o ujemnej energii całkowitej jest związane grawitacyjnie, a zatem znajduje się na orbicie. Potwierdzą to nasze obliczenia dla szczególnego przypadku orbit kołowych. Skupimy się na ciałach obiegających Ziemię, ale nasze wyniki mogą zostać uogólnione na inne przypadki.

Rozważmy satelitę o masie m, który znajduje się na orbicie kołowej wokół Ziemi w odległości r od jej środka (Rysunek 13.12). Jego przyspieszenie dośrodkowe jest skierowane do środka Ziemi. Siła grawitacji Ziemi jest jedyną działającą siłą, więc z drugiej zasady dynamiki Newtona mamy:

$$\frac{GmM_Z}{r^2} = ma_d = \frac{mv_{\text{orb}}^2}{r}.$$



Rysunek 13.12 Satelita o masie m orbitujący wokół Ziemi w odległości r od jej środka. Siła grawitacyjna powoduje powstanie przyspieszenia dośrodkowego.

Aby wyznaczyć prędkość orbitalną rozwiązujemy powyższe równanie zauważając, że masa m się skraca i w rezultacie otrzymujemy:

$$v_{\text{orb}} = \sqrt{\frac{GM_Z}{r}}. \tag{13.7}$$

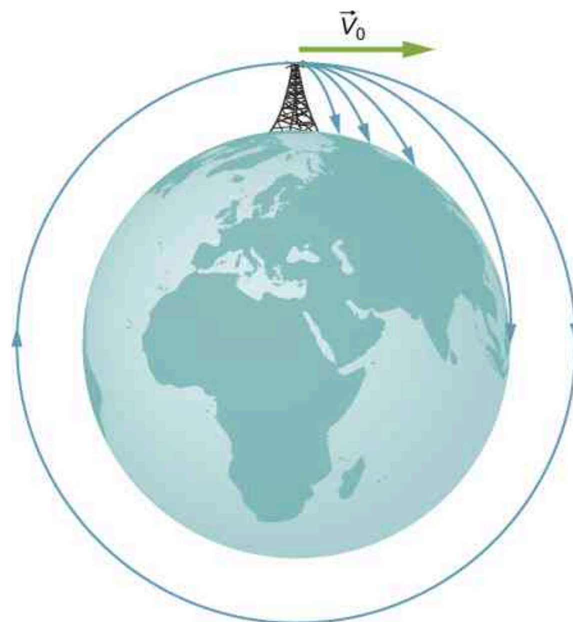
Analogicznie do Równania 13.2 i Równania 13.6, Równanie 13.7 jest niezależne od masy m. Wartości przyspieszenia grawitacyjnego g, prędkości ucieczki i prędkości orbitalnej zależą tylko od odległości od środka planety oraz jej masy M, a nie zależą od masy ciała m, na które działa siła grawitacji planety. Zauważ podobieństwa w równaniach na v_{orb} i v_{u}. Prędkość ucieczki jest dokładnie o $\sqrt{2}$ razy większa (czyli około 40%), niż prędkość orbitalna. Zwróciliśmy uwagę na tą zależność w Przykładzie 13.7 i pozostaje ona spełniona w odniesieniu do satelity, znajdującego się na dowolnej orbicie.

Aby wyznaczyć okres ruchu ciała po orbicie kołowej zauważmy, że satelita porusza się po obwodzie orbity $2\pi r$ z okresem T. Z definicji prędkości wynika $v_{\text{orb}} = 2\pi r/T$. Podstawiając tę zależność do Równania 13.7 i przekształcając, otrzymujemy:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_Z}}. \tag{13.8}$$

W następnym podrozdziale zobaczymy, że równanie to reprezentuje trzecie prawo Keplera dla przypadku orbit kołowych. Potwierdza to również obserwacje Kopernika, że okres obiegu planety wokół Słońca rośnie wraz ze wzrostem jej odległości od Słońca. Do Równania 13.8 musimy tylko podstawić masę Słońca M_S zamiast masy Ziemi M_Z.

Podsumujemy tę część naszych rozważań, wracając do wcześniejszej dyskusji o astronautach, którzy na orbicie wydawali się znajdować w stanie nieważkości, podczas gdy w rzeczywistości spadali oni swobodnie w kierunku Ziemi. Zobaczymy dlaczego tak się dzieje. Rozważmy trajektorie pokazane na Rysunku 13.13. (Rysunek ten opiera się na oryginalnym rysunku Newtona zamieszczonym w jego dziele *Philosophiae naturalis principia mathematica (Zasady matematyczne filozofii naturalnej)* i także pojawił się wcześniej w rozdziale Ruch w dwóch i trzech wymiarach.) Jeśli ciało ma mniejszą prędkość niż wynosi wartość prędkości orbitalnej, to wszystkie trajektorie uderzają w powierzchnię Ziemi. Astronauci przyspieszają w kierunku Ziemi wzdłuż, pokazanych na rysunku, niekołowych trajektorii i czują się, jakby byli w stanie nieważkości. (Astronauci przyzwyczajają się do życia na orbicie, podróżując w samolotach, które spadają swobodnie przez około 30 sekund). Jednak przy właściwie dobranej prędkości orbitalnej, krzywizna powierzchni Ziemi oddala się od astronautów dokładnie w takim samym tempie, w jakim spadają oni w jej kierunku. Oczywiście, utrzymywanie stałej odległości od powierzchni Ziemi jest warunkiem koniecznym do poruszania się po orbicie kołowej.



Rysunek 13.13 Orbita kołowa jest wynikiem tak dobranej prędkości stycznej, że krzywizna powierzchni Ziemi oddala się w takim samym tempie, w jakim przedmiot spada w jej kierunku.

Możemy podsumować naszą dyskusje o orbitach satelitów, przedstawiając następującą strategię rozwiązywania zadań.

Strategia rozwiązywania zadań: orbity i zasada zachowania energii

1. Sprawdź, czy równania na prędkość, energię i okres orbitalny są słuszne dla rozwiązywanego zagadnienia. Jeśli nie, zacznij od podstawowych zasad, których używaliśmy do wyprowadzenia tych równań.
2. Zaczynając od podstawowych zasad, narysuj wektory sił działających na ciało i zastosuj prawo powszechnego ciążenia i drugą zasadę dynamiki Newtona.
3. Wraz z definicją prędkości i energii, zastosuj drugą zasadę dynamiki Newtona do interesujących cię ciał.

Przykład 13.9

Międzynarodowa Stacja Kosmiczna

Wyznacz prędkość orbitalną i okres obiegu Ziemi Międzynarodowej Stacji Kosmicznej.

Strategia rozwiązania

Ponieważ stacja orbituje na wysokości $400\,\text{km}$ nad powierzchnią Ziemi, promień jej orbity ma długość $R_Z + 400\,\text{km}$. Użyjemy: Równania 13.7 i Równania 13.8, by obliczyć odpowiednio jej prędkość orbitalną i okres obiegu.

Rozwiązanie

Na podstawie Równania 13.7 prędkość orbitalna wynosi:

$$v_{\text{orb}} = \sqrt{\frac{GM_Z}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 5{,}96 \cdot 10^{34}\ \text{kg}}{6{,}37 \cdot 10^{6}\ \text{m} + 4 \cdot 10^{5}\ \text{m}}} = 7{,}67 \cdot 10^{3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

czyli ponad 27 000 km/h. Na podstawie Równania 13.8, okres obiegu wynosi:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_Z}} = \sqrt{\frac{(6{,}37 \cdot 10^6 \text{ m} + 4 \cdot 10^5 \text{ m})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 5{,}96 \cdot 10^{34} \text{ kg}}} = 5{,}55 \cdot 10^3 \text{ s},$$

czyli trochę ponad 90 minut.

Znaczenie

Międzynarodowa Stacja Kosmiczna jest umieszczona na tzw. niskiej orbicie okołoziemskiej. Prawie wszystkie satelity, w tym większość satelitów pogodowych, znajdują się na niskiej orbicie okołoziemskiej. Satelity GPS krążą na wysokości około 20 000 km – są umieszczone na tzw. średniej orbicie okołoziemskiej. Im wyżej położona jest orbita, tym więcej energii jest potrzebne, aby umieścić tam satelitę, podobnie by do niego dotrzeć w przypadku, gdyby wymagana była jego naprawa. Szczególnie interesujące są satelity na tzw. orbicie geostacjonarnej. Wszystkie anteny satelitarne na Ziemi (np. te do odbioru telewizji) są skierowane w stronę satelitów geostacjonarnych. Satelity te są umieszczane w konkretnej odległości od powierzchni Ziemi ponad równikiem tak, że ich okres obiegu orbity wynosi dokładnie 1 dzień. W związku z tym pozostają one w stałym położeniu względem powierzchni Ziemi.



13.6 **Sprawdź, czy rozumiesz.** O ile musi zmienić się promień orbity satelity, by jego prędkość orbitalna zmniejszyła się o połowę? Jak zmieni się wówczas okres obiegu satelity?

Przykład 13.10

Określenie masy Ziemi

Oblicz masę Ziemi na podstawie znajomości długości promienia orbity Księżyca.

Strategia rozwiązania

Skorzystamy z Równania 13.8, wyznaczając z niego M_Z, a następnie podstaw wartości okresu obiegu i promienia orbity. Promień orbity i okres obiegu Księżyca wyznaczono dokładnie już tysiące lat temu. Według danych astronomicznych zawartych w Dodatku D, okres obiegu Księżyca wokół Ziemi wynosi 27,3 dnia czyli $2{,}36 \cdot 10^6$ s, a średnia odległość Księżyca od Ziemi wynosi 384 000 km.

Rozwiązanie

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_Z}}$$

$$M_Z = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (3{,}84 \cdot 10^8 \text{ m})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot (2{,}36 \cdot 10^6 \text{ s})^2} = 6{,}01 \cdot 10^{24} \text{ kg}.$$

Znaczenie

Porównaj otrzymany wynik z wartością $5{,}96 \cdot 10^{24}$ kg, którą otrzymaliśmy w Przykładzie 13.5, na podstawie wartości przyspieszenia grawitacyjnego g na powierzchni Ziemi. W przypadku obu obliczeń wykorzystaliśmy wartości średnie (raz promienia orbity i raz przyspieszenia ziemskiego), a mimo to obie wartości są bardzo zbliżone (~ 0,8%). Wartość g zmienia się od równika do biegunów o około 0,5%. Natomiast Księżyc porusza się po orbicie eliptycznej i jego odległość od Ziemi r zmienia się o niewiele ponad 10%. (W rzeczywistości rozmiar Księżyca widzianego podczas pełni zmienia się o taką wartość. Jest to jednak trudne do zaobserwowania, gdyż odstęp czasu pomiędzy minimalnym a maksymalnym obserwowanym rozmiarem Księżyca podczas pełni wynosi kilka miesięcy).



13.7 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Mamy jeszcze jedną uwagę dotyczącą naszego poprzedniego sposobu wyznaczenia M_Z. Wyprowadziliśmy Równanie 13.8, zakładając, że satelita krąży wokół środka ciała niebieskiego po tym samym promieniu, co promień w wyrażeniu na siłę grawitacji pomiędzy nimi. Jak uzasadnić to założenie? Ziemia jest około 81 razy bardziej masywna niż Księżyc. Czy Księżyc okrąża Ziemię dokładnie wokół jej środka?

Przykład 13.11

Prędkość galaktyk i ich okres obiegu

Przyjrzyjmy się ponownie Przykładowi 13.2. Załóżmy, że Droga Mleczna i galaktyka Andromedy krążą po orbicie kołowej wokół siebie. Jaka byłaby prędkość każdej z nich i ile wynosiłby ich okres orbitalny? Załóżmy, że masa każdej z galaktyk wynosi 800 miliardów mas Słońca, a ich środki są oddalone o 2,5 mln lat świetlnych.

Strategia rozwiązania

Nie możemy skorzystać bezpośrednio z Równania 13.7 i Równania 13.8 ponieważ wyprowadziliśmy je, zakładając, że ciało o masie m orbituje wokół środka znacznie bardziej masywnej planety o masie M. Wyznaczyliśmy już siłę grawitacji pomiędzy tymi galaktykami w Przykładzie 13.2 za pomocą prawa powszechnego ciążenia. Możemy skorzystać z drugiej zasady dynamiki Newtona oraz wzoru na przyspieszenie dośrodkowe każdej z galaktyk, w celu określenia ich prędkości stycznej. Na podstawie tego wyniku możemy określić okres orbity.

Rozwiązanie

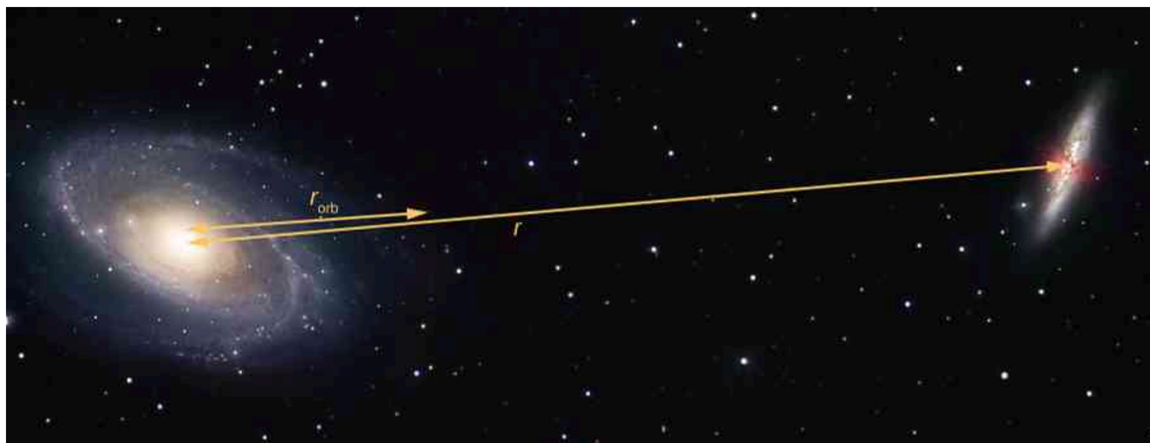
W Przykładzie 13.2, wyznaczyliśmy siłę oddziaływania galaktyk:

$$F_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}\ \frac{(800 \cdot 10^9 \cdot 2{,}0 \cdot 10^{30}\ \text{kg})^2}{(2{,}5 \cdot 10^6 \cdot 9{,}5 \cdot 10^{15}\ \text{m})^2} = 3 \cdot 10^{29}\ \text{N}.$$

Stąd przyspieszenie każdej z galaktyk wynosi:

$$a = \frac{F_{12}}{m} = \frac{3 \cdot 10^{29}\ \text{N}}{800 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{30}\ \text{kg}} = 1{,}9 \cdot 10^{-13}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Ponieważ galaktyki znajdują się na orbicie kołowej, to posiadają one przyspieszenie dośrodkowe. Jeżeli pominiemy oddziaływanie innych galaktyk, wówczas jak dowiedzieliśmy się w rozdziałach Pęd i zderzenia oraz Obroty wokół stałej osi, środek masy obu galaktyk pozostaje w spoczynku. W związku z tym galaktyki muszą krążyć wokół wspólnego środka masy. W przypadku równych mas obu galaktyk, ich wspólny środek masy znajduje się dokładnie w połowie odległości między nimi. Zatem promień orbity r_{orb}, nie jest taki sam, jak odległość między galaktykami, lecz jest równy połowie tej wartości, czyli 1,25 milionów lat świetlnych. Te dwie różne wartości przedstawiono na Rysunku 13.14.



Rysunek 13.14 Odległość między dwiema galaktykami, która określa siłę grawitacji między nimi, wynosi r i różni się ona od promienia orbity każdej z nich r_{orb}. W przypadku równych mas obu galaktyk $r_{\text{orb}} = r/2$. (Źródło: modyfikacja dzieła Marca Van Nordena)

Korzystając z wyrażenia na przyspieszenie dośrodkowe, otrzymujemy wartość prędkości orbitalnej galaktyki $v_{\text{orb}} = 47\ \text{km/s}$. Następnie możemy określić okres orbity bezpośrednio ze wzoru $T = 2\pi r/v_{\text{orb}}$. Po podstawieniu wartości okres ten wynosi $T = 1{,}6 \cdot 10^{18}\ \text{s}$, czyli około 50 miliardów lat.

Znaczenie

Na pierwszy rzut oka obliczona wartość prędkości orbitalnej może wydawać się duża. Zauważmy jednak, że jest ona porównywalna do prędkości ucieczki spod wpływu grawitacji Słońca, którą obliczyliśmy we wcześniejszym przykładzie. Poza tym zwróćmy uwagę, że wyznaczony okres orbitalny jest prawie cztery razy większy niż wiek Wszechświata.

W rzeczywistości te dwie galaktyki poruszają się względem siebie i oczekuje się, że zderzą się za około 4 miliardy lat. Chociaż gęstość gwiazd w każdej z nich powoduje, że bezpośrednie zderzenie dwóch gwiazd jest mało prawdopodobne, to taka kolizja będzie mieć ogromny wpływ na kształt galaktyk. Przykłady podobnych kolizji są dobrze znane w astronomii.



13.8 Sprawdź, czy rozumiesz. Galaktyki nie są pojedynczymi zwartymi obiektami, lecz składają się z miliardów gwiazd. Jaki wpływ wywiera siła grawitacyjna jednej galaktyki na gwiazdy drugiej galaktyki znajdujące się bliżej niej (czyli na zewnątrz drugiej galaktyki) w porównaniu do tych, które znajdują się dalej od niej (bliżej środka drugiej galaktyki)? Jaki wpływ będzie to miało na kształt samych galaktyk?



Wypróbuj symulację zderzeń galaktyk (http://burro.astr.cwru.edu/JavaLab/GalCrashWeb/) opracowaną przez naukowców z Case Western Reserve University i Oregon University.

Energia na orbitach kołowych

W rozdziale Energia potencjalna i całkowita pola grawitacyjnego dowiedzieliśmy się, że obiekty są związane grawitacyjnie, jeżeli ich całkowita energia jest ujemna. Zostało to omówione w prostym przypadku, gdy prędkość ciała była skierowana bezpośrednio do lub od planety. Wyznaczymy teraz energię całkowitą na orbicie kołowej i pokażemy, że rzeczywiście jest ona wówczas ujemna. Podobnie jak poprzednio, zaczniemy od zastosowania drugiej zasady dynamiki Newtona do orbity kołowej:

$$\frac{GmM_Z}{r^2} = ma_d = \frac{mv^2}{r}$$
$$\frac{GmM_Z}{r} = mv^2.$$

W ostatnim przekształceniu pomnożyliśmy przez r obie strony równania. Prawa strona jest dwa razy większa od energii kinetycznej ciała, więc otrzymujemy zależność:

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GmM_Z}{2r}.$$

Energia całkowita jest sumą energii kinetycznej i potencjalnej, więc ostatecznie wynosi ona:

$$E = E_K + U = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GmM_Z}{2r} - \frac{GmM_Z}{r} = -\frac{GmM_Z}{2r}. \quad (13.9)$$

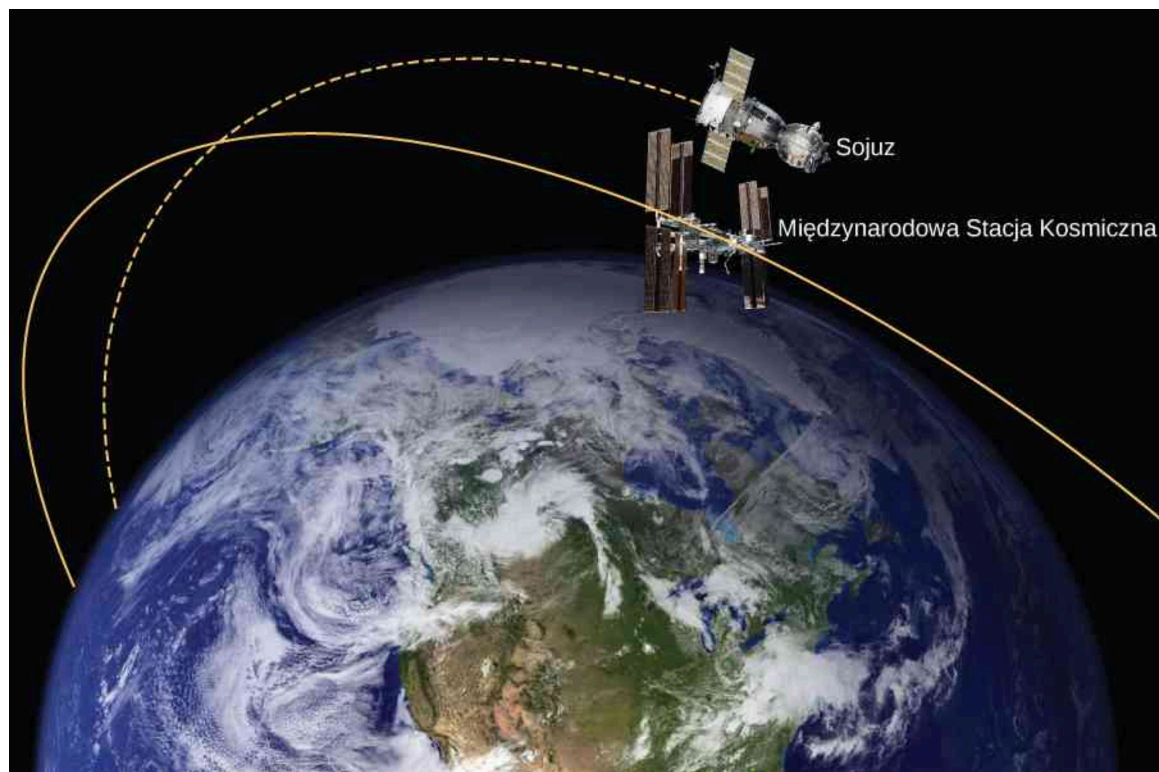
Widzimy, że energia całkowita jest ujemna, a jej wartość bezwzględna jest równa wartości energii kinetycznej. Na orbitach kołowych wartość energii kinetycznej jest dokładnie równa połowie wartości energii potencjalnej. Co ciekawe, wynik ten odnosi się do dowolnych dwóch ciał na orbitach kołowych krążących wokół ich wspólnego środka masy, w odległości r od siebie. Dowód tego stwierdzenia pozostawiono jako ćwiczenie. W następnym rozdziale przekonamy się, że bardzo podobne wyrażenie odnosi się do przypadku orbit eliptycznych.

Przykład 13.12

Energia potrzebna do ruchu po orbicie

W Przykładzie 13.8, obliczyliśmy energię potrzebną do przeniesienia statku *Sojuz* o masie 9000 kg z powierzchni Ziemi na orbitę Międzynarodowej Stacji Kosmicznej, czyli na wysokość 400 km nad powierzchnią Ziemi. Innymi słowy, wyznaczyliśmy zmianę jego energii potencjalnej. Teraz zobaczymy, ile wynosi

zmiana energii całkowitej pojazdu *Sojuz*, która jest potrzebna, by umieścić go na tej orbicie, ale w taki sposób, by mógł on połączyć się z orbitującą tam stacją (Rysunek 13.15)? Jaką część potrzebnej do tego energii całkowitej stanowi energia kinetyczna?



Rysunek 13.15 Statek *Sojuz* spotyka się z Międzynarodową Stacją Kosmiczną. Zauważ, że rysunek ten nie zachowuje skali. W rzeczywistości *Sojuz* jest znacznie mniejszy niż stacja, a jego orbita jest znacznie bliżej Ziemi. (Źródło: modyfikacja rysunku NASA)

Strategia rozwiązania

Energia całkowita wymagana do wyniesienia statku *Sojuz* na orbitę i jego połączenia ze stacją kosmiczną jest równa różnicy energii całkowitej statku na orbicie i na powierzchni Ziemi. Możemy skorzystać z Równania 13.9, by znaleźć całkowitą energię *Sojuza* na orbicie Międzynarodowej Stacji Kosmicznej. Załóżymy, że energia całkowita na powierzchni Ziemi jest równa energii potencjalnej statku, gdyż przed startem znajduje się on w spoczynku względem Ziemi. W związku z tym, nie używamy Równania 13.9 na powierzchni, ale dopiero gdy dotrzemy na orbitę. Dokonujemy tu przybliżenia, które polega na tym, że nie uwzględniamy startowej energii kinetycznej statku wynikającej z ruchu dobowego Ziemi wokół własnej osi. Zwróćmy uwagę, że w rzeczywistości nie bez powodu miejsca startowe rakiet umieszczone są tak blisko równika, jak jest to możliwe. Wówczas energia kinetyczna może być wyznaczona ze zmiany energii całkowitej i zmiany energii potencjalnej, wyznaczonej w Przykładzie 13.8. Alternatywnie możemy skorzystać z Równania 13.7, aby wyznaczyć v_{orb} i bezpośrednio stąd obliczyć energię kinetyczną. Wymagana energia całkowita jest wówczas sumą tej energii kinetycznej i zmiany energii potencjalnej, obliczonej w Przykładzie 13.8.

Rozwiązanie

Na podstawie Równania 13.9 energia całkowita *Sojuza* na orbicie Międzynarodowej Stacji Kosmicznej wynosi:

$$E_{\text{orb}} = E_{K\text{orb}} + U_{\text{orb}} = -\frac{GmM_Z}{2r}$$
$$= -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 9000\ \text{kg} \cdot 5{,}96 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{2 \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m} + 4 \cdot 10^5\ \text{m})} = -2{,}65 \cdot 10^{11}\ \text{J}.$$

Jego energia całkowita na powierzchni Ziemi wynosi:

$$E_{\text{pow}} = E_{K\text{pow}} + U_{\text{pow}} = 0 - \frac{GmM_Z}{r}$$
$$= -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 9000\ \text{kg} \cdot 5{,}96 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m}} = -5{,}63 \cdot 10^{11}\ \text{J}.$$

Zmiana energii całkowitej wynosi $\Delta E = E_{\text{orb}} - E_{\text{pow}} = 2{,}98 \cdot 10^{11}\ \text{J}$. Aby wyznaczyć energię kinetyczną, odejmiemy zmianę energii potencjalnej od Przykładu 13.6, $\Delta E = 3{,}32 \cdot 10^{10}\ \text{J}$. Otrzymujemy $E_{K\text{orb}} = 2{,}98 \cdot 10^{11}\ \text{J} - 3{,}32 \cdot 10^{10}\ \text{J} = 2{,}65 \cdot 10^{11}\ \text{J}$. Jak stwierdzono powyżej, energia kinetyczna na orbicie kołowej jest zawsze równa co do wartości połowie energii potencjalnej i jednocześnie równa jest wartości energii całkowitej. Otrzymany wynik to potwierdza.

W alternatywnym podejściu używamy Równania 13.7, by wyznaczyć prędkość orbitalną *Sojuza*, podobnie jak zrobiliśmy dla Międzynarodowej Stacji Kosmicznej w Przykładzie 13.9.

$$v_{\text{orb}} = \sqrt{\frac{GM_Z}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 5{,}96 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m} + 4 \cdot 10^5\ \text{m}}} = 7{,}67 \cdot 10^3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Energia kinetyczna pojazdu *Sojuz* na orbicie wynosi tyle samo, ile w przypadku pierwszego sposobu. Energia całkowita potrzebna do wyniesienia statku na orbitę wynosi:

$$E_{\text{orb}} = E_{K\text{orb}} + \Delta U = 2{,}65 \cdot 10^{11}\ \text{J} + 3{,}32 \cdot 10^{10}\ \text{J} = 2{,}98 \cdot 10^{11}\ \text{J}.$$

Znaczenie

Energia kinetyczna *Sojuza* jest równa prawie ośmiokrotnej zmianie jego energii potencjalnej lub 90% energii całkowitej, potrzebnej na spotkanie z Międzynarodową Stacją Kosmiczną. Należy pamiętać, że energia ta wyraża jedynie energię, która musi być dostarczona do *Sojuza*. Przy współczesnej technice rakietowej masa układu napędowego (paliwa rakietowego, jego zbiorniki i układ spalania) znacznie przekracza masę samego statku kosmicznego wraz z ładunkiem. W związku z tym należy zużyć ogromną ilość energii, by nadać statkowi odpowiednią energię kinetyczną. Rzeczywisty koszt energii jest wielokrotnie większy od kosztu zmiany energii całkowitej samego statku.

13.5 | Prawa Keplera

Cel dydaktyczny

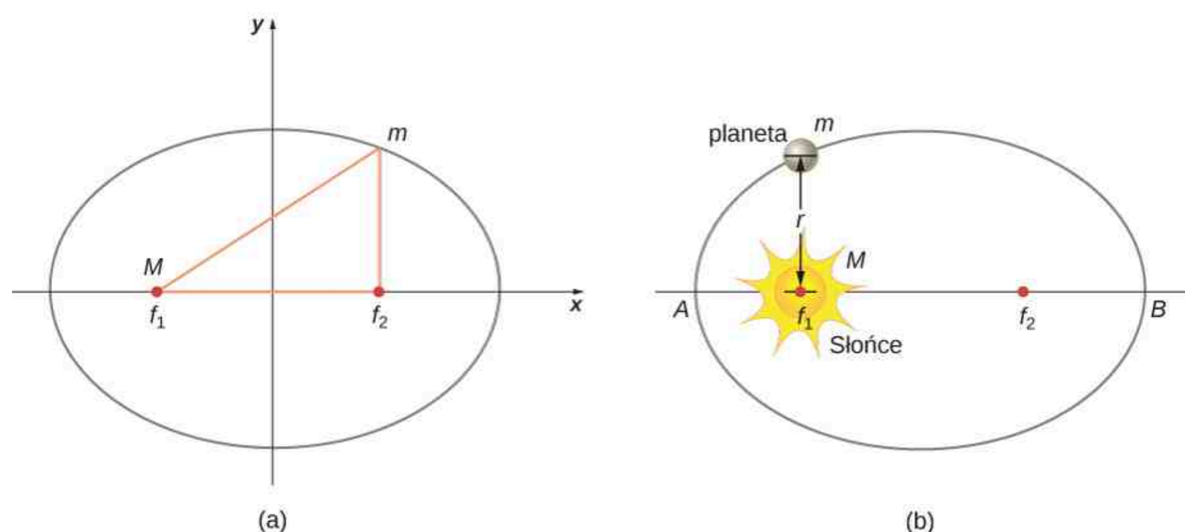
W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać krzywe stożkowe i określać ich związek z ruchem po orbicie;
- opisywać, w jaki sposób prędkość orbitalna związana jest z zasadą zachowania momentu pędu;
- wyznaczać okres ruchu planet po orbicie eliptycznej na podstawie długości jej osi wielkiej.

Na podstawie dokładnych danych zebranych przez Tycho Brahe, Johannes Kepler przeanalizował pozycje wszystkich znanych planet i Księżyca na niebie, zaznaczając ich pozycje w stałych odstępach czasu. Na podstawie tej analizy sformułował trzy prawa, które omówimy w tym podrozdziale.

Pierwsze prawo Keplera

W czasach Keplera przeważał pogląd, że wszystkie orbity planetarne są okrągłe. Dane zarejestrowane dla Marsa stanowiły największe wyzwanie dla tego założenia i w końcu zachęciły Keplera, by zmierzyć się z tym powszechnym przekonaniem. **Pierwsze prawo Keplera** (ang. **Kepler's First Law**) stwierdza, że każda planeta porusza się po elipsie, a Słońce znajduje się w jednym z ognisk tej elipsy. Elipsa jest definiowana jako zbiór wszystkich punktów, których suma odległości od każdego z dwóch punktów, zwanych ogniskami elipsy, jest stała. Rysunek 13.16 przedstawia elipsę i pokazuje, w jaki sposób można ją łatwo narysować.



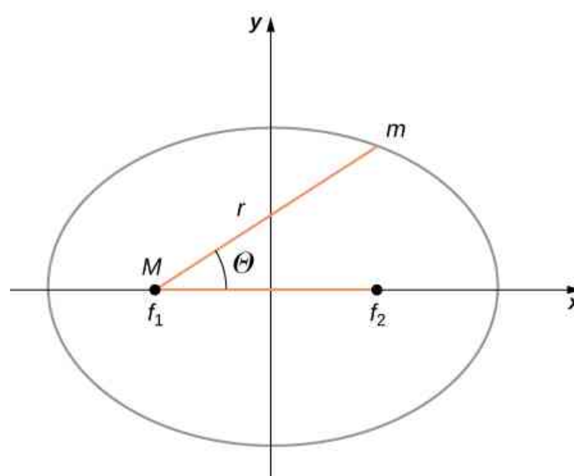
Rysunek 13.16 (a) Elipsa jest krzywą, którą tworzy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, dla których suma odległości od jej ognisk (f_1 i f_2) jest stała. Na podstawie tej definicji można narysować elipsę w następujący sposób. Umieść szpilkę w każdym z ognisk, a następnie zamocuj kawałek sznurka pomiędzy szpilkami i owiń pętelkę wokół ołówka. Utrzymując stale naciągnięty sznurek, narysuj ołówkiem dookoła ognisk pełny obwód krzywej zamkniętej. Jeśli dwa ogniska znajdują się w tym samym miejscu, to w wyniku tej procedury otrzymamy okrąg, szczególny przypadek elipsy. (b) W przypadku orbity eliptycznej, jeśli $m \ll M$, to ciało o masie m porusza się po elipsie wokół ciała o masie M znajdującego się w jednym z ognisk. Dokładniej mówiąc, oba ciała poruszają się po własnych elipsach wokół ich wspólnego środka masy.

Dla orbity eliptycznej, punkt największego zbliżenia planety do Słońca nazywa się **peryhelium** (ang. **perihelion**). Jest to punkt A na Rysunku 13.16. Najdalszy punkt zwany jest **aphelium** (ang. **aphelion**). Jest to punkt B na tym rysunku. W przypadku Księżyca krążącego po orbicie eliptycznej wokół Ziemi, punkty te są nazywane odpowiednio perygeum i apogeum.

Istnieje kilka postaci matematycznych równania elipsy. Wszystkie one są szczególnym przypadkiem bardziej ogólnego równania krzywych stożkowych. Istnieją cztery różne krzywe stożkowe i wszystkie z nich spełniają równanie:

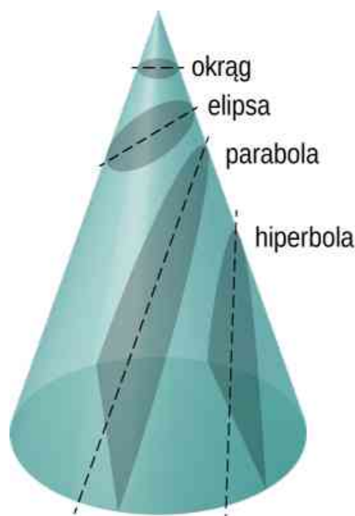
$$\frac{\alpha}{r} = 1 + e\cos\theta. \tag{13.10}$$

Zmienne r i θ w przypadku elipsy zaznaczono na Rysunku 13.17. Stałe α i e zależą od energii całkowitej i momentu pędu satelity w danym punkcie. Stała e jest zwana mimośrodem. Wartości stałych α i e określają, która z czterech krzywych stożkowych reprezentuje trajektorię obiektu astronomicznego.



Rysunek 13.17 Tak jak poprzednio, odległość między planetą a Słońcem jest równa r i tworzy kąt θ z osią x, równoległą do osi wielkiej elipsy.

Jedną z największych zalet stosowania prawa powszechnego ciążenia, w którym siła jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości, jest to, że gdy połączymy go z drugą zasadą dynamiki Newtona, to rozwiązaniem tego układu równań będzie trajektoria będąca krzywą, która jest jedną z krzywych stożkowych. Każda trajektoria, którą podąża ciało o masie m po orbicie jest, jedną z czterech krzywych stożkowych: okręgiem lub elipsą w przypadku zamkniętych (czyli związanych) orbit albo parabolą lub hiperbolą w przypadku otwartych (czyli niezwiązanych) orbit. Wszystkie krzywe stożkowe przedstawiono na Rysunku 13.18.



Rysunek 13.18 Trajektoria każdego ciała, na które działa siła proporcjonalna do odwrotności kwadratu odległości między ciałami, jest jedną z czterech krzywych stożkowych. Ruch tego ciała jest określony przez energię i kierunek jego ruchu.

Jeśli energia całkowita ciała jest ujemna, to wtedy $0 \leq e < 1$, i Równanie 13.10 opisuje orbitę zamkniętą (związaną) — elipsę w przypadku, gdy $0 < e < 1$, lub okrąg, gdy $e = 0$. Na podstawie Równania 13.10 można zauważyć, że gdy $e = 0$, to $r = \alpha$, więc promień trajektorii ciała jest stały. W przypadku elipsy, mimośród określa jak bardzo jest ona spłaszczona. Okrąg ma mimośród równy zero, a bardzo spłaszczona, wyciągnięta elipsa ma mimośród o wartości bliskiej jedności.

Jeśli całkowita energia ciała jest dokładnie równa zero, to $e = 1$ i trajektorią ruchu jest parabola. Przypomnijmy, że satelita o całkowitej energii równej zero porusza się z prędkością równą dokładnie drugiej prędkości kosmicznej. (Parabola powstaje przez przecięcie stożka płaszczyzną równoległą do tworzącej stożka.) W końcu jeśli całkowita energia ciała jest dodatnia, to $e > 1$, więc trajektorią jest hiperbola. Te dwie ostatnie krzywe reprezentują orbity ciał niezwiązanych grawitacyjnie, gdzie ciało o masie m mija ciało o masie M tylko jeden raz. Ta sytuacja została zaobserwowana w przypadku kilku komet, które zbliżyły się do Słońca, a potem oddaliły się, by już nigdy do niego nie powrócić.

Ograniczyliśmy się tylko do przypadków, w których mniejsza masa (planeta) krąży wokół znacznie większej, a co

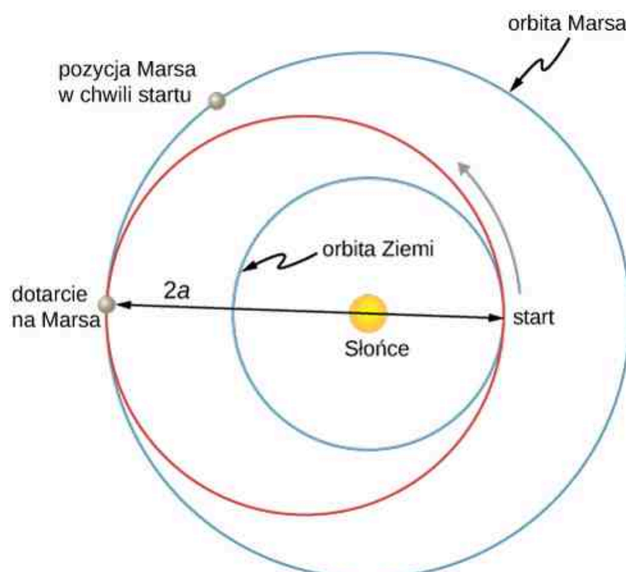
za tym idzie, nieruchomej masy (gwiazdy). Jednak Równanie 13.10 odnosi się także do dowolnych dwóch oddziałujących grawitacyjnie ciał. Oba ciała poruszają się wówczas po krzywych stożkowych o takim samym kształcie. Kształt ten zależy od całkowitej energii i momentu pędu układu, przy czym środek masy układu znajduje się w jednym z ognisk tej krzywej. Stosunek rozmiarów ich torów ruchu jest odwrotnie proporcjonalny do stosunku ich mas.


Na stronie internetowej projektu PhET (https://openstaxcollege.org/l/21mysolarsys) możesz obejrzeć animację *My Solar System*, przedstawiającą ruch dwóch oddziałujących ciał. Możesz wybrać jedną z wbudowanych opcji, np. Słońce i planetę. Możesz tam również zobaczyć wiele bardziej skomplikowanych zagadnień ruchu ciał. Można określić rzeczywisty tor Księżyca, który może wydawać ci się dość zaskakujący, chociaż spełnia proste prawa dynamiki Newtona.

Podróże międzyplanetarne

Ludzie marzyli o podróżowaniu na inne planety naszego Układu Słonecznego, od kiedy tylko zostały one odkryte. Ale w jaki sposób można najłatwiej do nich dotrzeć? Najbardziej efektywna metoda została podana w 1925 roku przez Waltera Hohmanna. Zainspirowała go jedna z popularnych w tamtych czasach powieści science fiction. Metoda ta nazywa się teraz manewrem transferowym Hohmanna. W przypadku podróży pomiędzy dwoma orbitami kołowymi transfer odbywa się po eliptycznej orbicie transferowej Hohmanna, która jest styczna do tych orbit w aphelium i peryhelium elipsy. Rysunek 13.19 przedstawia przypadek podróży z orbity Ziemi na orbitę Marsa. Tak jak poprzednio, Słońce znajduje się w ognisku elipsy.

Dla każdej elipsy, długość jej półosi wielkiej jest zdefiniowana jako połowa odległości położenia ciała w peryhelium i aphelium. Na Rysunku 13.17 półoś ta jest równa połowie odległości od miejsca startu do lądowania po przeciwnej stronie osi wielkiej elipsy. W związku z tym przemieszczając się z jednej orbity kołowej o promieniu r_1 do drugiej orbity kołowej o promieniu r_2, aphelium elipsy transferowej znajduje się na większej orbicie kołowej, a peryhelium na mniejszej orbicie. Półoś wielka oznaczona na rysunku symbolem a jest wówczas równa $a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$.



Rysunek 13.19 Orbita transferowa Hohmanna ma swoje peryhelium na orbicie Ziemi i aphelium na orbicie Marsa.

Rozważmy przypadek podróży z Ziemi na Marsa. W tej chwili zignorujemy obecność obu planet i założymy, że jesteśmy sami na orbicie Ziemi i chcemy przenieść się na orbitę Marsa. Dzięki Równaniu 13.9 opisującego energię całkowitą możemy zauważyć, że całkowita energia statków kosmicznych na dalszej orbicie (Marsa) jest większa (mniej ujemna) niż na bliższej orbicie (Ziemi). Aby przemieścić się po elipsie transferowej z orbity Ziemi, będziemy musieli zwiększyć naszą energię kinetyczną, czyli musimy zwiększyć prędkość. Najbardziej skuteczną metodą jest bardzo szybkie przyspieszanie po orbicie kołowej w obszarze, w którym tor ciała na tej orbicie pokrywa się z torem na elipsie transferowej. (Najlepiej aby przyspieszenie było natychmiastowe, tak by orbity kołowa i eliptyczna były zgodne podczas całego procesu przyspieszania, a są one styczne jedynie w punkcie startowym. W praktyce droga przyspieszania jest na tyle krótka, że różnica dróg na orbitach nie jest znaczącym czynnikiem.) Po przybyciu na orbitę Marsa potrzebny będzie kolejny impuls zmiany prędkości, aby wejść na tę orbitę, gdyż inaczej pozostalibyśmy na transferowej orbicie eliptycznej i po prostu wrócilibyśmy z powrotem do peryhelium, skąd startowaliśmy. Podczas podróży powrotnej wystarczy w każdym punkcie orbity transferowej zmienić kierunek przyspieszenia na przeciwny.

Aby wejść na elipsę transferową, a następnie z niej zejść, musimy znać prędkość na każdej orbicie kołowej i

prędkości w aphelium i peryhelium orbity transferowej. Wymagana zmiana prędkości jest po prostu różnicą pomiędzy prędkością na orbicie kołowej i eliptycznej w każdym z tych punktów. Prędkości na orbitach kołowych możemy wyznaczyć z Równania 13.7. Wymaganą prędkość na orbicie eliptycznej możemy wyznaczyć z poniższego równania. Podajemy go bez dowodu, gdyż wykracza to poza zakres tego kursu. Energia całkowita na orbicie eliptycznej wynosi:

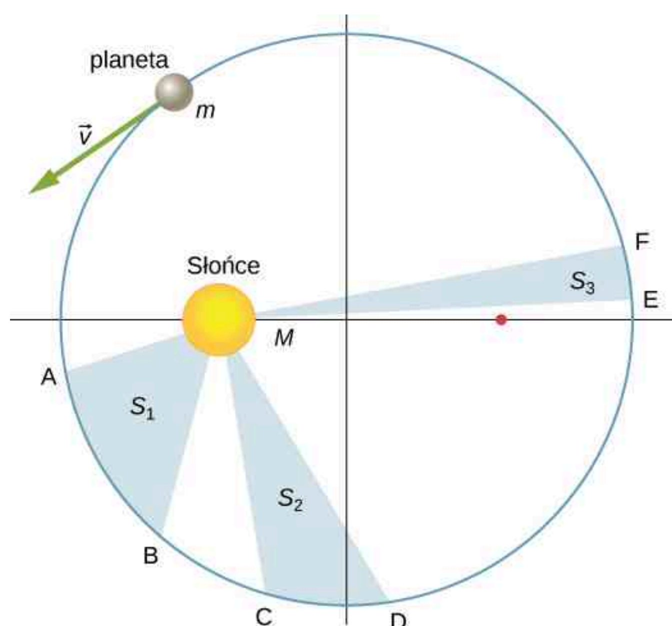
$$E = -\frac{GmM_S}{2a},$$

gdzie M_S jest masą Słońca, a a jest długością półosi transferowej orbity eliptycznej. Co ciekawe, równanie to ma taką samą postać jak Równanie 13.9 dla orbity kołowej, tylko zamiast długości promienia orbity kołowej występuje w nim długość półosi transferowej orbity eliptycznej. Ponieważ znamy energię potencjalną z Równania 13.4, możemy obliczyć energię kinetyczną, a tym samym wymaganą prędkość w każdym z interesujących nas punktów na elipsie. Jako zadanie dla czytelnika zostawiamy obliczenie tych prędkości podczas wycieczki z Ziemi na Marsa.

Zakończymy tę analizę, wskazując na kilka ważnych szczegółów. Po pierwsze, nie uwzględniliśmy grawitacyjnej energii potencjalnej związanej z obecnością Ziemi i Marsa na orbicie oraz mechaniki procesu lądowania na Marsie. W praktyce, by dotrzeć do Marsa musimy uwzględnić te czynniki w obliczeniach. Po drugie, ważna jest koordynacja czasowa transferu. Nie chcesz przecież przybyć na orbitę Marsa i stwierdzić, że w danym miejscu orbity akurat go nie ma. Musimy opuścić Ziemię w odpowiednim momencie tak, aby Mars był w aphelium naszej orbity transferowej, gdy dotrzemy na miejsce. Taka okazja zdarza się mniej więcej co 2 lata. Powrót także wymaga właściwej koordynacji czasowej. Całkowity czas podróży wynosi prawie 3 lata! Są jeszcze inne opcje, które umożliwiają szybszy przelot, w tym wykorzystanie asysty grawitacyjnej Wenus. Jednak wiążą się one z dodatkowym wydatkiem energetycznym i zagrożeniem dla życia astronautów.

Drugie prawo Keplera

Drugie prawo Keplera (ang. **Kepler's Second Law**) mówi, że **prędkość polowa planety** (ang. **areal velocity**) na orbicie jest stała. Prędkość polową planety definiujemy jako stosunek pola powierzchni zakreślonego przez promień wodzący planety do czasu, w którym planeta przebywa, odpowiadającą temu polu odległość po orbicie. Przyjrzyjmy się Rysunkowi 13.20. Czas potrzebny, by planeta przemieściła się z położenia A do B, zakreślając powierzchnię S_1, jest dokładnie równy czasowi potrzebnemu by planeta przemieściła się z położenia C do D, zakreślając powierzchnię S_2 oraz dokładnie taki sam, by przemieściła się ona z położenia E do F, zakreślając powierzchnię S_3, pod warunkiem, że wszystkie te trzy pola powierzchni są takie same: $S_1 = S_2 = S_3$.



Rysunek 13.20 Zacienione obszary pokazane na rysunku mają równe pola powierzchni i są zakreślane w ciągu takiego samego przedziału czasu.

Porównując obszary zacienione na rysunku i odległości przebyte przez planetę po obwodzie elipsy w każdym z tych przypadków widzimy, że aby zacienione pola powierzchni były równe, planeta musi przyspieszać, gdy zbliża się do Słońca i spowalniać w miarę oddalania się od niego. Takie zachowanie jest całkowicie zgodne z zasadą zachowania

energii (Równanie 13.5). Poniżej pokażemy, że drugie prawo Keplera jest przede wszystkim konsekwencją zasady zachowania momentu pędu, która odnosi się do dowolnego układu, w którym występują jedynie siły grawitacyjne działające wzdłuż promienia wodzącego.

Przypomnijmy definicję momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ z rozdziału Moment pędu. W przypadku ruchu po orbicie, $\vec{L}$ jest momentem pędu planety orbitującej wokół Słońca, $\vec{r}$ jest wektorem promienia wodzącego planetę o początku na Słońcu i końcu w danym punkcie orbity, w którym znajduje się planeta, a $\vec{p} = m\vec{v}$ jest chwilową wartością pędu planety w danym punkcie na orbicie. Gdy planeta porusza się po orbicie, wektor $\vec{p}$ jest zawsze styczny do tej orbity.

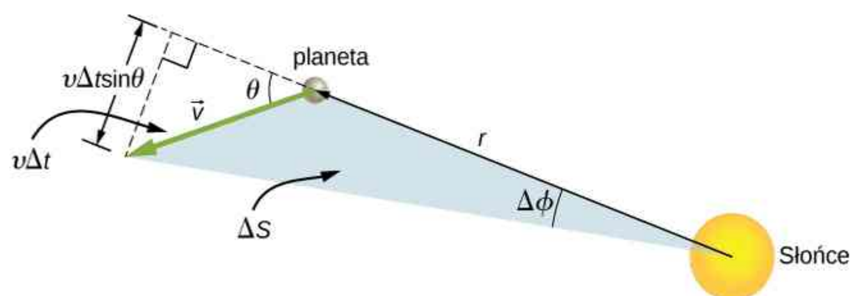
Możemy rozłożyć wektor pędu na dwie składowe: składową $\vec{p}_{\text{równ}}$ skierowaną do środka orbity ku Słońcu i równoległą do promienia wodzącego $\vec{r}$ oraz składową $\vec{p}_{\text{prost}}$ prostopadłą do promienia wodzącego $\vec{r}$. Iloczyn wektorowy momentu pędu można wówczas zapisać jako:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times \left(\vec{p}_{\text{równ}} + \vec{p}_{\text{prost}}\right) = \vec{r} \times \vec{p}_{\text{równ}} + \vec{r} \times \vec{p}_{\text{prost}}.$$

Pierwszy składnik jest równy zero ponieważ wektor $\vec{r}$ jest równoległy do $\vec{p}_{\text{równ}}$, a w przypadku drugiego składnika $\vec{r}$ jest prostopadły do $\vec{p}_{\text{prost}}$, więc wartość iloczynu wektorowego redukuje się do $L = rp_{\text{prost}} = rmv_{\text{prost}}$. Zwróćmy uwagę, że moment pędu nie zależy od $p_{\text{równ}}$. Ponieważ siła grawitacji jest skierowana tylko w kierunku promienia wodzącego, może ona zmieniać tylko składową $p_{\text{równ}}$, a nie p_{prost}, dlatego moment pędu musi pozostać stały.

Rozpatrzmy teraz Rysunek 13.21. Powierzchnia ΔS małego, zacienionego trójkąta jest zakreślana w czasie Δt. Prędkość planety jest styczna do toru jej ruchu i tworzy kąt θ z kierunkiem promienia wodzącego. W związku z tym składowa prędkości prostopadła do promienia wodzącego jest równa $v_{\text{prost}} = v\sin\theta$. W czasie Δt planeta przebywa odległość $\Delta l = v\Delta t\sin\theta$ wzdłuż kierunku prostopadłego do r. Ponieważ powierzchnia trójkąta jest równa połowie długości jego podstawy (r) razy wysokość trójkąta (Δl), to dla małych przemieszczeń powierzchnia trójkąta wynosi $\Delta S = \frac{1}{2}r\Delta l$. Podstawiając Δl oraz mnożąc licznik i mianownik przez m, a następnie przekształcając, otrzymujemy:

$$\Delta S = \frac{1}{2}r\Delta l = \frac{1}{2}r(v\Delta t\sin\theta) = \frac{1}{2m}r(mv\sin\theta\Delta t) = \frac{1}{2m}r(mv_{\text{prost}}\Delta t) = \frac{L}{2m}\Delta t.$$



Rysunek 13.21 Pole powierzchni ΔS jest zakreślane w czasie Δt, gdy planeta przemieszcza się o kąt $\Delta\phi$. Kąt pomiędzy kierunkiem promienia wodzącego i $\vec{v}$ wynosi θ.

Prędkość polowa jest po prostu równa stosunkowi zmiany pola powierzchni do czasu, więc otrzymujemy:

$$\text{prędkość polowa} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{L}{2m}.$$

Ponieważ moment pędu planety na orbicie jest stały, to także jej prędkość polowa musi być stała. Jest to drugie prawo Keplera. Newton pokazał, że podobnie jak w przypadku pierwszego prawa Keplera, jest ono naturalną konsekwencją podanego przez niego prawa powszechnego ciążenia.


Animację sytuacji z Rysunku 13.20 oraz wiele innych ciekawych animacji możesz zobaczyć na stronie internetowej (https://openstaxcollege.org/l/21animationgrav) Uniwersytetu Nowej Południowej Walii.

Trzecie prawo Keplera

Trzecie prawo Keplera (ang. **Kepler's Third Law**) mówi, że kwadrat okresu obiegu planety jest proporcjonalny do

sześcianu wielkiej półosi jej orbity. W podrozdziale Orbity satelitów i ich energia, wyprowadziliśmy trzecie prawo Keplera dla szczególnego przypadku orbity kołowej. Równanie 13.8 określa okres obiegu ciała po orbicie kołowej o promieniu r wokół Ziemi:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_Z}}.$$

Przypomnij sobie, że w przypadku elipsy półoś wielka jest połową odległości między peryhelium i aphelium. Dla orbity kołowej półoś wielka (a) jest równa promieniowi orbity. Jeśli do Równania 13.8 zamiast promienia r podstawimy długość a i podniesiemy do kwadratu obie strony równania, to określi ono trzecie prawo Keplera:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3. \quad (13.11)$$

W miejsce masy Ziemi podstawiliśmy bardziej ogólną masę M, gdyż równanie to stosuje się do satelitów krążących wokół dowolnego ciała o dużej masie.

Przykład 13.13

Orbita komety Halleya

Oblicz długość półosi wielkiej orbity **komety Halleya**, wiedząc, że przybywa ona w peryhelium swojej orbity co 75,3 lat. Jeśli odległość peryhelium od Słońca wynosi 0,586 j.a., jaka jest odległość aphelium od Słońca?

Strategia rozwiązania

Znamy okres obiegu komety wokół Słońca, więc przekształcając Równanie 13.11, wyznaczymy długość półosi wielkiej jej orbity. Znając odległość peryhelium od Słońca, możemy skorzystać z definicji półosi wielkiej elipsy, podanej wcześniej w tym rozdziale, aby znaleźć odległość aphelium od Słońca. Jedna jednostka astronomiczna (j.a.) jest średnią odległością Ziemi od Słońca i jest zdefiniowana jako $1\text{ j. a.} = 1{,}50 \cdot 10^{11}\text{ m}$.

Rozwiązanie

Przekształcając Równanie 13.11 i podstawiając wartości okresu obiegu komety Halleya i masę Słońca, otrzymujemy:

$$a = \left(\frac{GM}{4\pi^2}T^2\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$= \left[\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 2 \cdot 10^{30}\text{ kg}}{4\pi^2} \cdot \left(75{,}3\text{ roku} \cdot 365\,\frac{\text{dni}}{\text{rok}} \cdot 24\,\frac{\text{godz.}}{\text{dzień}} \cdot 3600\,\frac{\text{s}}{\text{godz.}}\right)^2\right]^{\frac{1}{3}}.$$

Daje to długość półosi wielkiej orbity komety wynoszącą $2{,}67 \cdot 10^{12}\text{ m}$ lub 17,8 j.a..

Półoś wielka jest równa połowie odległości między aphelium i peryhelium, mamy więc następującą zależność:

$$a = \frac{1}{2}(\text{aphelium} + \text{peryhelium})$$
$$\text{aphelium} = 2a - \text{peryhelium}.$$

Podstawiając wartość długości półosi wielkiej orbity, którą wyznaczyliśmy, i podaną odległość peryhelium od Słońca, dostajemy odległość aphelium równą 35 j.a..

Znaczenie

Edmund Halley (1656–1742) żył w czasach Newtona. On pierwszy podejrzewał, że trzy komety odkryte w latach 1531, 1607 i 1682 były w rzeczywistości tą samą kometą. Zanim Tycho Brahe wykonał pomiary ruchu komet, wierzono, że zjawiska te były jednorazowymi wydarzeniami, być może jakimiś zaburzeniami w

atmosferze ziemskiej, niemającymi nic wspólnego z ruchem wokół Słońca. Halley wykorzystał nowe wówczas prawa mechaniki podane przez Newtona, aby przewidzieć powrót komety w 1758 r., nazywanej odtąd jego imieniem.



13.9 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Saturn porusza się po prawie kołowej orbicie wokół Słońca z okresem orbitalnym równym 30 lat. Średni promień jego orbity wynosi około 9,5 j.a.. Średnia długość promienia orbity Urana wynosi około 19 j.a., a jego okres orbitalny wynosi 84 lata. Czy dane te są zgodne z naszymi wynikami otrzymanymi dla komety Halleya?

13.6 | Siły pływowe

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- wyjaśniać pochodzenie pływów oceanicznych na Ziemi;
- opisywać różnice między niskimi i wysokimi pływami;
- opisywać, jak siły pływowe oddziałują w układach podwójnych.

Pochodzenie pływów oceanicznych na Ziemi jest przedmiotem ciągłych badań prowadzonych od ponad 2000 lat. Za początek właściwego rozumienia tego zjawiska uważa się prace Newtona. Pływy oceaniczne są wynikiem grawitacyjnych sił pływowych. Te same siły pływowe występują na praktycznie każdym ciele niebieskim. Są one odpowiedzialne za ciepło wewnętrzne, które tworzy aktywność wulkaniczną na Io, jednym z księżyców Jowisza, oraz za rozrywanie gwiazd, które znalazły się zbyt blisko czarnych dziur.

Pływy księżycowe

Mieszkańcy niemal dowolnego wybrzeża oceanicznego na świecie mogą dwa razy dziennie obserwować podnoszenie się i opadanie poziomu wody. Jest to spowodowane obrotem Ziemi wokół własnej osi, połączonym z przyciąganiem grawitacyjnym zarówno Księżyca, jak i Słońca.

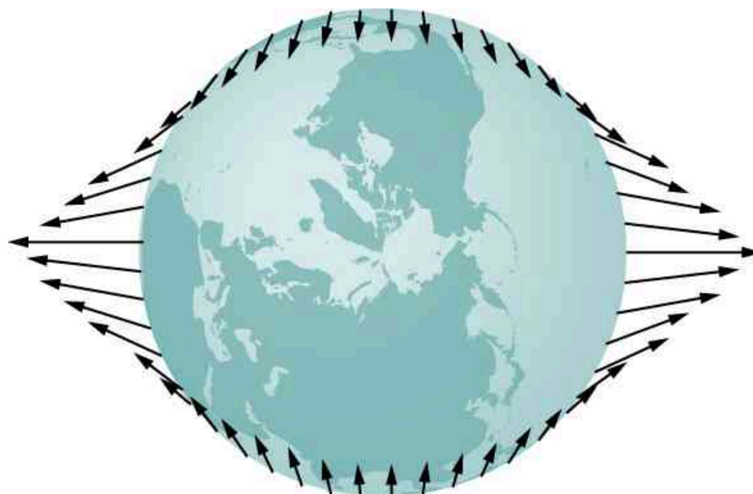
Rozważmy najpierw wpływ Księżyca. Na Rysunku 13.22, widzimy z góry biegun północny Ziemi. Jedna strona Ziemi jest bliżej Księżyca niż druga o odległość równą średnicy Ziemi. W związku z tym siła grawitacji wywierana przez Księżyc jest większa po bliższej mu stronie Ziemi niż po przeciwnej. Jej wartość w środku Ziemi znajduje się pomiędzy wartościami po przeciwległych stronach Ziemi. To dlatego na tych stronach Ziemi pojawiają się przypływy.



Rysunek 13.22 Siła pływowa rozciąga Ziemię wzdłuż linii łączącej ją z Księżycem. Spiętrzenie wody po obu stronach planety jest wynikiem różnicy siły grawitacji Księżyca po przeciwnych stronach Ziemi. Zmiany poziomu oceanów wynikające z sił pływowych są rzędu kilku metrów, więc pływy zaznaczone na tym rysunku są znacznie przesadzone.

Wypadkowa siła grawitacji powoduje, że Ziemia i Księżyc krążą wokół ich wspólnego środka masy. Leży on w odle-

głości około 1600 km pod powierzchnią Ziemi, wzdłuż prostej łączącej te dwa ciała. Siła pływowa może być postrzegana jako różnica między siłą grawitacji w środku Ziemi i w każdym innym jej punkcie. Na Rysunku 13.23 różnica ta jest pokazana na poziomie morza, na którym obserwujemy pływy oceaniczne. (Należy pamiętać, że zmiana poziomu morza spowodowana przez siły pływowe jest mierzona od linii poziomu morza przyjętego za zero metrów, przy wyznaczaniu względnej wysokości obiektów na Ziemi. Pokazaliśmy wcześniej, że Ziemia, ze względu na jej ruch obrotowy, jest wybrzuszona na równiku o wiele kilometrów, w stosunku do obwodu biegnącego przez bieguny. Zerowy poziom morza uwzględnia to zjawisko i bierzemy tu pod uwagę tylko znacznie mniejsze zmiany wysokości pływów mierzone od tego poziomu).



Rysunek 13.23 Siła pływowa jest różnicą pomiędzy siłą grawitacji w środku Ziemi i pozostałych punktach. Na tym rysunku, siły pływowe są pokazane na powierzchni oceanu. Siły te będą malały do zera w miarę zbliżania się do środka Ziemi.

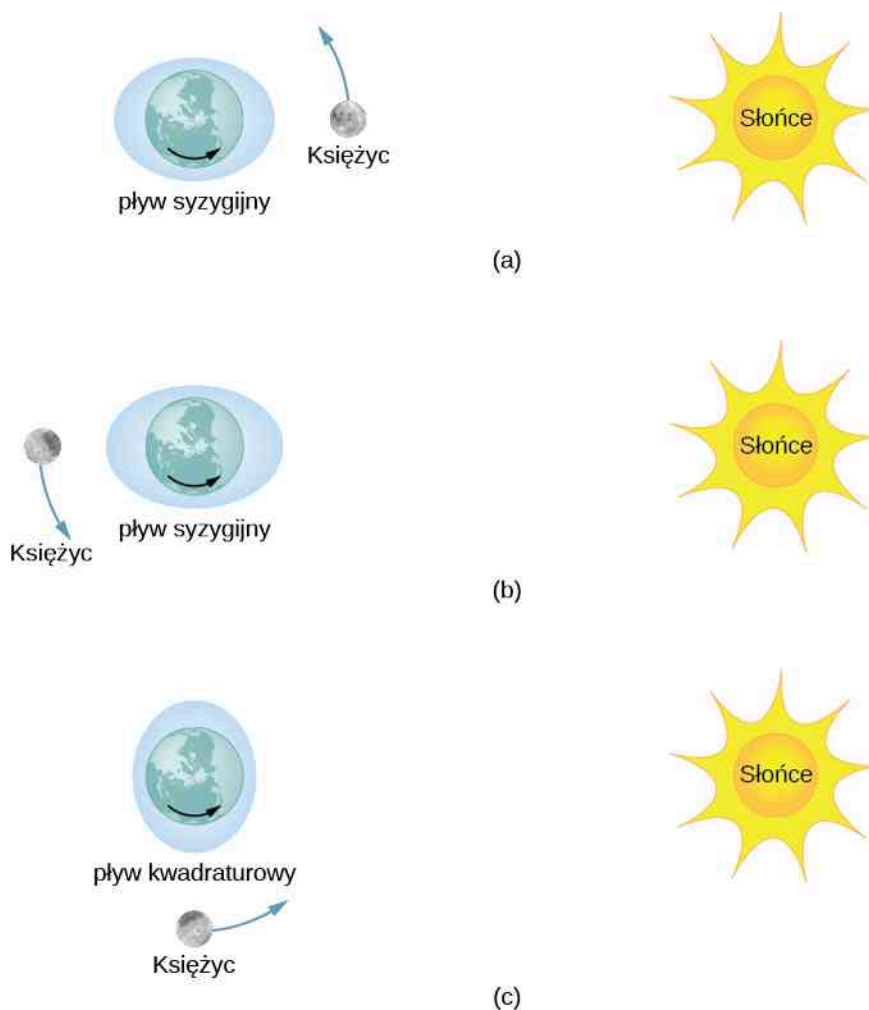
Dlaczego przyrost i spadek poziomu wody występują dwa razy dziennie? Spójrz ponownie na Rysunek 13.22. Gdyby Ziemia się nie obracała i Księżyc znajdowałby się w stałym punkcie względem niej, to poziom wody byłby większy w tych samych miejscach na powierzchni Ziemi. Woda w oceanach jest zawsze spiętrzona wzdłuż prostej łączącej Ziemię i Księżyc. Jednak Ziemia się obraca (w kierunku wskazywanym przez strzałkę) z okresem w przybliżeniu wynoszącym 24 godziny. W ciągu 6 godzin, najbliższe i najdalsze Księżycowi obszary Ziemi przesuną się w miejsca, w których aktualnie występują odpływy, a 6 godzin później, znajdą się z powrotem w pozycji przypływów. Ponieważ Księżyc wykonuje pełen obieg Ziemi co około 28 dni w tym samym kierunku, w którym obraca się Ziemia, to czas pomiędzy przypływami i odpływami wynosi w rzeczywistości około 12,5 godziny. Realny czas wystąpienia pływów jest jednak bardziej skomplikowany i zależy od wielu innych czynników, z których najważniejszym jest Słońce.

Wpływ Słońca na pływy oceaniczne

Oprócz sił pływowych pochodzących od grawitacji Księżyca, wpływ na poziom wody w ziemskich oceanach wywiera także siła grawitacji Słońca. Przyciąganie grawitacyjne Słońca działające na dowolne ciało na Ziemi jest prawie 200 razy większe od przyciągania Księżyca. Jednak, jak wykażemy w następnym przykładzie, wpływ Słońca na pływy morskie, pomimo że jest znaczący, to jest jednak mniejszy niż Księżyca. W zależności od pozycji Księżyca i Słońca względem Ziemi, wypadkowa siła pływowa może być wzmocniona lub osłabiona.

Rysunek 13.24 przedstawia względne położenia Słońca i Księżyca, które powodują powstanie największych pływów, zwanych **pływami syzygijnymi** (ang. **spring tide**) (lub pływami wysokimi). Podczas przypływów syzygijnych, Ziemia, Księżyc i Słońce znajdują się w jednej linii, a efekty pływowe dodają się. (Przypomnijmy, że siły pływowe powodują spiętrzenie poziomu wody po obu stronach Ziemi). Rysunek 13.24 (c) przedstawia względne położenie tych trzech ciał, gdy występują najmniejsze pływy, zwane **pływami kwadraturowymi** (ang. **neap tide**) (lub pływami niskimi). Ekstrema zarówno wysokich, jak i niskich pływów mają związek z fazami Księżyca. Pływy syzygijne występują podczas nowiu lub pełni Księżyca, a pływy kwadraturowe występują, gdy Księżyc znajduje się w pierwszej lub trzeciej kwadrze (oświetlona jest połowa Księżyca).


Na wskazanych stronach internetowych możesz zobaczyć jedną (https://openstaxcollege.org/l/21tidesinmot01) i drugą (https://openstaxcollege.org/l/21tidesinmot02) animację pływów oceanicznych.



Rysunek 13.24 (a i b) Pływy syzygijne występują, gdy Słońce, Ziemia i Księżyc znajdują się w jednej linii, podczas gdy (c) pływy kwadraturowe występują wtedy, gdy Słońce, Ziemia i Księżyc znajdują się w wierzchołkach trójkąta prostokątnego. (Rysunek nie zachowuje skali.)

Wysokość pływów

Dzięki szczegółowym danym na temat pozycji Księżyca i Słońca można przewidzieć dokładny czas wystąpienia maksymalnych i minimalnych pływów w większości miejsc na naszej planecie.


Na tej stronie internetowej (https://openstaxcollege.org/l/21tidepredic) możesz zobaczyć prognozy pływów oceanicznych dla wielu miejsc wokół Ameryki Północnej.

Zmiana wysokości pływów jest jednak znacznie bardziej skomplikowana, niż przedstawiono to na powyższym rysunku. Względne położenie Ziemi, Słońca i Księżyca determinuje wystąpienie pływów syzygijnych i kwadraturowych, jednak ich wysokość zależy również od odległości tych ciał od Ziemi. Siły pływowe są większe, gdy odległości Księżyca i Słońca są mniejsze. Zarówno orbita Księżyca wokół Ziemi, jak i orbita Ziemi wokół Słońca są eliptyczne, więc pływy syzygijne są wyjątkowo wysokie, jeśli występują, gdy Księżyc znajduje się w perygeum, a Ziemia znajduje się jednocześnie w peryhelium. Z drugiej strony, pływy syzygijne są stosunkowo niskie, jeśli występują, gdy Księżyc znajduje się w apogeum, a Ziemia znajduje się jednocześnie w aphelium.

Największy wpływ na wysokość pływów ma topografia lokalnej linii brzegowej i profil głębokości dna morskiego. Wpływ tych czynników na wysokość pływów jest zdumiewający. Chociaż zmiany poziomu wody w oceanach w wielu miejscach na całym świecie są znacznie mniejsze niż jeden metr, to pływy w zatoce Fundy (Rysunek 13.25) na wschodnim wybrzeżu Kanady, mogą wynosić nawet 16,3 metra.



Rysunek 13.25 Łodzie rybackie w zatoce Fundy podczas przypływu i odpływu. Występująca dwukrotnie w ciągu doby zmiana poziomu morza stanowi prawdziwe wyzwanie dla bezpiecznego cumowania łodzi. (Źródło: Dylan Kereluk)

Przykład 13.14

Porównanie sił pływowych

Porównaj siłę grawitacyjną Księżyca wywieraną na ciała o masie 1 kg, znajdujące się po bliższej i dalszej Księżycowi stronie Ziemi. Powtórz te obliczenia w przypadku Słońca, a następnie porównaj wyniki. Obliczenia potwierdzą, że siły pływowe wywierane przez Księżyc są około dwa razy większe od sił pływowych wywieranych przez Słońce.

Strategia rozwiązania

Skorzystamy z prawa powszechnego ciążenia (Równanie 13.1). Musimy w tym celu znać masy Słońca i Księżyca, ich odległości od Ziemi oraz wartość promienia Ziemi. Użyjemy danych astronomicznych z Dodatku D.

Rozwiązanie

Podstawiając wartości masy Księżyca i jego średniej odległości od Ziemi, otrzymujemy:

$$F_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}} \cdot \frac{1\ \mathrm{kg} \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22}\ \mathrm{kg}}{(3{,}84 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m} \pm 6{,}37 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m})^2}.$$

W mianowniku użyjemy znaku minus dla bliższej Księżycowi strony Ziemi oraz znaku plus dla strony, znajdującej się dalej od Księżyca. Otrzymujemy wartości:

$$F_{K\mathrm{blisko}} = 3{,}44 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N} \quad \text{oraz} \quad F_{K\mathrm{daleko}} = 3{,}22 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N}.$$

Siła grawitacyjna Księżyca jest prawie o 7% wyższa po bliższej mu stronie Ziemi, ale obydwie siły – dla położenia bliższego i dalszego – są znacznie mniejsze od siły grawitacji samej Ziemi, działającej na ciało o masie 1 kg. Niemniej ta niewielka różnica siły grawitacji Księżyca powoduje powstanie pływów. Teraz powtórzymy obliczenia w przypadku Słońca. Do prawa powszechnego ciążenia podstawiamy wartości masy Słońca i średniej odległości między Ziemią a Słońcem. Otrzymujemy wartości:

$$F_{S\mathrm{blisko}} = 5{,}89975 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{N} \quad \text{oraz} \quad F_{S\mathrm{daleko}} = 5{,}89874 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{N}.$$

Jak widać, musimy zapisać, aż sześć cyfr znaczących, aby porównać różnicę między tymi siłami z różnicą otrzymaną w przypadku oddziaływania Księżyca. (Nie możemy uzasadniać poprawności otrzymanej dokładności, gdyż wszystkie wartości danych do zadania są znane z dokładnością do trzech miejsc znaczących. Wszystkie wartości w obliczeniach obu sił są jednak takie same, z wyjątkiem odległości r. Dokładność różnicy wartości tych sił wynika z różnicy podstawionych odległości, co uzasadnia jej poprawność z otrzymaną dokładnością do trzech cyfr znaczących). Różnica między siłami grawitacji Księżyca działającymi na ciało o masie 1 kg po bliższej i dalszej od niego stronie Ziemi wynosi:

$$\Delta F_K = F_{K\text{blisko}} - F_{K\text{daleko}} = 3{,}44 \cdot 10^{-5}\ \text{N} - 3{,}22 \cdot 10^{-5}\ \text{N} = 0{,}22 \cdot 10^{-5}\ \text{N},$$

podczas gdy różnica ta w przypadku Słońca wynosi:

$$\Delta F_S = F_{S\text{blisko}} - F_{S\text{daleko}} = 5{,}89975 \cdot 10^{-3}\ \text{N} - 5{,}89874 \cdot 10^{-3}\ \text{N} = 0{,}101 \cdot 10^{-5}\ \text{N}.$$

Zauważmy, że bardziej poprawnym podejściem jest wyprowadzenie wzoru na siłę pływową, a nie obliczanie jej z różnicy wartości dwóch sił, jak zrobiliśmy powyżej. Wówczas siła pływowa jest oczywiście równa różnicy siły grawitacyjnej po bliższej i dalszej odpowiednio Księżycowi lub Słońcu stronie Ziemi. Stosując kilka elementarnych przekształceń, można pokazać, że:

$$F_{\text{pływowa}} = \frac{GMm}{r_1^2} - \frac{GMm}{r_2^2} = GMm\left(\frac{(r_2 - r_1)(r_2 + r_1)}{r_1^2 r_2^2}\right),$$

gdzie r_1 i r_2 są takie same z dokładnością do trzech cyfr znaczących, ale ich różnica $(r_2 - r_1)$, równa średnicy Ziemi, jest również znana z dokładnością do trzech cyfr znaczących. Wyniki obliczeń są takie same. Należałoby skorzystać z tego wzoru, jeśli wymagana liczba cyfr znaczących byłaby większa niż dostępna dokładność kalkulatora lub komputera.

Znaczenie

Należy zauważyć, że siła grawitacji wywierana przez Słońce na Ziemię jest prawie 200 razy większa niż siła grawitacji wywierana przez Księżyc. Ale różnica tych sił po przeciwnych stronach Ziemi jest o połowę mniejsza w przypadku Słońca niż Księżyca. Jest to istota sił pływowych. Księżyc wywiera większy efekt pływowy niż Słońce, ponieważ względna różnica odległości obu stron Ziemi jest znacznie większa w przypadku Księżyca niż Słońca.



13.10 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Ziemia powoduje powstanie siły pływowej na Księżycu. Czy jest ona większa, taka sama, czy mniejsza niż siła pływowa wywierana przez Księżyc na Ziemi? Uważaj przy udzielaniu odpowiedzi, ponieważ siły pływowe powstają wskutek różnicy sił grawitacyjnych między jedną, a drugą stroną ciała. Spójrz na obliczenia, które wykonaliśmy dla sił pływowych na Ziemi i zastanów się, które wartości znacząco zmieniłyby się na Księżycu. Średnica Księżyca jest jedną czwartą średnicy Ziemi. Siły pływowe na Księżycu nie są łatwe do wykrycia, ponieważ na jego powierzchni nie ma cieczy.

Inne skutki działania sił pływowych

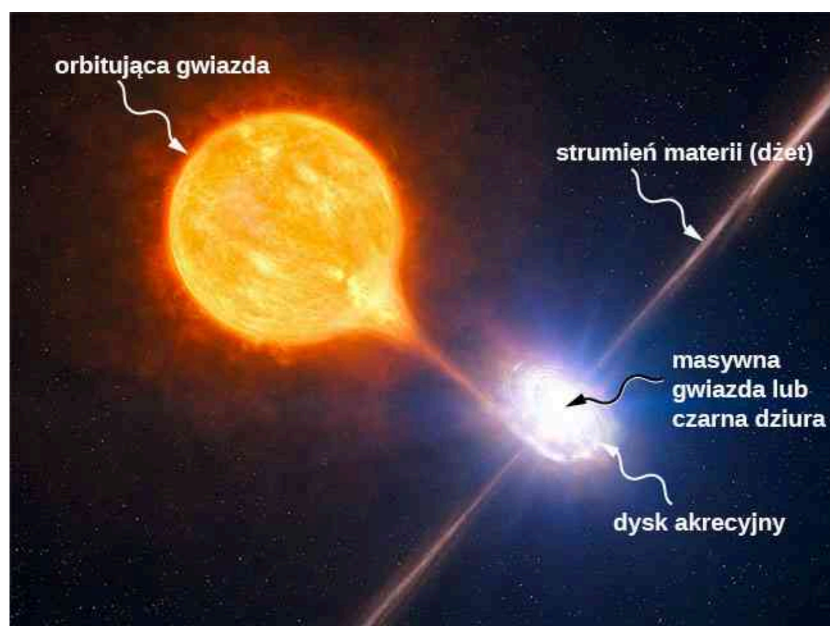
Siły pływowe istnieją pomiędzy dowolnymi dwoma ciałami. Rozciągają one ciała wzdłuż linii prostej przechodzącej przez ich środki. Choć wpływ sił pływowych na ziemskie oceany jest codziennie widoczny, ich długotrwałe skutki działania nie mogą być tak łatwo zaobserwowane. Jedną z konsekwencji występowania sił pływowych jest rozproszenie kinetycznej energii obrotowej, wskutek tarcia podczas zmiany kształtu samych ciał. Prędkość obrotowa Ziemi maleje, gdyż siły pływowe przekształcają energię obrotową w ciepło. Drugi efekt jest związany z rozproszeniem energii i zachowaniem momentu pędu. Nazywa się on obrotem synchronicznym. Zjawisko to występuje w przypadku większości księżyców w naszym Układzie Słonecznym, w tym także w przypadku ziemskiego Księżyca. Księżyc odwrócony jest w stronę Ziemi zawsze tą samą stroną — jego okres obrotu wokół własnej osi jest taki sam, jak okres obrotu Ziemi. Ziemia, tracąc swą prędkość obrotową, ostatecznie zwróci się jedną stroną ku Księżycowi. Kiedy tak się stanie, nie będziemy mogli obserwować już pływów, ponieważ wezbrane wody pozostaną na Ziemi na stałe w tym samym miejscu. Wówczas Księżyc będzie widoczny stale z jednej półkuli ziemskiej, podczas gdy mieszkańcy drugiej połowy planety nigdy już go nie zobaczą. Proces ten potrwa jednak wiele miliardów lat i być może nie zakończy się przed wygaśnięciem naszego Słońca.

Jeden z bardziej dramatycznych przykładów efektów pływowych występuje na Io, jednym z księżyców Jowisza. W 1979 roku statek kosmiczny *Voyager* wysłał na Ziemię dramatyczne zdjęcia aktywności wulkanicznej na Io. Jest to jedyne ciało astronomiczne w naszym Układzie Słonecznym, na którym wykryto taką aktywność. Na Rysunku 13.26 przedstawiono najnowsze zdjęcie Io wykonane przez statek kosmiczny *New Horizons* w jego drodze do Plutona, korzystając z przyspieszającego oddziaływania grawitacyjnego Jowisza.



Rysunek 13.26 Dramatyczne dowody na istnienie sił pływowych można obserwować na Io. Przyczyną erupcji widocznej na niebiesko jest wewnętrzne ciepło powstałe w wyniku działania sił pływowych wywieranych na Io przez Jowisza.

Wpływ sił pływowych na niektóre gwiazdy może być katastrofalny w skutkach. Siły pływowe w bardzo bliskich układach podwójnych mogą być wystarczająco silne, aby jedna gwiazda rozerwała materię drugiej. Dzieje się tak, gdy siła pływowa wywierana przez jedną z gwiazd przekracza siłę własnej grawitacji drugiej gwiazdy, która spaja ją w całość. Efekt ten można zauważyć w przypadku gwiazd o przeciętnych rozmiarach i masach (gwiazdach ciągu głównego), które orbitują blisko masywnej gwiazdy, takiej jak np. gwiazda neutronowa lub czarnej dziury. Rysunek 13.27 przedstawia interpretację tego procesu przez artystę. Gdy materia spada na masywną gwiazdę (zjawisko akreacji), tworzy się dysk akrecyjny, temperatura spadającej materii znacznie wzrasta, czemu towarzyszy promieniowanie w postaci fal elektromagnetycznych, głównie w zakresie rentgenowskim.



Rysunek 13.27 Siły pływowe masywnego obiektu mogą odrywać materię z orbitującej gwiazdy. Oprócz dysku akrecyjnego krążącego wokół masywnego ciała, materia jest często wyrzucana wzdłuż pokazanego na ilustracji strumienia materii (dżetu). (Źródło: Modyfikacja pracy udostępnionej przez Europejskie Obserwatorium Południowe)

Energia emitowana przez tego typu układy podwójne może przekroczyć typową wartość energii wytwarzanej przez tysiące gwiazd. Innym przykładem mogą być kwazary. Kwazary są bardzo odległymi i bardzo jasnymi obiektami, których moc promieniowania często przekracza moc promieniowania całych galaktyk. Astronomowie zgadzają się, że w rzeczywistości są to masywne czarne dziury wytwarzające energię promieniowania z materii, która pochodzi z rozerwanych pływowo pobliskich gwiazd.

13.7 | Teoria grawitacji Einsteina

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać, w jaki sposób teoria względności jest powiązana z grawitacją;
- wyjaśniać zasadę równoważności;
- obliczać promień Schwarzschilda;
- podawać dowody istnienia czarnych dziur.

Prawo powszechnego ciążenia wyjaśnia wiele faktów obserwacyjnych, które dostrzegliśmy w naszym Układzie Słonecznym. Rzeczywiście, same prawa Newtona wystarczyły, aby precyzyjnie wysłać każdy pojazd kosmiczny w podróż. Tory asteroid przecinających orbitę Ziemi i większości innych ciał niebieskich mogą być także dokładnie określone przy użyciu jedynie praw Newtona. Niemniej jednak, wiele zjawisk wykazało rozbieżność od tego, co przewidują prawa Newtona. Są to m.in. precesja orbity Merkurego i sposób, w jaki grawitacja oddziałuje ze światłem. W tym podrozdziale zapoznamy się z innym sposobem podejścia do grawitacji.

Rewolucja w podejściu

W 1905 roku **Albert Einstein** (1879–1955) opublikował **szczególną teorię względności** (ang. **Theory of Special Relativity**). Teoria ta została omówiona szczegółowo w rozdziale Teoria względności (https://cnx.org/content/m65887/latest/) , więc powiemy w tym miejscu o niej tylko kilka słów. W teorii tej, prędkość żadnego ciała nie może przekroczyć prędkości światła — jest ona swoistym ograniczeniem prędkości w całym Wszechświecie. Ten prosty fakt został zweryfikowany w niezliczonych eksperymentach. Niesie on jednak ze sobą fundamentalne konsekwencje — przestrzeń i czas nie są absolutne. Dwie osoby poruszające się względem siebie nie zgadzają się co do wyniku pomiaru długości poruszających się obiektów oraz upływającego czasu. Prawie wszystkie prawa mechaniki, których nauczyłeś się w poprzednich rozdziałach, pomimo że są wyjątkowo dokładne nawet przy prędkościach rzędu wielu tysięcy kilometrów na sekundę, zaczynają zawodzić, gdy prędkość ciała zbliża się do prędkości światła.

To ograniczenie wartości prędkości we Wszechświecie było również wyzwaniem dla nieodłącznego założenia prawa powszechnego ciążenia, że grawitacja jest **siłą działającą na odległość** (ang. **action-at-a-distance force**). Oznacza to, że bez kontaktu fizycznego, każda zmiana położenia jednego ciała jest natychmiastowo przekazywana do wszystkich innych ciał. Założenie to nie wywodzi się z żadnej pierwszej zasady, a teoria Newtona po prostu nie rozwodzi się nad tym problemem. (Podobnie zakładano w przypadku sił elektromagnetycznych. Można śmiało powiedzieć, że większość naukowców nie czuło się w pełni pogodzonych z koncepcją siły działającej na odległość).

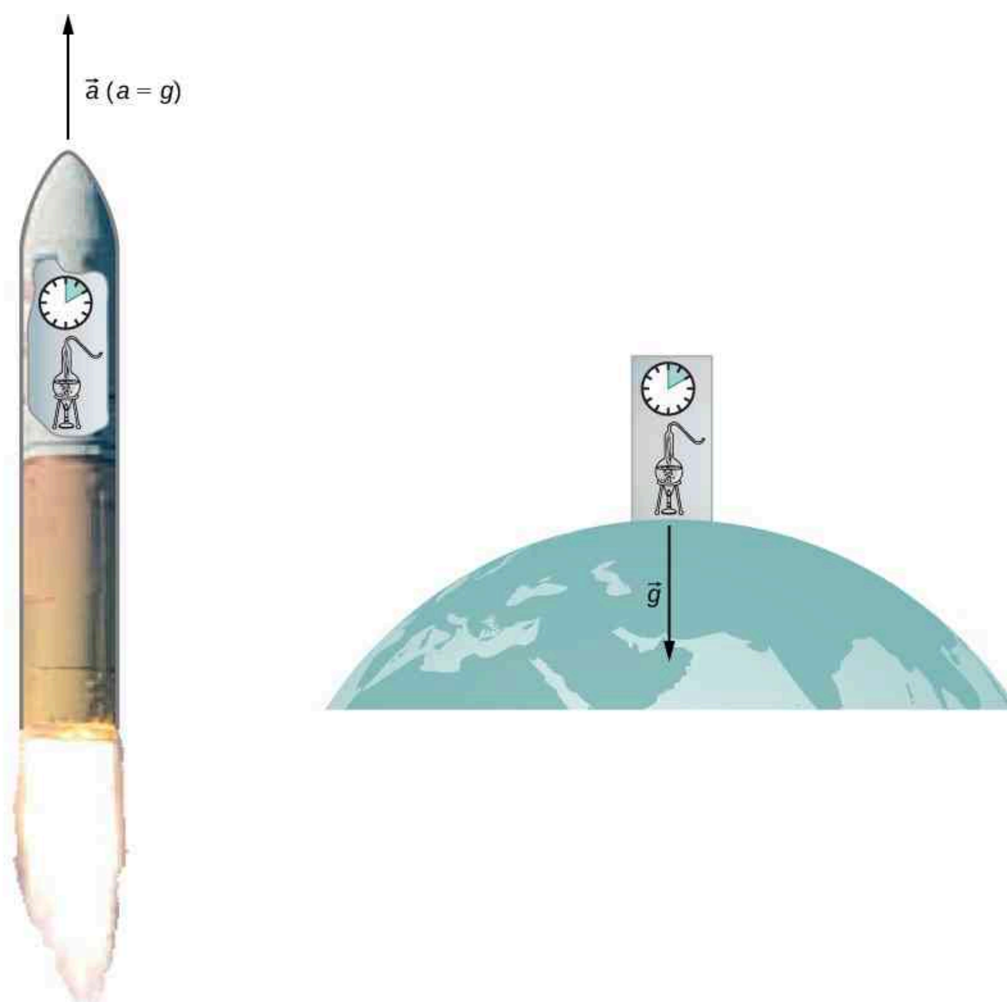
W prawie powszechnego ciążenia (Równanie 13.1) pojawia się również drugie założenie. Zakłada się, że masy występujące w tym prawie są dokładnie takie same, jak te stosowane w drugiej zasadzie dynamiki Newtona $\vec{F} = m\vec{a}$. Poczyniliśmy to założenie w wielu naszych wyprowadzeniach w tym rozdziale. Ponownie, nie ma żadnej podstawowej zasady stwierdzającej, że tak musi być, ale wyniki doświadczalne są zgodne z tym założeniem. W kolejnej (1916 r.) **ogólnej teorii względności** (ang. **Theory of General Relativity**) Einstein, rozwiązał oba te problemy. Jego teoria opisuje **geometrię czasoprzestrzeni** (ang. **space-time geometry**) oraz to, jak masa (i przyspieszenie) oddziałują z czasoprzestrzenią i jak ją zakłócają. Nie jest to na pewno teoria sił grawitacyjnych. Matematyka stosowana w ogólnej teorii względności wykracza poza zakres tego kursu, ale możemy zapoznać się z kilkoma podstawowymi zasadami wynikającymi z tej teorii oraz ich konsekwencjami.

Zasada równoważności

Einstein doszedł po części do ogólnej teorii względności, zastanawiając się, dlaczego ktoś, kto spada swobodnie nie czuje swojej wagi. Powszechnie mówi się, że astronauci na orbicie Ziemi są w stanie nieważkości pomimo faktu, że grawitacja Ziemi jest tam wciąż stosunkowo silna. W ogólnej teorii względności Einsteina nie ma żadnej różnicy pomiędzy spadkiem swobodnym i przebywaniem w stanie nieważkości. Jest to tak zwana **zasada równoważności** (ang. **Principle of Equivalence**). Równie zaskakującym następstwem tej zasady jest fakt, że nie ma różnicy między jednorodnym polem grawitacyjnym i jednostajnym przyspieszeniem w przypadku braku grawitacji. Skupmy się na tym ostatnim stwierdzeniu. Chociaż doskonale jednorodne pole grawitacyjne istnieje tylko teoretycznie, możemy korzystać z takiego przybliżenia do opisu pól rzeczywistych.

W każdym laboratorium na Ziemi pole grawitacyjne $\vec{g}$ jest w zasadzie jednorodne. Następstwem tego stwierdze-

nia jest fakt, że wszystkie eksperymenty fizyczne wykonywane w ziemskim laboratorium dadzą takie same wyniki, jak te wykonywane w laboratorium znajdującym się w przestrzeni kosmicznej, z dala od wszystkich innych mas, poruszającym się z przyspieszeniem $a = g$. Rysunek 13.28 ilustruje tę ideę.



Rysunek 13.28 Zgodnie z zasadą równoważności wyniki wszystkich doświadczeń przeprowadzonych w jednorodnym polu grawitacyjnym w laboratorium są identyczne z wynikami takich samych eksperymentów, przeprowadzonych w jednostajnie przyspieszającym laboratorium.

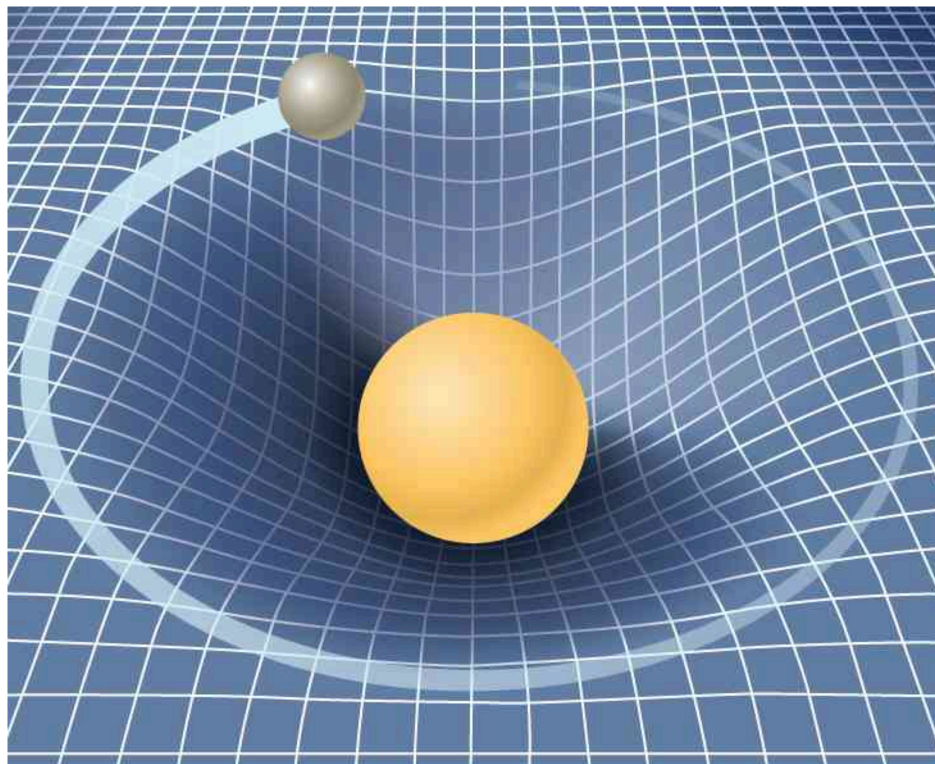
Jak to możliwe, że te dwie pozornie zasadniczo różne sytuacje są takie same? Odpowiedź wynika z faktu, że grawitacja nie jest siłą działającą między dwoma ciałami, lecz jest wynikiem oddziaływania każdego ciała z efektami, jakie inne ciała wywierają na czasoprzestrzeń go otaczającą. Jednorodne pole grawitacyjne i ruch jednostajnie przyspieszony mają dokładnie taki sam wpływ na czasoprzestrzeń.

Geometryczne podejście do teorii grawitacji

Geometria euklidesowa zakłada, że przestrzeń jest płaska. Jej najpowszechniej znane cechy to: linia prosta jest najkrótszą odległością pomiędzy dwoma punktami, suma kątów każdego trójkąta wynosi 180 stopni, a linie równoległe nigdy się nie przecinają. Geometrie nieeuklidesowe to takie, w których co najmniej jeden z aksjomatów geometrii euklidesowej nie jest spełniony. Nie były one przedmiotem dokładnych badań aż do XIX wieku, więc nie dziwi nas fakt, że przestrzeń euklidesowa występuje we wszystkich prawach Newtona.

Ogólna teoria względności kwestionuje tę długo obowiązującą koncepcję. Tylko pusta przestrzeń jest płaska. Obecność masy — lub energii, gdyż teoria względności nie odróżnia tych dwóch wielkości, zakrzywia czas i przestrzeń, czyli czasoprzestrzeń wokół niej. Ruch każdego innego ciała posiadającego masę jest po prostu reakcją na zakrzywienie czasoprzestrzeni. Rysunek 13.29 jest dwuwymiarowym przedstawieniem ciała o mniejszej masie, krążącego wokół ciała o większej masie, w reakcji na zakrzywienie przestrzeni, wynikające z obecności tej większej masy. Na bardziej precyzyjnym, jednak równocześnie bardziej skomplikowanym, a tym samym mniej czytelnym rysunku, widzielibyśmy również przestrzeń zakrzywioną przez orbitującą masę i wówczas obie masy byłyby w ruchu (wokół

ich wspólnego środka masy), w reakcji na całkowite zakrzywienie przestrzeni. Zauważ, że rysunek ten pomaga tylko zobrazować ideę. W rzeczywistości są to zakrzywienia trójwymiarowej przestrzeni i czasu. Nie widzimy tych zakrzywień tak, jak widzielibyśmy dołki pod kulami. Obserwujemy je tylko dzięki starannym pomiarom ruchu ciał i światła w przestrzeni.



Rysunek 13.29 Mniejsza masa orbitująca w zakrzywionej przez większą masę czasoprzestrzeni. W rzeczywistości każda masa i energia zakrzywiają czasoprzestrzeń.

Dla słabych pól grawitacyjnych wyniki uzyskiwane przy zastosowaniu ogólnej teorii względności Einsteina nie różnią się znacząco od tych uzyskanych na podstawie prawa powszechnego ciążenia Newtona. W przypadku silnych pól grawitacyjnych wyniki różnią się i to właśnie ogólna teoria względności daje poprawne rezultaty. Różnicę tę możemy zauważyć nawet w stosunkowo słabym polu grawitacyjnym Słońca w odległości orbity Merkurego. Począwszy od połowy XIX wieku zaczęto wykonywać dokładne pomiary eliptycznej orbity Merkurego. Chociaż jego orbita jest eliptyczna, to ruch Merkurego jest dodatkowo skomplikowany przez fakt, że położenia peryhelium i aphelium elipsy powoli się przemieszczają. Większość tej precesji wynika z grawitacyjnego oddziaływania innych planet, ale niewielki jej składnik nie mógł być obliczony na podstawie praw Newtona. W pewnym momencie szukano nawet towarzyszącej mu planety, która wyjaśniłaby tę różnicę. Jednak ogólna teoria względności poprawnie przewiduje przeprowadzone pomiary. Od tego czasu wykonano wiele pomiarów, takich jak zakrzywienie promienia światła w obecności dużych obiektów, takich jak Słońce, które potwierdziły, że ogólna teoria względności jest w pełni poprawna.

Zamkniemy tę dyskusję pewnym końcowym stwierdzeniem. Mówiliśmy o zakrzywieniu czasoprzestrzeni lub zakrzywieniu przestrzeni i czasu. Zarówno w ogólnej, jak i w szczególnej teorii względności wymiar czasu jest równorzędny z każdym wymiarem przestrzennym (różniący się w obu teoriach jedynie bliskim jedności czynnikiem skali). W pobliżu bardzo dużej masy nie tylko przestrzeń się zakrzywia, ale też upływ czasu jest rozciągnięty i spowolniony. Omówimy te efekty dokładniej w dalszej części rozdziału.

Czarne dziury

Teoria grawitacji Einsteina jest wyrażona jednym pozornie prosto wyglądającym równaniem tensorowym (tensor to uogólnienie skalara i wektora), które mówi, w jaki sposób masa zakrzywia czasoprzestrzeń wokół niej. Jedno z rozwiązań tego równania prowadzi do jednego z najbardziej fascynujących przewidywań tej teorii: istnienia **czarnej dziury** (ang. **black hole**). Powstanie czarnych dziur polega na tym, że jeśli dany obiekt jest wystarczająco gęsty, to zapada się pod wpływem własnej grawitacji i jest otoczony **horyzontem zdarzeń** (ang. **event horizon**). Cokolwiek znajdzie się w jego wnętrzu, nie może uciec spod wpływu przyciągania grawitacyjnego czarnej dziury. Nazwa „czarna dziura” została wymyślona przez astronoma **Johna Wheelera** (1911–2008) w 1969 roku. Wynika ona z faktu, że nawet świa-

tło nie może uciec spod wpływu przyciągania grawitacyjnego takiego obiektu. **Karl Schwarzschild** (1873–1916) był pierwszą osobą, która zauważyła ten fakt w 1916 roku, ale w owym czasie uważano go głównie za matematyczną osobliwość.

Co zaskakujące, idea masywnego ciała, z którego światło nie może uciec, pochodzi z XVIII wieku. Niezależnie **John Michell** (1724–1793) i **Pierre Simon de Laplace** (1749–1827) wykorzystali prawo powszechnego ciążenia, aby pokazać, że światło próbujące opuścić powierzchnię wystarczająco masywnej gwiazdy nie może uciec z jej powierzchni. Ich praca opierała się na fakcie, że prędkość światła została zmierzona przez **Ole Rømera** (1644–1710) w 1676 roku. Zauważył on rozbieżności w otrzymanych danych, dotyczących okresu orbitalnego obiegu księżyca Io wokół Jowisza. Rømer zdał sobie sprawę, że różnice te wynikają ze względnej pozycji Ziemi i Jowisza w różnym czasie, i na tej podstawie mógł wyznaczyć prędkość światła. Michell i Laplace zrozumieli, że skoro światło ma skończoną prędkość, może istnieć wystarczająco duża gwiazda, taka że prędkość ucieczki z jej powierzchni może być większa od prędkości światła. Wówczas światło zawsze powróciłoby z powrotem do gwiazdy. Obserwatorzy znajdujący się wystarczająco daleko od największych gwiazd nie byliby więc w stanie w ogóle ich zobaczyć, chociaż widzieliby mniejsze gwiazdy z tej samej odległości.

Przypomnijmy, że w podrozdziale Energia potencjalna i całkowita pola grawitacyjnego, okazało się, że prędkość ucieczki, określona przez Równanie 13.6, jest niezależna od masy ciała m opuszczającego ciało o dużej masie M. Mimo że natura światła nie była wtedy jeszcze w pełni zrozumiała, masa światła, o ile w ogóle byłaby niezerowa, i tak nie miała znaczenia. W związku z tym Równanie 13.6 powinno obowiązywać także dla światła. Podstawiając prędkość światła c w miejsce prędkości ucieczki, otrzymujemy:

$$v_u = c = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Musimy jedynie podstawić odpowiednie wartości R i M, tak aby prędkość ucieczki przekroczyła wartość c i w konsekwencji światło nie będzie mogło opuścić takiego ciała. Michell stwierdził, że jeśli gwiazda ma gęstość naszego Słońca i promień, który wykracza poza orbitę Marsa, wtedy światło nie będzie mogło uciec z jej powierzchni. Przypuszczał również, że nadal będziemy w stanie wykryć taką gwiazdę dzięki oddziaływaniu grawitacyjnemu, jakie wywierałaby ona na ciała znajdujące się w jej pobliżu. Był to wnikliwy wniosek, ponieważ właśnie w taki sposób wykrywamy obecnie istnienie takich obiektów. Choć jeszcze nikt nie odwiedził i nigdy nie odwiedzi żadnej czarnej dziury, dowody na ich istnienie stały się tak oczywiste, że prawie żaden astronom nie wątpi w ich istnienie.

Zanim przyjrzymy się niektórym z tych dowodów, zwrócimy naszą uwagę z powrotem na rozwiązanie Schwarzschilda równania tensorowego ogólnej teorii względności. Z tego rozwiązania wynika charakterystyczny promień, nazywany **promieniem Schwarzschilda** (ang. **Schwarzschild radius**) (R_S). Dowolna masa M zapadnie się do osobliwości, jeśli tylko ściśnie się ją do tego stopnia, że jej promień będzie mniejszy niż promień Schwarzschilda. Wówczas wszystko, co znajdzie się w objętości kuli o tym promieniu, nie będzie mogło jej opuścić. Wewnątrz R_S, strzałka czasu kieruje wszystko do osobliwości. (W ogólnym sensie matematycznym osobliwość występuje, gdy wartość funkcji dąży do nieskończoności. W tym przypadku jest to punkt w przestrzeni o zerowej objętości i skończonej masie. Stąd gęstość masy i energia pola grawitacyjnego stają się nieskończone). Promień Schwarzschilda dany jest równaniem:

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}. \tag{13.12}$$

Przyglądając się naszemu równaniu na prędkość ucieczki, zauważymy, że kiedy $v_u = c$, to daje ono dokładnie taki sam wynik. Jest to jednak tylko czysty przypadek spowodowany kilkoma błędnymi założeniami w teorii klasycznej. Jednym z tych założeń jest użycie niewłaściwego wyrażenia na energię kinetyczną w przypadku światła. Zobaczmy zatem, jak gęste musi być ciało, aby zapadło się pod wpływem własnej grawitacji i zamieniło się w czarną dziurę.

Przykład 13.15

Wyznaczanie promienia Schwarzschilda

Oblicz długość promienia Schwarzschilda dla Słońca i Ziemi. Porównaj gęstość jądra atomowego z gęstością ściśniętej równomiernie masy Ziemi do objętości ograniczonej promieniem Schwarzschilda. Gęstość jądra atomowego wynosi około $2{,}3 \cdot 10^{17}\ \mathrm{kg/m^3}$.

Strategia rozwiązania

W naszych obliczeniach skorzystamy z Równania 13.12. Potrzebujemy tylko mas Ziemi i Słońca, które znajdziemy w danych astronomicznych podanych w Dodatku D.

Rozwiązanie

Podstawiając masę Słońca M_S , otrzymujemy:

$$R_S = \frac{2GM_S}{c^2} = \frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}{(3 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2} = 2{,}95 \cdot 10^3\ \text{m}.$$

Jest to średnica o długości tylko około 6 km. Jeśli użyjemy masy Ziemi M_Z, otrzymamy $R_S = 8{,}85 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$. Jest to średnica mniejsza niż 2 cm! Jeśli spakowalibyśmy masę Ziemi w kulę o promieniu $R_S = 8{,}85 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$, jej gęstość wynosiłaby:

$$\rho = \frac{M_Z}{V} = \frac{5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{\frac{4}{3}\pi\left(8{,}85 \cdot 10^{-3}\ \text{m}\right)^3} = 2{,}06 \cdot 10^{30}\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Znaczenie

Gwiazda neutronowa (ang. **neutron star**) to, poza czarną dziurą, najgęstszy znany obiekt we Wszechświecie. Gwiazda neutronowa składa się z neutronów. Jej gęstość jest równa gęstości jądra atomowego. Jak wiele czarnych dziur, uważa się ją za pozostałość po supernowych — gwiazdach, które wybuchają pod koniec swego życia. Aby utworzyć czarną dziurę z Ziemi, musimy ją ścisnąć do gęstości trzynastu rzędów wielkości, większych od gęstości gwiazdy neutronowej. Ten proces wymagałby niewyobrażalnej siły. Nie istnieje żaden znany mechanizm, który mógłby spowodować, że obiekt wielkości Ziemi stanie się czarną dziurą. W przypadku Słońca, powinieneś być w stanie wykazać, że musiałoby być ono skompresowane do gęstości tylko około 80 razy większej od gęstości jądra atomowego. (Uwaga: Gdy masa jest ściśnięta w kulę o promieniu Schwarzschilda, ogólna teoria względności mówi, że zapadnie się ona do osobliwości. Obliczenia te pokazują jedynie gęstość, którą musimy osiągnąć, aby zainicjować ten proces).



13.11 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Porównaj gęstość potrzebną, aby Ziemia stała się czarną dziurą z tą, która jest potrzebna do takiej zmiany w przypadku Słońca. Jakie wnioski można wyciągnąć z tego porównania – odnośnie do tego, co byłoby konieczne do utworzenia czarnej dziury? Czy spodziewasz się, że we Wszechświecie jest wiele czarnych dziur o małej masie?

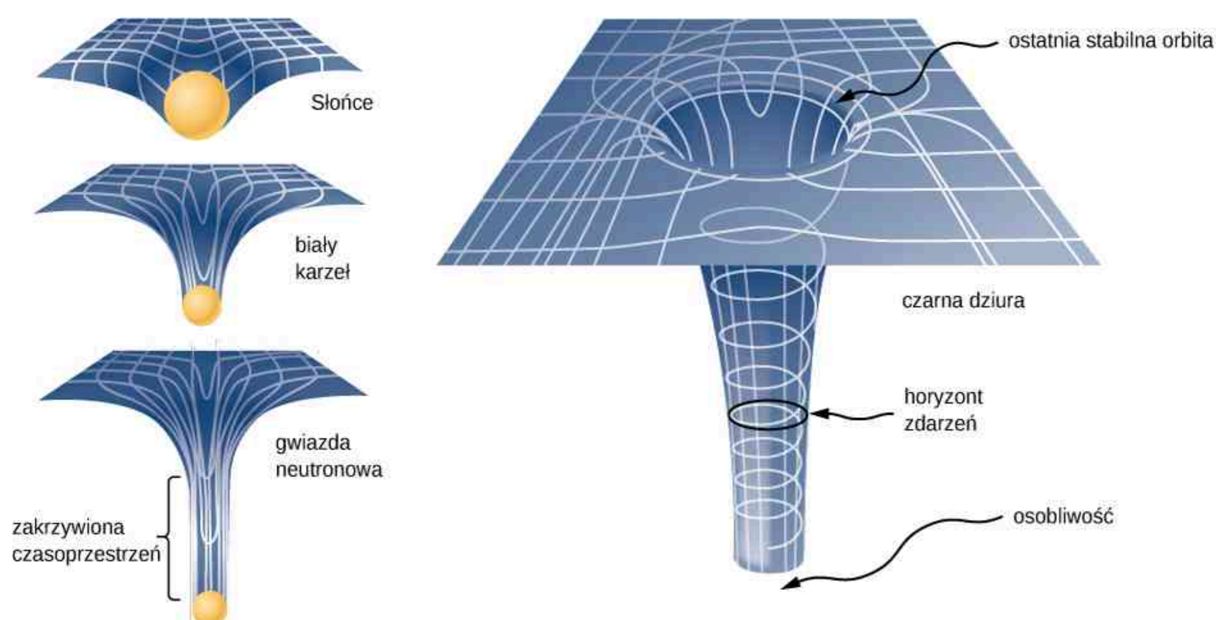
Horyzont zdarzeń

Okrąg o promieniu Schwarzschilda nazywany jest horyzontem zdarzeń czarnej dziury. Zauważyliśmy, że zarówno przestrzeń, jak i czas są rozciągnięte w pobliżu masywnych obiektów, takich jak czarne dziury. Rysunek 13.30 ilustruje ten wpływ na przestrzeń. Jej zakrzywienie wywoływane przez nasze Słońce jest w zasadzie niewielkie i zostało wyolbrzymione dla czytelności rysunku. Rozważmy przypadek gwiazdy neutronowej, opisaną w Przykładzie 13.15. Chociaż zakrzywienie czasoprzestrzeni na powierzchni gwiazdy neutronowej jest bardzo duże, jej promień jest wciąż większy niż promień Schwarzschilda. Obiekty o dużej prędkości mogą wciąż uciec z jej powierzchni.

Jeśli gwiazda neutronowa zyska wystarczająco dużo dodatkowej masy, to w rezultacie zapadnie się zmniejszając swoją objętość tak, że jej promień będzie krótszy od promienia Schwarzschilda. Kiedy tak się stanie, cała masa zostanie nieuchronnie wciągnięta do osobliwości. Przestrzeń na poniższym rysunku jest rozciągnięta do nieskończoności. Czas jest również rozciągnięty do nieskończoności. Gdy obiekty spadają na horyzont zdarzeń, widzimy, że zbliżają się one coraz wolniej, ale nigdy nie osiągną horyzontu zdarzeń. Jako obserwatorzy zewnętrzni nigdy nie zobaczymy, aby obiekty przechodziły przez horyzont zdarzeń — faktycznie, czas rozciąga się coraz bardziej tak, że zatrzymuje się na horyzoncie zdarzeń.



Odwiedź stronę internetową (https://openstaxcollege.org/l/21spacetelescop) , aby obejrzeć animację tych zakłóceń przestrzeni.

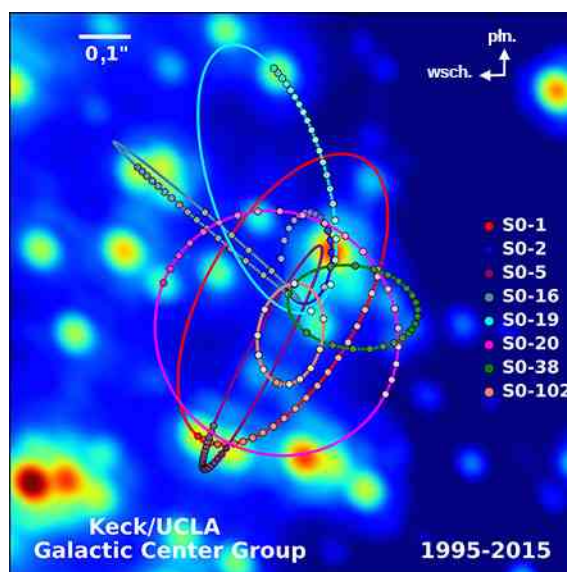


Rysunek 13.30 Zakrzywienie przestrzeni staje się coraz bardziej widoczne wokół coraz większych mas. Gdy gęstość masy osiągnie poziom krytyczny, tworzy się czarna dziura i struktura czasoprzestrzeni zostaje rozdarta. Krzywizna przestrzeni jest największa na powierzchni każdego z trzech pierwszych ciał pokazanych na rysunku, lecz jest ona skończona. Krzywizna następnie zmniejsza się (nie pokazano) do zera podczas przemieszczania się do środka ciała. W przypadku czarnej dziury jest inaczej. Krzywizna staje się nieskończona: powierzchnia zapada się do osobliwości, a stożek czasoprzestrzeni rozciąga się do nieskończoności. (Uwaga: rysunki te w żaden sposób nie zachowują skali.)

Dowody istnienia czarnych dziur

Dopiero w latach sześćdziesiątych XX wieku, kiedy odkryto pierwszą gwiazdę neutronową, zainteresowanie istnieniem czarnych dziur ponownie wzrosło. Dowody na istnienie czarnych dziur opierają się na kilku typach obserwacji, takich jak analiza promieniowania rentgenowskiego układów podwójnych, soczewkowanie grawitacyjne światła pochodzącego z odległych galaktyk oraz ruch widocznych ciał wokół ich niewidzialnych partnerów. Skupimy się na tych ostatnich obserwacjach, ponieważ odnoszą się one do tego, czego nauczyliśmy się w tym rozdziale. Światło nie może uciec z czarnej dziury, abyśmy ją mogli zobaczyć. Możemy jednak zaobserwować efekty oddziaływania grawitacyjnego czarnej dziury na otaczające ją ciała.

Najbliższe, a być może także najbardziej dramatyczne, dowody na istnienie czarnej dziury znajdują się w centrum Drogi Mlecznej. Grupa z Uniwersytetu Kalifornijskiego w Los Angeles (UCLA) zajmująca się badaniem galaktyk, wykorzystując dane uzyskane przez teleskopy Kecka znajdujące się na Hawajach, określiła orbitę kilku gwiazd poruszających się w pobliżu centrum naszej galaktyki. Niektóre z tych danych są pokazane na Rysunku 13.31. Na podstawie pomiarów okresów orbitalnych i rozmiarów orbit tych gwiazd szacuje się, że orbitują one wokół obiektu, którego masa jest równa około 4 milionom mas Słońca. Zwróćmy uwagę, że masa ta musi znajdować się w obszarze ograniczonym przez przecinające się eliptyczne orbity gwiazd. Obszar ten zmieściłby się wewnątrz orbity Merkurego, ale w widmie światła widzialnego nic w tym miejscu nie widać.



Rysunek 13.31 Trajektorie gwiazd krążących wokół masy znajdującej się w centrum Drogi Mlecznej. Na podstawie ich ruchu szacuje się, że czarna dziura w centrum galaktyki ma masę równą około 4 milionom mas Słońca. (Źródło: UCLA Galactic Center Group – W.M. Keck Observatory Laser Team)

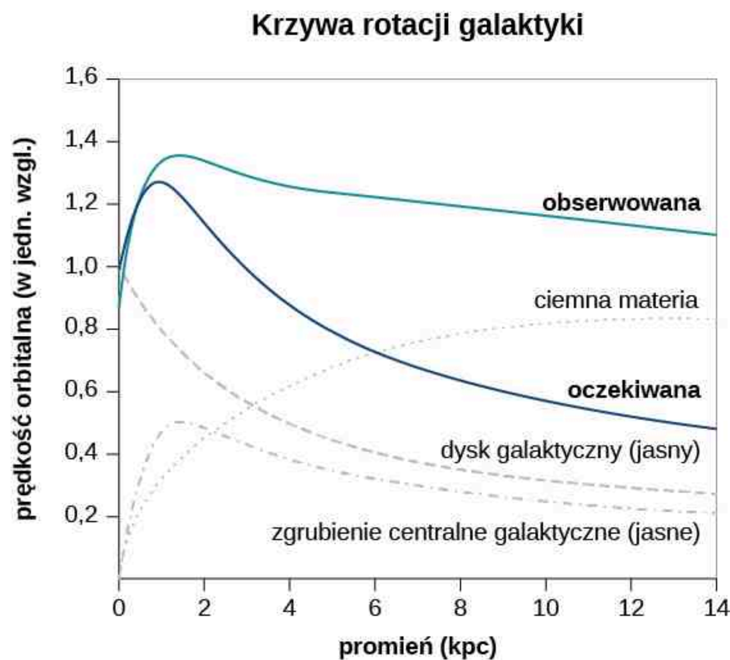
Fizyka powstawania i ewolucji gwiazd jest dobrze znana. Podstawowym źródłem energii, dzięki któremu gwiazdy świecą, jest ich własna grawitacja inicjująca fuzję termojądrową. Im bardziej masywna jest gwiazda, tym jaśniej świeci i tym krócej żyje. Obiekt zajmujący bardzo mały obszar, którego masa jest 4 miliony razy większa od masy Słońca i którego nie można zobaczyć, nie ma żadnego innego logicznego wytłumaczenia jak to, że w istocie jest on czarną dziurą. Obserwacje pozagalaktyczne sugerują, że obecność czarnych dziur jest powszechna w centrach galaktyk.


Odwiedź stronę internetową UCLA Galactic Center Group (https://openstaxcollege.org/l/21galacenter01) , by poznać więcej szczegółów na temat promieniowania X emitowanego przez układy podwójne oraz na temat soczewkowania grawitacyjnego. Odwiedź także tę stronę internetową (https://openstaxcollege.org/l/21galacenter02) , by zobaczyć trójwymiarową wizualizację gwiazd krążących w pobliżu centrum naszej galaktyki. Animacja znajduje się w dolnej części tej strony.

Ciemna materia

Gwiazdy krążące wokół samego centrum naszej galaktyki dostarczają silnych dowodów na to, że znajduje się tam czarna dziura, ale orbity gwiazd oddalonych od jej środka sugerują występowanie również innego, intrygującego zjawiska, obserwowanego pośrednio. Przypomnijmy sobie z podrozdziału Grawitacja przy powierzchni Ziemi, że w celu obliczenia siły grawitacji, wywieranej przez ciało sferycznie symetryczne na inne masy, przyjmujemy, iż cała jego masa znajduje się w centrum takiego ciała. Podobnie możemy potraktować całkowitą masę, która znajduje się wewnątrz obszaru ograniczonego orbitą dowolnej gwiazdy w naszej galaktyce. Zakładamy po prostu, że cała ta masa znajduje się w centrum dysku Drogi Mlecznej. Możemy oszacować tę masę sumując masy wszystkich widocznych gwiazd w tym obszarze, a następnie dodając do tego wyniku masę czarnej dziury w centrum.

Gdy to zrobimy, zauważymy, że prędkość orbitalna gwiazd jest zdecydowanie za duża, aby była spowodowana taką ilością materii. Rysunek 13.32 przedstawia prędkość orbitalną gwiazd w zależności od ich odległości od środka Drogi Mlecznej. Niebieska linia reprezentuje prędkości, jakich można się spodziewać na podstawie naszego oszacowania masy, podczas gdy zielona krzywa odzwierciedla dane pomiarowe. Najwyraźniej dużej części materii nie widzimy. Szacuje się, że materii, której nie widać, jest pięciokrotnie więcej niż tej, którą możemy obserwować. Nazwano ją **ciemną materią** (ang. **dark matter**). Ponadto profil prędkości nie odzwierciedla oczekiwanego rozkładu widocznych gwiazd. Nie tylko szacunkowa masa całkowita materii jest niezgodna z danymi, ale jej oczekiwany rozkład także jest niezgodny z obserwacją. Zjawisko to nie dotyczy jedynie naszej galaktyki, ale wydaje się cechą wszystkich galaktyk. Problem ten został po raz pierwszy zauważony w latach trzydziestych XX wieku, kiedy mierzono ruch galaktyk w obrębie klastrów. Okazało się, że poruszały się one wokół środka masy tych klastrów szybciej, niż wskazywałyby na to szacunki ich widocznej masy.



Rysunek 13.32 Niebieska krzywa wskazuje oczekiwaną prędkość orbitalną gwiazd w Drodze Mlecznej wyznaczoną na podstawie masy gwiazd, które możemy zobaczyć. Zielona krzywa wskazuje, że rzeczywiste prędkości gwiazd są większe, co sugeruje obecność dodatkowej materii, której nie można zobaczyć. (Źródło: modyfikacja pracy Matthew Newby)

Istnieją dwie dominujące koncepcje na temat tego, czym może być ta materia — WIMP i MACHO. **WIMP** (ang. **Weakly Interacting Massive Particles**) są to słabo oddziałujące masywne cząstki. Cząstki te (neutrina są jednym z przykładów) oddziałują bardzo słabo ze zwykłą materią, a więc są bardzo trudne do wykrycia. **MACHO** (ang. **Massive Astrophysical Compact Halo Object**) to masywne zwarte obiekty halo (np. gwiazdy neutronowe, brązowe karły), które składają się ze zwykłej materii barionowej, takiej jak neutrony i protony. Emitują one bardzo mało promieniowania, a więc są trudne do wykrycia przy użyciu współczesnej techniki obserwacyjnej. Z oboma pomysłami związane są nierozwiązane dotąd problemy i trzeba przeprowadzić wiele dalszych badań, aby ostatecznie rozwiązać te kwestie.

PODSUMOWANIE ROZDZIAŁU 13

KLUCZOWE POJĘCIA

aphelium (ang. aphelion) punkt na orbicie położony najdalej od Słońca; analogiczny termin określający najdalszy punkt orbity Księżyca od Ziemi to apogeum

ciężar pozorny (ang. apparent weight) ciężar ciała z uwzględnieniem nieinercjalności układu odniesienia

czarna dziura (ang. black hole) ciało o wystarczająco dużej gęstości masy, aby zapadło się, tworząc osobliwość otoczoną horyzontem zdarzeń

czasoprzestrzeń (ang. space-time) pojęcie czasoprzestrzeni polega na tym, że czas jest kolejną współrzędną, która jest traktowana w taki sam sposób, jak każda współrzędna przestrzenna; w równaniach, które opisują zarówno szczególną, jak i ogólną teorię względności czas pojawia się w tym samym kontekście, co współrzędne przestrzenne

drugie prawo Keplera (ang. Kepler's second law) prawo, które mówi, że planeta zakreśla pola o równej powierzchni w równych odstępach czasu, co oznacza, że ma ona stałą prędkość polową

geometria nieeuklidesowa (ang. non-Euclidean geometry) geometria zakrzywionej przestrzeni opisująca zależności pomiędzy kątami i liniami na powierzchni sfery, hiperboloidy itp.

gwiazda neutronowa (ang. neutron star) najgęstszy znany obiekt – poza czarną dziurą

horyzont zdarzeń (ang. event horizon) obszar w pobliżu czarnej dziury o promieniu równym promieniowi Schwarzschilda, z którego żadne ciało, a nawet światło, nie może uciec

ogólna teoria względności (ang. Theory of General Relativity) teoria Einsteina dotycząca grawitacji i układów odniesienia poruszających się ruchem przyspieszonym; w teorii tej grawitacja jest wynikiem zakrzywienia czasoprzestrzeni przez masę i energię; teoria ta jest często nazywana teorią grawitacji Einsteina

okres orbitalny (ang. orbital period) czas potrzebny na wykonanie przez satelitę jednego obiegu po orbicie

peryhelium (ang. perihelion) punkt na orbicie położony najbliżej Słońca; analogiczny termin określający najbliższy punkt orbity Księżyca względem Ziemi to perygeum

pierwsze prawo Keplera (ang. Kepler's first law) prawo które mówi, że każda planeta porusza się po orbicie eliptycznej, a Słońce znajduje się w jednym z ognisk tej elipsy

pole grawitacyjne (ang. gravitational field) pole wektorowe, które otacza masę wytwarzająca to pole; pole jest reprezentowane przez linie pola, kierunek siły grawitacji jest styczny do linii pola, a wielkość (lub siła pola) jest odwrotnie proporcjonalna do odległości między liniami pola; inne ciała reagują na przyspieszenie wytwarzane przez to pole

prawo powszechnego ciążenia (ang. Newton's law of gravitation) każde dwa ciała przyciągają się siłą proporcjonalną do iloczynu ich mas i odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości pomiędzy nimi, wzdłuż prostej łączącej środki ich mas

promień Schwarzschilda (ang. Schwarzschild radius) promień krytyczny (RS) skojarzony z każdą masą o takiej własności, że jeśliby ścisnąć tę masę w obszar o promieniu mniejszym niż promień Schwarzschilda, masa ta zapadnie do osobliwości, a wszystko co znajdzie się wewnątrz obszaru o tym promieniu nie może uciec spod wpływu przyciągania grawitacyjnego R_S

prędkość orbitalna (ang. orbital speed) prędkość satelity na orbicie kołowej; termin ten może być również użyty do określenia chwilowej prędkości satelity poruszającego się po nie kołowej orbicie, na której jego prędkość nie jest stała

prędkość ucieczki (ang. escape velocity) lub druga prędkość kosmiczna to prędkość początkowa, jaką musi posiadać ciało, aby uciec spod wpływu przyciągania grawitacyjnego innego ciała; dokładniej jest ona zdefiniowana jako prędkość ciała o całkowitej energii mechanicznej równej zero

pływy kwadraturowe (ang. neap tide) niskie pływy powstające gdy Ziemia, Księżyc i Słońce znajdują się w wierzchołkach trójkąta prostokątnego

pływy syzygijne (ang. spring tide) wysokie pływy powstające gdy Ziemia, Księżyc i Słońce położone są wzdłuż jednej prostej

siła działająca na odległość (ang. action-at-a-distance force) rodzaj siły wywieranej bez kontaktu fizycznego

siła pływowa (ang. tidal force) różnica pomiędzy siłą grawitacji w środku i dowolnym innym punktem ciała; siła pływowa rozciąga ciało

trzecie prawo Keplera (ang. Kepler's third law) prawo które mówi, że kwadrat okresu obiegu orbity przez planetę jest proporcjonalny do sześcianu długości półosi wielkiej orbity eliptycznej tej planety

uniwersalna stała grawitacji (ang. universal gravitational constant) stała reprezentująca wielkość oddziaływania grawitacyjnego, której wartość uważana jest za niezmienną w całym Wszechświecie

zasada równoważności (ang. Principle of Equivalence) część ogólnej teorii względności, która stwierdza, że nie ma różnicy między spadkiem swobodnym a stanem nieważkości lub jednorodnym polem grawitacyjnym i jednostajnym przyspieszeniem

związanie grawitacyjne (ang. gravitationally bound) dwa ciała są grawitacyjnie związane, jeśli ich orbity są krzywymi zamkniętymi; układy związane grawitacyjnie mają ujemną wartość całkowitej energii mechanicznej

NAJWAŻNIEJSZE WZORY

Prawo powszechnego ciążenia	$\vec{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}_{12}$
Przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni Ziemi	$g = G\frac{M_Z}{r^2}$
Grawitacyjna energia potencjalna nad powierzchnią Ziemi	$U = -\frac{GM_Z m}{r}$
Zasada zachowania energii	$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r_2}$
Druga prędkość kosmiczna lub prędkość ucieczki	$v_u = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$
Prędkość orbitalna	$v_{\text{orb}} = \sqrt{\frac{GM_Z}{r}}$
Okres orbitalny	$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_Z}}$
Energia na orbicie kołowej	$E = E_K + U = -\frac{GmM_Z}{2r}$
Równanie krzywych stożkowych	$\frac{\alpha}{r} = 1 + e\cos\theta$
Trzecie prawo Keplera	$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3$
Promień Schwarzschilda	$R_S = \frac{2GM}{c^2}$

PODSUMOWANIE

13.1 Prawo powszechnego ciążenia

- Wszystkie ciała przyciągają się ku sobie dzięki sile grawitacji, która jest wprost proporcjonalna do iloczynu ich mas i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości pomiędzy nimi.
- Sferycznie symetryczne ciała można traktować tak, jakby cała ich masa była zlokalizowana w ich środku.
- Niesymetryczne ciała można traktować tak, jakby ich cała masa była skoncentrowana w ich środku masy, pod warunkiem, że ich odległość od innych ciał jest duża w porównaniu z ich rozmiarami.

13.2 Grawitacja przy powierzchni Ziemi

- Ciężar ciała wynika z przyciągania grawitacyjnego między Ziemią i tym ciałem.
- Pole grawitacyjne jest reprezentowane przez linie pola grawitacyjnego. Określają one kierunek siły grawitacji, a odległość między liniami określa natężenie pola grawitacyjnego.
- Z powodu występowania przyspieszenia dośrodkowego, wynikającego z ruchu obrotowego Ziemi, ciężar pozorny i siła ciężkości są różne.

13.3 Energia potencjalna i całkowita pola grawitacyjnego

- Przyspieszenie ziemskie zmniejsza się w miarę oddalania się od Ziemi, a wyrażenie na grawitacyjną energię potencjalną musi odzwierciedlać tę zmianę.

- Energia całkowita układu jest sumą energii kinetycznej oraz grawitacyjnej energii potencjalnej i jest ona zachowana w ruchu po orbicie.
- Ciała muszą posiadać minimalną prędkość — prędkość ucieczki, aby opuścić planetę i nigdy na nią nie powrócić.
- Ciała o energii całkowitej mniejszej niż zero są związane grawitacyjne; te o energii całkowitej równej lub większej od zera nie są związane.

13.4 Orbity satelitów i ich energia

- Prędkość orbitalna obiektu zależy od masy ciała, wokół którego on krąży, i odległości od środka tego ciała, a nie zależy od znacznie mniejszej masy obiektu orbitującego.
- Okres obiegu orbity jest również niezależny od masy krążącego obiektu.
- Ciała o porównywalnych masach orbitują wokół ich wspólnego środka masy. Wtedy wartości ich prędkości i okresów obiegu należy wyznaczać z drugiej zasady dynamiki Newtona i prawa powszechnego ciążenia.

13.5 Prawa Keplera

- Wszystkie ciała poruszają się po orbitach będących krzywymi stożkowymi. Orbity ciał związanych grawitacyjnie są krzywymi zamkniętymi i mają kształt okręgu lub elipsy, a orbity ciał niezwiązanych grawitacyjnie są krzywymi otwartymi i mają kształt paraboli lub hiperboli.
- Prędkość polowa ciała na dowolnej orbicie jest stała, co odzwierciedla zasadę zachowania momentu pędu.
- Kwadrat okresu obiegu planety wokół gwiazdy po orbicie eliptycznej jest proporcjonalny do sześcianu długości półosi wielkiej tej orbity.

13.6 Siły pływowe

- Pływy na Ziemi są spowodowane przez różnicę sił grawitacyjnych Księżyca i Słońca wywieranych po przeciwnych stronach Ziemi.
- Pływy syzygijne (wysokie) występują, gdy Ziemia, Księżyc i Słońce leżą wzdłuż jednej prostej, a pływy kwadraturowe (niskie) występują, gdy ciała te leżą w wierzchołkach trójkąta prostokątnego.
- Siły pływowe mogą powodować wytworzenie wewnętrznego ciepła, zmiany w ruchu orbitalnym, a nawet zniszczenie orbitujących ciał.

13.7 Teoria grawitacji Einsteina

- Zgodnie z ogólną teorią względności grawitacja jest wynikiem zakrzywienia czasoprzestrzeni wywołanym przez masę i energię.
- Zasada równoważności mówi, że nie ma różnicy między spadkiem swobodnym i stanem nieważkości lub przyspieszeniem w jednorodnym polu grawitacyjnym i jednostajnym przyspieszeniem przy braku grawitacji. Masa i przyspieszenie zakrzywiają czasoprzestrzeń i w pewnych warunkach są one nierozróżnialne.
- Czarne dziury, będące skutkiem grawitacyjnego zapadnięcia się masywnych obiektów, są osobliwością otoczoną horyzontem zdarzeń, którego promień jest proporcjonalny do ich masy.
- Dowody na istnienie czarnych dziur wciąż są poszlakowe, ale ilość tych dowodów jest ogromna.

PYTANIA

13.1 Prawo powszechnego ciążenia

1. Działanie na odległość, jakie występuje w przypadku grawitacji, było kiedyś uważane za nielogiczne, a zatem nieprawdziwe. Co jest ostatecznym wyznacznikiem prawdy w nauce i dlaczego oddziaływanie na odległość ostatecznie zaakceptowano?

2. W prawie powszechnego ciążenia Newtona zakłada się, że siła jest wprost proporcjonalna do iloczynu dwóch mas ($\sim m_1 m_2$). Chociaż wszystkie założenia naukowe muszą być doświadczalnie zweryfikowane, to czy można podać argumenty, dlaczego tak musi być? (Możesz rozważyć proste przykłady, w których jakakolwiek inna postać tego prawa prowadziłaby do sprzecznych wyników).

13.2 Grawitacja przy powierzchni Ziemi

3. Czy inżynierowie muszą uwzględniać ruch obrotowy Ziemi podczas budowania wysokich drapaczy chmur w przypadku, gdy nie są one zlokalizowane na równiku lub w pobliżu biegunów?

13.3 Energia potencjalna i całkowita pola grawitacyjnego

4. Przyjmujemy, że satelita o ujemnej energii całkowitej znajduje się na orbicie związanej, podczas gdy ten o energii całkowitej równej zero lub dodatniej jest na orbicie niezwiązanej. Jakie założenie przyjęto w przypadku grawitacyjnej energii potencjalnej, że stwierdzenie to jest poprawne?

5. Wykazano, że energia wymagana do wyniesienia satelity na niską orbitę Ziemi (zmiana energii potencjalnej) jest tylko niewielką częścią energii kinetycznej, potrzebnej do utrzymania go na orbicie. Czy jest to także prawdą, dla orbit o większych promieniach? Czy przy wzroście długości promienia orbity istnieje zależność między tym, jaka część energii kinetycznej zamienia się w energię potencjalną?

13.4 Orbity satelitów i ich energia

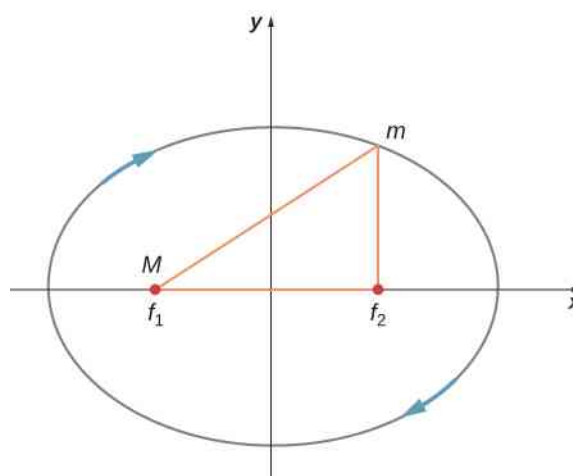
6. Jeden ze studentów twierdzi, że satelita na orbicie spada swobodnie w kierunku Ziemi. Inny mówi, że satelita na orbicie nie spada swobodnie, ponieważ przyspieszenie ziemskie nie wynosi $9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$ na tej wysokości. Z którym z nich się zgadzasz i dlaczego?

7. Wiele satelitów jest umieszczanych na orbicie geostacjonarnej. Co jest cechą charakterystyczną tych orbit? Jaka minimalna liczba tych satelitów byłaby potrzebna, by ich sygnały pokryły całą Ziemię, tworząc globalną sieć komunikacji satelitarnej?

13.5 Prawa Keplera

8. Czy prawa Keplera mają charakter czysto opisowy, czy też pokazują one związki przyczynowo-skutkowe?

9. Na poniższym rysunku obrazującym tor satelity, poruszającego się po orbicie eliptycznej wokół ciała o znacznie większej masie, wskaż, w którym punkcie toru jego prędkość jest największa, a gdzie najmniejsza. Zasada zachowania jakiej wielkości determinuje takie zachowanie? Zaznacz wektory siły grawitacji, przyspieszenia i prędkości w tych punktach. Narysuj wektory dla tych samych trzech wielkości w dwóch punktach, w których tor satelity przecina oś y układu współrzędnych (wzdłuż półosi małej) i na tej podstawie ustal, czy prędkość satelity w tych punktach rośnie czy maleje, lub ma wartość maksymalną lub minimalną.



13.6 Siły pływowe

10. Gdy ciało spada w kierunku czarnej dziury, siły pływowe wzrastają. Czy siły te zawsze rozedrą ciało, gdy zbliża się ono do promienia Schwarzschilda czarnej dziury? Jaki wpływ na odpowiedź mają masa czarnej dziury i rozmiar ciała?

13.7 Teoria grawitacji Einsteina

11. Zasada równoważności mówi, że wszystkie eksperymenty wykonane w laboratorium, znajdującym się w jednorodnym polu grawitacyjnym, nie różnią się od eksperymentów wykonanych w laboratorium, które nie znajduje się w polu grawitacyjnym, ale porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym, jeśli tylko w obu przypadkach przyspieszenie ma taką samą wartość. Rozważ, co stanie się z wiązką lasera, biegnącą na pewnej wysokości idealnie poziomo do podłogi przyspieszającego laboratorium. (Spójrz na to z punktu widzenia obserwatora znajdującego się poza laboratorium.) W którym miejscu przeciwległej ściany względem położenia lasera uderzy wiązka? Jaki wypływa stąd wniosek o wpływie pola grawitacyjnego na światło? Czy zmienia coś fakt, że światło nie posiada masy?

12. Gdy człowiek zbliża się do promienia Schwarzschilda czarnej dziury, obserwator zewnętrzny widzi, jak wszystkie procesy tej osoby (tętno, zegarek itp.) spowalniają i wreszcie zatrzymują się, gdy osiąga ona horyzont zdarzeń. Natomiast osoba wpadająca do czarnej dziury nie widzi żadnych zmian w szybkości zachodzących w niej procesów. Przypomnijmy, że prędkość światła jest taka sama dla wszystkich obserwatorów. Jaki wniosek można z tego wyciągnąć na temat przestrzeni w pobliżu czarnej dziury?

ZADANIA

13.1 Prawo powszechnego ciążenia

13. Oblicz wartość siły grawitacji występującej pomiędzy dwiema sferycznymi, stalowymi kulkami, z których każda ma masę 5 kg, a ich środki oddalone są od siebie o 15 cm.

14. Oblicz siłę grawitacji pomiędzy dwoma zapaśnikami sumo o masach 220 kg i 240 kg, gdy są oni zwarci w uścisku i środki ich mas są oddalone od siebie o 1,2 m.

15. Astrologowie przywiązują dużą wagę do położenia planet w momencie urodzenia dziecka. Jedyną znaną siłą, jaką inne planety wywierają na Ziemię jest siła grawitacji.
a. Oblicz siłę grawitacji, jaką wywiera ojciec obecny przy porodzie swojego dziecka, stojąc 0,2 m od niego w momencie urodzenia. Przyjmij masę ojca wynoszącą 100 kg, a noworodka 4,2 kg.
b. Oblicz, z jaką siłą oddziałuje wówczas na dziecko Jowisz, przyjmując, że jest on akurat najbliżej Ziemi, a więc jego odległość od noworodka wynosi $6{,}29 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m}$. Masa Jowisza wynosi $m_J = 1{,}9 \cdot 10^{27}\ \mathrm{kg}$. Jaki jest stosunek siły grawitacji wywieranej na dziecko przez ojca, w porównaniu do tej wywieranej przez Jowisza? Zauważ, że także inne obiekty w pokoju i budynku szpitala oddziałują na dziecko z siłą grawitacji o podobnej wartości jak ojciec. (Z przymrużeniem oka: oczywiście, może istnieć nieodkryta dotąd siła, która wywiera oddziaływanie na noworodki. Jednak naukowcy najpierw muszą się przekonać, że istnieją jakieś jej skutki, oraz że, to właśnie ta nieznana siła je wywołuje).

16. Góra znajdująca się w odległości 10 km od turysty oddziałuje na niego siłą grawitacji równą co do wartości 2% jego ciężaru.
a. Oblicz masę góry.
b. Porównaj otrzymaną wartość masy góry z masą Ziemi.
c. Czy otrzymany wynik jest racjonalny?
d. Jakie założenia są nieracjonalne lub niespójne? (Zauważ, że dokładne pomiary mogą stosunkowo łatwo wykryć wpływ pobliskich gór i zmian lokalnej geologii na siłę grawitacji).

17. Międzynarodowa Stacja Kosmiczna ma masę około 370 000 kg.
a. Jaka jest wartość siły grawitacji z jaką przyciąga ona ubranego w skafander kosmiczny astronautę o masie 150 kg, znajdującego się w odległości 20 m od jej środka masy?
b. Uważasz, że obliczona przez ciebie wartość siły jest dokładna?

Źródło ilustracji: ©ESA–David Ducros



18. Asteroida Toutatis przeleciała w pobliżu Ziemi w 2006 roku, w odległości równej czterokrotnej odległości między Ziemią a Księżycem. Było to najbliższe zbliżenie się tej asteroidy do Ziemi, z jakim będziemy mieli do czynienia aż do 2069 roku. Oblicz z jaką siłą oddziaływała ona na Ziemię w chwili największego zbliżenia? Przyjmij masę asteroidy równą $5 \cdot 10^{13}\ \mathrm{kg}$.

19. a. Ile wynosiło przyspieszenie Ziemi spowodowane przelotem asteroidy Toutatis (patrz poprzednie zadanie) podczas ich największego zbliżenia?
b. Ile wynosiło wówczas przyspieszenie asteroidy Toutatis wywołane przez Ziemię?

13.2 Grawitacja przy powierzchni Ziemi

20. (a) Oblicz masę Ziemi na podstawie znajomości przyspieszenia grawitacyjnego na biegunie północnym, wynoszącego $9{,}832\ \mathrm{m/s^2}$ oraz długości promienia Ziemi na biegunie równego 6356 km. (b) Porównaj otrzymaną wartość z danymi podawanymi przez NASA, gdzie masa Ziemi wynosi $5{,}9726 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$.

21. a. Ile wynosi przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni Księżyca?
b. Ile wynosi przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni Marsa? Masa Marsa wynosi $6{,}418 \cdot 10^{23}\ \mathrm{kg}$, a jego promień ma długość $3{,}38 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m}$.

22. a. Oblicz przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni Słońca.
b. Ile razy wzrósłby twój ciężar, gdybyś stanął na powierzchni Słońca? (Nieważne, że to niemożliwe).

23. Masa ciała wynosi 15 kg.
a. Ile wynosi jego ciężar na Ziemi?
b. Ile wynosi jego ciężar na Księżycu?
c. Ile wynosi jego masa na Księżycu?
d. Ile wynosi jego ciężar w otwartej przestrzeni kosmicznej, z dala od jakichkolwiek ciał niebieskich?
e. Ile wynosi jego masa w tym punkcie?

24. Na pewnej planecie, której promień ma długość $1{,}2 \cdot 10^{7}\ \mathrm{m}$, przyspieszenie grawitacyjne wynosi $18\ \mathrm{m/s^2}$. Oblicz masę tej planety.

25. Średnica Saturna wynosi $1{,}2 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m}$, a jego średnia gęstość wynosi $0{,}69\ \mathrm{g/cm^3}$. Oblicz przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni Saturna.

26. Średnica Merkurego wynosi $4{,}88 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m}$, a przyspieszenie grawitacyjne na jego powierzchi wynosi $3{,}78\ \mathrm{m/s^2}$. Oblicz masę Merkurego.

27. Przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni pewnej planety jest trzy razy większe niż na powierzchni Ziemi. Gęstość tej planety jest dwukrotnie większa niż gęstość Ziemi. Ile wynosi długość promienia tej planety, w stosunku do długości promienia Ziemi?

28. Ciało na powierzchni pewnej planety waży 10 razy więcej niż na powierzchni Ziemi. Oblicz, jaki jest stosunek masy tej planety do masy Ziemi zakładając, że promień tej planety jest równy promieniowi Ziemi.

13.3 Energia potencjalna i całkowita pola grawitacyjnego

29. Wyznacz prędkość ucieczki pocisku z powierzchni Marsa.

30. Znajdź prędkość ucieczki pocisku z powierzchni Jowisza.

31. Jaka jest prędkość ucieczki satelity umieszczonego na orbicie Księżyca wokół Ziemi? Załóż, że Księżyc nie znajduje się w pobliżu satelity.

32. (a) Oblicz energię potencjalną oddziaływania grawitacyjnego pomiędzy dwiema stalowymi kulami o masie 5 kg każda, jeśli ich środki znajdują się w odległości 15 cm od siebie. (b) Zakładając, że obie kule znajdują się początkowo w spoczynku względem siebie w przestrzeni kosmicznej, wykorzystaj zasadę zachowania energii, aby obliczyć jak szybko będą się one zbliżały, dążąc do zderzenia. Każda kula ma promień 5,1 cm.

33. Załóżmy, że właśnie zauważono średniej wielkości planetoidę o masie $2 \cdot 10^{13}$ kg, znajdującą się obecnie w odległości $5 \cdot 10^{7}$ km od Ziemi, która leci prosto w kierunku Ziemi z prędkością 2 km/s. Jaka będzie jej prędkość tuż przed wejściem w naszą atmosferę? (Można zaniedbać rozmiary asteroidy).

34. a. Jaka będzie energia kinetyczna asteroidy z poprzedniego zadania, tuż przed jej uderzeniem w Ziemię?
b. Porównaj otrzymany wynik z energią wybuchu największej zdetonowanej bomby termojądrowej (*Car bomb*) wynoszącą 2100 TJ. Jakie będą skutki tego zderzenia dla Ziemi?

35. a. Ile wynosi zmiana energii ciała o masie 1000 kg będącego w spoczynku na powierzchni Ziemi po przeniesieniu go na powierzchnię Księżyca i pozostawieniu go w spoczynku?
b. Jaka byłaby odpowiedź, jeśli ciało zostałoby przeniesione w drugą stronę? Czy koniecznie trzeba obliczać zmianę energii za każdym razem przy przenoszeniu ciała tam i z powrotem?

13.4 Orbity satelitów i ich energia

36. Wyobraźmy sobie, że po orbicie ziemskiej zamiast Ziemi krąży inna planeta o masie równej 1,5 masy Ziemi. Ile wynosiłby jej okres obiegu Słońca?

37. Dwie planety krążące wokół pewnej gwiazdy mają prędkości orbitalne v i $2v$.
a. Jaki jest stosunek promieni orbit tych planet?
b. Jaki jest stosunek okresów orbitalnych tych planet?

38. Korzystając z wartości średniej długości promienia orbity ziemskiej, oraz okresu orbitalnego Ziemi:
a. Wyznacz przyspieszenie dośrodkowe Ziemi w jej ruchu wokół Słońca.
b. Porównaj otrzymaną wartość z przyspieszeniem dośrodkowym na równiku, wynikającym z ruchu obrotowego Ziemi.

39. a. Jaki jest promień orbity satelity, którego okres obiegu Ziemi jest równy 1 godzinie?
b. Co jest nieracjonalnego w otrzymanym wyniku?

40. Oblicz masę Słońca na podstawie danych orbity Ziemi i porównaj uzyskaną wartość z tablicową masą Słońca.

41. Wyznacz masę Jowisza na podstawie faktu, że promień orbity Io, jego najbardziej wewnętrznego księżyca, ma średnią długość 421 700 km i okres obiegu orbity wynosi 1,77 dnia.

42. Obserwacje astronomiczne Drogi Mlecznej wskazują, że ma ona masę 800 miliardów mas Słońca. Gwiazda orbitująca na jej peryferiach jest oddalona o około 60 tysięcy lat świetlnych od jej środka.
a. Ile wynosi okres obiegu tej gwiazdy wokół środka Drogi Mlecznej?
b. Jeśli zamiast otrzymanej wartości okres obiegu gwiazdy wynosiłby 60 milionów lat, to ile wynosiłaby wówczas masa Drogi Mlecznej? Takie obliczenia są wykorzystywane do sprawdzenia ewentualnego istnienia niewidocznych ciał, np. supermasywnej czarnej dziury w centrum Drogi Mlecznej.

43. (a) Aby powstrzymać małego satelitę od dryfowania w kierunku pobliskiej asteroidy, jest on umieszczony na jej orbicie o okresie 3,02 godziny i promieniu 2 km. Ile wynosi masa asteroidy? (b) Czy ta masa wydaje się być sensowna, biorąc pod uwagę rozmiar orbity?

44. Księżyc i Ziemia krążą wokół ich wspólnego środka masy, który znajduje się około 4700 km od środka Ziemi (czyli 1690 km pod jej powierzchnią).
a. Oblicz przyspieszenie grawitacyjne, wynikające z siły grawitacji Księżyca w tym punkcie.
b. Oblicz przyspieszenie dośrodkowe środka Ziemi wokół wspólnego środka masy Ziemi i Księżyca. Zwróć uwagę, że okres obiegu środka Ziemi wokół wspólnego środka masy Ziemi i Księżyca wynosi 27,3 dnia (czyli oczywiście tyle samo, co okres obiegu Księżyca wokół Ziemi). Porównaj tę wartość z przyspieszeniem znalezionym w podpunkcie (a). Skomentuj, dlaczego te wartości są równe lub nie i dlaczego takie właśnie powinny być.

45. Słońce obiega środek Drogi Mlecznej po prawie kołowej orbicie o średnim promieniu około 30 000 lat świetlnych, z częstotliwością raz na 250 milionów lat.

(Rok świetlny to odległość przebywana przez światło w ciągu 1 roku.)
a. Oblicz przyspieszenie dośrodkowe Słońca na jego orbicie galaktycznej. Czy ten wynik wspiera tezę, że układ odniesienia związany ze Słońcem jest niemal idealnie inercjalny?
b. Oblicz średnią prędkość orbitalną Słońca na orbicie galaktycznej. Czy wynik cię zaskakuje?

46. Satelita geostacjonarny to taki, którego okres obiegu Ziemi wynosi dokładnie jeden dzień. Satelity te są używane do obserwacji pogody i komunikacji satelitarnej, ponieważ pozostają powyżej stałego punktu ponad powierzchnią Ziemi (pod warunkiem, że krążą w płaszczyźnie równikowej w tym samym kierunku, w jakim obraca się Ziemia). Oblicz promień takiej orbity na podstawie danych o Ziemi zawartych w Dodatku D.

13.5 Prawa Keplera

47. Oblicz masę Słońca znając średnią wartość długości promienia orbity ziemskiej i porównaj otrzymaną wartość z tablicową masą Słońca równą $1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg.

48. Księżyc Io obiega Jowisza po orbicie, której średni promień wynosi 421 700 km, a jego okres orbitalny jest równy 1,769 dnia. Ile wynosi masa Jowisza wyznaczona na podstawie tych danych?

49. Tablicowa średnia wartość promienia orbity obiektu okrążającego Słońce nie jest zazwyczaj średnią ważoną, kroczącą, ale jest obliczana w taki sposób, że kiedy podstawi się ją do równania dla orbity kołowej, otrzyma się prawidłową wartość okresu orbitalnego. Biorąc to pod uwagę, jak ma się średni promień orbity w odniesieniu do odległości między aphelium i peryhelium?

50. Odległość peryhelium komety Halleya od Słońca wynosi 0,586 j.a., a odległość jej aphelium wynosi 17,8 j.a.. Wiedząc, że prędkość orbitalna tej komety w peryhelium wynosi 55 km/s, oblicz ile wynosi jej prędkość w aphelium $(1\ \text{j. a.} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\ \text{m}$? (*Wskazówka:* Możesz skorzystać albo z zasady zachowania energii, albo z zasady zachowania momentu pędu, jednak zastosowanie tej drugiej jest znacznie łatwiejsze.)

51. Odległość peryhelium komety Lagerkvista od Słońca wynosi 2,61 j.a., a jej okres orbitalny wynosi 7,36 lat. Wykaż, że odległość jej aphelium od Słońca wynosi 4,95 j.a..

52. Jaki jest stosunek prędkości orbitalnej w peryhelium do prędkości orbitalnej w aphelium komety Lagerkvista z poprzedniego zadania?

53. Planetoida Eros porusza się po orbicie eliptycznej wokół Słońca. Odległość jej peryhelium od Słońca wynosi 1,13 j.a., a jej aphelium jest oddalone od Słońca o 1,78 j.a.. Oblicz jej okres orbitalny.

13.6 Siły pływowe

54. a. Jaka jest różnica między siłami grawitacyjnymi działającymi na ciało o masie 1 kg na bliższej i dalszej Jowiszowi stronie księżyca Io? Średnia długość promienia Io wynosi 1821 km, a jego promień orbity wokół Jowisza ma średnią wartość równą 421 700 km.
b. Porównaj tę różnicę z różnicą obliczoną w Przykładzie 13.14, w przypadku siły grawitacyjnej Księżyca wywieranej na obiekt o takiej samej masie, spoczywający na powierzchni Ziemi. Siły pływowe są przyczyną aktywności wulkanicznej na Io.

55. Gdyby Słońce zapadło się w czarną dziurę, to horyzont zdarzeń leżałby w odległości około 3 km od środka tej osobliwości grawitacyjnej. Czy obserwator mógłby przeżyć w odległości 300 km od jej środka? Odpowiedz na to pytanie obliczając różnicę siły przyciągania grawitacyjnego, jakie czarna dziura wywierałaby na 1 kg masy obserwatora przy jego stopach i głowie. Załóż, że obserwator ma wzrost przeciętnego człowieka.

56. Przyjrzyj się Rysunkowi 13.23 w rozdziale Siły Pływowe. Rysunek ten przedstawia siły pływowe w przypadku pływów syzygijnych. Narysuj podobny rysunek dla pływów kwadraturowych. (*Wskazówka:* Dla uproszczenia wyobraź sobie najpierw, że Słońce i Księżyc przyczyniają się w takim samym stopniu do powstania sił pływowych. Twój schemat byłby sumą wektorową dwóch pól siłowych (jak na Rysunku 13.23), z których jedno (od Słońca) jest dwukrotnie słabsze od drugiego. Oba pola wektorowe dodają się pod kątem prostym.)

13.7 Teoria grawitacji Einsteina

57. Jaka jest długość promienia Schwarzschilda czarnej dziury w centrum naszej galaktyki, jeśli ma ona masę równą 4 milionom mas Słońca?

58. Ile lat świetlnych wynosiłaby długość promienia Schwarzschilda, gdyby Droga Mleczna licząca 100 miliardów gwiazd zapadła się tworząc czarną dziurę? Wynik porównaj z odległością naszego Słońca od centrum galaktyki, która wynosi około 26 000 lat świetlnych.

ZADANIA DODATKOWE

59. Gwiazda neutronowa jest zimną, zapadniętą pod wpływem własnej grawitacji gwiazdą o gęstości równej gęstości jądra atomowego. Typowa gwiazda neutronowa ma masę dwa razy większą od masy Słońca i promień 12 km.

a. Jaki byłby ciężar astronauty o masie 100 kg stojącego na jej powierzchni?
b. Jaki wypływa stąd wniosek o możliwości odwiedzenia gwiazdy neutronowej?

60. a. W jakiej odległości od środka Ziemi musi znajdować się ciało, aby działająca na nie wypadkowa siła grawitacji Ziemi i Księżyca była równa zero?
b. Podstawienie równych wartości obu sił skutkuje dwoma wynikami otrzymanymi z rozwiązania równania kwadratowego. Czy rozumiesz, dlaczego z równania otrzymałeś dwa wyniki, ale tylko jedna z tych odległości ma sens fizyczny?

61. W jakiej odległości od środka Słońca musi znajdować się statek kosmiczny, aby działająca na niego wypadkowa siła grawitacji Ziemi i Słońca była równa zero?

62. Oblicz wartość przyspieszenia grawitacyjnego g na powierzchni Ziemi, gdyby nastąpiły następujące zmiany jej własności:
a. całkowita masa wzrosłaby dwukrotnie, a promień zmniejszyłby się o połowę;
b. gęstość masy by się podwoiła, a długość promienia pozostałaby niezmieniona;
c. gęstość masy zmniejszyłaby się o połowę, a całkowita masa pozostałaby bez zmian.

63. Załóżmy, że możesz komunikować się z mieszkańcami planety w innym układzie słonecznym. Mówią ci oni, że średnica i masa ich planety wynoszą odpowiednio $5 \cdot 10^3$ km oraz $3{,}6 \cdot 10^{23}$ kg. Dowiadujesz się także, że rekord skoku wzwyż wynosi u nich 2 m. Biorąc pod uwagę fakt, że ten rekord jest bliski ziemskiemu rekordowi skoku wzwyż wynoszącemu 2,4 m, co mógłbyś powiedzieć na temat sprawności fizycznej swoich pozaziemskich przyjaciół?

64. a. Załóżmy, że zmierzyłeś swój ciężar na równiku pewnej planety i okazało się, że jest on tylko połową twojego ciężaru na jej biegunie. Masa i średnica tej planety są takie same, jak w przypadku Ziemi. Jaki jest okres obrotu tej planety?
b. Czy w obliczeniach powinieneś uwzględnić kształt tej planety?

65. Ciało o masie 100 kg zostało zważone na biegunie północnym i na równiku za pomocą wagi sprężynowej. Jakie było jej wskazanie w tych dwóch punktach? Załóż, że $g = 9{,}83 \text{ m/s}^2$ na biegunie.

66. Oblicz prędkość potrzebną do ucieczki z Układu Słonecznego, startując z powierzchni Ziemi. Nie uwzględniaj wpływu innych ciał oraz faktu, że Ziemia porusza się po swojej orbicie. [*Wskazówka:* Nie można użyć Równania 13.6. Skorzystaj z Równania 13.5 i uwzględnij energię potencjalną oddziaływania grawitacyjnego zarówno Ziemi, jak i Słońca.]

67. Rozważ poprzednie zadanie i tym razem uwzględnij fakt, że prędkość Ziemi na orbicie wokół Słońca wynosi 29,8 km/s.
a. Jaka prędkość względem Ziemi będzie potrzebna i w jakim kierunku należy opuścić Ziemię, by opuścić nasz Układ Słoneczny?
b. Jaki będzie kształt trajektorii?

68. Kometa znajduje się w odległości 1,5 j.a. od Słońca i porusza się z prędkością 24,3 km/s. Czy jest ona związana grawitacyjnie ze Słońcem?

69. Pewna asteroida znajduje się w odległości 2 j.a. od Słońca i porusza się z prędkością 15,5 km/s. Jej peryhelium znajduje się w odległości 0,4 j.a. od Słońca. Ile wynosi jej prędkość w tym punkcie?

70. Odpady kosmiczne, pozostawione na orbicie stare satelity i ich wyrzutnie stają się zagrożeniem dla innych satelitów.
a. Oblicz prędkość orbitalną satelity znajdującego się 900 km nad powierzchnią Ziemi.
b. Załóżmy, że swobodny nit znajduje się na orbicie o tym samym promieniu, która przecina orbitę satelity pod kątem 90°. Ile wynosi prędkość nitu względem satelity tuż przed uderzeniem?
c. Jeśli masa nitu wynosi 0,5 g, i po zderzeniu pozostaje on w satelicie, to ile energii wydziela się w trakcie zderzenia? (Załóż, że prędkość satelity po zderzeniu nie zmienia się znacznie, ponieważ jego masa jest znacznie większa niż masa nitu.)

71. Satelita o masie 1000 kg znajduje się na orbicie kołowej wokół Ziemi. Promień orbity satelity jest równy dwukrotności promienia Ziemi.
a. Ile wynosi odległość satelity od środka Ziemi?
b. Oblicz energię kinetyczną, potencjalną i całkowitą satelity.

72. Po tym, jak Ceres został uznany za planetę karłowatą, przyjmujemy, że największą znaną asteroidą jest Vesta. Jej masa wynosi $2{,}67 \cdot 10^{20}$ kg, a średnica mieści się w przedziale od 578 km do 458 km. Zakładając, że Vesta jest w przybliżeniu sferycznie symetryczna, a jej promień wynosi 260 km, oblicz przybliżoną prędkość ucieczki z jej powierzchni.

73. a. Oblicz, ile wynosiłby okres orbitalny sondy kosmicznej krążącej po orbicie kołowej na wysokości 10 km nad powierzchnią asteroidy Vesta? Skorzystaj z danych podanych w poprzednim zadaniu.
b. Dlaczego, delikatnie mówiąc, obliczenia te są bezużyteczne?

74. Obliczmy prędkość orbitalną naszego Układu Słonecznego wokół centrum Drogi Mlecznej. Załóżmy, że masa wszystkich ciał, znajdujących się wewnątrz objętości ograniczonej promieniem równym naszej odległości od środka galaktyki, wynosi około 100 miliardów mas Słońca. Nasza odległość od centrum Drogi Mlecznej wynosi 26 000 lat świetlnych.

75. a. Na podstawie informacji z poprzedniego zadania oblicz, jaką prędkość trzeba osiągnąć, aby uciec z oddziaływania grawitacyjnego Drogi Mlecznej z naszej obecnej pozycji (tzw. czwartą prędkość kosmiczną)?
b. Czy musiałbyś zwrócić uwagę na ustawienie kierunku prędkości statku kosmicznego, względem prędkości orbitalnej Ziemi w momencie startu?

76. Mimośród orbity kołowej w równaniu krzywych stożkowych (Równanie 13.10) jest równy zero. Na tej podstawie oraz korzystając z drugiej zasady dynamiki Newtona zastosowanej do przyspieszenia dośrodkowego wykaż, że wartość α w Równaniu 13.10 wynosi $\alpha = \frac{L^2}{GMm^2}$, gdzie L jest momentem pędu orbitującego ciała. Wartość α jest stała i opisana tym wyrażeniem niezależnie od rodzaju orbity.

77. Pokaż, że gdy wartość mimośrodu w równaniu krzywych stożkowych (Równanie 13.10) jest równa jeden, to tor ciała jest parabolą. Aby to wykazać przejdź z układu współrzędnych biegunowych, $r\theta$, do kartezjańskiego układu współrzędnych xy i pokaż, że równanie to ma ogólną postać równania paraboli w układzie kartezjańskim, czyli $x = ay^2 + by + c$.

78. Korzystając z techniki przedstawionej w podrozdziale Orbity satelitów i ich energia pokaż, że dwie masy m_1 i m_2 , poruszające się po orbitach kołowych wokół ich wspólnego środka masy mają całkowitą energię równą
$E = E_K + U = E_{K1} + E_{K2} - \frac{Gm_1m_2}{r} = -\frac{Gm_1m_2}{2r}$.
Wyraźnie pokazaliśmy energię kinetyczną obu mas. (*Wskazówka:* Promienie orbit tych mas wynoszą odpowiednio r_1 i r_2 , a $r = r_1 + r_2$. Uważaj, aby nie pomylić promienia występującego we wzorze na przyspieszenie dośrodkowe, z promieniem występującym we wzorze na siłę grawitacji).

79. Znając odległość peryhelium p i aphelium q orbity eliptycznej ciała, pokaż, że jego prędkość w peryhelium, v_p , jest dana równaniem $v_p = \sqrt{\frac{2GM_S}{(q+p)}\frac{q}{p}}$. (*Wskazówka:* Skorzystaj z zasady zachowania momentu pędu, by powiązać prędkości v_p i v_q, a następnie podstaw tę zależność do równania zasady zachowania energii).

80. Odległość peryhelium komety P/1999 R1 od Słońca wynosi 0,0570 j.a., a odległość jej aphelium wynosi 4,99 j.a.. Wykorzystując wyniki z poprzedniego zadania, oblicz jej prędkość w aphelium.(*Wskazówka:* Prędkość wyznaczona w poprzednim zadaniu określa prędkość ciała w peryhelium. Skorzystaj z symetrii zagadnienia, aby napisać wyrażenie na prędkość tej komety w aphelium. Alternatywnie możesz wyznaczyć tę prędkość analogicznie jak w poprzednim zadaniu).

ZADANIA TRUDNIEJSZE

81. Przez środek idealnie sferycznej i pozbawionej atmosfery planety, o jednorodnej gęstości i promieniu R, przekopano tunel. Korzystając z wyrażenia na g podanego w podrozdziale Grawitacja przy powierzchni Ziemi pokaż, że ciało o masie m wrzucone do tunelu będzie poruszało się ruchem harmonicznym. Wyprowadź wzór na okres drgań masy m i pokaż, że jest on równy okresowi ruchu ciała po orbicie o promieniu równym promieniowi tej planety.

82. Korzystając ze sposobu pokazanego w podrozdziale Grawitacja przy powierzchni Ziemi, znajdź zależność g jako funkcję odległości r od środka powłoki kulistej planety. Załóż, że powłoka ma stałą gęstość ρ, jej promień wewnętrzny na długość R_{wew} , a promień zewnętrzny ma długość R_{zew} . Znajdź zależność $g(r)$ zarówno dla $R_{\text{wew}} < r < R_{\text{zew}}$, jak i dla $r < R_{\text{wew}}$. Zakładając, że we wnętrzu powłoki planety jest próżnia, opisz jak wyobrażasz sobie podróż przez jej wnętrze.

83. Pokaż, że prędkość polowa ciała na orbicie kołowej o promieniu r wokół gwiazdy o masie M wynosi $\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2}\sqrt{GMr}$. Czy to wyrażenie daje prawidłową wartość prędkości polowej Ziemi wokół Słońca?

84. Pokaż, że okres orbitalny dwóch ciał o masach m_1 i m_2 , znajdujących sie na orbitach kołowych o promieniach równych odpowiednio r_1 i r_2, wokół ich wspólnego środka masy jest dany równaniem $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G(m_1+m_2)}}$, gdzie $r = r_1 + r_2$. (*Wskazówka:* Ciała poruszają się po orbitach o promieniach odpowiednio r_1 i r_2, gdzie $r = r_1 + r_2$. Użyj wyrażenia na środek masy, aby powiązać oba promienie i zauważ, że oba ciała muszą mieć równe co do wartości, ale przeciwnie skierowane pędy. Zacznij od związku łączącego okres obiegu z obwodem i prędkością orbitalną dla jednego z ciał. Wykorzystaj wynik z poprzedniego zadania, podstawiając pęd w wyrażeniach na energię kinetyczną).

85. Pokaż, że dla małych zmian wysokości h, takich że $h \ll R_Z$, Równanie 13.4 redukuje się do wyrażenia $\Delta U = mgh$.

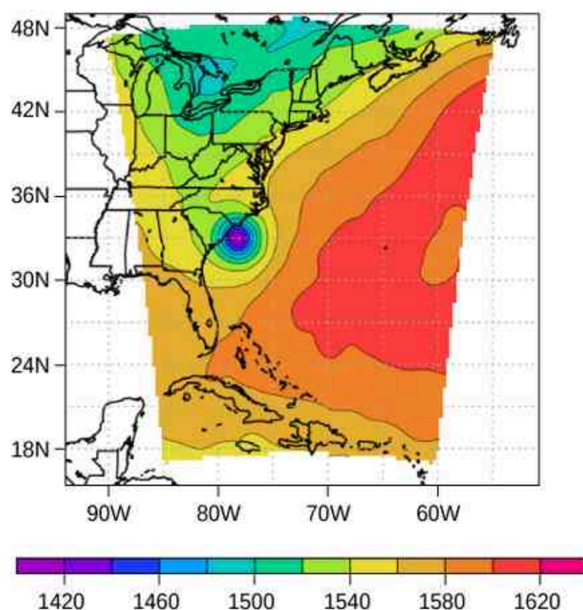
86. Na podstawie Rysunku 13.9, narysuj wszystkie siły działające na wahadło matematyczne o masie m znajdujące się na szerokości geograficznej φ. Zapisz równanie ruchu wahadła, przyjmując kierunek jednej współrzędnej w stanie równowagi zgodny z kierunkiem przyspieszenia dośrodkowego (do punktu P na rysunku) i drugą współrzędną prostopadłą do niego. Udowodnij, że kąt odchylenia wahadła ε, zdefiniowany jako kąt pomiędzy nicią wahadła a kierunkiem promienia Ziemi, jest wyrażony wzorem $\text{tg}(\varphi + \varepsilon) = \frac{g}{g - \omega^2 R_Z} \text{tg}\,\varphi$, gdzie ω jest prędkością ruchu obrotowego Ziemi. Załóż, że Ziemia jest idealną kulą. Ile wynosi kąt odchylenia wahadła

na szerokości geograficznej 45 stopni?

87. a. Pokaż, że siła pływowa wywierana na małe ciało o masie m, zdefiniowana jako różnica sił grawitacyjnych działających na bliższą i dalszą źródłu pola grawitacyjnego część tego ciała, dana jest równaniem $F_{\text{pływowa}} = \frac{2GMm}{R^3}\Delta r$, gdzie R jest odległością małego ciała o masie m od ciała o masie M będącego źródłem pola grawitacyjnego, Δr jest średnicą małego ciała i $\Delta r \ll R$.
b. Wyobraź sobie, że wpadasz w czarną dziurę znajdującą się w centrum naszej galaktyki w ten sposób, że jesteś skierowany stopami ku osobliwości. Czarna dziura ma masę równą 4 milionom mas Słońca. Ile wynosiłaby siła pływowa pomiędzy twoją głową a twoimi stopami w momencie, gdy znalazłbyś się na promieniu Schwarzschilda (horyzoncie zdarzeń) czarnej dziury? Załóż, że nogi i głowa mają masę 5,0 kg i są oddalone od siebie o 2 m. Czy przeżyłbyś przejście przez horyzont zdarzeń?

88. Oblicz zmiany prędkości wymagane do wykonania manewru transferowego Hoffmana Δv_{Ziemi} i Δv_{Marsa} w trakcie podróży z Ziemi na Marsa. Skorzystaj z Równania 13.7 by obliczyć prędkości orbitalne dla prawie kołowych orbit Ziemi i Marsa. Na podstawie Równania 13.4 i energii całkowitej na orbicie eliptycznej (której długość półosi wielkiej wynosi a), danej równaniem $E = -\frac{GmM_{\text{S}}}{2a}$, oblicz prędkości na orbicie transferowej na Ziemi (znajdującej się w peryhelium elipsy) i na Marsie (znajdującym się w aphelium elipsy). Różnica prędkości Δv w każdym z tych punktów jest szukaną prędkością konieczną do wejścia na orbitę transferową na Ziemi i zejścia z niej na Marsie.

14 | MECHANIKA PŁYNÓW





Rysunek 14.1 Zaprezentowana mapa rozkładu ciśnień (lewy obrazek) i zdjęcie satelitarne (prawy) zostały wykorzystane do stworzenia modelu trajektorii i skutków przejścia huraganu Artur nad Wschodnim Wybrzeżem Stanów Zjednoczonych w lipcu 2014 r. Modele komputerowe wykorzystują równania na siły i energie do przewidywania tworzących się wzorców pogodowych. Naukowcy numerycznie całkują równania zależne od czasu, łącznie z równaniami bilansu energetycznego dla promieniowania słonecznego w zakresie fal długich i krótkich, aby uzyskać model zmian stanu atmosfery. Mapa rozkładu ciśnień została stworzona przy pomocy modelu **Weather Research Forecasting Model**, opracowanego przez Narodowe Centrum Badań Atmosferycznych (**National Center for Atmospheric Research**). Kolory reprezentują wysokość powierzchni o ciśnieniu 850 mbar. (Źródło: panel lewy – modyfikacja pracy przygotowanej przez Narodowe Centrum Badań Atmosferycznych; panel prawy – modyfikacja pracy przygotowanej przez **NLR Monterey Meteorology Division, The National Oceanic and Atmospheric Administration**)

Treść rozdziału

Wstęp

Wyobraź sobie, że spacerujesz po plaży nad Morzem Bałtyckim. Powietrze pachnie morską solą, a Słońce ogrzewa twoje ciało. Nagle w twoim telefonie pojawia się powiadomienie: nadchodzi sztorm – 12 stopni w skali Beauforta. Zderzenie powietrza polarnego i podzwrotnikowego doprowadziło do spadku ciśnienia o 30 hPa. W efekcie przewidy-

wane są obfite opady deszczu, porywisty wiatr, przekraczający 120 km/h oraz olbrzymie zniszczenia. Przygotowując się do szybkiego wyjazdu, zastanawiasz się, w jaki sposób tak niewielki spadek ciśnienia mógł doprowadzić do tak drastycznej zmiany pogody.

Ciśnienie jest zjawiskiem fizycznym odpowiedzialnym nie tylko za pogodę. Zmiany ciśnienia sprawiają, że uszy się zatykają i odtykają ze słyszalnym „pyknięciem” podczas startu samolotu. Zmiany ciśnienia sprawiają też, że nurkowie mogą zapaść na bardzo poważną, czasami nawet śmiertelną, chorobę kesonową, której przyczyną jest rozpuszczanie się na dużych głębokościach azotu w wodzie zawartej w ciele i powrót do stanu gazowego po wypłynięciu nurka na powierzchnię. Z ciśnieniem jest związane zjawisko zwane wyporem, które sprawia, że balony na gorące powietrze unoszą się, a statki utrzymują na wodzie. Zanim w pełni zrozumiemy, jaką rolę odgrywa ciśnienie w tych zjawiskach, musimy omówić stany skupienia materii oraz pojęcie gęstości.

14.1 | Płyny, gęstość i ciśnienie

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać stany skupienia materii;
- opisywać cechy stanów skupienia materii na poziomie molekularnym i atomowym;
- określać różnice między materiałami ściśliwymi i nieściśliwymi;
- definiować ciśnienie i jego jednostki w układzie SI;
- porównywać gęstości różnych substancji;
- opisywać związek między ciśnieniem a siłą;
- obliczać siłę, znając ciśnienie i pole powierzchni.

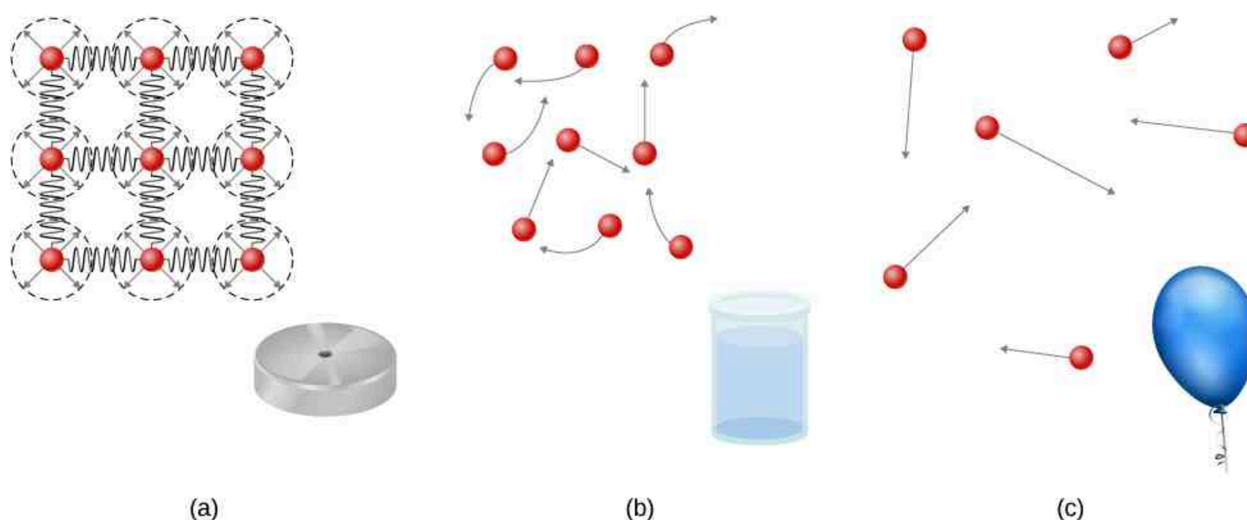
Materia najczęściej występuje w postaci ciał stałych, cieczy lub gazów. Są one znane jako trzy podstawowe **stany skupienia materii** (ang. **phases of matter**). W tym podrozdziale przyjrzymy się szczegółowo każdemu z nich.

Cechy ciał stałych

Ciała stałe są sztywne i mają konkretne kształty oraz określone objętości. Ich atomy lub cząstki znajdują się blisko siebie i oddziałują ze sobą znacznymi siłami. Ciała stałe przyjmują postać określoną przez rodzaje tych oddziaływań pomiędzy molekułami. Mimo że rzeczywiste ciała stałe nie są nieściśliwe, to zmiana ich kształtu wymaga zadziałania dużą siłą. W niektórych przypadkach oddziaływania między molekułami mogą sprawić, że cząstki zorganizują się w sieć, jak pokazano na Rysunku 14.2. Strukturę tej trójwymiarowej sieci można przedstawić przy pomocy cząstek powiązanych ze sobą sztywnymi więzami (przedstawionymi jako sztywne sprężyny), które umożliwiają ruch w ograniczonym zakresie. Nawet duża siła powoduje jedynie małe przesunięcia między atomami lub cząsteczkami tej sieci, a ciało stałe zachowuje swój kształt. Ciała stałe opierają się również siłom ścinającym (są to siły przyłożone równolegle do powierzchni, jak opisano to w rozdziale Równowaga statyczna i sprężystość.)

Cechy płynów

Ciecze (ang. **liquids**) i **gazy** (ang. **gases**) są uważane za **płyny** (ang. **fluids**), ponieważ poddają się siłom ścinającym, podczas gdy **ciała stałe** (ang. **solids**) im się opierają. Podobnie jak w przypadku ciał stałych, cząsteczki płynu są związane z sąsiadującymi cząsteczkami, ale łączy je znacznie mniej więzów. Cząsteczki płynów nie są zaczepione w konkretnym miejscu i mogą się przemieszczać względem siebie. Odległości między cząsteczkami są podobne do odległości w ciałach stałych, więc ciecze również mają określoną objętość, ale ich kształt zależy od naczynia, w którym się znajdują. Cząsteczki gazów nie są wzajemnie powiązane i odległości między nimi mogą być bardzo duże. Poruszają się one w taki sposób, aby wypełnić cały pojemnik, w którym się znajdują, dlatego gazy nie mają ani konkretnego kształtu, ani określonej objętości (Rysunek 14.2).



Rysunek 14.2 (a) Atomy w ciałach stałych zawsze są w ścisłym kontakcie ze swoimi sąsiadami i utrzymują je w miejscu siły przedstawione tutaj w postaci sprężyn. (b) Atomy w cieczach również pozostają w kontakcie ze sobą nawzajem, ale mogą się przesuwać względem siebie. Siły między atomami mocno przeciwdziałają próbom ściśnięcia płynu (c) Atomy w gazie mogą się poruszać swobodnie, a odległości między nimi są duże. Gaz musi być trzymany w zamkniętym pojemniku, aby zapobiec jego swobodnemu rozprężaniu oraz ucieczce.

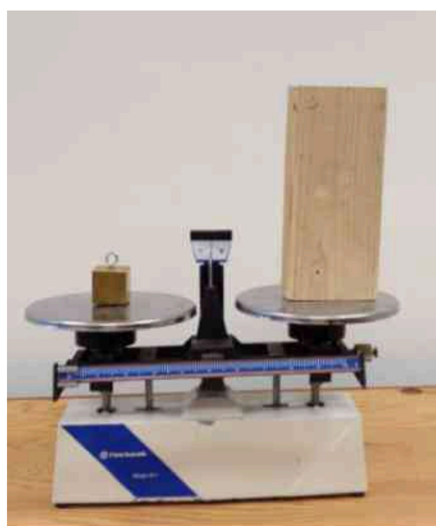
Ciecze łatwo ulegają deformacji po przyłożeniu siły i nie powracają do swojego oryginalnego kształtu, gdy przestanie ona działać. Dzieje się tak, ponieważ atomy lub cząsteczki w cieczach mogą się przesuwać i zmieniać położenie względem sąsiadujących cząsteczek. Innymi słowy, ciecze płyną (są więc rodzajem płynu), a ich molekuły utrzymują się razem w wyniku wzajemnych oddziaływań. Gdy ciecz znajduje się w pojemniku bez pokrywy, to pozostanie w nim. Atomy są ciasno upakowane, więc ciecze, podobnie jak ciała stałe, przeciwstawiają się próbom ściśnięcia, a do zmiany ich objętości potrzebna jest ogromna siła.

W przeciwieństwie do cieczy odległości między atomami w gazach są bardzo duże i w związku z tym siły między nimi są niewielkie, z wyjątkiem sytuacji zderzenia atomów. Cechy te sprawiają, że względnie łatwo je ścisnąć oraz mogą one płynąć (z tego powodu uznajemy je za płyny). Gazy, inaczej niż ciecze, szybko uciekają z otwartego pojemnika.

W tym rozdziale zarówno gazy jak i ciecze nazywamy płynami, rozróżniając je tylko w sytuacjach, gdy zachowują się odmiennie. Istnieje jeszcze inna faza materii, zwana **plazmą** (ang. **plasma**), która występuje w bardzo wysokich temperaturach. W takich warunkach molekuły rozpadają się na atomy, a te na naładowane ujemnie elektrony oraz naładowane dodatnio protony. Stan ten nie będzie szczegółowo opisywany w tym rozdziale, ponieważ ma właściwości odmienne od pozostałych trzech stanów skupienia, z powodu silnych oddziaływań elektrycznych między ładunkami.

Gęstość

Załóżmy, że kawałek mosiądzu i kawałek drewna mają dokładnie tę samą masę. Dlaczego po wrzuceniu ich do zbiornika z wodą drewno będzie się unosiło, a mosiądz zatonie (Rysunek 14.3)? Dzieje się tak, ponieważ mosiądz ma gęstość większą, a drewno mniejszą niż woda.





(a) (b)

Rysunek 14.3 (a) Kawałek mosiądzu i kawałek drewna mają ten sam ciężar i masę, ale kawałek drewna ma znacznie większą objętość. (b) Gdy umieścimy je w akwarium z wodą, mosiądz zatonie, a drewno będzię się unosiło na jej powierzchni. (Na obu ilustracjach widać ten sam kawałek drewna – na rysunku (a) został on obrócony na bok, aby zmieścił się na wadze.)

Gęstość jest ważną cechą substancji. Musimy ją znać, aby, na przykład, móc powiedzieć, czy obiekt będzie pływał po powierzchni płynu, czy zatonie.

Gęstość

Średnia **gęstość** (ang. **density**) substancji lub przedmiotu jest zdefiniowana jako masa przypadająca na jednostkę objętości:

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{14.1}$$

gdzie grecka litera ρ (rho) oznacza gęstość, m jest masą, a V objetością.

Jednostką SI gęstości jest kg/m^3 . Tabela 14.1 podaje kilka przykładowych wartości. Jednostką układu CGS (Centymetr, Gram, Sekunda) gęstości jest gram na centymetr sześcienny (g/cm^3), gdzie:

$$1\frac{g}{cm^3} = 1000\frac{kg}{m^3}.$$

System metryczny został zaprojektowany w taki sposób, aby woda miała gęstość $1\ g/cm^3$, co równoważne jest $10^3\ \ kg/m^3$. Dlatego podstawowa jednostka masy, czyli kilogram, została zdefiniowana jako 1000 mL wody, która ma objętość $1000\ cm^3$.

Ciała stałe $(0.0°C)$		**Ciecze** $(0.0°C)$		**Gazy** $(0.0°C$,**101.3 kPa)**	
Substancja	$\rho\ (kg/m^3)$	Substancja	$\rho\ (kg/m^3)$	Substancja	$\rho\ (kg/m^3)$
Aluminium	$2{,}70 \cdot 10^3$	Benzen	$8{,}79 \cdot 10^2$	Powietrze	$1{,}29 \cdot 10^0$
Kość	$1{,}90 \cdot 10^3$	Krew	$1{,}05 \cdot 10^3$	Dwutlenek węgla	$1{,}98 \cdot 10^0$

Tabela 14.1 Gęstości niektórych substancji

Ciała stałe (0.0°C)		Ciecze (0.0°C)		Gazy (0.0°C,101.3 kPa)	
Mosiądz	$8{,}44 \cdot 10^3$	Alkohol etylowy	$8{,}06 \cdot 10^2$	Tlenek węgla	$1{,}25 \cdot 10^0$
Beton	$2{,}40 \cdot 10^3$	Benzyna	$6{,}80 \cdot 10^2$	Hel	$1{,}80 \cdot 10^{-1}$
Miedź	$8{,}92 \cdot 10^3$	Gliceryna	$1{,}26 \cdot 10^3$	Wodór	$9{,}00 \cdot 10^{-2}$
Korek	$2{,}40 \cdot 10^2$	Rtęć	$1{,}36 \cdot 10^4$	Metan	$7{,}20 \cdot 10^{-2}$
Powierzchnia Ziemi	$3{,}30 \cdot 10^3$	Oliwa z oliwek	$9{,}20 \cdot 10^2$	Azot	$1{,}25 \cdot 10^0$
Szkło	$2{,}60 \cdot 10^3$			Podtlenek azotu	$1{,}98 \cdot 10^0$
Złoto	$1{,}93 \cdot 10^4$			Tlen	$1{,}43 \cdot 10^0$
Granit	$2{,}70 \cdot 10^3$				
Żelazo	$7{,}86 \cdot 10^3$				
Ołów	$1{,}13 \cdot 10^4$				
Drewno dębowe	$7{,}10 \cdot 10^2$				
Drewno sosnowe	$3{,}73 \cdot 10^2$				
Platyna	$2{,}14 \cdot 10^4$				
Polistyren	$1{,}00 \cdot 10^2$				
Wolfram	$1{,}93 \cdot 10^4$				
Uran	$1{,}87 \cdot 10^3$				

Tabela 14.1 Gęstości niektórych substancji

Jak łatwo zauważymy, przyglądając się Tabeli 14.1, gęstość obiektu może pomóc w określeniu jego składu. Na przykład gęstość złota jest 2,5 razy większa niż gęstość żelaza, którego gęstość jest z kolei 2,5 razy większa niż gęstość glinu. Gęstość informuje nas również o stanie skupienia materii oraz jej strukturze. Zauważmy, że gęstości cieczy i ciał stałych są w przybliżeniu porównywalne, co doskonale potwierdza, że ich atomy pozostają w ścisłym kontakcie. Gęstości gazów są znacznie mniejsze niż gęstości cieczy i ciał stałych, ponieważ atomy gazów znajdują się w dużych odległościach od siebie. Gęstości gazów podaje się w tak zwanych warunkach normalnych, czyli temperaturze normalnej $0{,}0°\mathrm{C}$ i pod normalnym ciśnieniem 101,3 kPa. Istnieje silna zależność między gęstością a temperaturą i ciśnieniem. Gęstości ciał stałych i płynów przedstawia się w normalnej temperaturze $0{,}0°\mathrm{C}$, a ich wartości zwykle rosną wraz ze spadkiem temperatury.

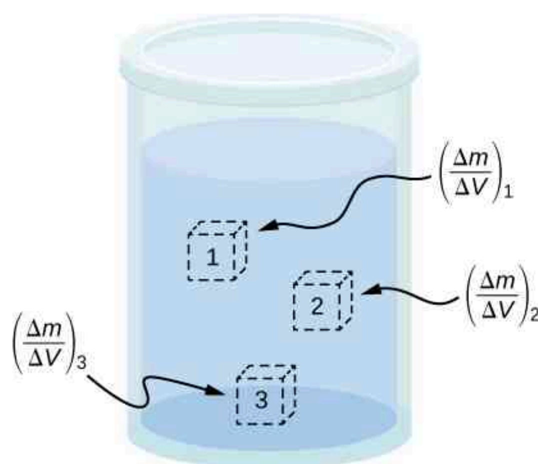
Tabela 14.2 pokazuje gęstość wody w różnych stanach skupienia oraz temperaturach. Rośnie ona ze spadkiem temperatury i osiąga maksimum przy $4{,}0°\mathrm{C}$, a następnie zmniejsza się ze spadkiem temperatury poniżej $4{,}0°\mathrm{C}$. Ta cecha gęstości wody wyjaśnia, dlaczego lód tworzy się na powierzchni wody.

Substancja	$\rho\ \left(\mathrm{kg/m^3}\right)$
Lód (0°C)	$9{,}170 \cdot 10^2$
Woda (0°C)	$9{,}998 \cdot 10^2$
Woda (4°C)	$1{,}000 \cdot 10^3$
Woda (20°C)	$9{,}982 \cdot 10^2$
Woda (100°C)	$9{,}584 \cdot 10^2$
Para (100°C, 101.3 kPa)	$1{,}670 \cdot 10^2$
Woda morska (0°C)	$1{,}030 \cdot 10^3$

Tabela 14.2 Gęstości wody

Gęstość substancji nie musi być stała w jej objętości. Jeżeli jest stała w całej objętości, to mówimy, że substancja

jest **jednorodna** (**homogeniczna**) (ang. **homogeneous substance**). Przykładem może być jednolity pręt metalowy. Dla takiej substancji gęstość jest stała w objętości, a gęstość każdej próbki ma taką samą wartość jak średnia. Jeżeli gęstość substancji nie jest stała, to nazywamy ją **niejednorodną** (**heterogeniczną**) (ang. **heterogeneous substance**). Kawałek sera szwajcarskiego to przykład substancji heterogenicznej, ponieważ zawiera ona zarówno lity ser, jak i wypełnione gazem przestrzenie. Gęstość w konkretnym punkcie substancji niejednorodnej nazywamy gęstością lokalną i podajemy jako funkcję położenia: $\rho = \rho(x, y, z)$ (Rysunek 14.4).



Rysunek 14.4 Gęstość może się zmieniać w obrębie mieszanki niejednorodnej. Gęstość lokalną możemy obliczyć, dzieląc masę interesującego nas fragmentu przez jego objętość.

Gęstość lokalną można otrzymać jako granicę średniej gęstości w małej objętości, której wymiary dążą do zera:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}, \tag{14.2}$$

gdzie ρ jest gęstością, m masą, a V objętością.

Ponieważ jedną z cech gazów jest duża ściśliwość, ich gęstości zmieniają się z temperaturą w znaczący sposób, natomiast gęstości cieczy, jako substancji względnie nieściśliwych, nie zależą znacznie od temperatury. Z tego powodu gęstości cieczy często traktujemy jako stałe, równe ich średnim gęstościom.

Gęstość jest własnością wymiarową, więc gdy porównujemy gęstości dwóch substancji, musimy wziąć pod uwagę również jednostki. Dlatego do porównywania gęstości stosujemy inną, bezwymiarową cechę nazywaną gęstością względną. Definiujemy ją jako iloraz gęstości materiału i gęstości wody w temperaturze $4{,}0\ ^\circ\mathrm{C}$ pod ciśnieniem 1 atm, czyli $1000\ \mathrm{kg/m^3}$:

$$\text{gęstość względna} = \frac{\text{gęstość materiału}}{\text{gęstość wody}}.$$

Do porównania stosujemy gęstość wody, wynoszącą $1\ \mathrm{g/cm^3}$, ponieważ używamy jej też w definicji kilograma. Bezwymiarowość gęstości względnej umożliwia jej stosowanie w porównaniach między różnymi materiałami, bez konieczności uwzględniania jednostek ich gęstości. Na przykład, gęstość glinu wynosi 2,7 $\mathrm{g/cm^3}$ (2700 $\mathrm{kg/m^3}$), a gęstość względna 2,7, niezależnie od użytych jednostek. Gęstość właściwa jest szczególnie użyteczna w kontekście unoszenia, które omówimy w dalszych częściach tego rozdziału.

Ciśnienie

Bez wątpienia słyszeliście słowo „ciśnienie” w odniesieniu do krwi (wysokie lub niskie ciśnienie krwi) oraz do pogody (układy wysokiego i niskiego ciśnienia). Są to jednak tylko dwa z wielu przykładów ciśnienia płynów. (Przypomnijmy sobie, że wprowadziliśmy pojęcie ciśnienia w rozdziale Równowaga statyczna i sprężystość, w kontekście ich naprężenia.)

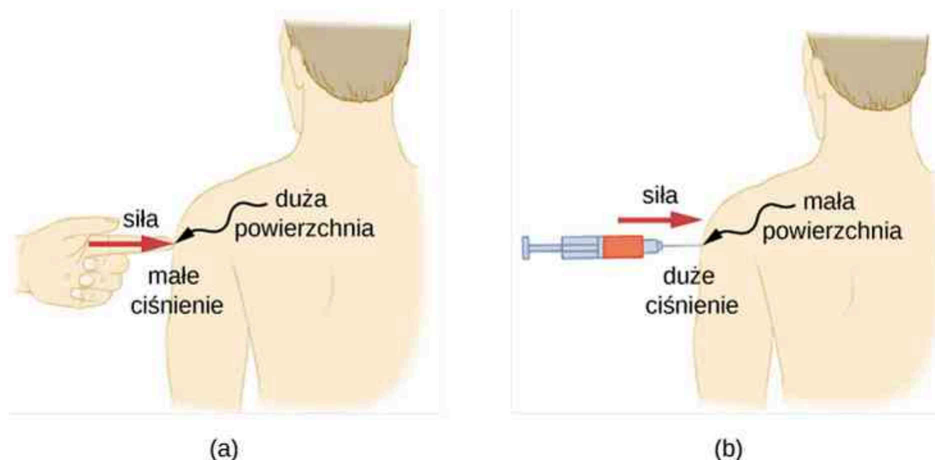
Ciśnienie

Ciśnienie (p) definiujemy jako wartość siły normalnej do powierzchni F na jednostkę powierzchni A, do której siła jest przyłożona, czyli:

$$p = \frac{F}{A}. \tag{14.3}$$

Ciśnienie (ang. **pressure**) w konkretnym punkcie definiujemy jako siłę $\mathrm{d}F$, z jaką płyn działa na nieskończenie małey element powierzchni $\mathrm{d}A$, zawierający ten punkt, z czego otrzymujemy $p = \mathrm{d}F/\mathrm{d}A$.

Siła może wywoływać różne efekty w zależności od pola powierzchni, na którą działa. Na przykład siła przyłożona do powierzchni $1\ \mathrm{mm}^2$ wywiera 100 razy większe ciśnienie niż ta sama siła przyłożona do powierzchni $1\ \mathrm{cm}^2$. Z tego powodu ostra igła przebija skórę po przyłożeniu niewielkiej siły, ale przyłożenie tej samej siły przy pomocy palca skóry nie narusza (Rysunek 14.5).



Rysunek 14.5 (a) Osoba ukłuta palcem może się zdenerwować, ale siła ukłucia nie będzie miała żadnego trwałego efektu. (b) Ta sama siła przyłożona do powierzchni równej powierzchni naostrzonej części igły wystarcza do przebicia skóry.

Zwróćmy uwagę, że chociaż siła jest wektorem, ciśnienie jest skalarem. Dzieje się tak dlatego, że ciśnienie definiujemy jako wielkość proporcjonalna do wartości składowej siły prostopadłej do powierzchni. Jednostką SI ciśnienia jest paskal (Pa). Nazwano ją tak na cześć francuskiego matematyka i fizyka Blaise'a Pascala (1623–1662):

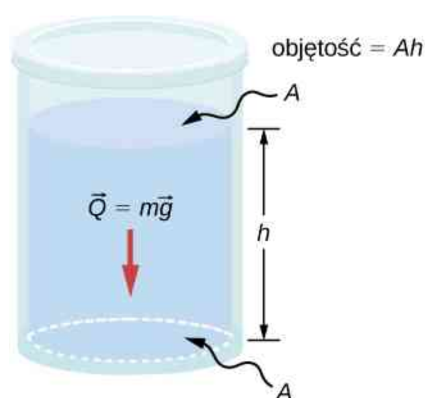
$$1\ \mathrm{Pa} = 1\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}.$$

Jednak używamy jeszcze kilku innych jednostek ciśnienia – omówimy je w dalszej części tego rozdziału.

Zmiany ciśnienia z głębokością w płynie o stałej gęstości

Ciśnienie zdefiniowane dla wszystkich stanów materii, jest szczególnie istotne dla płynów. W tym kontekście ważną ich cechę stanowi fakt, że nie stawiają one znaczącego oporu siłom działającym równolegle do powierzchni płynu. Cząsteczki płynu przemieszczają się pod wpływem takiej siły. Siła prostopadła przyłożona do powierzchni ściska i rozpręża płyn. Gdy spróbujemy ścisnąć płyn, stwierdzimy, że siła reakcji w każdym punkcie wewnątrz skierowana jest na zewnątrz, równoważąc siłę przyłożoną do cząsteczek na powierzchni płynu.

Rozważmy płyn o stałej gęstości pokazany na Rysunku 14.6. Ciśnienie na dnie naczynia wywołane jest ciśnieniem atmosferycznym (p_0) i ciśnieniem związanym z ciężarem płynu. Ciśnienie pochodzące od płynu równe jest jego ciężarowi podzielonemu przez pole powierzchni. Ciężar płynu to jego masa pomnożona przez przyspieszenie grawitacyjne.



Rysunek 14.6 Spód tego naczynia podpiera cały ciężar płynu w nim zawartego. Ściany pionowe nie mogą wywierać na płyn siły skierowanej ku górze (ponieważ nie może on stawiać oporu siłom stycznym), więc spód naczynia musi równoważyć cały ciężar płynu.

Ponieważ gęstość jest stała, ciężar możemy obliczyć przy użyciu gęstości:

$$Q = mg = \rho V g = \rho A h g.$$

Ciśnienie na dnie naczynia jest więc równe sumie **ciśnienia atmosferycznego** (ang. **atmospheric pressure**) oraz ciężaru płynu podzielonego przez powierzchnię spodu naczynia:

$$p = p_0 + \frac{\rho A h g}{A} = p_0 + \rho h g.$$

To równanie jest spełnione tylko do głębokości, do której płyn ma stałą gęstość.

Ciśnienie na pewnej głębokości dla płynu o stałej gęstości

Ciśnienie na pewnej głębokości dla płynu o stałej gęstości równe jest sumie ciśnienia atmosferycznego i ciśnienia wywieranego przez ciężar płynu, czyli:

$$p = p_0 + \rho h g, \tag{14.4}$$

gdzie p jest ciśnieniem na rozważanej głębokości, p_0 ciśnieniem atmosferycznym, ρ gęstością płynu, g przyspieszeniem ziemskim, a h głębokością.

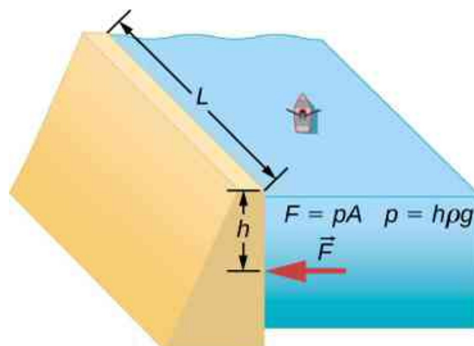


Rysunek 14.7 Tama Trzech Przełomów zbudowana na rzece Jangcy w środkowych Chinach w roku 2008 stworzyła ogromny rezerwuar wodny, co spowodowało wysiedlenie ponad miliona osób. (Źródło: „Le Grand Portage”/Flickr)

Przykład 14.1

Jaką siłę musi wytrzymać tama?

Rozważmy ciśnienie i siłę działające na tamę utrzymującą rezerwuar wodny (Rysunek 14.7). Załóżmy, że tama ma 500 m szerokości, a woda ma głębokość 80,0 m, u podstawy tamy, jak pokazano poniżej. (a) Jakie jest średnie ciśnienie na tamę spowodowane naporem wody? (b) Oblicz siłę wywieraną na tamę.



Średnie ciśnienie p spowodowane naporem wody jest ciśnieniem na średniej głębokości $h = 40{,}0\,\mathrm{m}$, ponieważ ciśnienie rośnie ono liniowo z głębokością. Siła wywierana na tamę przez wodę równa się średniemu ciśnieniu pomnożonemu przez powierzchnię styku: $F = pA$.

Rozwiązanie

a. Średnie ciśnienie wywołane ciężarem płynu wynosi:

$$p = h\rho g. \tag{14.5}$$

Podstawiając gęstość wody z Tabeli 14.1 i przyjmując, że h jest średnią głębokością, wynoszącą 40,0 m, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} p &= 40{,}0\,\mathrm{m} \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 9{,}80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\ &= 3{,}92 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = 392\,\mathrm{kPa}. \end{aligned}$$

b. Wcześniej obliczyliśmy wartość p. Pole powierzchni tamy wynosi:

$$A = 80{,}0\,\mathrm{m} \cdot 500\,\mathrm{m} = 4{,}00 \cdot 10^4\ \mathrm{m}^2,$$

czyli

$$\begin{aligned} F &= 3{,}92 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \cdot 4{,}00 \cdot 10^4\,\mathrm{m}^2 \\ &= 1{,}57 \cdot 10^{10}\,\mathrm{N}. \end{aligned}$$

Znaczenie

Mimo że siła ta wydaje się ogromna, to jest ona niewielka w porównaniu z ciężarem wody w rezerwuarze ($1{,}96 \cdot 10^{13}\,\mathrm{N}$). W rzeczywistości stanowi ona jedynie 0,0800% tego ciężaru.



14.1 Sprawdź, czy rozumiesz: Czy tamę trzeba byłoby przeprojektować, gdyby rezerwuar w Przykładzie 14.1 obejmował dwa razy większą powierzchnię, ale miał tę samą głębokość?

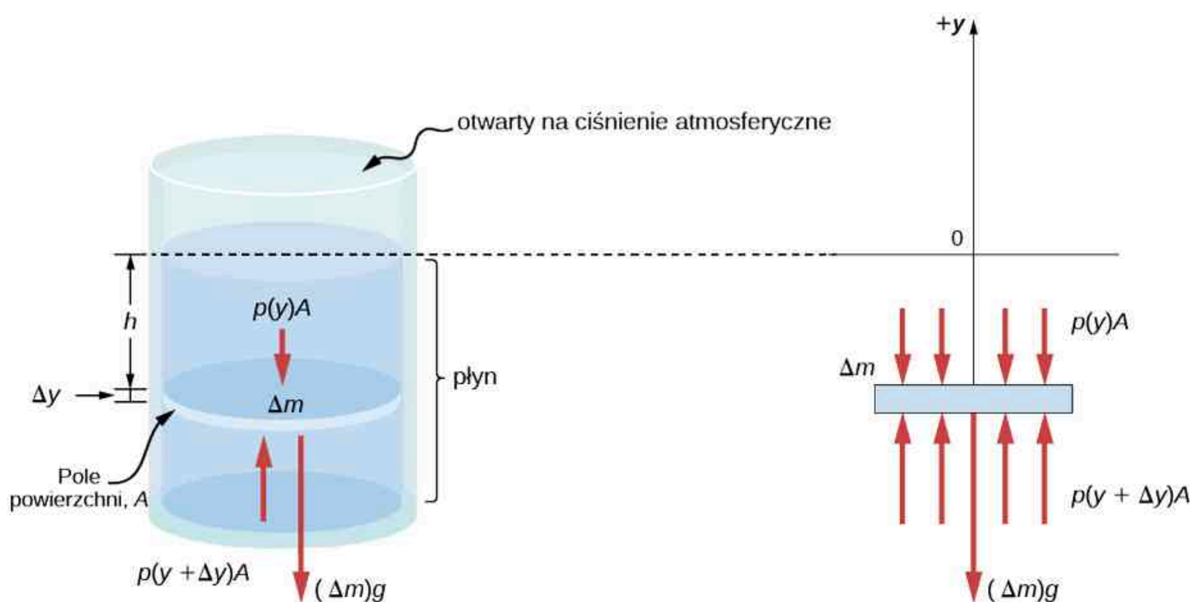
Ciśnienie w płynie statycznym w jednorodnym polu grawitacyjnym

Płyn statyczny (ang. **static fluid**) to płyn, który nie jest w ruchu. W dowolnym punkcie wewnątrz niego, ciśnienie we wszystkich kierunkach musi być takie samo, bo w przeciwnym przypadku punkt ten zacząłby przyspieszać w odpowiedzi na działającą siłę wypadkową.

Ciśnienie w dowolnym punkcie płynu statycznego zależy jedynie od głębokości. Jak powiedzieliśmy wcześniej, ciśnienie w płynach w pobliżu powierzchni Ziemi zmienia się wraz z głębokością, w związku ze zmieniającym się ciężarem płynu ponad pewnym poziomem. W powyższym przykładzie założyliśmy, że gęstość jest stała i że średnia gęstość płynu dobrze oddaje gęstość lokalną. Jest to rozsądne przybliżenie dla płynów takich jak woda, na które musi działać duża siła, żeby zmienić ich objętość. Na przykład w basenie pływackim gęstość jest w przybliżeniu stała, a wodę na dnie tylko w niewielkim stopniu ściska woda znajdująca się powyżej. Jednak jeśli będziemy się poruszali w górę atmosfery, zetkniemy się z zupełnie inną sytuacją. Gęstość powietrza zaczyna zmieniać się istotnie już w niewielkiej odległości od powierzchni Ziemi.

Aby wyprowadzić wzór na zmianę ciśnienia z głębokością w zbiorniku zawierającym płyn o gęstości ρ na powierzchni Ziemi, musimy rozpocząć od założenia, że gęstość płynu nie jest stała. Na płyn znajdujący się głębiej działają większe siły niż na ten znajdujący się w pobliżu powierzchni, co wynika z dodatkowego ciężaru płynu położonego powyżej. Z tego powodu ciśnienie obliczone na konkretnej głębokości jest inne niż ciśnienie obliczone przy założeniu stałej gęstości.

Wyobraźmy sobie cienki element płynu na głębokości h, jak pokazano na Rysunku 14.8. Niech ma on pole powierzchni przekroju poprzecznego A oraz wysokość Δy. Siły działające na ten element związane są z ciśnieniem $p(y)$ powyżej i ciśnieniem $p\,(y + \Delta y)$ poniżej jego położenia. Ciężar samego elementu pokazany jest na oddzielnym rysunku.



Rysunek 14.8 Siły działające na element masy wewnątrz płynu. Ciężar elementu pokazany jest na oddzielnym rysunku.

Ponieważ element płynu pomiędzy y a $y + \Delta y$ nie przyspiesza, siły muszą się równoważyć. W kartezjańskim układzie współrzędnych, którego oś y jest skierowana ku górze, uzyskujemy następujące równanie ruchu elementu y:

$$p(y + \Delta y)A - p(y)A - g\Delta m = 0 \quad (\Delta y > 0). \tag{14.6}$$

Zwróćmy uwagę, że gdyby ten element miał niezerową składową przyspieszenia wzdłuż osi y, prawa strona nie wynosiłaby zero, lecz równałaby się iloczynowi masy i przyspieszenia w kierunku y. Masę elementu możemy zapisać przy pomocy gęstości płynu i objętości elementu:

$$\Delta m = |\rho A \Delta y| = -\rho A \Delta y \, (\Delta y > 0).$$

Po wstawieniu wyrażenia na Δm do Równania 14.6, a następnie podzieleniu obu stron przez $A\Delta y$, otrzymujemy:

$$\frac{p(y + \Delta y) - p(y)}{\Delta y} = -\rho g. \tag{14.7}$$

Przechodząc do granicy nieskończenie cienkiego elementu $\Delta y \to 0$, uzyskujemy następujące równanie różniczkowe, które opisuje zmianę ciśnienia w płynie:

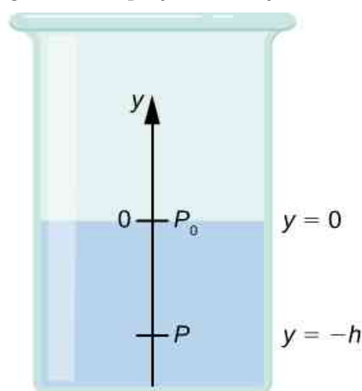
$$\Delta m = |\rho A \Delta y| = -\rho A \Delta y \quad (\Delta y > 0). \tag{14.8}$$

Równanie to pokazuje, że szybkość zmiany ciśnienia w płynie wraz z głębokością jest proporcjonalna do gęstości tego płynu. Rozwiązanie powyższego równania zależy od tego, czy gęstość ρ jest stała, czy zmienia się wraz z głębokością, innymi słowy zależy od funkcji $\rho(y)$.

Jeżeli zakres analizowanych głębokości nie jest zbyt duży, to możemy przyjąć założenie o stałej gęstości. Jeżeli zakres ten jest wystarczająco duży, aby ciśnienie znacząco się zmieniało, tak jak w przypadku atmosfery, to nastąpi znacząca zmiana gęstości wraz ze zmianą głębokości. W takim przypadku nie możemy przyjąć założenia o stałej gęstości.

Ciśnienie w płynie o stałej gęstości

Użyjmy Równania 14.9, aby wyprowadzić wzór na ciśnienie na głębokości h liczonej od powierzchni zbiornika dla płynu, dla którego możemy założyć stałą gęstość, na przykład wody.



Musimy scałkować Równanie 14.9 w granicach od $y = 0$, gdzie ciśnienie jest ciśnieniem atmosferycznym p_0, do $y = -h$:

$$\int_{p_0}^{p} \mathrm{d}p = \int_{0}^{-h} \rho g \mathrm{d}y$$
$$p - p_0 = \rho g h$$
$$p = p_0 + \rho g h. \tag{14.9}$$

Oznacza to, że ciśnienie na pewnej głębokości płynu znajdującego się na powierzchni Ziemi jest równe ciśnieniu atmosferycznemu $\rho g h$, jeżeli gęstość płynu jest stała na całej wysokości, jak pokazaliśmy wcześniej.

Zwróćmy uwagę, że ciśnienie w płynie zależy jedynie od głębokości liczonej od powierzchni płynu, niezależnie od kształtu pojemnika. W związku z tym w pojemniku, w którym płyn może się przemieszczać swobodnie, pozostaje on na tym samym poziomie w każdej części pojemnika niezależnie od jego kształtu, jak pokazano to na Rysunku 14.9.



Rysunek 14.9 Jeżeli płyn może przemieszczać się swobodnie pomiędzy częściami pojemnika, podnosi się do tej samej wysokości w każdej części. W zaprezentowanym pojemniku ciśnienie na dole każdej kolumny jest takie samo – gdyby było inaczej, to płyn przemieszczałby się do momentu wyrównania ciśnień.

Zmiany ciśnienia atmosferycznego wraz z wysokością

Zmiany ciśnienia atmosferycznego wraz z wysokością są szczególnie interesujące. Zakładając, że temperatura powietrza jest stała i że termodynamiczne prawo gazów doskonałych stanowi dobre jego przybliżenie, możemy obliczyć zmiany ciśnienia atmosferycznego wraz z wysokością. (Prawo gazów doskonałych omawiamy w późniejszym rozdziale, ale zakładamy, że Czytelnik zna je ze szkoły średniej.) Niech $p(y)$ oznacza ciśnienie atmosferyczne na wysokości y. Gęstość ρ na wysokości y, temperatura T w skali Kelvina (K) oraz masa m cząsteczek powietrza są powiązane z ciśnieniem całkowitym na mocy prawa gazów doskonałych w następujący sposób:

$$p = \rho \frac{k_B T}{m}, \tag{14.10}$$

gdzie k_B jest stałą Boltzmanna o wartości $1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J/K}$.

Być może spotkaliście się z prawem gazów doskonałych w postaci $pV = nRT$, gdzie n jest liczbą moli, a R stałą gazową. Tutaj to samo prawo zostało zapisane w innej postaci, z zastosowaniem gęstości ρ zamiast objętości V. Jeżeli ciśnienie p zmienia się wraz z wysokością, to podobnie zmienia się gęstość ρ. Po podstawieniu gęstości z prawa gazów doskonałych szybkość zmiany ciśnienia z wysokością przedstawimy jako:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = -p \frac{mg}{k_B T},$$

gdzie stałe zostały zebrane w nawiasie. Po zastąpieniu tych stałych jednym symbolem α, równanie przyjmuje znacznie prostszą postać:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} &= -\alpha p \\
\frac{\mathrm{d}p}{p} &= -\alpha \mathrm{d}y \\
\int_{p_0}^{p(y)} \frac{\mathrm{d}p}{p} &= \int_0^y -\alpha \mathrm{d}y \\
[\ln p]_{p_0}^{p(y)} &= [-\alpha y]_0^y \\
\ln p - \ln p_0 &= -\alpha y \\
\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) &= -\alpha y,
\end{aligned}$$

z czego otrzymujemy rozwiązanie:

$$p(y) = p_0 e^{-\alpha y}.$$

Widzimy, że ciśnienie atmosferyczne spada wykładniczo wraz z wysokością, ponieważ oś y skierowana jest ku górze, a y przyjmuje wartości dodatnie dla warstw atmosfery powyżej poziomu morza. Ciśnienie spada o $1/e$, gdy wysokość zmienia się o $1/\alpha$, co daje nam fizyczną interpretację α. Stała $1/\alpha$ jest współczynnikiem charakteryzującym zmiany ciśnienia wraz z wysokością, nazywanym współczynnikiem strat ciśnienia.

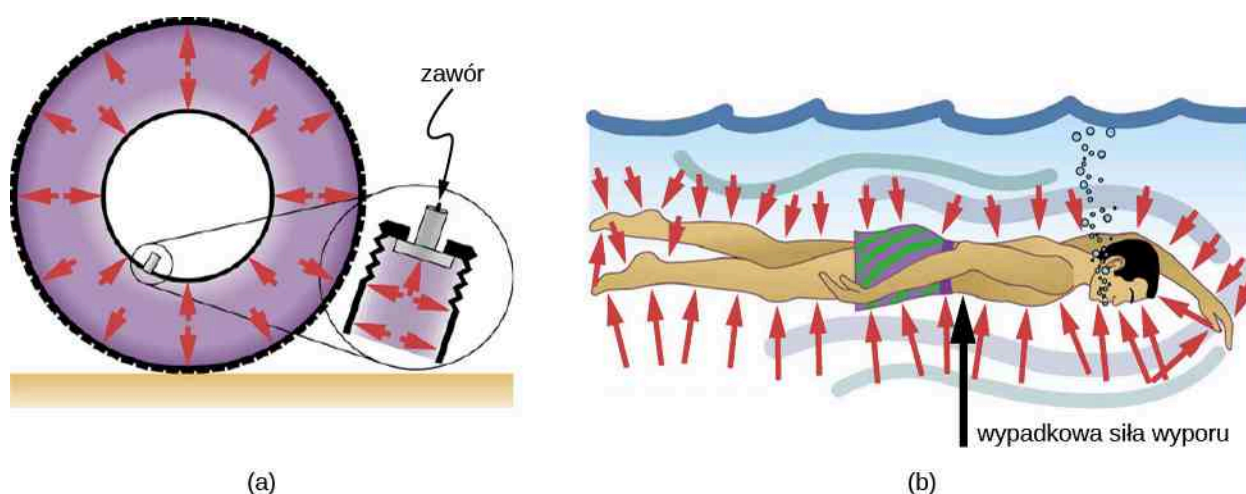
Możemy uzyskać przybliżoną wartość α, jeśli użyjemy masy cząsteczki azotu jako przybliżenia cząsteczki powietrza. W temperaturze 27 °C, , czyli 300 K, obliczamy:

$$\alpha = -\frac{mg}{k_B T} = \frac{4{,}8 \cdot 10^{-26}\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J/K} \cdot 300\ \mathrm{K}} = \frac{1}{8800}\frac{1}{\mathrm{m}}$$

Czyli na każde 8800 m ciśnienie powietrza spada o $1/e$ lub w przybliżeniu o jedną trzecią. Daje nam to jedynie ogólne pojęcie tego, co się dzieje naprawdę, ponieważ w naszych obliczeniach przyjęliśmy zarówno stałą temperaturę, jak i stałą wartość g na całej rozważanej wysokości, tymczasem żadne z tych założeń nie jest w rzeczywistości spełnione.

Kierunek ciśnienia w płynie

Ciśnienie w płynie nie ma kierunku, ponieważ jest wartością skalarną, natomiast siły wywoływane przez nie mają wyraźnie określone kierunki: zawsze są przyłożone prostopadle do dowolnej powierzchni. Powodem tego jest fakt, że płyn nie może się opierać siłom ścinającym ani sam ich wywierać. W związku z tym w płynie statycznym znajdującym się w naczyniu siła na jego ściany jest skierowana prostopadle do powierzchni wewnętrznej. Podobnie ciśnienie oddziałuje prostopadle do powierzchni dowolnego przedmiotu umieszczonego w płynie. Rysunek 14.10 przedstawia ciśnienie wywierane przez powietrze na ściany opony oraz przez wodę na ciało pływaka.



Rysunek 14.10 (a) Sprężone powietrze wewnątrz opony oddziałuje siłami prostopadłymi do wszystkich powierzchni, z którymi jest w kontakcie. Strzałki przedstawiają kierunki i wartości sił w różnych punktach. (b) Siła wywierana przez wodę jest prostopadła do wszystkich powierzchni pływaka, ponieważ wpłynęłaby w miejsce przez niego zajmowane, gdyby go tam nie było. Strzałki przedstawiają kierunki i wartości sił wywieranych na pływaka w różnych miejscach.

14.2 | Pomiar ciśnienia

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- definiować ciśnienie manometryczne i ciśnienie absolutne;
- opisywać różne metody pomiaru ciśnienia;
- rozumieć, jak działa otwarty barometr;
- szczegółowych zasad działania manometru i barometru.

W poprzednim rozdziale wyprowadziliśmy wzór na obliczanie zmian ciśnienia w płynie, który pozostaje w równowadze hydrostatycznej. Obliczenia te są bardzo użyteczne, ponieważ pomiary ciśnienia są bardzo istotne, zarówno w codziennym życiu, jak i w zastosowaniach naukowych i technicznych. W tym rozdziale przedyskutujemy różne metody pomiaru ciśnienia oraz podawania wyników.

Ciśnienie manometryczne a ciśnienie absolutne

Załóżmy, że ciśnienie na manometrze butli do nurkowania pokazuje wartość 3000 psi, co w przybliżeniu odpowiada 207 atm. Gdy otworzymy zawór, powietrze zaczyna uciekać, ponieważ ciśnienie wewnątrz butli jest większe niż ciśnienie atmosferyczne na zewnątrz. Będzie to trwało do momentu, gdy ciśnienie w butli zrówna się z ciśnieniem atmosferycznym. W tym momencie manometr wskaże wartość zero, mimo, że ciśnienie wewnątrz butli będzie wynosiło 1 atm, czyli takie jak na zewnątrz.

Większość mierników ciśnienia (manometrów), tak jak manometr na butli do nurkowania, jest skalibrowana w taki sposób, że wskazują wartość zero pod ciśnieniem atmosferycznym. Ciśnienie odczytane z takiego manometru nazywamy **ciśnieniem manometrycznym** (ang. **gauge pressure**) i jest to wartość ciśnienia względem atmosferycznego. Gdy ciśnienie wewnątrz zbiornika jest większe niż ciśnienie atmosferyczne, manometr wskazuje wartość dodatnią.

Niektóre mierniki zaprojektowano w taki sposób, aby mogły wskazywać ciśnienie ujemne. Na przykład wiele eksperymentów fizycznych musi być przeprowadzanych w komorze próżniowej, czyli sztywnym zbiorniku, z którego wypompowano powietrze. Ciśnienie wewnątrz komory próżniowej jest niższe niż ciśnienie atmosferyczne, więc manometr wskazuje ciśnienie ujemne.

Ciśnienie atmosferyczne (ang. **atmospheric pressure**), które nie jest uwzględniane w ciśnieniu manometrycznym, wchodzi w skład **ciśnienia absolutnego** (ang. **absolute pressure** i dodaje się je do ciśnienia każdego płynu nieumieszczonego w sztywnym, szczelnym pojemniku.

Ciśnienie absolutne

Ciśnienie absolutne, inaczej ciśnienie bezwzględne, jest sumą ciśnienia manometrycznego i ciśnienia atmosferycznego:

$$p_{\text{abs}} = p_{\text{g}} + p_{\text{atm}} \tag{14.11}$$

gdzie p_{abs} jest ciśnieniem absolutnym, p_{g} ciśnieniem manometrycznym, a p_{atm} ciśnieniem atmosferycznym.

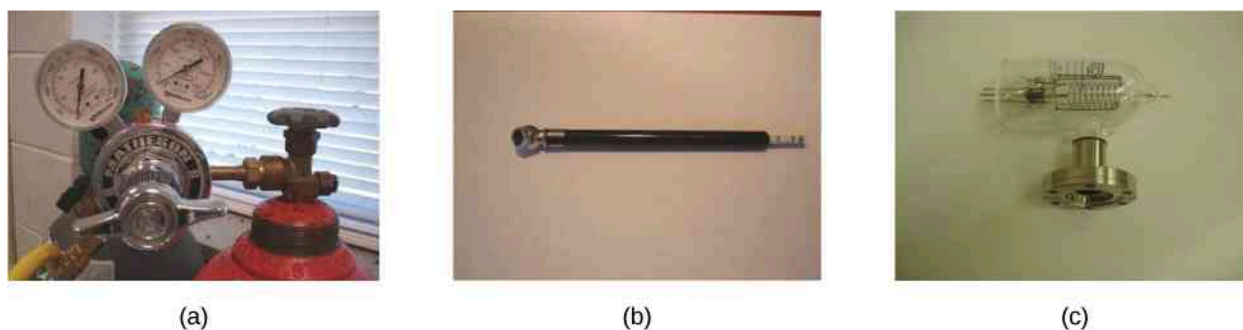
Na przykład, jeżeli ciśnienie manometryczne dla opony wynosi 34 psi, to ciśnienie absolutne wynosi 34 psi + 14,7 psi (p_{atm} w psi), czyli 48,7 psi (co odpowiada 336 kPa).

Ciśnienie absolutne płynów nie może być ujemne. Płyny mogą wypychać, ale nie mogą wciągać (zasysać), więc najniższa wartość ciśnienia absolutnego to zero (ujemne ciśnienie absolutne odpowiada ciągnięciu [zasysaniu]). Tak więc najniższe możliwe ciśnienie manometryczne wynosi $p_{\text{g}} = -p_{\text{atm}}$ (dzięki czemu p_{abs} wynosi zero). Nie ma teoretycznie ograniczenia górnej wartości ciśnienia manometrycznego.

Pomiar ciśnienia

Wiele urządzeń mierzy ciśnienie: od manometrów samochodowych po urządzenia do pomiaru ciśnienia krwi. Wiele innych mierników ciśnienia używa się do pomiaru ciśnienia płynów – w tej części omówimy niektóre z nich.

Dowolna wielkość zmieniająca się wraz z ciśnieniem w znany nam sposób może zostać wykorzystania do skonstruowania miernika ciśnienia. Jedne z najbardziej rozpowszechnionych typów mierników, tensometry, wykorzystują zmiany kształtu materiału pod wpływem ciśnienia, inne, pojemnościowe mierniki ciśnienia, działają na zasadzie pomiaru pojemności elektrycznej pod wpływem spowodowanych ciśnieniem zmian kształtu, jeszcze inne, piezoelektryczne mierniki ciśnienia, mierzą zmiany napięcia na materiale piezoelektrycznym, powstałe w wyniku różnych ciśnień przyłożonych do różnych jego części, a jonowe mierniki, mierzą ciśnienie za pośrednictwem jonizacji cząsteczek w komorach próżniowych pod bardzo niskimi ciśnieniami. Różne mierniki ciśnienia stosuje się w różnych sytuacjach fizycznych. Na Rysunku 14.11 podano kilka przykładów.

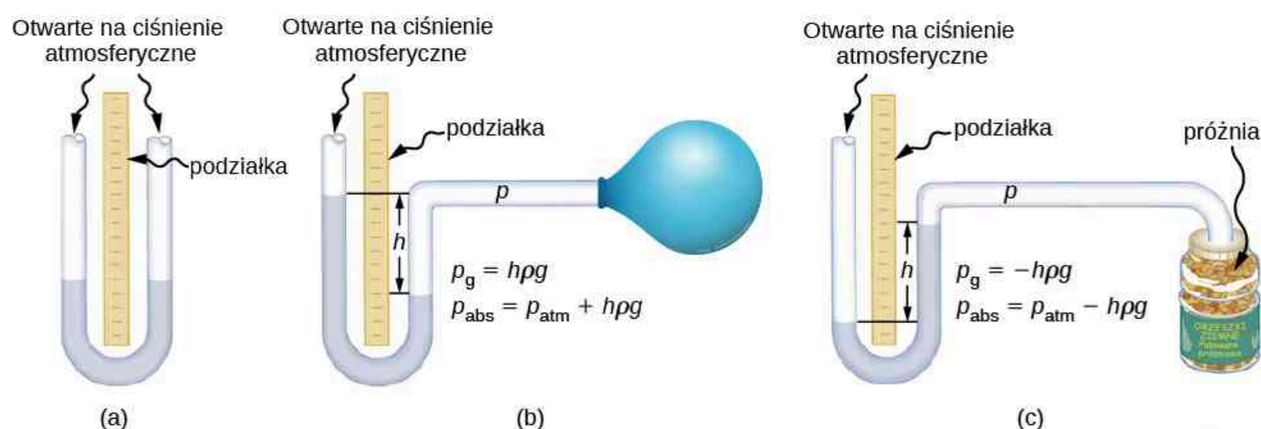


Rysunek 14.11 (a) Mierniki używane do pomiaru i monitorowania ciśnienia w butlach gazowych. Sprężone gazy mają wielorakie zastosowania przemysłowe i medyczne. (b) Wiele różnych mierników ciśnienia w oponach, umożliwia utrzymanie optymalnego ciśnienia w oponach ze względu na ładunek i warunki na drodze. (c) Miernik jonizacyjny jest bardzo czułym urządzeniem do monitorowania ciśnienia gazów w systemach zamkniętych. Cząsteczki neutralnego gazu zostają zjonizowane, dzięki czemu uwalniają się elektrony, a powstały w ten sposób prąd przekłada się na odczyt ciśnienia. Mierników jonizacyjnych często używa się w zastosowaniach przemysłowych opartych na systemach próżniowych.

Manometry

Jedna z najważniejszych klas mierników ciśnienia wykorzystuje fakt, że waga płynu o stałej gęstości dana jest wyrażeniem $p = h\rho g$. Rurka w kształcie litery U, pokazana na Rysunku 14.12, jest przykładem **manometru** (ang. **manometer**); w części (a) oba końce rurki są otwarte na oddziaływanie ciśnienia atmosferycznego w dół jednakowo z obu stron, co prowadzi do zniesienia się efektów oddziaływania.

Z kolei manometr z tylko jedną częścią otwartą na działanie ciśnienia atmosferycznego jest idealnym urządzeniem do pomiaru ciśnienia manometrycznego. Ciśnienie manometryczne dane wyrażeniem $p_g = h\rho g$ można uzyskać przez pomiar h. Na przykład załóżmy, że jedną ze stron wygiętej w kształt litery U rurki połączono z obszarem o pewnym ciśnieniu p_{abs}, takim jak balon w części (b) ilustracji lub próżniowo zamknięty słoik z orzeszkami ziemnymi pokazany w części (c). Ciśnienie jest przekazywane bez strat do manometru, przez co poziomy płynu przestają być równe. W części (b) ciśnienie p_{abs} jest większe niż ciśnienie atmosferyczne, podczas gdy w części (c) p_{abs} jest mniejsze od ciśnienia atmosferycznego. W obu przypadkach p_{abs} różni się od ciśnienia atmosferycznego o wielkość $h\rho g$, gdzie ρ jest gęstością płynu w manometrze. W części (b) ciśnienie p_{abs} może podtrzymać kolumnę płynu na o wysokości h, więc wywierane ciśnienie $h\rho g$ musi być większe niż ciśnienie atmosferyczne (ciśnienie manometryczne p_g jest dodatnie). W części (c) ciśnienie atmosferyczne może utrzymać kolumnę płynu o wysokości h, więc ciśnienie p_{abs} jest mniejsze niż atmosferyczne o $h\rho g$ (ciśnienie manometryczne p_g jest ujemne).



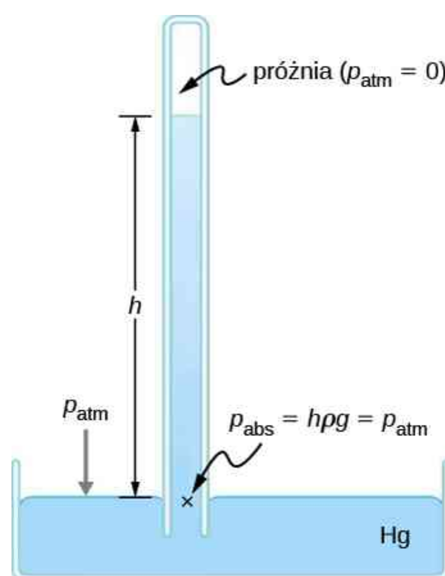
Rysunek 14.12 Jedna strona otwartego manometru jest otwarta na działanie ciśnienia atmosferycznego. (a) Wysokość płynu musi być taka sama po obu stronach, gdyż w przeciwnym przypadku ciśnienie wywierane przez obie strony na dno nie będzie równe i ciecz przepłynie w kierunku niższego poziomu. (b) Dodatnie ciśnienie manometryczne $p_g = h\rho g$ przekazywane do jednej części manometru może utrzymać kolumnę płynu o wysokości h. (c) Podobnie jak w poprzednich przypadkach ciśnienie atmosferyczne jest większe niż ujemne ciśnienie manometryczne p_g o wielkość $h\rho g$. Sztywność i szczelność słoika zapobiegają przekazywaniu ciśnienia atmosferycznego do orzeszków.

Barometry

Manometry do pomiaru ciśnienia zwykle zbudowane są z rurki w kształcie litery U wypełnionej płynem (często rtę-

cią). **Barometr** (ang. **barometer**) (patrz Rysunek 14.13) jest urządzeniem mającym zwykle pojedynczą kolumnę rtęci do pomiaru ciśnienia atmosferycznego. Barometr, wynaleziony przez włoskiego matematyka i fizyka, **Evangelistę Torricellego (1608–1647)** w 1643 r., składa się ze szklanej rurki zamkniętej z jednej strony i wypełnionej rtęcią. Taką rurkę odwraca się i umieszcza w zbiorniku z rtęcią. Urządzenie mierzy ciśnienie atmosferyczne lub bardziej precyzyjnie ujmując manometryczne, ponieważ w rurce nad rtęcią tworzy się prawie idealna próżnia. Wysokość słupa rtęci spełnia warunek $h\rho g = p_{\text{atm}}$. Gdy ciśnienie atmosferyczne się zmienia, rtęć się podnosi lub opada.

Instytucje podające prognozy pogody dokładnie monitorują zmiany ciśnienia atmosferycznego (często nazywanego ciśnieniem barometrycznym), gdyż podnosząca się rtęć zwykle sygnalizuje poprawę pogody, a opadająca jej pogorszenie. Barometr może być również użyty jako wysokościomierz, ponieważ średnie ciśnienie atmosferyczne zmienia się wraz z wysokością nad poziomem morza. Barometry rtęciowe i manometry są tak powszechne, że do pomiaru ciśnienia atmosferycznego i ciśnienia krwi używa się jednostki milimetr słupa rtęci (mmHg).

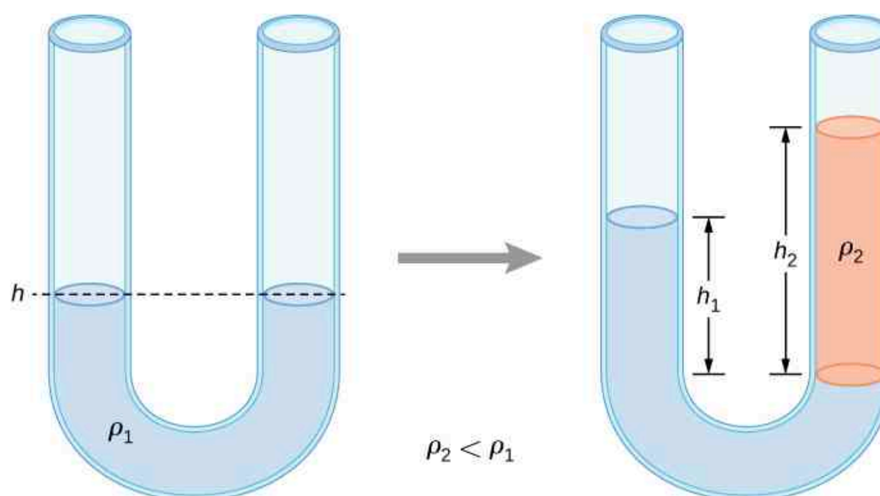


Rysunek 14.13 Barometr rtęciowy mierzy ciśnienie atmosferyczne. Ciśnienie związane z ciężarem słupa rtęci $h\rho g$, równa się ciśnieniu atmosferycznemu. Ciśnienie atmosferyczne może podnieść rtęć do wysokości h, powyżej której ciśnienie wynosi zero.

Przykład 14.2

Wysokość płynu w otwartej rurce U-kształtnej

U-kształtną, otwartą z obu stron rurkę wypełnia ciecz o gęstości ρ_1 do wysokości h z obu stron (Rysunek 14.14). Następnie do jednego ramienia rurki wlano ciecz o gęstości $\rho_2 < \rho_1$ wskutek czego ciecz 2 osiadła na cieczy 1. Wysokości słupów cieczy w obu ramionach rurki są różne. Wysokość od strony cieczy 2 mierzona od styku dwóch substancji wynosi h_2 , a wysokość od strony cieczy 1 mierzona od styku dwóch substancji wynosi h_1 . Wyprowadź wzór na różnicę tych wysokości.



Rysunek 14.14 Dwa płyny o różnych gęstościach w rurce U-kształtnej.

Strategia rozwiązania

Ciśnienie w punktach leżących na tej samej wysokości po obu stronach rurki U-kształtnej musi być takie samo, jeżeli oba punkty znajdują się w tej samej cieczy. Z tego powodu rozważymy dwa punkty na tym samym poziomie w obu ramionach rurki: jeden z nich leży na styku cieczy po stronie cieczy 1, a drugi to punkt w ramieniu po stronie cieczy 2 znajdujący się na tej samej wysokości co styk cieczy w pierwszym ramieniu. Ciśnienie w każdym punkcie jest wywierane przez ciśnienie atmosferyczne oraz ciężar płynu nad tym punktem.

$$\text{ciśnienie na stronę z cieczą 1} = p_0 + \rho_1 g h_1$$
$$\text{ciśnienie na stronę z cieczą 2} = p_0 + \rho_2 g h_2$$

Rozwiązanie

Ponieważ oba punkty znajdują się w cieczy 1 i są położone na tej samej wysokości, ciśnienie w nich musi być takie samo. Z tego powodu mamy:

$$p_0 + \rho_1 g h_1 = p_0 + \rho_2 g h_2.$$

Z tego otrzymujemy:

$$\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2.$$

Oznacza to, że różnica wysokości po obu stronach rurki wynosi:

$$h_2 - h_1 = \left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right) h_2.$$

Jeżeli podstawimy $p_2 = p_1$, to otrzymamy $h_2 = h_1$, co jest oczywiście zgodne z naszymi założeniami: jeżeli obie strony mają tę samą gęstość, to będą miały tę samą wysokość.



14.2 **Sprawdź, czy rozumiesz:** Rtęć jest bardzo niebezpieczną substancją. Dlaczego twoim zdaniem jest używa się jej w barometrach zamiast innych, bardziej bezpiecznych substancji, na przykład wody? (Od roku 2007 produkcja nowych urządzeń zawierających rtęć jest zabroniona ze względu na jej toksyczność - przyp. tłum.)

Jednostki ciśnienia

Jak wspomniano wcześniej, jednostką SI ciśnienia jest **paskal** (ang. **pascal**) (Pa):

$$1\ \text{Pa} = 1\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Oprócz paskala w powszechnym użyciu jest wiele innych jednostek (Tabela 14.3). W meteorologii ciśnienie atmosferyczne często wyraża się w milibarach (mbar), przy:

$$1000\ \text{mbar} = 1 \cdot 10^5\ \text{Pa}$$

Milibar jest dla meteorologów wygodną jednostką, ponieważ średnie ciśnienie atmosferyczne na poziomie morza wynosi $1{,}013 \cdot 10^5\ \text{Pa} = 1013\ \text{mbar} = 1\ \text{atm}$. Wykorzystując równania wyprowadzone w rozważaniach dotyczących ciśnienia na pewnej głębokości w płynie, możemy je podać w milimetrach słupa rtęci. Ciśnienie na dnie kolumny rtęci o wysokości 760 mm w temperaturze $0\ {}^\circ\text{C}$ w pojemniku, z którego górnej części usunięto powietrze jest równe 1 atm. W laboratoriach fizyki próżniowej naukowcy często używają innej jednostki, **tora** (ang. **torr**) (Tr), nazwanej tak na cześć Torricellego, który, jak wcześniej wspomnieliśmy, wynalazł barometr rtęciowy. 1 Tr jest równy ciśnieniu 1 mmHg.

Jednostka	Definicja
Jednostka SI: paskal	$1\ \text{Pa} = 1\ \text{N/m}^2$
Jednostka imperialna (brytyjski system miar): funt na cal do kwadratu (lb/in^2, inaczej psi)	$1\ \text{psi} = 7{,}015 \cdot 10^3\ \text{Pa}$
Inne jednostki ciśnienia	$1\ \text{atm} = 760\ \text{mmHg} = 1{,}013 \cdot 10^5\ \text{Pa} = 14{,}7\ \text{psi} = 29{,}9\ \text{inHg} = 1013\ \text{mbar}$
	$1\ \text{bar} = 10^5\ \text{Pa}$
	$1\ \text{Tr} = 1\ \text{mmHg} = 122{,}39\ \text{Pa}$

Tabela 14.3 Podsumowanie jednostek ciśnienia

14.3 | Prawo Pascala i układy hydrauliczne

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- formułować prawo Pascala;
- wyprowadzać zależności między siłami w układzie hydraulicznym.

W 1653 r. francuski filozof i uczony Blaise Pascal opublikował swój *Traktat równowagi płynów*, w którym przedstawił zasady statyki płynów. Płyn statyczny to taki, który nie jest w ruchu. Gdy płyn nie płynie, mówimy, że jest w równowadze statycznej. Jeżeli tym płynem jest woda, to mówimy, że znajduje się w **równowadze hydrostatycznej** (ang. **hydrostatic equilibrium**). Dla płynów w równowadze statycznej wypadkowa siła na dowolną jego część musi wynosić zero, bo w przeciwnym przypadku płyn zacząłby się poruszać.

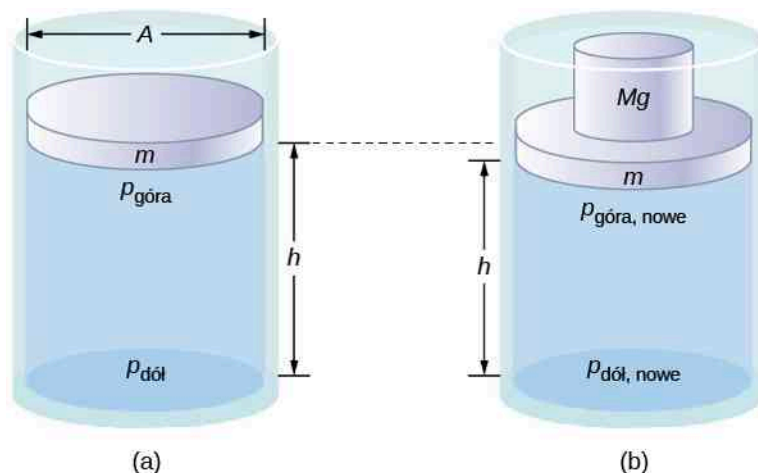
Obserwacje Pascala, które później udowodniono eksperymentalnie, są podstawą dziedziny nauki zwanej **hydrauliką** (ang. **hydraulics**). Jest ona jednym z największych osiągnięć współczesnej technologii mechanicznej. Pascal zauważył, że zmiana ciśnienia przyłożonego do płynu jest przekazywana bez strat w całej jego objętości i ostatecznie do ścian naczynia, w którym się on znajduje. Z tego powodu często więcej wiemy o ciśnieniu płynu niż o innych jego cechach fizycznych. Co więcej, z prawa Pascala wynika, że całkowite ciśnienie w danym punkcie płynu jest sumą ciśnień pochodzących z różnych źródeł. Dobrym przykładem jest ciśnienie na danej głębokości płynu, które zależy zarówno od samej głębokości, jak i od ciśnienia atmosferycznego.

Prawo Pascala

Zasada Pascala, znana również pod nazwą **prawo Pascala** (ang. **Pascal's principle**), stwierdza, że zmiana ciśnienia przyłożonego do płynu jest przekazywana bez strat do wszystkich jego części i ostatecznie do ścianek naczynia zawierającego płyn. Atomy, które mogą się swobodnie poruszać w naczyniu przekazują ciśnienie do wszystkich części płynu oraz do ścian naczynia. Dowolna zmiana ciśnienia jest przekazywana bez strat.

Zwróćmy uwagę, że zasada ta nie mówi, że ciśnienie jest takie samo we wszystkich częściach. Nie jest to prawdą, na przykład dlatego, że ciśnienie płynu w pobliżu Ziemi zmienia się wraz z wysokością. Zasada ta odnosi się raczej do zmiany ciśnienia. Załóżmy, że umieścimy wodę w cylindrycznym pojemniku o wysokości H i polu przekroju A, na którego szczycie znajduje się ruchomy tłok o masie m (Rysunek 14.15). Przyłożenie dodatkowego ciężaru Mg do tłoka zwiększa ciśnienie na szczycie o Mg/A, ponieważ ta dodatkowa siła jest przyłożona również do powierzchni A tłoka zamykającej cylinder:

$$\Delta p_{\text{góra}} = \frac{Mg}{A}.$$



Rysunek 14.15 Ciśnienie płynu zmienia się, gdy płyn zostanie poddany dodatkowemu ciśnieniu. (a) Ciśnienie na górną warstwę płynu jest inne niż ciśnienie na dolną warstwę. (b) Wzrost ciśnienia spowodowany przez dodanie ciężaru do tłoka jest taki sam w każdym punkcie płynu, na przykład $p_{\text{góra nowe}} - p_{\text{góra}} = p_{\text{dół nowe}} - p_{\text{dół}}$.

Zgodnie z zasadą Pascala ciśnienie we wszystkich punktach wody zmienia się o tę samą wielkość Mg/A. Zatem ciśnienie przy dnie również zwiększa się o Mg/A. Ciśnienie przy dnie zbiornika stanowi sumę ciśnienia atmosferycznego, ciśnienia związanego z działaniem słupa płynu oraz ciśnienia wywieranego przez dodatkową masę. Zmiana ciśnienia przy dnie naczynia związana z dodatkową masą wynosi:

$$\Delta p_{\text{dół}} = \frac{Mg}{A}.$$

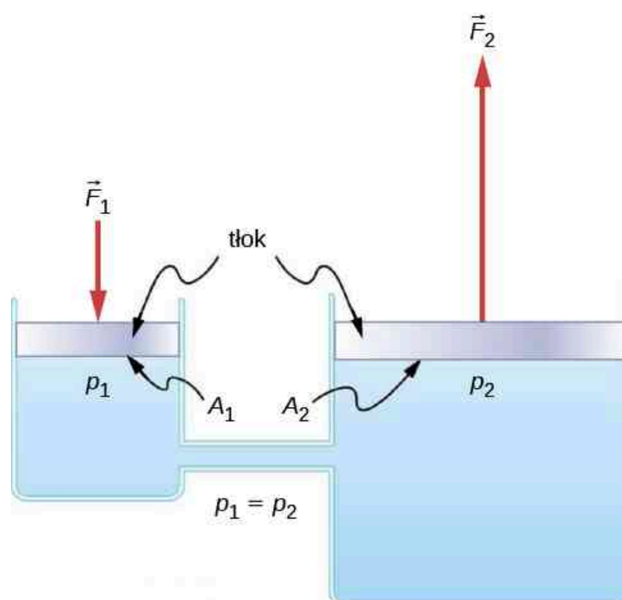
Ponieważ zmiany ciśnienia są takie same w każdym miejscu w płynie, nie potrzebujemy dodatkowych indeksów wskazujących, czy mówimy o dodatkowym ciśnieniu na górze, czy na dole naczynia:

$$\Delta p = \Delta p_{\text{góra}} = \Delta p_{\text{dół}} = \Delta p_{\text{wszędzie}}.$$


Beczka Pascala dostarcza znakomitej demonstracji zasady Pascala. Obejrzyjcie następującą symulację (https://openstaxcollege.org/l/21pascalbarrel) doświadczenia Pascala z 1646 r., w którym zademonstrował on skutki zmieniającego się w płynie ciśnienia.

Zastosowania zasady Pascala oraz układów hydraulicznych

Układy hydrauliczne są podstawą działania hamulców samochodowych, podnośników hydraulicznych i wielu innych układów mechanicznych (Rysunek 14.16).



Rysunek 14.16 Typowy układ hydrauliczny złożony z dwóch wypełnionych płynem cylindrów, zamkniętych tłokami i połączonych rurą zwaną przewodem hydraulicznym. Skierowana w dół siła $\vec{F}_1$ przyłożona do lewego tłoka powoduje zmianę ciśnienia przekazywaną bez strat do wszystkich części płynu w naczyniu. Wywołuje to skierowaną ku górze siłę $\vec{F}_2$ działającą na prawy tłok. Siła ta jest większa niż $\vec{F}_1$, ponieważ pole powierzchni prawego tłoka jest większe.

Możemy wyprowadzić związek między siłami w tym prostym układzie hydraulicznym, stosując zasadę Pascala. Zwróćmy uwagę, że oba tłoki znajdują się na tej samej wysokości, więc nie ma różnicy ciśnień związanej z głębokością. Ciśnienie związane z siłą F_1 działającą na powierzchnię A_1 wynosi:

$$p_1 = \frac{F_1}{A_1}, \quad \text{zgodnie z definicją} \quad p = \frac{F}{A}.$$

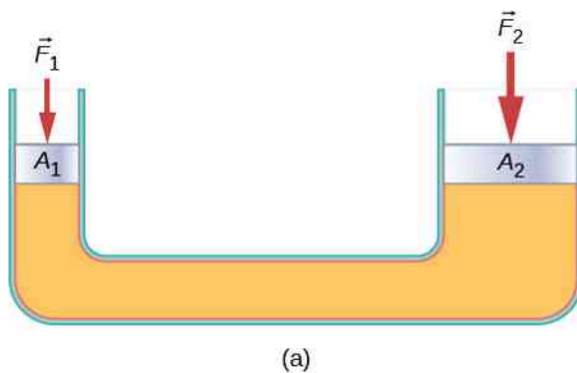
Zgodnie z zasadą Pascala ciśnienie to zostaje przekazane bez strat do wszystkich punktów w płynie oraz do ścian naczynia. W związku z tym ciśnienie p_2 równe p_1 działa również przy drugim tłoku. Otrzymujemy $p_1 = p_2$. Ponieważ jednak $p_2 = F_2/A_2$, otrzymujemy ostateczny wynik:

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}. \tag{14.12}$$

Równanie to wiąże stosunki sił do powierzchni w dowolnym układzie hydraulicznym, pod warunkiem, że tłoki znajdują się na tej samej wysokości oraz że można pominąć tarcie obecne w układzie.

Układy hydrauliczne mogą zwiększać lub zmniejszać przyłożoną do nich siłę. Aby zwiększyć siłę, ciśnienie przykłada się do większej powierzchni. Na przykład jeżeli siłę 100 N przyłożymy do lewego cylindra (Rysunek 14.16), a prawy cylinder ma powierzchnię pięciokrotnie większą, to siła wyjściowa będzie wynosiła 500 N. Układy hydrauliczne działają analogicznie do dźwigni prostych, ale mają tę zaletę, że ciśnienie może być przekazywane nawet wzdłuż wymyślnie poskręcanych przewodów, w kilka miejsc jednocześnie.

Przykładem takiego urządzenia jest **podnośnik hydrauliczny** (ang. **hydraulic jack**). Używa się go do podnoszenia dużych ciężarów, na przykład w warsztatach do unoszenia samochodów. Podnośnik składa się z nieściśliwego płynu umieszczonego w U-kształtnej rurze zakończonej z obu stron ruchomymi tłokami. Mała siła przyłożona do małej powierzchni może zrównoważyć znacznie większą siłę przyłożoną po drugiej stronie do znacznie większej powierzchni (Rysunek 14.17).





Rysunek 14.17 (a) Działanie podnośnika hydraulicznego oparte jest na przyłożeniu sił (F_1, F_2) do nieściśliwego płynu w rurze o kształcie litery U przy użyciu ruchomych tłoków (A_1, A_2) z obu stron rury. (b) Podnośniki hydrauliczne są powszechnie używane w warsztatach do unoszenia samochodów, co umożliwia przeprowadzanie napraw i przeglądów.

Używając zasady Pascala, możemy pokazać, że siła niezbędna do podniesienia samochodu jest mniejsza niż ciężar samochodu:

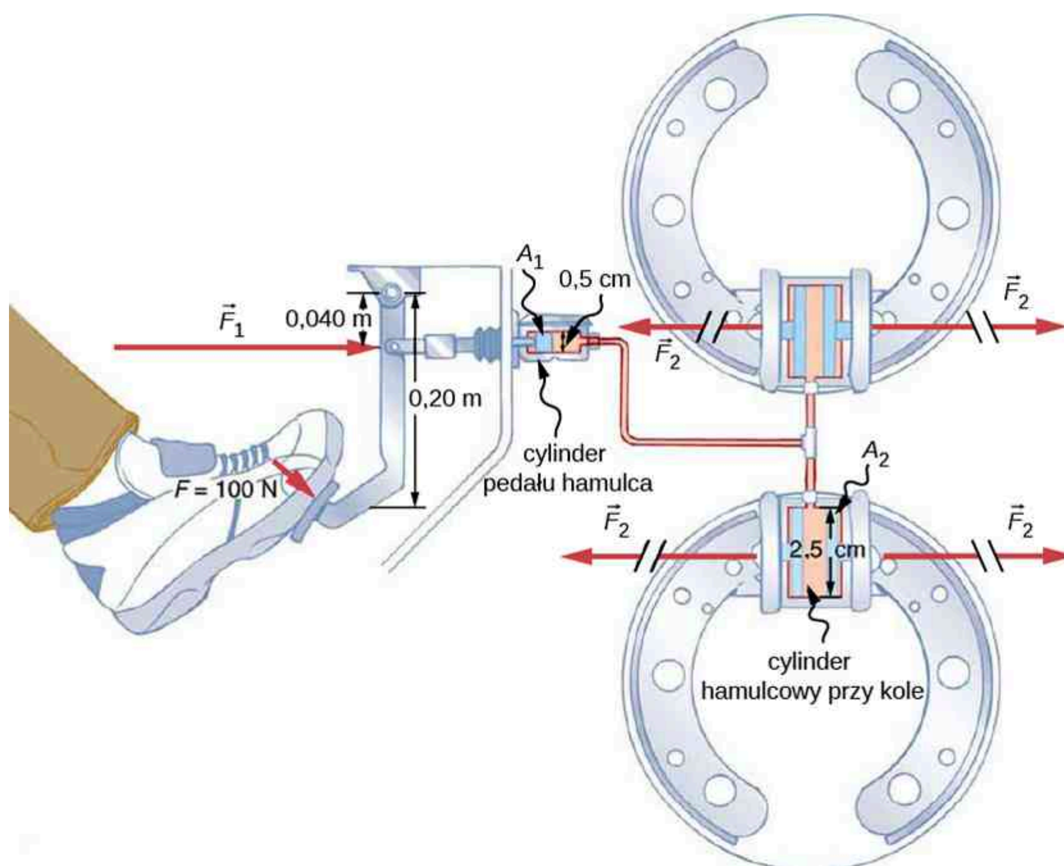
$$F_1 = \frac{A_1}{A_2} F_2,$$

gdzie F_1 jest siłą przyłożoną w celu podniesienia samochodu, A_1 polem poprzecznego przekroju miniejszego tłoka, A_2 polem przekroju poprzecznego większego tłoka, a F_2 ciężarem samochodu.

Przykład 14.3

Obliczanie siły na cylindry hamulcowe

Rozważmy samochodowy układ hydrauliczny pokazany na Rysunku 14.18. Załóżmy, że siłę 100 N przyłożono do pedału hamulca (działającego jako źródło siły hamującej), który działa na cylinder pedału hamulcowego (działający jako główny cylinder) przy użyciu dźwigni. Na cylinder została wywarta siła 500 N. Ciśnienie wytworzone na cylindrze pedału hamulcowego jest przekazywane do cylindrów hamulcowych przy czterech kołach pojazdu. Cylinder pedału hamulcowego średnicę 0,500 cm, a każdy z cylindrów hamulcowych przy kołach ma średnicę 2,50 cm. Oblicz wartość siły F_2 wytworzonej przy każdym z cylindrów hamulcowych przy kołach.



Rysunek 14.18 Hamulce hydrauliczne wykorzystują zasadę Pascala. Kierowca naciska na pedał hamulca, działając wzmacnianą przez dźwignię prostą siłą, przekazywaną do układu hydraulicznego. Przy każdym z identycznych cylindrów hamulcowych przy kołach wytwarzane jest takie samo ciśnienie, i z tego powodu każdy z nich działa taką samą siłą F_2 na swoje koło. Kołowe przekroje poprzeczne cylindra pedału hamulcowego i cylindrów przy kołach przedstawiają odpowiednio przez A_1 oraz A_2 .

Strategia rozwiązania

Znamy siłę F_1 przyłożoną do cylindra pedału hamulcowego. Pole przekrojów poprzecznych A_1 oraz A_2 można obliczyć z podanych średnic. Do znalezienia siły możemy więc użyć następującej relacji F_2:

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}.$$

Dzięki przekształceniu algebraicznemu, otrzymujemy z jednej strony F_2 i podstawiamy znane wartości.

Rozwiązanie

Zasada Pascala zastosowana do układu hamulcowego zadana jest przez $\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$:

$$F_2 = \frac{A_2}{A_1}F_1 = \frac{\pi r_2^2}{\pi r_1^2}F_1$$
$$= \frac{(1{,}25\text{ cm})^2}{(0{,}250\text{ cm})^2} \cdot 500\text{N} = 1.25 \cdot 10^4\text{ N}$$

Znaczenie

Wartość ta to siła wywierana przez każdy z czterech cylindrów przy kołach. Zwróćmy uwagę, że przy kołach

możemy zainstalować dowolna liczbę cylindrów. Jeżeli każdy z nich ma średnicę 2,50 cm, to będzie działał siłą $1{,}25 \cdot 10^4$ N. Prosty układ hydrauliczny jest przykładem maszyny prostej i w związku z tym może zwiększać siłę, ale nie może wykonywać większej pracy, niż praca wykonana nad nim. Praca to siła pomnożona przez drogę, na której działa siła, więc tłok cylindra przy kole pokonuje mniejszą drogę niż tłok przy pedale hamulcowym. Dodatkowo, im więcej kół dodamy, tym mniejszą drogę tłok cylindra przebędzie przy każdym z nich. Wiele układów hydraulicznych, takich jak system wspomagania hamowania lub układy hamulcowe w ciężkich maszynach, wykorzystuje pompy z zewnętrznym napędem, który wykonuje większość pracy w układzie.



14.3 **Sprawdź, czy rozumiesz** Czy prasa hydrauliczna działałaby, gdyby zamiast cieczy użyto gazu?

14.4 | Prawo Archimedesa i siła wyporu

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- definiować siłę wyporu;
- formułować prawo Archimedesa;
- opisywać związek między gęstością a prawem Archimedesa.

Niektóre obiekty po umieszczeniu w płynie unoszą się ku jego powierzchni dzięki istnieniu siły wyporu. Skąd bierze się ta siła? Dlaczego niektóre przedmioty się unoszą, a inne nie? Czy tonące przedmioty podlegają podobnej sile? Czy na twoje ciało również działa siła wyporu, czy jedynie balony z helem są wypierane przez atmosferę ziemską?



(a)



(b)



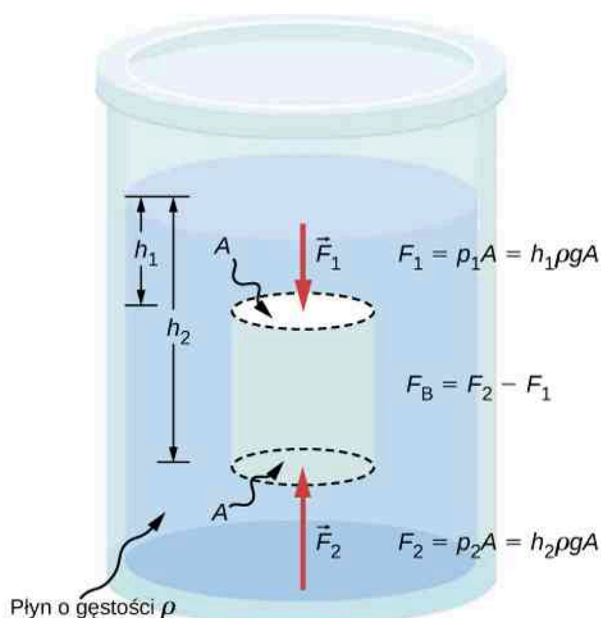
(c)

Rysunek 14.19 (a) Nawet przedmioty, które toną, jak kotwica na rysunku, podlegają sile wyporu po ich zanurzeniu. (b) Gęstość okrętu podwodnego można zmieniać przez opróżnianie i napełnianie zbiorników balastowych, dzięki czemu może się on unosić na wodzie lub zanurzać, w zależności od decyzji załogi. (c) Napełnione helem balony napinają sznurki, do których są przyczepione, co pokazuje działanie siły wyporu. (Źródło (b) modyfikacja ilustracji dostarczonej przez Amerykańską Marynarkę Wojenną. Źródło (c) modyfikacja pracy „Crystl”/Flickr)

Odpowiedzi na te pytania oraz na wiele innych oparte są na zjawisku zmiany ciśnienia w płynie wraz z głębokością. Oznacza to, że siła działająca ku górze na dół przedmiotu zanurzonego w płynie jest większa niż siła działająca na jego szczyt. Istnieje więc siła, zwana **siłą wyporu** (ang. **buoyant force**), działająca ku górze na dowolny obiekt zanurzony w płynie (Rysunek 14.20). Jeżeli siła wyporu jest większa niż ciężar obiektu, to unosi się on ku powierzchni płynu. Jeżeli siła wyporu równa się ciężarowi obiektu, to przedmiot pozostaje na tej samej głębokości. Siła wyporu jest zawsze obecna, niezależnie od tego, czy przedmiot pływa po powierzchni, tonie, czy jest zawieszony w płynie.

Siła wyporu

Siła wyporu to skierowana ku górze siła, działająca na każdy obiekt zanurzony w płynie.



Rysunek 14.20 Ciśnienie wywołane ciężarem płynu zwiększa się z głębokością, ponieważ $p = hpg$. Ta zmiana ciśnienia powoduje powstanie skierowanej ku górze siły przyłożonej do spodu cylindra, większej niż siła przyłożona do jego szczytu. Ta różnica powoduje powstanie siły wyporu F_W. (Siły poziome się znoszą.)

Prawo Archimedesa

Jaka jest wartość siły wyporu? Aby odpowiedzieć na to pytanie, zastanówmy się nad tym, co by się stało, gdyby usunąć znanurzony przedmiot z płynu jak na Rysunku 14.21. Gdy w płynie nie ma przedmiotu, objętość, w której znajdował się wcześniej, jest zajmowana przez płyn o ciężarze w_{prz}. Ten ciężar jest podtrzymywany przez otaczający płyn, więc siła wyporu musi być równa w_{prz}, czyli ciężarowi płynu wypartego przez przedmiot.

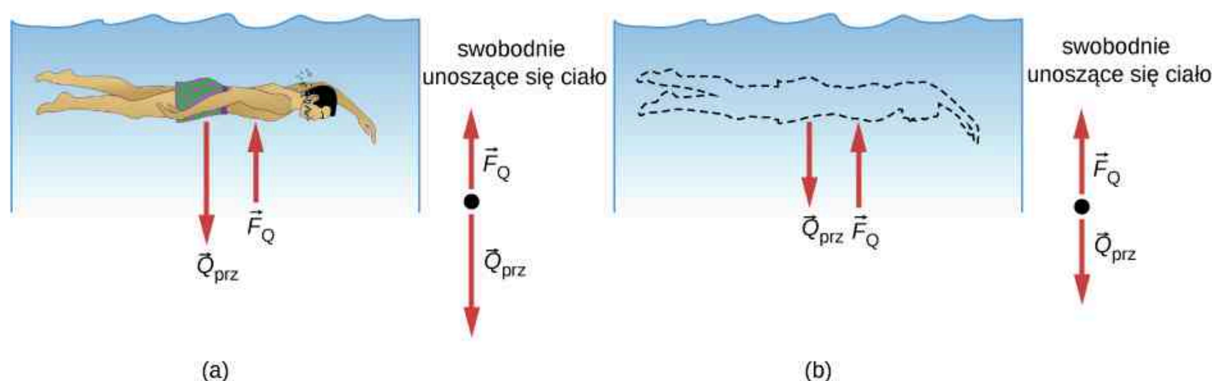
Prawo Archimedesa

Siła wyporu działająca na zanurzony przedmiot równa się ciężarowi płynu, który jest wyparty przez ten przedmiot. W postaci równania **prawo Archimedesa** (ang. **Archimedes' principle**) przedstawia się następująco:

$$F_W = Q_{prz},$$

gdzie F_W jest siłą wyporu, a Q_{prz} ciężarem płynu wypartego przez przedmiot.

Prawo to nazwano imieniem greckiego matematyka i wynalazcy **Archimedesa (287–212 p.n.e.)**, który sformułował powyższą zasadę na długo przed powstaniem pojęcia siły.



Rysunek 14.21 (a) Przedmiot zanurzony w płynie doświadcza siły wyporu F_W. Zacznie się on unosić, jeżeli F_W będzie większa niż ciężar obiektu. Jeżeli F_W jest mniejsza niż ciężar przedmiotu, to będzie on tonął. (b) Jeżeli usuniemy obiekt, to przestrzeń po nim zostanie zastąpiona wodą o ciężarze Q_{prz}. Ponieważ ciężar ten musi być podtrzymywany przez otaczający płyn, siła wyporu musi być równa ciężarowi wypartego płynu.

Prawo Archimedesa odnosi się do siły wyporu, która pojawia się, gdy ciało zostanie całkowicie lub częściowo umieszczone w wodzie. Siła związana z ciśnieniem płynu działa na ciało prostopadle do jego powierzchni. Innymi słowy siła związana z ciśnieniem na spodzie ciała jest skierowana ku górze, podczas gdy siła działająca na jego górę jest skierowana ku dołowi. Siły związane z ciśnieniem działające na boki są skierowane do wewnątrz ciała.

Ponieważ spód zanurzonego ciała znajduje się na większej głębokości niż jego szczyt, ciśnienie na dolną część ciała jest większe niż ciśnienie na górną część, jak pokazano na Rysunku 14.20. W związku z tym powstaje wypadkowa siła działająca na ciało ku górze. Ta siła nazywana jest siłą wyporu lub po prostu wypornością.


Często podaje się, że Archimedes zakrzyknął **Eureka** (czyli znalazłem) po odkryciu zasady, która doprowadziła do sformułowania prawa Archimedesa. Mówi się, że wszystko zaczęło się od wanny. Aby zapoznać się z pełną historią, odwiedź NASA (https://openstaxcollege.org/l/21archNASA) lub Scientific American (https://openstaxcollege.org/l/21archsciamer) .

Gęstość a prawo Archimedesa

Gruda gliny wrzucona do wody tonie, jednak jeżeli uformujemy z niej statek, to będzie on pływał. Z powodu swojego kształtu statek z gliny wypiera więcej wody niż gruda gliny i w związku z tym doświadcza większej siły wyporu, mimo że masy są identyczne. Ta sama zasada obowiązuje w przypadku stalowych statków.

Średnia gęstość przedmiotu determinuje to, czy będzie on pływał, czy zatonie. Jeżeli jego średnia gęstość jest mniejsza niż gęstość otaczającego płynu, to będzie się on unosił w kierunku powierzchni. Dzieje się tak dlatego, że gęstszy płyn zawiera więcej masy w tej samej objętości, co pociąga za sobą jego większą wagę. Siła wyporu, równa ciężarowi wypartego płynu, jest większa niż ciężar obiektu. Podobnie obiekt o większej gęstości niż płyn zatonie.

Rozmiar części obiektu zanurzonej w płynie zależy od tego, jaka jest jego gęstość względem płynu. Na Rysunku 14.22 rozładowany statek ma mniejszą gęstość i w związku z tym mniejsza jego część jest zanurzona w porównaniu z sytuacją, gdy statek jest załadowany. Możemy wyprowadzić wyrażenie określające, w jakiej części przedmiot jest zanurzony, rozważając te gęstości. Zanurzoną część możemy wyrazić stosunkiem zanurzonej objętości do pełnej objętości przedmiotu, czyli:

$$\text{zanurzona część} = \frac{V_{\text{zan}}}{V_{\text{o}}} = \frac{V_{\text{pł}}}{V_{\text{o}}}.$$

Zanurzona objętość równa jest objętości wypartego płynu, którą nazwiemy $V_{\text{pł}}$. Możemy teraz uzyskać zależność między gęstościami, podstawiając $\rho = m / V$ do tego wyrażenia. Otrzymujemy dzięki temu:

$$\frac{V_{\text{zan}}}{V_{\text{o}}} = \frac{m_{\text{pł}}/\rho_{\text{pł}}}{m_{\text{o}}/\rho_{\text{o}}},$$

gdzie ρ_{o} jest średnią gęstością obiektu, a $\rho_{\text{pł}}$ gęstością płynu. Ponieważ obiekt unosi się na powierzchni, jego masa oraz masa wypartego płynu muszą być takie same, więc skracają się w równaniu, dzięki czemu uzyskujemy:

$$\text{zanurzona część} = \frac{\rho_{\text{o}}}{\rho_{\text{pł}}}.$$

Tej zależności można używać do pomiaru gęstości.


(a)


(b)

Rysunek 14.22 Rozładowany statek (a) mniej zanurza się w wodzie niż załadowany (b).

Przykład 14.4

Obliczanie średniej gęstości

Załóżmy, że 60-kilogramowa kobieta unosi się w wodzie słodkiej i 97,0% jej objętości znajduje się pod wodą, gdy jej płuca wypełnione są powietrzem. Jaka jest jej średnia gęstość?

Strategia rozwiązania

Możemy obliczyć gęstość tej osoby, rozwiązując równanie:

$$\text{zanurzona część} = \frac{\rho_\text{o}}{\rho_\text{pł}}$$

ze względu na gęstość obiektu. Otrzymujemy:

$$\rho_\text{o} = \rho_\text{osoby} = (\text{zanurzona część}) \cdot \rho_\text{pł}.$$

Znamy zarówno rozmiar zanurzonej części, jak i gęstość wody, możemy więc obliczyć gęstość kobiety.

Rozwiązanie

Podstawiając znane wartości do wyrażenia na gęstość, otrzymujemy:

$$\rho_\text{osoby} = 0{,}970 \cdot 10^3 \,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 970 \,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

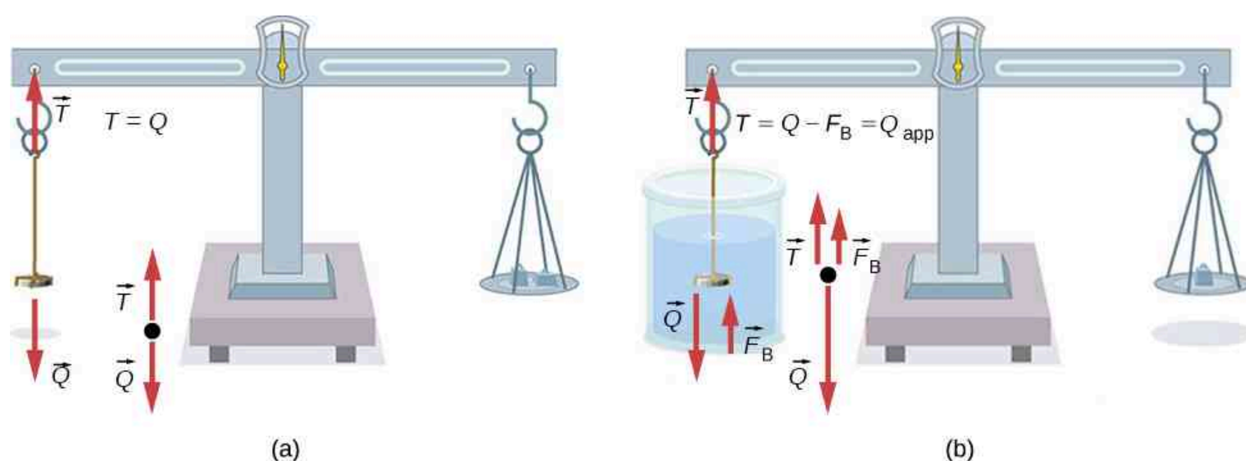
Znaczenie

Gęstość kobiety jest mniejsza niż gęstość płynu – było to do przewidzenia w obliczu faktu, że unosi się ona na wodzie.

Wiele obiektów lub substancji o niższej gęstości unosi się w płynach o wyższej gęstości: olej na wodzie, balon z gorącym powietrzem w atmosferze, kawałek korka w winie, góra lodowa w słonej wodzie czy gorący wosk w „lampie lawowej”. Mniej oczywistym przykładem są łańcuchy górskie unoszące się na położonej pod nimi gęstszej skorupie ziemskiej i płaszczu. Nawet stała powierzchnia Ziemi ma pewne własności płynów.

Pomiar gęstości

Jedna z najczęstszych technik określania gęstości pokazano na Rysunku 14.23.



Rysunek 14.23 (a) Moneta jest ważona w powietrzu. (b) Pomiar pozornego ciężaru zanurzonej w wodzie monety. Te dwa pomiary są wykorzystywane do obliczenia gęstości monety.

Przedmiot, w tym przypadku monetę, ważymy najpierw w powietrzu, a następnie po zanurzeniu w płynie. Jeżeli znamy gęstość płynu, to możemy obliczyć również gęstość monety, co pozwala określić jej autentyczność. Tej samej techniki możemy użyć do obliczenia gęstości płynu, jeżeli znamy gęstość monety.

Wszystkie powyższe obliczenia oparte są na prawie Archimedesa, które stwierdza, że siła wyporu działająca na przedmiot równa jest ciężarowi płynu przez ten przedmiot wypartego. Fakt ten z kolei oznacza, że obiekty pozornie tracą na wadze po zanurzeniu – wagę po zanurzeniu nazywamy wagą pozorną. Przedmiot doświadcza utraty wagi równej ciężarowi wypartego płynu. Inaczej mówiąc, na wadze szalkowej mierzącej masę pozorna utrata masy równa się masie wypartego płynu. Czyli pozorna utrata wagi równa jest wadze wypartego płynu, a pozorna utrata masy równa jest masie wypartego płynu.

14.5 | Dynamika płynów

Cel dydaktyczny

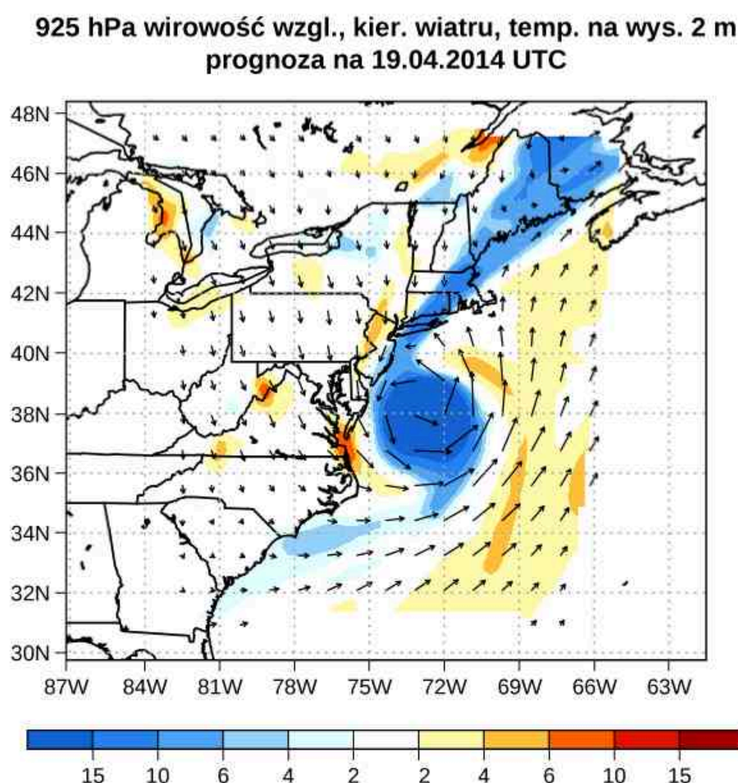
W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać cechy przepływu;
- obliczać strumień objętościowy;
- opisywać relację pomiędzy strumieniem a prędkością;
- rozumieć konsekwencje równania ciągłości w kontekście zachowania masy.

W pierwszej części tego rozdziału zajmowaliśmy się statyką płynów, czyli płynami w spoczynku. Pozostała część rozdziału dotyczy dynamiki płynów, czyli badania ich w ruchu. Nawet najbardziej podstawowy ruch płynu może się okazać bardzo skomplikowany. Z tego powodu w wielu przykładach ograniczymy nasze rozważania do **płynów idealnych** (ang. **ideal fluid**). Płyn idealny jest to płyn o pomijalnej **lepkości** (ang. **viscosity**). Lepkość to miara wewnętrznego tarcia w płynie – omówimy ją bardziej szczegółowo w rozdziale Lepkość i turbulencja. W oparciu o kilka przykładów przeanalizujemy płyn nieściśliwy, to znaczy taki, w którym zmiana objętości wymaga ogromnej siły, czyli jego gęstość w całej objętości pozostaje stała.

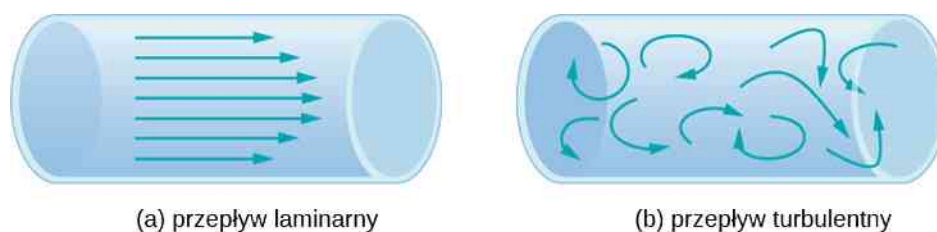
Cechy przepływu

W dziedzinach takich jak meteorologia do zilustrowania przepływu płynu często używamy wektorów prędkości. Na przykład ruch powietrza w atmosferze podczas wiatru może być przedstawiony przez wektory wskazujące wartość i kierunek prędkości w dowolnym punkcie na mapie. Rysunek 14.24 prezentuje wektory prędkości opisujące wiatry podczas huraganu Artur w 2014 r.



Rysunek 14.24 Naniesione wektory prędkości ilustrują kierunki i wartości prędkości wiatrów w huraganie Artur. Zwróćmy uwagę na cyrkulację wiatru wokół oka huraganu. Wartości prędkości są największe w jego pobliżu. Kolory przedstawiają względne wirowości, czyli miarę wirowania wiatru.

Inną metodą przedstawiania przepływu płynu jest linia prądu. Linia prądu oddaje drogę przebytą przez małą objętość płynu podczas przepływu. Prędkość jest zawsze styczna do linii prądu. Diagramy na Rysunku 14.25 używają linii prądu do zilustrowania dwóch przykładów płynu poruszającego się w rurze. Pierwszy wykazuje cechy **przepływu laminarnego** (ang. **laminar flow**), reprezentowanego przez gładkie, równoległe linie prądu. Zwróćmy uwagę, że w przykładzie pokazanym w części (a) prędkość płynu jest największa w centrum i maleje w pobliżu ścian rury z powodu lepkości płynu i tarcia między ścianami a płynem. Jest to szczególny przypadek przepływu laminarnego, gdzie tarcie między płynem a rurą jest wysokie, nazywany przypadkiem warunków brzegowych bez poślizgu. Drugi diagram prezentuje **przepływ turbulentny** (ang. **turbulent flow**), w którym linie prądu są nieregularne i zmienne w czasie. W przepływie turbulentnym trajektorie płynu są nieregularne, gdyż różne jego części mieszają się i tworzą małe, kołowe regiony przypominające wiry. Może się tak zdarzyć, gdy prędkość płynu osiągnie pewną prędkość krytyczną.



Rysunek 14.25 (a) Przepływ laminarny można przedstawić jako warstwy płynu poruszające się po równoległych, regularnych trajektoriach. (b) W przepływie turbulentnym różne obszary płynu poruszają się wzdłuż nieregularnych, przecinających się trajektorii, co skutkuje występowaniem obszarów mieszania i wirami.

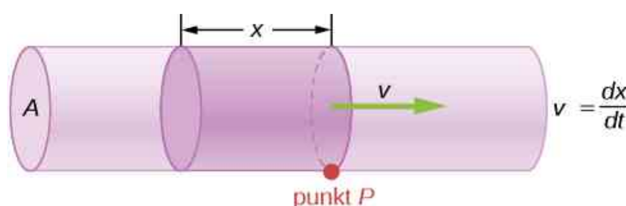
Strumień i jego związek z prędkością

Objętość płynu przepływającego w pewnym miejscu przez powierzchnię w jednostce czasu zwana jest **strumieniem** (ang. **flow rate**) Q lub bardziej precyzyjnie, strumieniem objętościowym. Może być on zapisany jako:

$$Q = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}, \tag{14.13}$$

gdzie V jest objętością, a t upływem czasu. Na Rysunku 14.26 objętość cylindra wynosi Ax, więc strumień objętościowy równy jest:

$$Q = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Ax) = A\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Av.$$



Rysunek 14.26 Strumień objętości to objętość płynu przepływająca w pewnym punkcie przez powierzchnię A w jednostce czasu. Tutaj zacieniony cylinder płynu przepływa przez powierzchnię w punkcie P w jednorodnej rurze w czasie t.

Jednostką SI strumienia objętościowego jest $\mathrm{m^3/s}$, ale w powszechnym użyciu jest kilka innych jednostek, takich jak na litry na minutę (l/min). Zwróć uwagę, że litr (l) to $1/1000\ \mathrm{m^3}$ lub $1000\ \mathrm{cm^3}$ $(10^{-3}\ \mathrm{m^3} \mathrm{lub} 10^3\ \mathrm{cm^3})$.

Strumień objętościowy i prędkość są powiązanymi, lecz różnymi od siebie wielkościami fizycznymi. Aby precyzyjnie odróżnić je od siebie, rozważmy strumień objętościowy w rzece. Im większa prędkość wody, tym większy strumień objętościowy rzeki, ale strumień zależy również od wymiarów i kształtu rzeki. Na przykład bystry strumień górski niesie znacznie mniej wody niż Amazonka w Brazylii. Rysunek 14.26 przedstawia strumień objętościowy. Wynosi on $Q = \mathrm{d}V/\mathrm{d}t = Av$, gdzie A jest polem przekroju rury, a v wartością prędkości.

Szczegółowa relacja między strumieniem Q, a średnią prędkością v jest następująca:

$$Q = Av,$$

gdzie A jest polem przekroju, a v średnią prędkością. Mówi nam ona, że strumień jest wprost proporcjonalny zarówno do średniej prędkości płynu, jak i do pola przekroju rzeki, rury czy innego przewodu. Im grubszy przewód, tym większe pole jego przekroju. Rysunek 14.26 ilustruje sposób uzyskania powyższej relacji. Zacieniony cylinder ma objętość $V = Ad$, która przepływa przez powierzchnię A w punkcie P w czasie t. kiedy podzielimy obie strony tej zależności przez t, otrzymujemy:

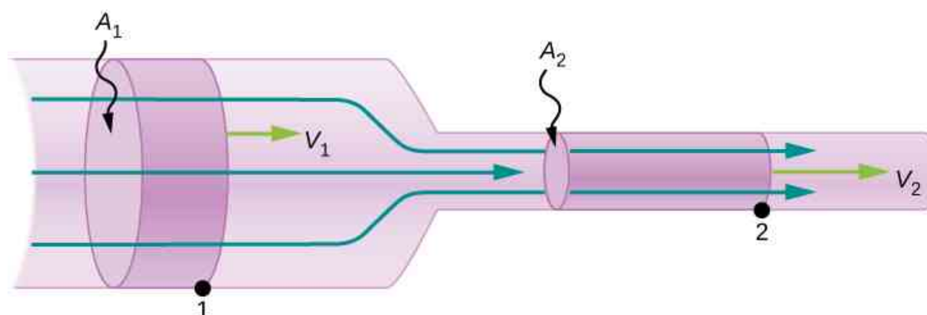
$$\frac{V}{t} = \frac{Ad}{t}.$$

Zauważmy, że $Q = V/t$, a średnia prędkość wynosi $v = d/t$. Równanie upraszcza się do $Q = Av$.

Rysunek 14.27 przedstawia płyn nieściśliwy płynący przez rurę o malejącym promieniu. Ponieważ jest on nieściśliwy, to ta sama jego ilość musi przepływać przez każdy przekrój rury w danym czasie, aby utrzymać ciągłość przepływu. Przepływ jest ciągły, ponieważ nie ma w nim żadnych źródeł ani odpływów, które dodają lub usuwają masę, więc masa wpływająca do rury musi być równa masie z niej wypływającej. W tym przypadku, ponieważ pole przekroju rury się zmniejsza, prędkość musi rosnąć. Ten sposób rozumowania można rozszerzyć i powiedzieć, że strumień musi być taki sam w każdym punkcie rury. W szczególności w dowolnych punktach 1 i 2:

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_2, \\ A_1 v_1 &= A_2 v_2. \end{aligned} \tag{14.14}$$

Wynik ten nosi nazwę **równania ciągłości** (ang. **equation of continuity**) i obowiązuje w każdym nieściśliwym płynie (o stałej gęstości). Konsekwencje tego równania można zaobserwować, gdy woda wypływa z węża przez wąski otwór przy dyszy: za dyszą prędkość wody jest bardzo duża, co tak naprawdę jest powodem, dla którego taka właśnie jest budowa końcówki węża. Z drugiej strony, gdy rzeka wpływa do jednej strony rezerwuaru (np. jeziora), woda znacząco zwalnia. Prędkość ta wzrośnie, gdy woda będzie wypływała po drugiej stronie rezerwuaru. Innymi słowy, prędkość rośnie, gdy pole przekroju maleje, a maleje, gdy pole przekroju rośnie.



Rysunek 14.27 Gdy rura się zwęża, ta sama objętość rozkłada się na większej długości. Aby ta sama objętość minęła powierzchnie w punktach 1 i 2 w tym samym czasie, prędkość musi być większa w punkcie 2. Proces ten jest odwracalny: jeżeli płyn porusza się w przeciwnym kierunku, jego prędkość maleje ze wzrostem szerokości rury. (Zwróć uwagę, że względne objętości obu cylindrów oraz odpowiadające im prędkości nie są narysowane w odpowiedniej skali.)

Ponieważ ciecze są praktycznie nieściśliwe, równanie ciągłości obowiązuje dla nich wszystkich. Gazy można ścisnąć, więc równanie ciągłości należy stosować do nich ostrożnie, jeżeli pojawia się zjawisko sprężenia lub rozprężenia.

Przykład 14.5

Obliczenie prędkości płynu przy wylocie węża

Dysza węża o średnicy 0,500 cm doczepiona jest do węża ogrodowego o promieniu 0,900 cm. Strumień objętościowy przez wąż i dyszę wynosi 0,500 l/s. Oblicz prędkość wody (a) w wężu i (b) przy wylocie.

Strategia rozwiązania

Aby obliczyć obie prędkości, możemy wykorzystać wyprowadzone zależności między strumieniem a prędkością. Do opisania węża użyjemy indeksu 1, a dla dyszy indeksu 2.

Rozwiązanie

a. Rozwiązujemy równanie na strumień ze względu na prędkość i używamy $\pi {r_1}^2$, aby obliczyć pole przekroju węża. Otrzymujemy:

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi r_1^2}.$$

Podstawiając wartości i dokonawszy odpowiednich konwersji jednostek, uzyskujemy:

$$v = \frac{0{,}500\,\mathrm{l/s} \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3/l}}{3{,}14(9{,}00 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m})^2} = 1{,}96\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

b. Moglibyśmy powtórzyć te obliczenia, aby uzyskać prędkość przy wylocie v_2, ale zamiast tego użyjemy równania ciągłości, aby spojrzeć na problem z innej perspektywy. Zgodnie z tym równaniem:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2.$$

Jeśli rozwiążemy ze względu v_2 i podstawimy πr^2 jako pole przekroju, uzyskamy:

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} v_1 = \frac{r_1^2}{r_2^2} v_1.$$

Po podstawieniu wartości dochodzimy do:

$$v_2 = \frac{(0{,}900\ \text{cm})^2}{(0{,}250\ \text{cm})^2} 1{,}96 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 25{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Znaczenie

Prędkość 1,96 m/s wydaje się prawidłowa dla wody wylatującej z węża bez wąskiej dyszy na końcu. Dysza powoduje przyspieszenie strumienia, kierując wodę przez otwór o mniejszej powierzchni.

Rozwiązanie ostatniej części przykładu pokazuje, że prędkość jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu promienia rury, co sprawia, że pojawiają się znaczące efekty, gdy promień się zmienia. Możemy na przykład zdmuchnąć świeczkę z dość dużej odległości układając usta w rurkę, podczas gdy dmuchając z otwartymi ustami, raczej się nam to nie uda.

Zachowanie masy

Szybkość przepływu płynu może być również opisana przez **strumień masy** (ang. **mass flow rate**) lub inaczej masowe natężenie przepływu. Jest to szybkość, z jaką masa płynu przepływa przez powierzchnię w danym punkcie. Spójrzmy jeszcze raz na Rysunek 14.26, lecz tym razem przyjrzyjmy się masie zawartej w zacienionej objętości. Masę tę można obliczyć z gęstości i objętości:

$$m = \rho V = \rho A x.$$

Strumień masy wynosi więc:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho A x) = \rho A \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \rho A v,$$

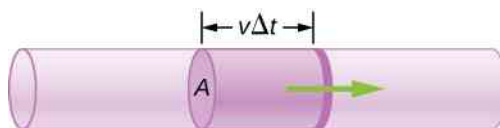
gdzie ρ jest gęstością, A polem przekroju, a v wartością prędkości. Pojęcie strumienia masy jest ważne w dynamice płynów i używane w rozwiązywaniu wielu problemów. Rozważmy na przykład Rysunek 14.28. Rura na nim zaczyna się wlotem o polu powierzchni A_1 i zwęża się do wylotu o mniejszej powierzchni przekroju A_2. Masa płynu wchodzącego do rury musi być równa masie płynu opuszczającego rurę. Z tego powodu prędkość przy wylocie (v_2) jest większa niż prędkość przy wlocie (v_1). Wiedząc, że masa płynu wchodzącego do rury musi być równa masie płynu opuszczającego ją, możemy wyliczyć zależność między prędkością a polem powierzchni przekroju, zrównując szybkość zmiany masy wpływającej i wypływającej:

$$\left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right)_1 = \left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right)_2$$
$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2. \quad (14.15)$$

Równanie 14.15 jest znane również jako równanie ciągłości w postaci ogólnej. Jeżeli gęstość płynu pozostaje stała w obszarze zmniejszającego się pola przekroju, innymi słowy jeżeli płyn jest nieściśliwy, to w równaniu ciągłości gęstości się skracają:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2.$$

Równanie ciągłości zzredukowaliśmy do postaci opisującej równość strumieni objętościowych: wchodzącego do rury oraz opuszczającego ją.



Rysunek 14.28 Rozważania geometryczne pomocne w wyprowadzeniu równania ciągłości. Masa płynu wchodzącego do zacienionego obszaru musi być w każdej chwili taka sama jak masa płynu opuszczającego ten obszar, jeżeli płyn jest nieściśliwy.

14.6 | Równanie Bernoulliego

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- określać znaczenie składników równania Bernoulliego;
- wiązać równanie Bernoulliego z zasadą zachowania energii;
- wyprowadzać zasadę Bernoulliego z równania Bernoulliego;
- wykonywać obliczenia, posługując się zasadą Bernoulliego;
- opisywać zastosowania zasady Bernoulliego.

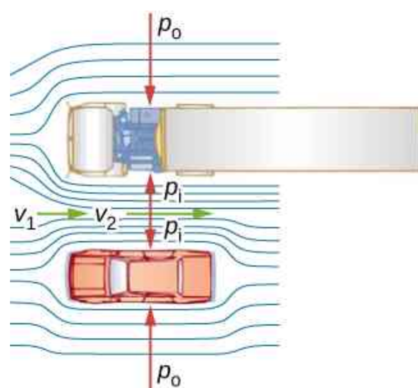
Jak pokazaliśmy na Rysunku 14.27, gdy płyn wpływa do węższego kanału, jego prędkość rośnie. Oznacza to, że jego energia kinetyczna również wzrasta. Jest to związane z pracą wykonaną nad płynem podczas wtłaczania go do kanału. Pracę wykonuje również siła grawitacji, jeżeli płyn zmienia swoje położenie pionowe.

Gdy kanał się zwęża, pojawia się różnica ciśnień. Powoduje powstanie to siły wypadkowej, ponieważ iloczyn ciśnienia i pola powierzchni równy jest sile, i to właśnie ona wykonuje pracę. Przypomnijmy sobie twierdzenie o pracy i energii:

$$W_{\text{wyp}} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Wykonana praca zwiększa energię kinetyczną płynu. W wyniku tego ciśnienie spada w szybko poruszającym się płynie niezależnie od tego, czy jest on zawarty w rurze, czy w innym przewodzie.

Można wymienić wiele przypadków, gdy ciśnienie spada w szybko poruszającym się płynie. Na przykład zasłony prysznicowe mają ten nieprzyjemny zwyczaj, że wybrzuszają się w kierunku prysznica, gdy jest on włączony. Powodem jest to, że szybki strumień wody i powietrza wytwarza region niskiego ciśnienia wewnątrz osłoniętego zasłonami obszaru, podczas gdy ciśnienie po drugiej stronie nadal równe jest ciśnieniu atmosferycznemu. Ta różnica ciśnień powoduje powstanie siły wypadkowej, wpychającej zasłony do środka. Podobnie, gdy samochód wyprzedza ciężarówkę na autostradzie, kierowcy mają wrażenie, że oba samochody się przyciągają. Powód jest taki sam jak poprzednio: duża prędkość powietrza pomiędzy samochodem a ciężarówką powoduje powstanie obszaru niższego ciśnienia pomiędzy pojazdami, przez co oba są wpychane do środka przez ciśnienie na zewnątrz (Rysunek 14.29). Efekt ten zaobserwowano już w połowie XIX w., kiedy to stwierdzono, że wymijające się pociągi, poruszające się w przeciwnych kierunkach, przechylają się niebezpiecznie ku sobie.

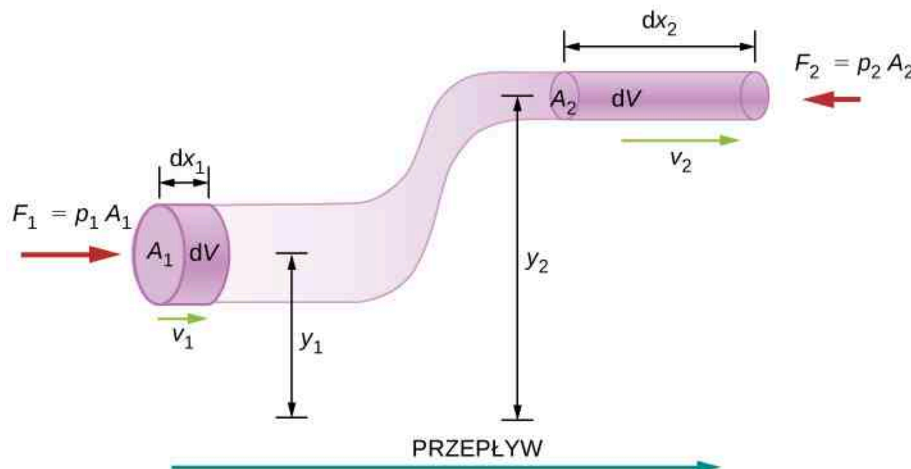


Rysunek 14.29 Widok z góry samochodu wyprzedzającego ciężarówkę na autostradzie. Powietrze pomiędzy pojazdami porusza się w węższym kanale, więc jego prędkość wzrasta (v_2 jest większe niż v_1), co sprawia, że ciśnienie pomiędzy nimi spada (p_i jest mniejsze niż p_o). Większe ciśnienie po zewnętrznych stronach samochodów pcha je ku sobie.

Zachowanie energii i równanie Bernoulliego

Zastosowanie zasady zachowania energii do przepływu laminarnego bez tarcia doprowadziło do odkrycia bardzo użytecznego związku między ciśnieniem a prędkością przepływu w płynach. Związek ten nazywamy **równaniem Bernoulliego** (ang. **Bernoulli's equation**), od nazwiska **Daniela Bernoulliego (1700–1782)**, który opublikował wyniki swoich badań nad ruchem płynów w książce *Hydrodynamica* (1738).

Rozważmy nieściśliwy płyn przepływający przez rurę o zmiennej średnicy i wysokości, jak pokazano na Rysunku 14.30. Indeksy 1 i 2 na rysunku oznaczają dwie lokalizacje w rurze i przedstawiają zależność między polami przekrojów A, prędkością przepływu v, wysokością nad ziemią y oraz ciśnieniem p w każdym punkcie. Zakładamy tutaj, że gęstość w obu punktach jest taka sama – z tego powodu oznaczamy ją jako ρ bez indeksów i, ponieważ płyn jest nieściśliwy, objętości zacienionych obszarów muszą być równe.



Rysunek 14.30 Rozważania geometryczne pomocne w wyprowadzeniu równania Bernoulliego.

Zakładamy dodatkowo, że w płynie nie działają żadne siły lepkości, dlatego energia każdej jego części będzie zachowana. Aby wyprowadzić równanie Bernoulliego, najpierw obliczymy pracę wykonaną nad płynem:

$$\mathrm{d}W = F_1 \mathrm{d}x_1 - F_2 \mathrm{d}x_2$$

$$\mathrm{d}W = p_1 A_1 \mathrm{d}x_1 - p_2 A_2 \mathrm{d}x_2 = p_1 \mathrm{d}V - p_2 \mathrm{d}V = (p_1 - p_2)\mathrm{d}V.$$

Wykonana praca związana jest z zachowawczą siłą grawitacji i zmianą energii kinetycznej płynu. Zmiana energii kinetycznej płynu wynosi:

$$\mathrm{d}K = \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}\rho \mathrm{d}V(v_2^2 - v_1^2).$$

Zmiana energii potencjalnej jest następująca:

$$\mathrm{d}U = mgy_2 - mgy_1 = \rho \mathrm{d}Vg(y_2 - y_1).$$

Równanie na energię można więc przekształcić do następującej postaci:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}W &= \mathrm{d}K + \mathrm{d}U \\ (p_1 - p_2)\mathrm{d}V &= \frac{1}{2}\rho \mathrm{d}V(v_2^2 - v_1^2) + \rho \mathrm{d}Vg(y_2 - y_1) \\ (p_1 - p_2)\mathrm{d}V &= \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(y_2 - y_1). \end{aligned}$$

Po przeniesieniu wyrazów otrzymujemy równanie Bernoulliego:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2.$$

Zależność ta oznacza, że energia mechaniczna dowolnego elementu płynu zmienia się w wyniku pracy wykonanej nad tym elementem przez płyn znajdujący się poza nim. Wykonanie tej pracy powodowane jest przez ciśnienie zmieniające się wzdłuż toru przepływu płynu. Ponieważ oba punkty wybraliśmy dowolnie, równanie Bernoulliego możemy zapisać w postaci bardziej ogólnej jako zasadę zachowania wzdłuż toru przepływu płynu.

Równanie Bernoulliego

Dla nieściśliwego płynu bez tarcia, suma ciśnień statycznego i dynamicznego zachowana jest nie tylko w czasie, ale również wzdłuż linii prądu:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{constant}. \tag{14.16}$$

Szczególną uwagę należy tu zwrócić na fakt, że w sytuacji dynamicznej ciśnienia na tej samej wysokości w różnych częściach płynu mogą być różne, jeżeli części te mają różną prędkość przepływu.

Analiza równania Bernoulliego

Zgodnie z równaniem Bernoulliego w małej objętości płynu wzdłuż toru jej ruchu poszczególne wielkości równania mogą się zmieniać, ale ich suma pozostanie stała. Równanie to jest tak naprawdę wygodną formą zapisu prawa zachowania energii w nieściśliwym płynie przy braku oporów ruchu.

W ogólnej postaci równanie Bernoulliego ma trzy elementy, a jego zastosowanie jest bardzo szerokie. Aby lepiej je zrozumieć, rozważmy kilka szczegółowych przypadków ilustrujących i upraszczających jego znaczenie.

Równanie Bernoulliego dla płynów statycznych

Na początek rozważmy bardzo prostą sytuację, w której płyn jest statyczny, czyli $v_1 = v_2 = 0$. Równanie Bernoulliego w tym przypadku przyjmuje postać:

$$p_1 + \rho g h_1 = p_2 + \rho g h_2.$$

Możemy jeszcze bardziej je uprościć, podstawiając $h_2 = 0$. (Możemy wybrać dowolną wysokość jako wysokość referencyjną i przypisać jej wartość zero. Często się tak robi w rozważaniach dotyczących siły grawitacji.) Wówczas otrzymujemy:

$$p_2 = p_1 + \rho g h_1.$$

Równanie to mówi nam, że w płynach statycznych ciśnienie rośnie z głębokością. Gdy poruszamy się od punktu 1 do punktu 2 w płynie, głębokość rośnie o h_1 i w związku z tym p_2 jest większe niż p_1 o $\rho g h_1$. W najprostszym przypadku p_1 wynosi zero na szczycie płynu i otrzymujemy znane już wyrażenie $p = \rho g h$. Przypomnijmy sobie,

że $p = \rho gh$ i $\Delta U_g = -mgh$. Równanie Bernoulliego potwierdza fakt, że zmiana ciśnienia spowodowana ciężarem płynu wynosi ρgh. Pomimo tego, że wprowadziliśmy równanie Bernoulliego w celu opisania płynów w ruchu, zawiera ono wiele zasad, którymi zajmowaliśmy się wcześniej, badając płyny statyczne.

Poziomy przepływ płynu

Załóżmy, że płyn porusza się, ale jego głębokość pozostaje stała $h_1 = h_2$. W tych warunkach równanie Bernoulliego przyjmuje postać:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$

Sytuacje, w których przepływ płynu odbywa się na stałym poziomie są tak częste, że równanie to stanowi przedmiot osobnych rozważań, jest to jednak nadal to samo równanie Bernoulliego. (Zwróćmy ponownie uwagę, że opisuje ono ruch małego elementu płynu wzdłuż toru jego ruchu.) Równanie Bernoulliego w tej postaci podkreśla fakt, że w poruszającym się płynie ciśnienie spada, gdy wzrasta prędkość: jeżeli v_2 jest większe niż v_1, to p_2 musi być mniejsze niż p_1, aby równanie było spełnione.

Przykład 14.6

Obliczanie ciśnienia

W Przykładzie 14.5, obliczyliśmy, że prędkość wody w wężu zwiększyła się z 1,96 m/s do 25,5 m/s podczas przechodzenia z węża do dyszy. Oblicz ciśnienie w wężu, wiedząc, że ciśnienie absolutne w dyszy wynosi $1{,}01 \cdot 10^5\ \mathrm{N/m^2}$ (równe ciśnieniu atmosferycznemu, jak być powinno) i zakładając przepływ bez oporów na stałej wysokości.

Strategia rozwiązania

Mamy tu do czynienia z przepływem na stałej głębokości, czyli możemy zastosować uproszczone równanie Bernoulliego. Użyjemy indeksu 1 dla wartości wewnątrz węża i 2 dla wartości w dyszy. Naszym zadaniem jest więc wyliczyć p_1.

Rozwiązanie

Rozwiązanie prawa Bernoulliego dla przepływu poziomego ze względu na p_1 prowadzi do:

$$p_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2).$$

Podstawiając wartości, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} p_1 &= 1{,}01 \cdot 10^5\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} + \frac{1}{2}10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\left[\left(25{,}5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 - \left(1{,}96\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2\right] \\ &= 4{,}24 \cdot 10^5\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}. \end{aligned}$$

Znaczenie

Tak jak się spodziewaliśmy, ciśnienie absolutne wewnątrz węża jest większe niż przy dyszy, ponieważ v jest większe niż w dyszy. Ciśnienie p_2 w dyszy musi być równe atmosferycznemu, ponieważ woda wytryskuje w kierunku atmosfery bez zmiany innych wartości.

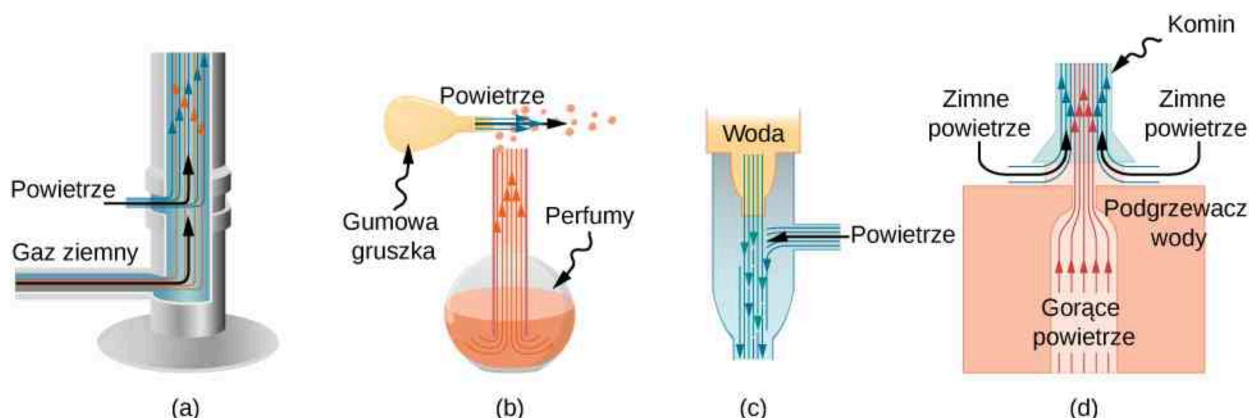
Zastosowania prawa Bernoulliego dla przepływu poziomego

W wielu urządzeniach oraz sytuacjach codziennego życia odnajdujemy przypadki, w których płyn przepływa na stałej wysokości i które mogą być analizowane przy pomocy uproszczonego równania.

Porywanie płynu

Możliwość wykorzystania spadku ciśnienia w szybko poruszających się płynach do wprawiania materii w ruch zauważono już dawno temu. Większe ciśnienie na zewnątrz szybko poruszającego się płynu wpycha inne płyny w szybki strumień. Proces ten nazywany jest czasem **porywaniem** (ang. **entrainment**) (w polskiej literaturze mówi się o „zasysaniu” lub „ssącym działaniu strugi”, jednak pojęcie „porywanie”, również używane, wydaje się tu zręczniejsze -

przyp. tłum.). Urządzenia wykorzystujące porywanie, takie jak pompy do unoszenia wody na niskie wysokości, stosowane na przykład do osuszania bagien i innych nisko położonych obszarów, są w użytku od starożytności. Inne urządzenia wykorzystujące to zjawisko przedstawiono na Rysunku 14.31.



Rysunek 14.31 Urządzenia stosujące porywanie wykorzystują zwiększoną prędkość płynu do wytworzenia niższego ciśnienia, które porywa jeden rodzaj płynu do wnętrza drugiego. (a) Palnik Bunsena używa regulowanej dyszy, która porywa powietrze, aby regulować spalanie. (b) Po ściśnięciu gruszki atomizera, podmuch powietrza porywa kropelki perfum. (c) Powszechnie stosowany aspirator używa szybkiego strumienia wody do wytworzenia obszaru niskiego ciśnienia. Aspiratory mogą być używane jako pompy ssące w zastosowaniach dentystycznych i chirurgicznych lub do osuszania zalanej piwnicy czy wytworzenia niższego ciśnienia w zbiorniku. (d) Komin podgrzewacza wody jest tak zaprojektowany, aby porywał powietrze do wnętrza rury wychodzącej na zewnątrz pomieszczenia.

Pomiar prędkości

Rysunek 14.32 pokazuje dwa urządzenia, wykorzystujące prawo Bernoulliego do pomiaru prędkości płynu. Manometr w części (a) jest połączony z dwiema rurkami wystarczająco małymi, aby nie zaburzyć znacząco przepływu. Rurka z otworem skierowanym ku nadlatującemu płynowi wytwarza przed sobą martwy punkt, w którym prędkość wynosi zero ($v_1 = 0$), podczas gdy prędkość płynu w pobliżu drugiej rurki, która ma otwór z boku, wynosi v_2. Oznacza to, że równanie Bernoulliego:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

możemy zapisać jako:

$$p_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$

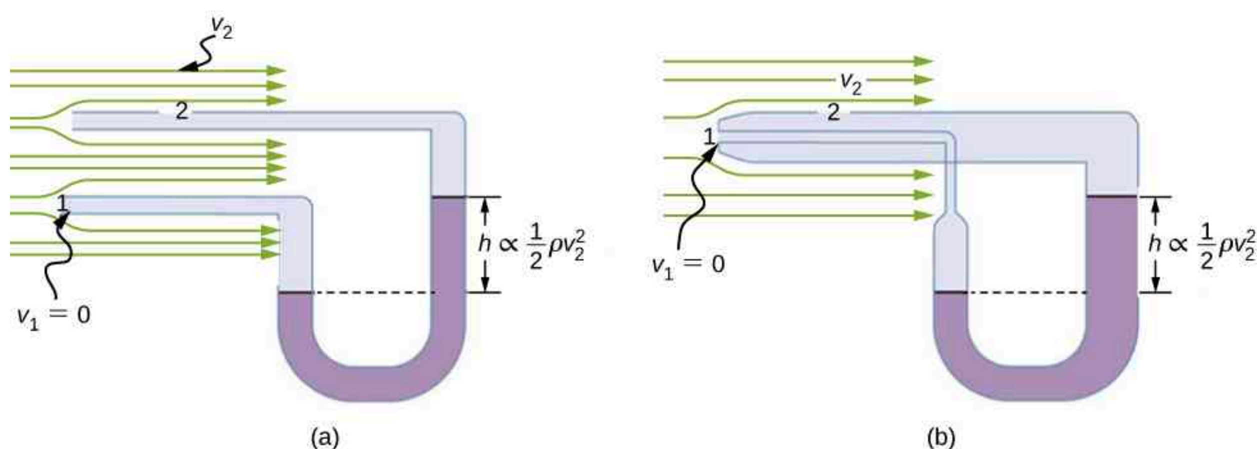
Czyli ciśnienie p_2 nad drugim otworem jest zmniejszone o $\rho v^2 / 2$, więc płyn w manometrze podnosi się o h po stronie połączonej z drugim otworem i dodatkowo otrzymujemy:

$$h \propto \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$

(Przypomnijmy, że symbol $\propto$ oznacza „proporcjonalny do”.) Rozwiązując ze względu na v_2, zauważamy, że:

$$v_2 \propto \sqrt{h}.$$

Część (b) prezentuje wersję tego urządzenia powszechnie używaną do pomiaru prędkości płynów. Jest ono często wykorzystywane jako czujnik prędkości powietrza w samolotach.



Rysunek 14.32 Pomiar prędkości oparty na równaniu Bernoulliego. (a) Do dwóch rurek, które są na tyle blisko i są na tyle małe, że nie zaburzają przepływu płynu, podłączono manometr. Rurka 1 ma otwór w kierunku poruszającego się płynu, przez co powstaje przed nim martwy punkt, w którym prędkość płynu wynosi zero. Rurka 2 ma otwór z boku, więc płyn ma tam prędkość v, co powoduje spadek ciśnienia w tym miejscu. Różnica ciśnień na manometrze wynosi $\rho v_2^2/2$, więc h jest proporcjonalne do $\rho v_2^2/2$. (b) Urządzenie tego typu nazywa się **rurką Prandtla** (ang. **Prandtl tube**), określa się je również mianem rurki Pitota (choć w rzeczywistości rurka Prandtla jest udoskonaleniem rurki Pitota - przyp. tłum.).

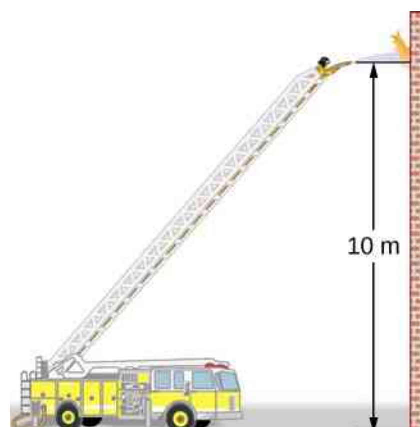
Wąż strażacki

Wszystkie przedstawione dotychczas zastosowania równania Bernoulliego wykorzystywały założenia upraszczające, takie jak stała wysokość czy stałe ciśnienie. Kolejny przykład stanowi bardziej ogólne zastosowanie równania Bernoulliego, w którym zmieniają się zarówno ciśnienie, jak i prędkość oraz wysokość.

Przykład 14.7

Obliczanie ciśnienia: dysza węża strażackiego

Węże strażackie używane w dużych pożarach mają wewnętrzną średnicę 6,40 cm (Rysunek 14.33). Załóżmy, że strumień objętościowy w takim wężu ma wartośc 40,0 l/s, pod ciśnieniem manometrycznym równym $1{,}62 \cdot 10^6 \ \mathrm{N/m^2}$. Wąż sięga do wysokości 10,0 m wzdłuż drabiny i kończy się dyszą o wewnętrznej średnicy 3,00 cm. Jakie jest ciśnienie w dyszy?



Rysunek 14.33 Ciśnienie w dyszy tego węża strażackiego jest mniejsze niż na poziomie Ziemi z dwóch powodów: po pierwsze woda musi zostać wyniesiona na wysokość dyszy, po drugie, przy dyszy zwiększa się jej prędkość. Pomimo tego spadku ciśnienia woda może wywierać znaczną siłę na przedmioty, w które uderza, dzięki swojej energii kinetycznej. Ciśnienie strumienia wody zrównuje się z atmosferycznym w momencie, gdy opuszcza ona dyszę.

Strategia rozwiązania

Ponieważ wysokość nie jest stała, musimy rozwiązać pełne równanie Bernoulliego ze względu na ciśnienie.

Rozwiązanie

Pełne równanie ma następującą postać:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

gdzie indeks 1 odnosi się do warunków na poziomie ziemi, a indeks 2 do warunków przy dyszy. Na początku musimy znaleźć prędkości v_1 i v_2. Ponieważ $Q = A_1 v_1$, uzyskujemy:

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{40{,}0 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}}{\pi(3{,}20 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m})^2} = 12{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Podobnie obliczamy:

$$v_2 = 56{,}6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Jest to dość duża prędkość, dzięki której woda może dosięgnąć ognia. Podstawimy teraz zero za h_1 i rozwiążemy równanie Bernoulliego ze względu na p_2:

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) - \rho g h_2.$$

Podstawiamy znane wartości i dochodzimy do:

$$\begin{aligned} p_2 &= 1{,}62 \cdot 10^6\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} + \frac{1}{2}10^3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\left[\left(12{,}4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 - \left(56{,}6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2\right] \\ &- 10^3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 9{,}80\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 10{,}0\ \mathrm{m} \\ &= 0\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}. \end{aligned}$$

Znaczenie

Uzyskana wartość jest ciśnieniem manometrycznym, ponieważ wyjściowe ciśnienie również było podane względem ciśnienia atmosferycznego. W związku z tym ciśnienie za dyszą równa się ciśnieniu atmosferycznemu, gdyż woda wypływa do atmosfery bez zmiany innych warunków, w których się znajduje.

14.7 | Lepkość i turbulencje

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

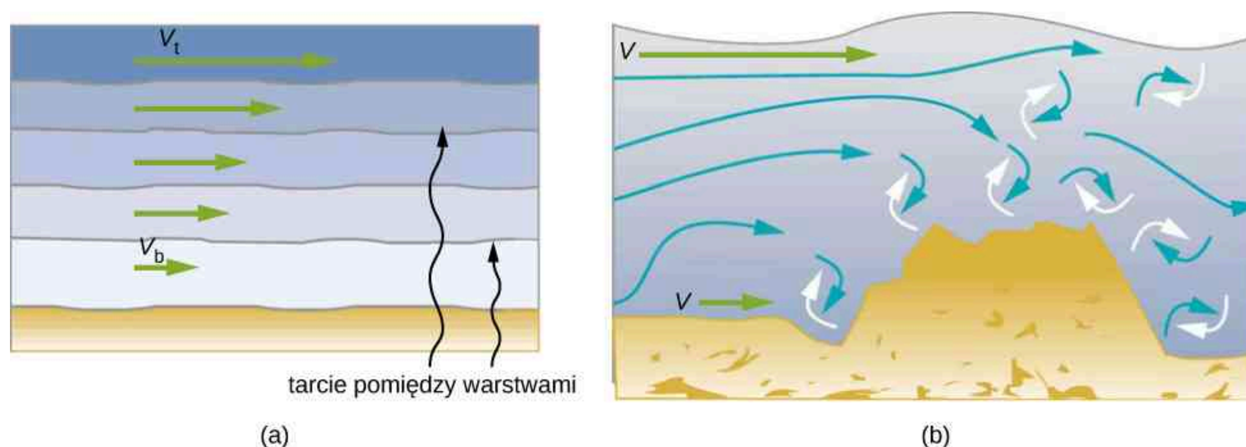
- opisywać, czym jest lepkość;
- obliczać strumień i opór za pomocą prawa Poiseuille'a;
- rozumieć mechanizm spadku ciśnienia w związku z oporem;
- obliczać liczbę Reynoldsa dla przedmiotu poruszającego się w płynie;
- wykorzystywać liczbę Reynoldsa dla systemu do stwierdzenia, czy przepływ jest laminarny, czy turbulentny;
- określać, w jakich warunkach przedmiot osiąga prędkość graniczną.

W rozdziale Zastosowania praw Newtona, gdzie wprowadziliśmy pojęcie tarcia, przekonaliśmy się, że przedmiot ślizgający się po podłodze z pewną prędkością początkową, na który nie działa żadna siła wypadkowa, zatrzyma się po pewnym czasie z powodu działania siły tarcia. Siła tarcia zależy od rodzaju materiałów, które są w kontakcie, i jest proporcjonalna do siły normalnej. W tym samym rozdziale omówiliśmy również opór powietrza i pokazaliśmy, że jest on proporcjonalny do prędkości przy małych prędkościach, a przy dużych - do kwadratu prędkości. W tym rozdziale dowiemy się więcej o siłach tarcia działających w płynach podczas ich ruchu. Na przykład na płyn przepływający przez rurę działa siła tarcia między nim a ścianami rury. Tarcie pojawia się również pomiędzy różnymi warstwami płynu. Te siły oporu zmieniają sposób, w jaki płyn porusza się przez rurę.

Lepkość i przepływ laminarny

Kiedy nalewasz sok do szklanki, płyn porusza się swobodnie i szybko. Ale kiedy wlewasz miód na kromkę chleba, przepływa on powoli i przykleja się do łyżki czy słoika. Różnicę powoduje tarcie, zarówno wewnątrz płynu, jak i pomiędzy płynem a jego otoczeniem. Tę cechę płynów nazywamy lepkością. Sok ma małą lepkość, a miód - dużą.

Precyzyjna definicja lepkości wykorzystuje pojęcie laminarności, czyli przepływu nieturbulentnego. Rysunek 14.34 pokazuje schematycznie, czym różni się przepływ laminarny od turbulentnego. Podczas przepływu laminarnego warstwy płynu poruszają się bez mieszania, a w przypadku przepływu turbulentnego warstwy się mieszają i mogą pojawić się obszary, w których wystąpią znaczne prędkości w kierunku innym niż wypadkowy przepływ.



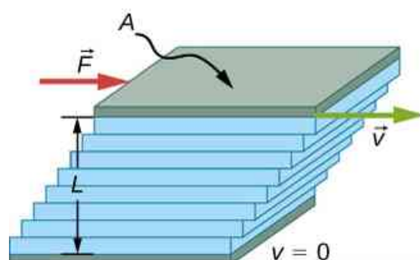
Rysunek 14.34 (a) W przypadku przepływu laminarnego nie dochodzi do mieszania się warstw. Zwróćmy uwagę, że lepkość sprawia, iż warstwy płynu pociągają się nawzajem, podobnie jak dzieje się to z warstwami stałymi. Prędkość w pobliżu dolnej części przepływu (v_b) jest mniejsza niż w pobliżu powierzchni (v_t), ponieważ w tym przypadku powierzchnia pojemnika zawierającego płyn jest na spodzie. (b) Przeszkoda w pojemniku powoduje przepływ turbulentny, który miesza płyn. W takiej sytuacji występuje więcej oddziaływań, płyn zostaje podgrzany i pojawiają się większe opory niż w przypadku przepływu laminarnego.

Turbulencja (ang. **turbulence**) to taki przepływ, w którym warstwy płynu się mieszają, tworząc zawirowania i zwroty w przepływie. Są dwa główne powody turbulencji: pierwszym jest przeszkoda o ostrych końcach, taka jak kran, która powoduje turbulencje przez wprowadzenie do przepływu prędkości do niego prostopadłych; drugim powodem jest duża prędkość. Przy dużej prędkości płynu oddziaływanie między sąsiadującymi warstwami oraz ich otoczeniem może powodować wiry i zawracanie płynu. Na Rysunku 14.35 prędkość przyspieszającego dymu dochodzi do momentu, w którym zaczynają się tworzyć wiry z powodu tarcia między dymem a otaczającym go powietrzem.



Rysunek 14.35 Dym unosi się równomiernie przez pewien czas, a później zaczynają w nim powstawać wiry. Równomierna część przepływu jest laminarna, natomiast w części z wirami obserwujemy turbulencje. Dym unosi się szybciej w obszarze przepływu laminarnego niż w obszarze przepływu turbulentnego, co oznacza, że turbulencja powoduje większe opory ruchu. (Źródło: „Creativity103”/Flickr)

Rysunek 14.36 przedstawia pomiar lepkości w płynie. Płyn, którego lepkość chcemy zmierzyć, umieszczamy pomiędzy dwiema równoległymi płytkami. Dolna jest umocowana do podłoża, podczas gdy górna porusza się w prawo, pociągając ze sobą płyn. Warstwa płynu w kontakcie z którąś z tych płytek nie porusza się względem niej, więc górna warstwa ma prędkość v, a dolna pozostaje w spoczynku. Każda kolejna warstwa od góry wywiera siłę na warstwę poniżej, próbując pociągnąć ją ze sobą, co wywołuje powstawanie ciągłej zmiany prędkości od v aż do 0, jak pokazano na rysunku. Podczas pomiaru należy zwracać uwagę, aby przepływ był laminarny, czyli aby warstwy się nie mieszały. Ruch zaprezentowany na rysunku przypomina ciągły ruch ścinający. Płyny mają zerową wytrzymałość na ścinanie, więc szybkość, z jaką odpowiadają na siłę ścinającą, jest związana z tymi samymi czynnikami geometrycznymi A oraz L, jak deformacja ścinająca w ciałach stałych. Na diagramie płyn jest początkowo w spoczynku. Warstwa płynu w kontakcie z poruszającą się płytką doznaje przyspieszenia i zaczyna się poruszać z powodu tarcia między nimi. Następna warstwa jest w kontakcie z poruszającą się warstwą. Ponieważ pojawia się tarcie pomiędzy tymi dwiema warstwami, ta warstwa również doznaje przyspieszenia. Sytuacja ta powtarza się aż do osiągnięcia dna płynu.



Rysunek 14.36 Pomiar lepkości dla przepływu laminarnego między dwiema płytkami o polu powierzchni A. Dolna płytka jest przymocowana do podłoża. Gdy górna płytka zostaje wprawiona w ruch, pociąga za sobą płyn.

Aby utrzymywać górną płytkę z Rysunku 14.36 w ruchu jednostajnym z prędkością v, potrzebna jest siła F. Eksperymenty wykazały, że siła ta zależy od czterech czynników. Pierwszym z nich jest wymóg prostej proporcjonalności F do v (jest tak do czasu aż prędkość nie wzrośnie do wartości, po której zaczynają występować turbulencje - w tym momencie zaczyna być potrzebna znacznie większa siła, a jej zależność od v staje się znacznie bardziej skomplikowana). Po drugie, F musi być proporcjonalna do pola powierzchni płytki A. Ten związek wydaje się naturalny, ponieważ A jest wprost proporcjonalne do ilości przepływającego płynu. Po trzecie, F jest odwrotnie proporcjonalna do odległości między płytkami L. Ten związek również wydaje się naturalny: L działa jak ramię dźwigni – im dłuższe ramię, tym mniejsza siła jest potrzebna. Po czwarte, F jest wprost proporcjonalna do **współczynnika lepkości** (ang. **coefficient of viscosity**), η. Im większa lepkość, tym większa siła jest potrzebna. Powyższe związki mogą być podsumowane przy pomocy następującego równania:

$$F = \eta \frac{vA}{L}.$$

Równanie to jest definicją współczynnika lepkości płynu η. Po jego rozwiązaniu ze względu na η otrzymujemy:

$$\eta = \frac{FL}{vA}, \tag{14.17}$$

czyli definicję współczynnika lepkości płynu uzyskaną przez rozważenie procedury jego pomiaru.

Jednostką SI lepkości jest $\text{N} \cdot \text{m} / [(\text{m/s})\text{m}^2] = (\text{N/m}^2)\text{s}$ lub $\text{Pa} \cdot \text{s}$. Tabela 14.4 podaje współczynniki lepkości dla różnych płynów. Wartość lepkości różni się między płynami o wiele rzędów wielkości. Zgodnie z oczekiwaniami lepkości gazów są znacznie niższe niż w przypadku cieczy i często zależą od temperatury.

Płyn	Temperatura (°C)	Lepkość η (Pa · s)
Powietrze	0	0,0171
	20	0,0181
	40	0,0190
	100	0,0218
Amoniak	20	0,00974
Dwutlenek węgla	20	0,0147
Hel	20	0,0196
Wodór	0	0.0090
Rtęć	20	0,0450
Tlen	20	0,0203
Para wodna	100	0,0130
Woda ciekła	0	1,792
	20	1,002
	37	0,6947
	40	0,653
	100	0,282
Krew	20	3,015
	37	2,084
Plazma krwi	20	1,810
	37	1,257
Alkohol etylowy	20	1,20
Metanol	20	0,584
Olej (ciężki, maszynowy)	20	660
Olej (silnikowy, SAE 10)	30	200
Oliwa z oliwek	20	138
Gliceryna	20	1500
Miód	20	2000–10000

Tabela 14.4 Współczynniki lepkości różnych płynów

Płyn	Temperatura (°C)	Lepkość η (Pa · s)
Syrop klonowy	20	2000–3000
Mleko	20	3,0
Olej kukurydziany	20	65

Tabela 14.4 Współczynniki lepkości różnych płynów

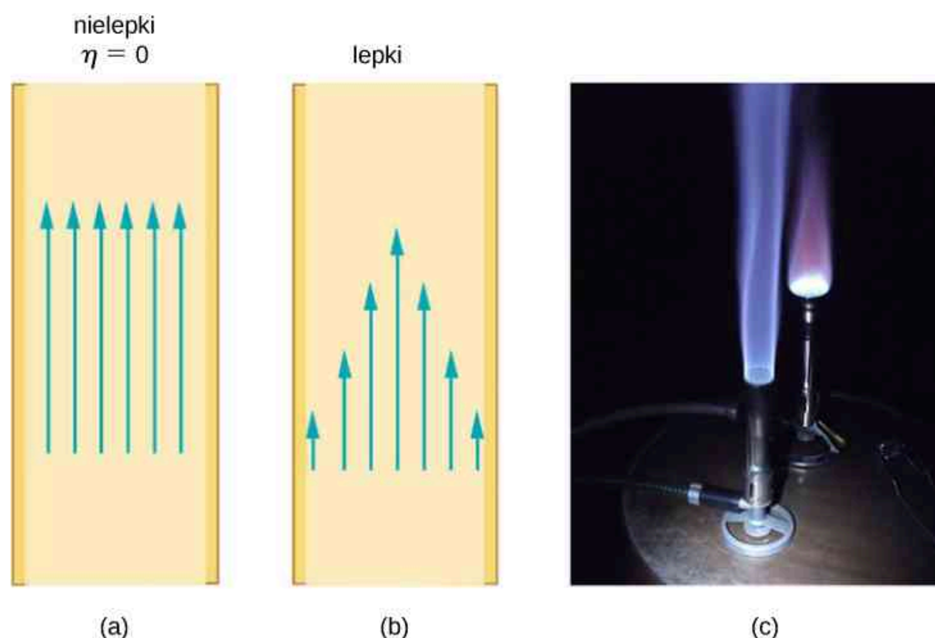
Przepływ laminarny płynu w rurze. Prawo Poiseuille'a

Co jest przyczyną przepływu? Odpowiedź na to pytanie nie zaskakuje – przepływ powoduje różnica ciśnień. Tak naprawdę istnieje bardzo prosta relacja między przepływem horyzontalnym a ciśnieniem. Strumień Q ma kierunek od wyższego ciśnienia do niższego. Im większa różnica ciśnień pomiędzy dwoma punktami, tym większy strumień. Relację tę możemy wyrazić następująco:

$$Q = \frac{p_2 - p_1}{R},$$

gdzie p_1 i p_2 są ciśnieniami w dwóch różnych miejscach, takich jak końce rury, a R jest oporem stawianym przepływowi. Opór R zawiera wszystkie elementy, które wpływają na przepływ, za wyjątkiem ciśnienia. Na przykład R jest większe w rurze długiej niż w krótkiej. Im większa lepkość płynu, tym większa wartość R. Turbulencje znacznie podwyższają wartość R, a zwiększenie średnicy rury ją zmniejsza.

Jeżeli lepkość wynosi zero, to tarcie wynosi zero i opory stawiane przepływowi są również zerowe. Porównując przepływ płynu nielepkiego z przepływem płynu lepkiego, widzimy, że (Rysunek 14.37) płyn lepki ma największą prędkość w centrum przepływu, co wynika z tarcia o ściany rury. Efekt działania lepkości możemy zaobserwować w palniku Bunsena (część (c) rysunku), pomimo niewielkiej gęstości gazu ziemnego.



Rysunek 14.37 (a) Jeżeli płyn przepływający w rurze ma pomijalną lepkość, wówczas prędkość jest taka sama w całej rurze. (b) Gdy lepki płyn przepływa przez rurę, to jego prędkość przy ścianach wynosi zero i rośnie stopniowo w miarę zbliżania się do środka rury, gdzie osiąga maksymalną wartość. (c) Kształt płomienia w palniku Bunsena wynika z profilu prędkości w rurze. (Źródło: modyfikacja zdjęcia Jasona Woodheada)

Opór R stawiany laminarnemu przepływowi nieściśliwego płynu o lepkości η przez poziomą rurę o jednorodnym promieniu r i długości l, opisuje równanie:

$$R = \frac{8\eta l}{\pi r^4}. \tag{14.18}$$

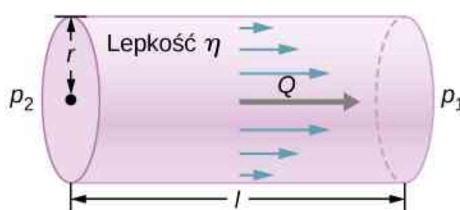
Równanie to nazywa się **prawem Poiseuille’a** (ang. **Poiseuille’s law**) na cześć francuskiego uczonego **J. L. Poiseuille'a (1797–1869)**, który je wyprowadził, próbując wyjaśnić przepływ krwi w ciele.

Przeanalizujmy równanie Poiseuille’a na R i przekonajmy się, czy jest ono intuicyjne. Widzimy, że opór jest wprost proporcjonalny zarówno do lepkości płynu η, jak i do długości rury l. Oba te elementy bezpośrednio wpływają na tarcie doświadczane przez płyn – im większa jest wartość któregoś z nich, tym większy opór i mniejszy strumień. Promień r rury wpływa na opór, co również jest intuicyjne, ponieważ im większy promień, tym większy strumień (przy zachowaniu pozostałych parametrów). Zaskakuje jednak fakt, że r jest podniesione do potęgi czwartej. Wykładnik ten oznacza, że zmiana promienia rury ma ogromny wpływ na opór. Na przykład dwukrotne zwiększenie promienia zmniejsza opór $2^4 = 16$-krotnie.

Jeśli połączymy $Q = (p_2 - p_1)/R$ z $R = 8\eta l / \left(\pi r^4\right)$ uzyskamy następujące równanie na strumień:

$$Q = \frac{(p_2 - p_1)\pi r^4}{8\eta l}. \tag{14.19}$$

To równanie opisuje przepływ laminarny w rurze. Nazywane jest często prawem Poiseuille’a dla przepływu laminarnego lub po prostu prawem Poiseuille’a (Rysunek 14.38).



Rysunek 14.38 Prawo Poiseuille'a stosuje się do laminarnego nieściśliwego płynu o lepkości η przez rurę o długości l i promieniu r. Płyn porusza się od większego ciśnienia do mniejszego. Strumień Q jest wprost proporcjonalny do różnicy ciśnień $p_2 - p_1$, a odwrotnie proporcjonalny do długości rury l i lepkości płynu η. Strumień wzrasta z promieniem o czynnik r^4.

Przykład 14.8

Wykorzystanie strumienia: układy klimatyzacji

Układ klimatyzacji zaprojektowano tak, aby dostarczał powietrze pod ciśnieniem manometrycznym 0,054 Pa w temperaturze $20\,^{\circ}\mathrm{C}$. Powietrze jest przesyłane izolowanym przewodem o przekroju kołowym, którego średnica wynosi 18,00 cm. Ma on długość 20 m i wylot w pomieszczeniu, gdzie panuje ciśnienie atmosferyczne 101,30 kPa. Ma ono długość 12 m, szerokość 6 m i wysokość 3 m. (a) Jaki jest strumień objętościowy przepływający przez rurę, zakładając przepływ laminarny? (b) Oszacuj, ile czasu trzeba, aby całkowicie wymienić powietrze w pokoju. (c) Robotnicy decydują się oszczędzić trochę pieniędzy przez użycie przewodu o średnicy 9,00 cm. Jaki będzie strumień w tym przypadku?

Strategia rozwiązania

Jeśli przyjmiemy przepływ laminarny, prawo Poiseuille’a mówi, że:

$$Q = \frac{(p_2 - p_1)\pi r^4}{8\eta l} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$$

Musimy porównać promienie przewodu przed redukcją i po redukcji strumienia. Zauważmy, że znamy średnicę przewodu, więc, aby obliczyć promień, musimy podzielić ją przez 2.

Rozwiązanie

a. Jeśli założymy stałą różnicę ciśnień i użyjemy lepkości $\eta = 0{,}0181\ \text{mPa} \cdot \text{s}$, otrzymujemy:

$$Q = \frac{0{,}052\ \text{Pa} \cdot 3{,}14 \cdot (0{,}09\ \text{m})^4}{8 \cdot 0{,}0181 \cdot 10^{-3}\ \text{Pa} \cdot \text{s} \cdot 20\ \text{m}} = 3{,}84 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{m}^3}{\text{s}}.$$

b. Załóżmy stały przepływ $Q = \frac{dV}{dt} \approx \frac{\Delta V}{\Delta t}$

$$\Delta t = \frac{\Delta V}{Q} = \frac{12\ \text{m} \cdot 6\ \text{m} \cdot 3\ \text{m}}{3{,}84 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s}} = 5{,}63 \cdot 10^4 = 15{,}63\ \text{h}.$$

c. Stosujemy założenia przepływu laminarnego, dzięki czemu z prawa Poiseuille'a uzyskujemy:

$$Q = \frac{0{,}054\ \text{Pa} \cdot 3{,}14 \cdot (0{,}045\ \text{m})^4}{8 \cdot 0{,}0181 \cdot 10^{-3}\ \text{Pa} \cdot \text{s} \cdot 20\ \text{m}} = 2{,}4 \cdot 10^{-4}\ \frac{\text{m}^3}{\text{s}}.$$

Widzimy więc, że redukcja promienia przewodu o połowę, zmniejszy strumień do 6,25% początkowej wartości.

Znaczenie

Ogólnie, w przypadku przepływu laminarnego, zmniejszenie promienia ma bardziej odczuwalne konsekwencje, niż zwiększenie jego długości. Jeżeli zostanie ona zwiększona przy zachowaniu pozostałych warunków, to strumień maleje o:

$$\begin{aligned} \frac{Q_A}{Q_B} &= \frac{\frac{(p_2 - p_1)\pi r_A^4}{8\eta l_A}}{\frac{(p_2 - p_1)\pi r_B^4}{8\eta l_B}} = \frac{l_B}{l_A} \\ Q_B &= \frac{l_A}{l_B} Q_A. \end{aligned}$$

Dwukrotne zwiększenie długości zmniejsza strumień do połowy początkowej wartości.

Jeżeli promień zostanie zmniejszony, a wartości pozostałych zmiennych pozostaną takie same, to strumień zmaleje o znacznie większy czynnik.

$$\begin{aligned} \frac{Q_A}{Q_B} &= \frac{\frac{(p_2 - p_1)\pi r_A^4}{8\eta l_A}}{\frac{(p_2 - p_1)\pi r_B^4}{8\eta l_B}} = \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^4 \\ Q_B &= \left(\frac{r_B}{r_A}\right)^4 Q_A \end{aligned}$$

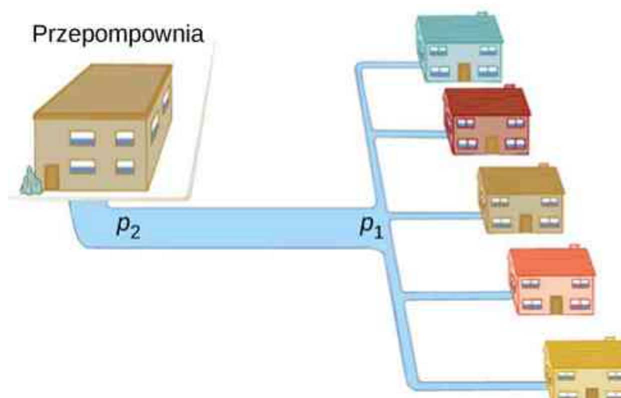
Zmniejszenie promienia o połowę zmniejsza strumień do jednej szesnastej początkowego strumienia.

Przepływ i opory jako przyczyny spadków ciśnienia

Ciśnienie wody w domach i mieszkaniach bywa mniejsze podczas zwiększonego jej zużycia, na przykład w gorące, słoneczne dni. Spadek ciśnienia następuje w głównej magistrali wodociągowej, przed dotarciem wody do pojedynczych mieszkań. Rozważmy sytuację [pokazaną na Rysunku 14.39, czyli przepływ w głównej magistrali. Przekształcając równania na strumień, możemy zrozumieć, dlaczego ciśnienie wody dopływającej do mieszkania p_1 spada podczas zwiększonego zapotrzebowania:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{p_2 - p_1}{R} \\ p_2 - p_1 &= RQ. \end{aligned}$$

W tym przypadku p_2 to ciśnienie wody przy przepompowni, a R to opór w głównej magistrali wodociągowej. Podczas zwiększonego zużycia strumień Q ma dużą wartość. Oznacza to, że różnica $p_2 - p_1$ również musi być duża, dlatego p_1 musi zmaleć. Przepływ i jego opory powodują spadek ciśnienia z p_2 do p_1. Równanie $p_2 - p_1 = RQ$ jest spełnione zarówno dla przepływu laminarnego, jak i dla turbulentnego.



Rysunek 14.39 Podczas zwiększonego zużycia w głównej magistrali występuje znaczący spadek ciśnienia i ciśnienie p_1 wody dostarczanej użytkownikowi jest znacznie mniejsze niż ciśnienie p_2 wytworzone przy stacji wodociągowej. Jeżeli przepływ jest mały, spadek ciśnienia jest pomijalny i $p_2 \approx p_1$.

Aby przeanalizować spadek ciśnienia pojawiający się w bardziej złożonych systemach, w których promień nie jest wszędzie taki sam, możemy również użyć $p_2 - p_1 = RQ$. Opór jest znacznie większy w miejscach zwężenia, takich jak zmiany w obrębie tętnicy wieńcowej. Dla konkretnego strumienia Q, spadek ciśnienia jest największy w tym miejscu, w którym przewód jest najwęższy. Właśnie w ten sposób kurek kontroluje przepływ wody. Dodatkowo R jest znacznie zwiększony przez turbulencje, więc przewężenia je wywołujące znacznie zmniejszają ciśnienie poniżej. Płytka miażdżycowa w tętnicy zmniejsza ciśnienie, a co za tym idzie także przepływ, zarówno przez zwiększenie oporu, jak i wytwarzanie turbulencji.

Pomiar turbulencji

Parametr zwany **liczbą Reynoldsa** (ang. **Reynolds number**) Re może powiedzieć nam, czy przepływ ma charakter laminarny, czy turbulentny. Dla przepływu w rurze o stałej średnicy liczbę Reynoldsa definiujemy jako:

$$Re = \frac{2\rho v r}{\eta} \quad \text{(przepływ w rurze)} \tag{14.20}$$

gdzie ρ jest gęstością płynu, v jego prędkością, η jego lepkością, a r promieniem rury. Liczba Reynoldsa to wielkość bezwymiarowa. Doświadczenia pokazały, że Re jest związane z powstawaniem turbulencji. Dla Re poniżej około 2000 przepływ jest laminarny. Dla Re powyżej 3000 przepływ jest turbulentny.

Dla wartości Re pomiędzy około 2000 a 3000 przepływ jest niestabilny, czyli bywa laminarny, ale małe przeszkody czy zaburzenia na powierzchni płynu mogą sprawić, że stanie się on turbulentny. Przepływ może również oscylować losowo pomiędzy przepływem laminarnym a turbulentnym. Przepływ płynu o liczbie Reynoldsa pomiędzy 2000 a 3000 stanowi dobry przykład zachowania chaotycznego. System jest chaotyczny, jeżeli jego zachowanie jest tak czułe na zmianę pewnego czynnika, że niezwykle trudno je przewidzieć. Przewidzenie, czy przepływ płynu o liczbie Reynoldsa w tym zakresie jest laminarny, czy turbulentny okazuje się trudne, choć nie niemożliwe, z powodu wyjątkowo dużego wpływu czynników, takich jak nierówności powierzchni czy przeszkody, na rodzaj przepływu. Niewielka zmiana w jednym czynniku ma nieproporcjonalnie duży (czyli nieliniowy) wpływ na własności przepływu.

Przykład 14.9

Zastosowanie strumienia: przepływ turbulentny czy przepływ laminarny

W Przykładzie 14.8 obliczyliśmy, że strumień objętościowy systemu klimatyzacyjnego wynosi $Q = 3{,}84 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3/s}$ Te obliczenia zakładały przepływ laminarny. (a) Czy założenie to było prawidłowe? (b) Przy jakiej wartości prędkości przepływ stałby się turbulentny?

Strategia rozwiązania

Aby określić, czy przepływ powietrza przez układ klimatyzacyjny jest laminarny, musimy po pierwsze obliczyć jego prędkość. W tym celu możemy się posłużyć:

$$Q = Av = \pi r^2 v.$$

Następnie możemy obliczyć liczbę Reynoldsa, używając poniższego równania, i sprawdzić, czy zawiera się ona w zakresie przepływu laminarnego:

$$Re = \frac{2\rho v r}{\eta}.$$

Rozwiązanie

a. Podstawienie podanych wartości prowadzi do:

$$v = \frac{Q}{\pi r^2} = \frac{3{,}84 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3/s}}{3{,}14 \cdot (0{,}09\ \mathrm{m})^2} = 0{,}15\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$Re = \frac{2\rho v r}{\eta} = \frac{2 \cdot 1{,}23\ \mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}15\ \mathrm{m/s} \cdot 0{,}09\ \mathrm{m}}{0{,}0181 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Pa \cdot s}} = 1835.$$

Ponieważ liczba Reynoldsa wynosi $1835 < 2000$, przepływ jest laminarny, a nie turbulentny. Założenie lainarności przepływu okazało się prawidłowe.

b. Aby obliczyć maksymalną prędkość powietrza, przy której przepływ będzie laminarny, obliczmy liczbę Reynoldsa.

$$Re = \frac{2\rho v r}{\eta} \leq 2000$$

$$v = \frac{2000 \cdot 0{,}0181 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Pa \cdot s}}{2 \cdot 1{,}23\ \mathrm{Pa \cdot s} \cdot 0{,}09\ \mathrm{m}} = 0{,}16\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Znaczenie

Podczas przekazywania płynu z jednego miejsca w drugie korzystnie jest ograniczyć turbulencje. Pociąga ona za sobą straty energii, gdyż jej część, która w zamyśle miała służyć transportowi płynu, ulega rozproszeniu w miejscach, w których tworzą się wiry. W tym przypadku układ klimatyzacyjny będzie mniej wydajny, gdy prędkość powietrza przekroczy 0,16 m/s, ponieważ przy niej zaczną się pojawiać turbulencje.

PODSUMOWANIE ROZDZIAŁU 14

KLUCZOWE POJĘCIA

ciśnienie (ang. pressure) siła na jednostkę powierzchni wywierana prostopadle do powierzchni, na którą działa

ciśnienie absolutne (ang. absolute pressure) suma ciśnienia manometrycznego i atmosferycznego

ciśnienie manometryczne (ang. gauge pressure) ciśnienie względem ciśnienia atmosferycznego

gęstość (ang. density) masa na jednostkę objętości substancji lub obiektu

gęstość względna (ang. specific gravity) iloraz gęstości obiektu do gęstości płynu (zwykle wody)

lepkość (ang. viscosity) miara wewnętrznego tarcia w płynie

liczba Reynoldsa (ang. Reynolds number) bezwymiarowy parametr, który może pomóc określić, czy przepływ jest laminarny, czy turbulentny

podnośnik hydrauliczny (ang. hydraulic jack) maszyna prosta używająca cylindrów o różnych średnicach do przekazywania sił

poziomy przepływ płynu (ang. Bernoulli's principle) przepływ płynu bez zmiany wysokości, zapisywany przez równanie Bernoulliego dla stałej wysokości:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

prawo Archimedesa (ang. Archimedes' principle) siła wyporu działająca na obiekt równa jest ciężarowi wypartego płynu

prawo oporu Poiseuille'a (ang. Poiseuille's law for resistance) opór stawiany laminarnemu przepływowi nieściśliwego płynu w rurze: $R = \frac{8\eta l}{\pi r^4}$

prawo Pascala (ang. Pascal's principle) zmiana ciśnienia przyłożonego do płynu jest przekazywana bez strat do wszystkich części płynu i ostatecznie do ścianek obejmującego płyn naczynia

prawo Poiseuille'a (ang. Poiseuille's law) strumień laminarnego przepływu nieściśliwego płynu w rurze: $Q = \frac{(p_2 - p_1)\pi r^4}{8\eta l}$

przepływ laminarny (ang. laminar flow) typ przepływu płynu, podczas którego warstwy płynu się nie mieszają

przepływ turbulentny (ang. turbulent flow) typ przepływu płynów, podczas którego warstwy płynu mieszają się zawracając i tworząc wiry

płyn idealny (ang. ideal fluid) płyn o pomijalnej lepkości

płyny (ang. fluids) ciecze i gazy; stan płynny poddaje się siłom ścinającym

równanie Bernoulliego (ang. Bernoulli's equation) równanie wynikające z zastosowania prawa zachowania energii do nieściśliwego płynu z pominięciem tarcia: $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{constant}$, w całej objętości płynu

równowaga hydrostatyczna (ang. hydrostatic equilibrium) stan, w którym płyn się nie porusza, czyli gdy jest statyczny

siła wyporu (ang. buoyant force) wypadkowa siła skierowania ku górze, działająca na obiekt zanurzony w płynie, wywołana różnicami ciśnienia na różnych głębokościach

strumień objętościowy (ang. flow rate) o symbolu Q, to stosunek objętości V, która przepływa przez powierzchnię w pewnym punkcie, w czasie t, w jakim płyn przepływa, lub $Q = \mathrm{d}V/\mathrm{d}t$

turbulencja (ang. turbulence) przepływ płynu, w którym jego warstwy mieszają się w wyniku powstania wirów i zwrotów prędkości

NAJWAŻNIEJSZE WZORY

Gęstość próbki przy stałej gęstości	$\rho = \frac{m}{V}$
Ciśnienie	$p = \frac{F}{A}$

Ciśnienie na głębokości h w płynie o stałej gęstości	$p = p_0 + \rho gh$
Zmiana ciśnienia z wysokością w płynie o stałej gęstości	$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = -\rho g$
Ciśnienie absolutne	$p_{abs} = p_g + p_{atm}$
Zasada Pascala	$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$
Strumień objętościowy	$Q = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$
Równanie ciągłości (przy stałej gęstości)	$A_1 v_1 = A_2 v_2$
Równanie ciągłości (postać ogólna)	$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$
Równanie Bernoulliego	$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gy = \text{constant}$
Lepkość	$\eta = \frac{FL}{vA}$
Prawo oporu Poiseuille'a	$R = \frac{8\eta l}{\pi r^4}$
Prawo Poiseuille'a	$Q = \frac{(p_2 - p_1)\pi r^4}{8\eta l}$

PODSUMOWANIE

14.1 Płyny, gęstość i ciśnienie

- Płyn to stan skupienia materii poddający się siłom bocznym lub ścinającym. Ciecze i gazy są płynami. Statyka płynów to dziedzina fizyki zajmująca się nieruchomymi płynami.
- Gęstość substancji lub obiektu, to jego masa na jednostkę objętości. Definiujemy ją jako $\rho = m/V$. Jednostką SI gęstości jest $\mathrm{kg/m^3}$.
- Ciśnienie to wartość składowej prostopadłej siły na jednostkę powierzchni, do której jest przyłożona, $p = F/A$. Jednostką SI ciśnienia jest paskal: $1\ \mathrm{Pa} = 1\ \mathrm{N/m^2}$.
- Ciśnienie wywołane ciężarem cieczy o stałej gęstości dane jest przez $p = \rho\, gh$, gdzie p jest ciśnieniem, h głębokością cieczy, na której mierzymy ciśnienie, ρ gęstością cieczy, a g przyspieszeniem ziemskim.

14.2 Pomiar ciśnienia

- Ciśnienie manometryczne to ciśnienie mierzone względem ciśnienia atmosferycznego.
- Ciśnienie absolutne to suma ciśnienia manometrycznego i ciśnienia atmosferycznego.
- Otwarte manometry rurkowe zbudowane są z rurki w kształcie litery U, której jeden koniec jest zawsze otwarty. Używa się ich do pomiaru ciśnienia. Barometr rtęciowy to urządzenie mierzące ciśnienie atmosferyczne.
- Jednostką SI ciśnienia jest paskal (Pa), ale w powszechnym użyciu jest jeszcze kilka innych jednostek.

14.3 Prawo Pascala i układy hydrauliczne

- Ciśnienie to siła na jednostkę powierzchni.
- Zmiana ciśnienia przyłożonego do zamkniętego płynu przekazywana jest bez strat do wszystkich części płynu i do ścian naczynia zawierającego ten płyn.
- Układ hydrauliczny zawiera zamknięty płyn używany do przekazywania sił.

14.4 Prawo Archimedesa i siła wyporu

- Siła wyporu jest siłą wypadkową skierowaną ku górze, przyłożoną do dowolnego obiektu zanurzonego w dowolnym płynie. Jeżeli siła wyporu jest większa niż ciężar przedmiotu, to zacznie się on poruszać ku powierzchni, a później będzie się na niej unosił. Jeżeli siła wyporu jest mniejsza niż waga przedmiotu, to przedmiot zatonie. Jeżeli siła wyporu równa się masie przedmiotu, który jest w spoczynku, to pozostanie on na obecnej głębokości. Siła wyporu jest zawsze obecna i zawsze działa na przedmiot zanurzony całkowicie lub częściowo w płynie.

- Prawo Archimedesa stwierdza, że siła wyporu działająca na przedmiot równa się ciężarowi wypartego przez ten przedmiot płynu.

14.5 Dynamika płynów

- Strumień objętościowy Q jest definiuje się jako objętość V przepływającą przez pole powierzchni w pewnym punkcie w czasie t lub $Q = \mathrm{d}V/\mathrm{d}t$, gdzie V jest objętością, a t czasem. Jednostką SI strumienia objętościowego jest $\mathrm{m^3/s}$, ale w powszechnym użyciu są również inne jednostki, takie jak l/min.
- Strumień objętościowy oraz prędkość są związane relacją $Q = Av$, gdzie A jest polem przekroju strumienia płynu, a v jego średnią prędkością.
- Równanie ciągłości mówi, że dla płynów nieściśliwych masa wpływająca do rury musi się równać masie wypływającej z niej.

14.6 Równanie Bernoulliego

- Równanie Bernoulliego mówi, że sumy po dwóch stronach poniższego równania są takie same w dowolnych dwóch punktach nieściśliwego płynu:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 .$$

- Wiele zastosowań ma uproszczona wersja równania Bernoulliego, w której wysokość płynu jest stała. Składniki równania zawierające wysokość (lub głębokość h) upraszczają się i w efekcie uzyskujemy

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 .$$

- Powyższa postać równania Bernoulliego ma wiele zastosowań, w tym dotyczące zjawiska porywania oraz pomiaru prędkości.

14.7 Lepkość i turbulencje

- Przepływ laminarny charakteryzuje się brakiem mieszania poruszających się warstw płynu.
- Turbulencja cechuje się wirami i zwrotami prędkości, które mieszają warstwy płynu.
- Lepkość płynu η jest spowodowana tarciem wewnętrznym w płynie.
- Przepływ pozostaje proporcjonalny do różnicy ciśnień i odwrotnie proporcjonalny do oporu:

$$Q = \frac{p_2 - p_1}{R} .$$

- Spadek ciśnienia powodują zarówno przepływ, jak i opory, określa go równanie: $p_2 - p_1 = RQ$.
- Liczba Reynoldsa Re pomaga stwierdzić, czy przepływ jest laminarny, czy turbulentny. Wynosi ona: $Re = \frac{2\rho v r}{\eta}$.
- Dla Re poniżej około 2000 przepływ jest laminarny. Dla Re powyżej około 3000 przepływ jest turbulentny. Dla wartości Re pomiędzy 2000 a 3000 może być albo jednego typu, albo drugiego, albo wykazywać cechy obu.

PYTANIA

14.1 Płyny, gęstość i ciśnienie

1. Które z poniższych substancji są płynami w temperaturze pokojowej i pod ciśnieniem atmosferycznym: powietrze, rtęć, woda, szkło?

2. Dlaczego gazy łatwiej sprężyć niż ciecze i ciała stałe?

3. Wyjaśnij, w jaki sposób gęstość powietrza zmienia się z wysokością nad poziomem morza.

4. Obrazek pokazuje szklankę zawierającą wodę z lodem wypełnioną po krawędź. Czy woda się wyleje, gdy lód się stopi? Uzasadnij swoją odpowiedź.



5. W jaki sposób ciśnienie jest związane z ostrością noża i jego zdolnością do przecinania?

6. Dlaczego siła wywierana przez płyn statyczny jest zawsze prostopadła do powierzchni?

7. Wyobraź sobie, że w odległym miejscu w pobliżu bieguna północnego, kawałek lodu pływa po jeziorze. W pobliżu jeziora lodowiec o takiej samej objętości jak lód w jeziorze jest umieszczony na lądzie. Jeżeli globalne ocieplenie doprowadzi do stopienia obu kawałków lodu, a stopniały lód trafi do jeziora, który z kawałków sprawi, że poziom wody bardziej się podniesie? Odpowiedź uzasadnij.

8. W balecie, taniec *en pointe* (na czubkach palców) jest znacznie trudniejszy niż zwykły taniec czy chodzenie. Wyjaśnij, dlaczego tak jest, używając pojęcia ciśnienia.

9. Ciśnienie atmosferyczne wywiera dużą siłę (równą ciężarowi atmosfery powyżej twojego ciała – około 10 t) na górną część twojego ciała, podczas gdy leżysz na plaży i się opalasz. Dlaczego jesteśmy w stanie się podnieść?

10. Dlaczego spadek ciśnienia atmosferycznego z wysokością jest szybszy niż liniowy?

11. Ilustracja pokazuje, jak worki z piaskiem umieszczone dookoła przecieku na zewnątrz wałów przeciwpowodziowych są w stanie efektywnie zatrzymać wodę pod wałem. Wyjaśnij, w jaki sposób niewielka ilość wody wewnątrz kolumny z worków jest w stanie zrównoważyć ogromną ilość wody przed wałem.



12. Czy istnieje siła wypadkowa działająca na tamę pochodząca od ciśnienia atmosferycznego? Odpowiedź uzasadnij.

13. Czy ciśnienie atmosferyczne dodaje się do ciśnienia gazu w sztywnym pojemniku? A w balonie do zabawy? Ogólniej: kiedy ciśnienie atmosferyczne nie ma wpływu na całkowite ciśnienie płynu?

14. Można stłuc mocną butelkę wina uderzając w korek ręką i wbijając go do butelki, pod warunkiem, że korek styka się bezpośrednio z płynem wypełniającym butelkę – pomiędzy korkiem a płynem nie może być powietrza. Wyjaśnij, dlaczego butelka pęka tylko wtedy, gdy nie ma powietrza pomiędzy korkiem a płynem.

14.2 Pomiar ciśnienia

15. Wyjaśnij, dlaczego płyny sięgają tego samego poziomu w manometrze, jeżeli oba końce rurki są otwarte, nawet jeżeli ich średnice pozostają różne.

14.3 Prawo Pascala i układy hydrauliczne

16. Załóżmy, że w układzie hydraulicznym główny cylinder znajduje się wyżej niż cylinder, którym steruje. Wyjaśnij, w jaki sposób wpłynie to na siłę generowaną przez cylinder, który jest kontrolowany.

14.4 Prawo Archimedesa i siła wyporu

17. Aby wyciągnąć korek z pełnej wanny, musimy zadziałać siłą większą niż przy wyciąganiu go z pustej wanny. Czy ten przykład przeczy prawu Archimedesa? Odpowiedź uzasadnij.

18. Czy płyny działają siłą wyporu w nieważkości, np. na promie kosmicznym? Odpowiedź uzasadnij.

19. Czy ten sam statek będzie mniej zanurzony w wodzie słonej, czy w słodkiej? Odpowiedź uzasadnij.

20. Szklane kulki wrzucone do częściowo wypełnionej wanny opadają na dno. Część ich ciężaru jest równoważona przez siłę wyporu, jednak siła wypadkowa na dno wanny zwiększa się dokładnie o wagę kulek. Wyjaśnij, dlaczego.

14.5 Dynamika płynów

21. Wiele ilustracji w tekście prezentuje linie prądu. Wyjaśnij, dlaczego prędkość płynu jest największa tam, gdzie linie prądu są najbliżej siebie. (Podpowiedź: Rozważ zależność między prędkością płynu a polem przekroju, przez który przepływa płyn.)

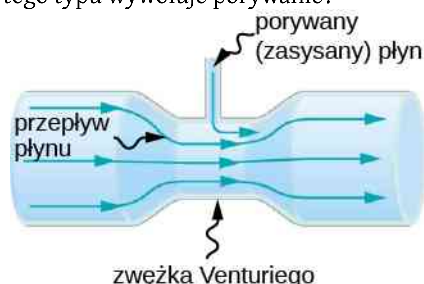
14.6 Równanie Bernoulliego

22. Można sprawić, że woda z węża ogrodowego wytryśnie na znacznie większą odległość, jeśli częściowo zakryjemy jego wylot kciukiem. Wyjaśnij, dlaczego tak jest.

23. W fontannach dekoracyjnych woda wytryskuje prawie pionowo, po czym strumień się poszerza ze wzrostem wysokości. Z drugiej strony, strumień wody wylatującej z kranu pionowo w dół się zwęża. Wyjaśnij, dlaczego tak się dzieje.

24. Przyjrzyj się ponownie Rysunkowi 14.29. Odpowiedz na następujące pytania. Dlaczego ciśnienie p_o jest mniejsze niż atmosferyczne? Dlaczego p_o jest większe niż p_i?

25. Widoczna poniżej rurka ze zwężeniem, którego celem jest wywołanie porywania, nazywa się **rurką Venturiego** (ang. **Venturi tube**). Są one powszechnie stosowane w gaźnikach i aspiratorach. W jaki sposób urządzenie tego typu wywołuje porywanie?



26. Niektóre przewody kominowe mają kształt litery T, dzięki czemu górna, zakryta część pozwala wyciągać gazy nawet przy najlżejszym podmuchu wiatru. Wyjaśnij działanie takiej konstrukcji przy użyciu równania Bernoulliego dla przepływu poziomego.

27. Czy istnieje maksymalna wysokość, na którą urządzenia wykorzystujące porywanie mogą wynieść płyn? Odpowiedź uzasadnij.

28. Czy łatwiej jest wystartować samolotem z wiatrem, czy pod wiatr?

29. Zdarza się, że podczas cyklonów tropikalnych dachy wylatują w górę, a budynki eksplodują na zewnątrz po uderzeniu tornada. Użyj równania Bernoulliego dla przepływu poziomego do wyjaśnienia tych zjawisk.

30. Niebezpiecznie jest stać blisko torów, gdy przejeżdża po nich szybki pociąg. Wyjaśnij, dlaczego ciśnienie atmosferyczne będzie wpychało osobę stojącą przy torach w kierunku pociągu.

31. Ciśnienie wody wewnątrz dyszy węża może być mniejsze od atmosferycznego z powodu efektu Bernoulliego. Wziąwszy pod uwagę energię wody, wyjaśnij w jaki sposób woda może się wydostać z węża, pokonując ciśnienie atmosferyczne.

32. Dawid opuścił szybę w oknie swojego samochodu podczas jazdy autostradą. Plastikowa torebka leżąca na podłodze wyleciała wtedy przez okno. Wyjaśnij dlaczego.

33. Jakie trzy formy energii poruszającego się płynu są reprezentowane w równaniu Bernoulliego? (Zwróć uwagę, że te formy energii są zachowane, podczas gdy inne, takie jak energia cieplna i inne formy dyssypatywne, nie są obecne w tym równaniu.)

34. Stary, gumowy kalosz pokazany na poniższym rysunku ma dwie dziury. Do jakiej maksymalnej wysokości może wytrysnąć woda z dziury 1? Jak prędkość wody wytryskującej z dziury 2 różni się od prędkości wody z dziury 1? Wyjaśnij, rozważając energię.

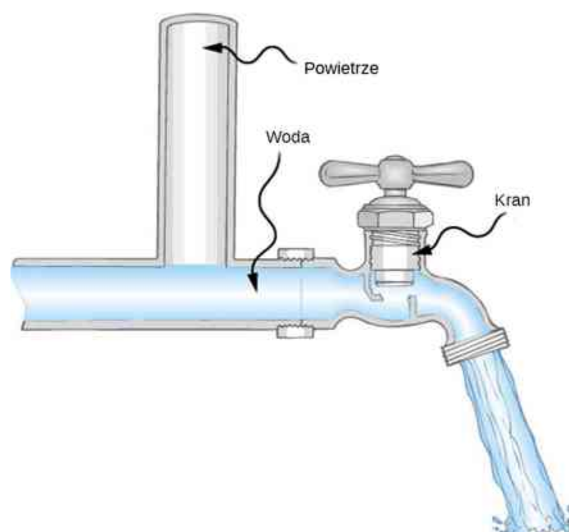


14.7 Lepkość i turbulencje

35. Wyjaśnij, dlaczego lepkość w cieczy maleje z temperaturą. Innymi słowy, wyjaśnij w jaki sposób wzrost temperatury może zmniejszyć skutki siły spójności w płynie. Wyjaśnij również, dlaczego lepkość gazu zwiększa się wraz z temperaturą, czyli w jaki sposób wzrost temperatury wpływa na zwiększenie liczby zderzeń między atomami i cząsteczkami.

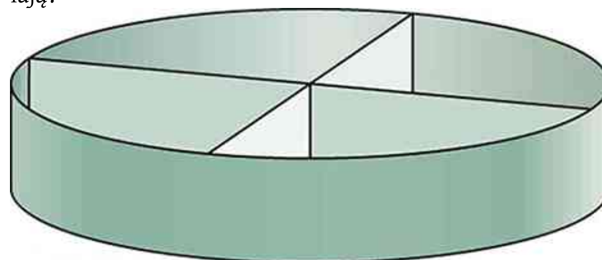
36. Kiedy wiosłujemy w górę rzeki, najkorzystniej jest tak sterować łódką czy kajakiem, aby płynąć możliwie najbliżej brzegu. Z kolei podczas spływu z prądem najkorzystniej jest być blisko środka rzeki. Wyjaśnij dlaczego.

37. Urządzenia hydrauliczne w mieszkaniach zwykle zawierają wypełnione wodą rury w pobliżu kranów (patrz: rysunek poniżej). Wyjaśnij, do czego są one potrzebne i jak działają.



38. Ultrasonografia dopplerowska może być używana do pomiaru prędkości krwi w ciele. Jeżeli w tętnicy znajduje się częściowe zwężenie, to gdzie należy oczekiwać największej prędkości krwi: w miejscu zwężenia czy za nim? Jakie są powody większego oporu w miejscu zwężenia?

39. Odpływy zlewów często mają zamontowane części, takie jak zaprezentowane na rysunku poniżej, w celu zwiększenia szybkości przepływu wody. Jak one działają?



ZADANIA

14.1 Płyny, gęstość i ciśnienie

40. Złoto jest ciałem stałym sprzedawanym na uncje (31,103 g). Jaka jest objętość jednej uncji czystego złota?

41. Rtęć dostarcza się w pojemnikach zawierających 34,5 kg metalu. Jaka jest objętość w litrach takiej ilości rtęci?

42. Jaka jest masa głębokiego wdechu powietrza o objętości 2,00 l? Omów wpływ takiego wdechu na objętość i gęstość twojego ciała.

43. Prostą metodą obliczania gęstości obiektu jest pomiar masy, a następnie pomiar objętości poprzez zanurzenie tego ciała w wycechowanym zbiorniku. Jaka jest gęstość skały o masie 240 g, która wypiera $89{,}0\ \text{cm}^3$ wody? (Zwróć uwagę, że dokładność tej techniki w praktycznych zastosowaniach jest mniejsza niż dokładność innych technik opartych na prawie Archimedesa.)

44. Załóżmy, że masz kubek do kawy o przekroju kołowym i pionowych ściankach (o stałym promieniu). Jaki jest jego promień wewnętrzny, jeżeli zawiera 375 g kawy, gdy wypełniono go do wysokości 7,50 cm? Załóż, że kawa ma taką samą gęstość jak woda.

45. Prostokątny zbiornik paliwa może pomieścić 50,0 kg benzyny. (a) Jaka jest głębokość zbiornika, jeżeli jego szerokość wynosi 0,500 m, a długość 0,900 m? (b) Zastanów się, czy ma on wymiary pozwalające zamontować go w samochodzie osobowym.

46. Zgniatarka śmieci zgniata zawartość do 0,350 pierwotnej objętości. Pomijając masę wydalonego powietrza, oblicz o jaki czynnik zwiększyła się gęstość śmieci?

47. Puszka o masie 2,50 kg może pomieścić 20,0 l benzyny. Jaka jest gęstość wypełnionej puszki, jeśli uwzględnimy objętość zajmowaną zarówno przez stal, jak i przez benzynę?

48. Jaka jest gęstość 18-karatowego złota, które jest mieszanką 18 części złota, 5 części srebra i 1 częścią miedzi? (Części te dotyczą masy, a nie objętości.) Załóż, że jest to prosta mieszanka o średniej gęstości, równej średniej ważonej gęstości jej części.

49. Ostrze gwoździa wywiera ogromne ciśnienie po uderzeniu młotkiem, ponieważ działa dużą siłą na małej powierzchni. Jaką siłą należałoby zadziałać na gwóźdź o ostrzu o średnicy 1,00 mm, aby wytworzyć ciśnienie $3{,}00 \cdot 10^9\ \text{N}/\text{m}^2$? (Tak wysokie ciśnienie jest możliwe, ponieważ młotek uderzający w gwóźdź zostaje wyhamowany na bardzo krótkim odcinku.)

50. Szklana rurka zawiera rtęć. Jaka powinna być wysokość kolumny rtęci, aby wytworzyć ciśnienie równe 1 atm?

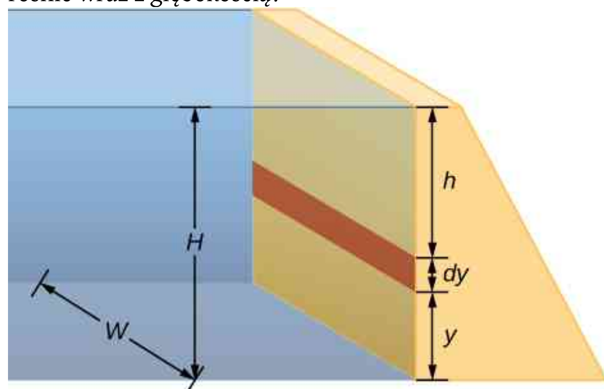
51. Największą głębię oceaniczną na Ziemi można znaleźć w Rowie Mariańskim w pobliżu Filipin. Oblicz ciśnienie wywołane przez ocean na jego dno, wiedząc, że głębokość wynosi 11,0 km i zakładając stałą gęstość wody na całej głębokości.

52. Udowodnij, że jednostką SI $h\rho g$ jest N/m^2 .

53. Jakie ciśnienie wywierane jest na dno pojemnika z gazem, który ma szerokość 0,500 m, długość 0,900 m i może pomieścić 50,0 kg benzyny?

54. Tamy używane są do spiętrzania rzek. Tama ma wysokość $H = 12\ \text{m}$ i szerokość $W = 10\ \text{m}$. Załóż, że

gęstość wody wynosi $\rho = 1000\,\text{kg/m}^3$. (a) Oblicz wypadkową siłę na tamę. (b) Dlaczego grubość tamy rośnie wraz z głębokością?



14.2 Pomiar ciśnienia

55. Oblicz ciśnienie manometryczne i absolutne dla balonu i słoika z orzeszkami ziemnymi pokazanych na Rysunku 14.12, założywszy, że manometr podłączony do balonu wykorzystuje wodę, a manometr podłączony do słoika wykorzystuje rtęć. Wyraź wynik w centymetrach słupka wody dla balonu i w milimetrach słupka rtęci dla słoika, przyjmując $h = 0{,}0500\ \text{m}$ dla każdego z nich.

56. Jak wysoki musiałby być manometr wypełniony wodą, aby zmierzyć bardzo wysokie ciśnienie krwi, wynoszące 300 mmHg?

57. Przy założeniu, że opony roweru są doskonale elastyczne i podpierają wagę roweru oraz kolarza jedynie ciśnieniem powietrza, oblicz pełną powierzchnię opony stykającą się z ziemią, jeżeli rower i kolarz mają łączną masę 80 kg, a ciśnienie manometryczne w oponach wynosi. $3{,}5 \cdot 10^5\ \text{Pa}$.

14.3 Prawo Pascala i układy hydrauliczne

58. Jakie ciśnienie jest przekazywane w układzie rozważanym w Przykładzie 14.3? Odpowiedź wyraź w atmosferach.

59. Z jaką siłą należy działać na główny cylinder podnośnika hydraulicznego, aby utrzymać duży samochód o ciężarze 2000 kg spoczywający na drugim cylindrze? Cylinder główny ma średnicę 2,00 cm, a drugi cylinder 24,0 cm.

60. Po przyjęciu gospodarz zlewa pozostałości kilku butelek wina do jednego słoja. Następnie zatyka go korkiem o średnicy 2,00 cm. Wkłada korek do szyjki w taki sposób, aby stykał się on z winem, a następnie uderza dłonią, aby go lepiej osadzić. Gospodarz zaskoczony jest, gdy dno słoja odrywa się. Oblicz o ile większa siła została wywarta na dno słoja, jeżeli korek został wbity z siłą 120 N, a średnica dna słoja wynosiła 14,0 cm.

61. Układ hydrauliczny został zaprojektowany tak, aby działać siłą 100-krotnie większą niż siła, którą na niego zadziałano. (a) Jaki musi być stosunek pola cylindra, który jest kontrolowany, do pola cylindra głównego? (b) Jaki musi być stosunek ich średnic? (c) O jaki ułamek odległość przebyta przez tłok cylindra kontrolowanego jest mniejsza niż odległość przebyta przez tłok główny? Pomiń opory ruchu.

62. Wykaż, że w układzie hydraulicznym praca wejściowa równa się pracy wyjściowej przy założeniu braku strat związanych z tarciem. W tym celu pokaż, że odległość, na której działa siła wyjściowa, jest zmniejszona o taki sam ułamek, o jaki zwiększono siłę wyjściową. Jaki wpływ miałoby tarcie w płynie i między częściami układu na siłę wyjściową? W jaki sposób zależałoby to od faktu, czy płyn się porusza, czy nie?

14.4 Prawo Archimedesa i siła wyporu

63. Oblicz, jaka część lodu jest zanurzona, gdy pływa on po wodzie słodkiej. Gęstość wody w $0\ °\text{C}$ jest prawie równa $1000\ \text{kg/m}^3$, a gęstość lodu $992\ \text{kg/m}^3$?

64. Jeżeli gęstość ludzkiego ciała wynosi $995\ \text{kg/m}^3$, to jaka jego część będzie zanurzona podczas pływania w: (a) wodzie słodkiej (b) wodzie słonej o gęstości $1027\ \text{kg/m}^3$?

65. Pomiar masy kamienia w powietrzu daje wynik 540 g, a w wodzie jego pozorna masa wynosi 342 g. (a) Jaka masa wody została wyparta? (b) Jaka jest objętość kamienia? (c) Jaka jest jego średnia gęstość? Czy taka sama jak gęstość granitu?

66. Prawa Archimedesa można użyć do obliczenia gęstości zarówno płynów, jak i ciał stałych. Załóż, że kawałek żelaza o masie 390,0 g, zmierzonej w powietrzu ma masę pozorną 350,5 g po całkowitym zanurzeniu w nieznanym płynie. (a) Jaką masę płynu wyparło żelazo? (b) Jaka jest objętość całego kawałka żelaza – użyj gęstości podanej w Tabeli 14.1? (c) Oblicz gęstość płynu i zidentyfikuj go.

67. (a) Oblicz siłę wyporu działającą na 2-litrowy balon z helem. (b) Wiedząc, że masa gumy, z której wykonano balon wynosi 1,50 g, oblicz pionową wypadkową siłę działającą na balon po spuszczeniu go ze sznurka. Pomiń objętość gumy.

68. Jaka jest gęstość kobiety, która unosi się w wodzie słodkiej z $4{,}00\%$ objętości swojego ciała nad powierzchnią wody? (Można zmierzyć to, umieszczając ją w wycechowanym zbiorniku i sprawdzając, ile wody zostanie wypartej podczas pływania oraz podczas pełnego zanurzenia.) (b) Jaka część objętości kobiety znajdzie się nad wodą, gdy będzie się ona unosiła w wodzie słonej?

69. Masa mężczyzny wynosi 80 kg, a jego gęstość $955\ \text{kg}/\text{m}^3$ (nie licząc powietrza w płucach). (a) Oblicz jego objętość. (b) Znajdź siłę wyporu, z jaką działa na niego powietrze. (c) Jaki jest stosunek siły wyporu do

jego wagi?

70. Prosty kompas zbudowany jest w taki sposób, że umieszcza się niewielką sztabkę magnesu na korku pływającym po wodzie. (a) Jaka część nieobciążonego korka będzie zanurzona podczas unoszenia się na wodzie? (b) Jeżeli korek ma masę 10,0 g, a magnes 20,0 g, to jaka część korka będzie zanurzona? (c) Czy korek z magnesem będą w tej sytuacji pływały po alkoholu etylowym?

71. Jaki procent wagi żelaznej kotwicy będzie zrównoważony przez siłę wyporu, jeżeli zostanie ona zanurzona w słonej wodzie?

72. Używając Rysunku 14.20, udowodnij, że siła wyporu na cylinder jest równa ciężarowi wypartego płynu (prawo Archimedesa). Możesz założyć, że siła wyporu wynosi $F_2 - F_1$ i że pola powierzchni podstaw cylindra są równe A. Zwróć uwagę, że objętość cylindra (oraz wypartego przezeń płynu) równa jest $(h_2 - h_1)A$.

73. Mężczyzna o masie 75,0 kg unosi się na wodzie słodkiej, przy czym nad wodą znajduje się 3,00% jego objętości, gdy jego płuca są puste, a 5,00% objętości, gdy są wypełnione powietrzem. Oblicz objętość powietrza w płucach – zwaną pojemnością płuc – w litrach. (b) Czy jest ona zgodna z twoimi przewidywaniami?

14.5 Dynamika płynów

74. Jaki jest średni strumień objętościowy wyrażony w cm^3/s benzyny wpływającej do silnika samochodu, poruszającego się z prędkością 100 km/h, jeżeli średnie zużycie paliwa wynosi 10,0 km/l?

75. Serce dorosłej osoby w spoczynku pompuje krew z wydajnością 5,00 l/min. (a) Przekształć tę liczbę na cm^3/s. (b) Jaki jest strumień objętościowy wyrażony w m^3/s?

76. Wodospady Huka na rzece Waikato są jedną z najczęściej odwiedzanych atrakcji turystycznych Nowej Zelandii. Średni strumień objętościowy rzeki wynosi około 300 000 l/s. W przełomie wodospadu rzeka zwęża się do szerokości 20 m i ma głębokość 20 m. (a) Jaka jest średnia prędkość rzeki w przełomie? (b) Jaka jest średnia prędkość rzeki za wodospadem, gdzie szerokość rzeki zwiększa się do 60 m, a średnia głębokość do 40 m?

77. (a) Oszacuj czas potrzebny do wypełnienia przydomowego basenu pływackiego o pojemności 80 000 l przy użyciu węża ogrodowego, dostarczającego 60 l/min. Ile czasu zajęłoby to zadanie, gdyby do basenu przekierować średniej wielkości rzekę o strumieniu $5000\ m^3/s$?

78. Jaka jest prędkość wody w wężu strażackim o średnicy 9,00, cm dostarczającego 80,0 l/s? (b) Jaki strumień w metrach sześciennych na sekundę odpowiada tej sytuacji? (c) Czy odpowiedź byłaby inna, gdyby wodę słoną w wężu zastąpić wodą słodką?

79. Woda przepływa z prędkością 2,00 m/s przez wąż o wewnętrznej średnicy 1,60 cm. (a) Jaki jest strumień objętościowy w litrach na sekundę? (b) Prędkość płynu przy dyszy tego samego węża wynosi 15,0 m/s. Jaka jest średnica dyszy?

80. Udowodnij, że prędkość nieściśliwego płynu przez zwężenie, takie jak w rurce Venturiego, wzrasta o czynnik równy kwadratowi czynnika, o który wzrasta średnica. (Można również udowodnić twierdzenie odwrotne, dotyczące sytuacji, gdy płyn wpływa do rejonu o większej średnicy.)

81. Woda wypływa pionowo w dół z kranu o średnicy 1,80 cm z prędkością 0,500 m/s. (Z powodu konstrukcji kranu, nie ma różnic w prędkości na przekroju strumienia.) (a) Jaki jest strumień objętościowy wyrażony w cm^3/s? (b) Jaka jest średnica strumienia 0,200 m poniżej kranu? Pomiń efekty związane z napięciem powierzchniowym.

14.6 Równanie Bernoulliego

82. Udowodnij, że ciśnienie można wyrazić w jednostkach energii na jednostkę objętości.

83. Masz do dyspozycji przyrząd do pomiaru prędkości płynu, taki jak pokazano na Rysunku 14.32. O ile musi wzrosnąć prędkość wiatru, aby wartość h na manometrze się podwoiła? Czy wynik jest niezależny od poruszającego się płynu i od płynu w manometrze?

84. Jeżeli rurka Pitota pokazuje ciśnienie 15,0 mmHg przy prędkości 200 km/h, to jakie ciśnienie pokaże przy prędkości 700 km/h na tej samej wysokości nad poziomem morza?

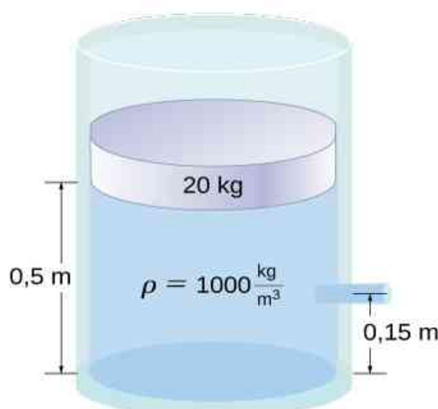
85. Co kilka lat wiatry w mieście Boulder w stanie Kolorado osiągają prędkości 45,0 m/s, gdy prąd strumieniowy opada w kierunku ziemi wczesną wiosną. Oblicz, posługując się równaniem Bernoulliego, jaka jest w przybliżeniu siła działająca na dach o powierzchni $220\ m^2$? Typowa gęstość powietrza dla Boulder wynosi $1{,}14\ kg/m^3$, a średnie ciśnienie $8{,}89 \cdot 10^4\ N/m^2$. (Równanie Bernoulliego zakłada laminarność przepływu, więc uzyskany wynik można traktować wyłącznie jako wynik przybliżony, ponieważ w opisanej sytuacji pojawiają się znaczne turbulencje.)

86. Jaki jest spadek ciśnienia związany z efektem Bernoulliego podczas przejścia wody z węża strażackiego o średnicy 9,00 cm do dyszy o średnicy 3,00 cm, jeżeli strumień objętościowy niesie 40,0 l/s? (b) Do jakiej maksymalnej wysokości powyżej dyszy może dolecieć woda? (Rzeczywista wysokość będzie znacznie mniejsza z powodu oporu powietrza.)

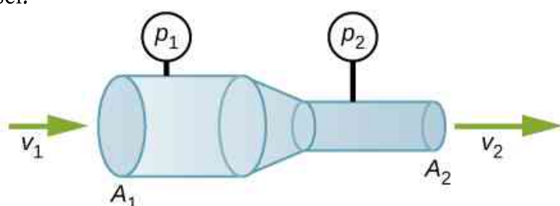
87. (a) Używając równania Bernoulliego, pokaż, że prędkość płynu v zmierzona w rurce Pitota, takiej jak na Rysunku 14.32, dana jest przez $v = (2\rho' gh/\rho)^{1/2}$,

gdzie h jest wysokością płynu w manometrze, ρ' gęstością płynu w manometrze, ρ gęstością poruszającego się płynu, a g jest przyspieszeniem ziemskim. (Zwróć uwagę, że v jest faktycznie proporcjonalne do kwadratu h, jak napisano w rozdziale). (b) Oblicz v dla poruszającego się powietrza, jeżeli wysokość h na manometrze rtęciowym wynosi 0,200 m.

88. Pojemnik z wodą ma pole przekroju $A = 0{,}1\ \text{m}^2$. Na szczycie wody spoczywa tłok (rysunek poniżej). 0,15 m powyżej podstawy pojemnika znajduje się odpływ, którego pole przekroju wynosi $A_s = 7{,}0 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2$. (a) Jaka jest prędkość wody wylatującej z odpływu? (b) Jeżeli otwór odpływu znajduje się 1,5 m powyżej powierzchni, jak daleko od wylotu woda spadnie na ziemię? Pomiń wszystkie siły tarcia i inne siły dyssypatywne.



89. Płyn o stałej gęstości przepływa przez redukcję (zwężenie) w rurze. Wyznacz równanie wyrażającą zmianę ciśnienia przy pomocy v_1, A_1, A_2, oraz gęstości.



14.7 Lepkość i turbulencje

90. (a) Oblicz siłę opóźniającą spowodowaną lepkością warstwy powietrza pomiędzy wózkiem a poziomym torem powietrznym, mając do dyspozycji następujące informacje: temperatura powietrza $20\ ^\circ\text{C}$, prędkość wózka 0,400 m/s, jego pole powierzchni $2{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{m}^2$ i grubość warstwy powietrza $6{,}00 \cdot 10^{-5}\ \text{m}$. (b) Jaki jest iloraz tej siły do ciężaru wózka, którego masa wynosi 0,300 kg?

91. Tętniczki (małe tętnice) prowadzące do organu mogą się kurczyć w celu zmniejszenia dopływu krwi. Aby wyłączyć organ, dopływ krwi do niego musi zmniejszyć się do 1,00% pierwotnej wartości. O ile muszą się skurczyć tętniczki?

92. Dla sferycznej cząsteczki spadającej z prędkością graniczną w płynie siła grawitacji jest równoważona przez tarcie i siłę wyporu. Siła wyporu równa się ciężarowi wypartego płynu. Zwykle zakłada się, że siła tarcia dana jest przez prawo Stokesa, $F_s = 6\pi r\eta v$. Pokaż, że prędkość graniczna zadana jest przez $v = \frac{2R^2 g}{9\eta}(\rho_s - \rho_1)$, gdzie R jest promieniem sfery, ρ_s jej gęstością, ρ_1 gęstością płynu, a η współczynnikiem lepkości.

93. Wykorzystując równania z poprzedniego problemu, oblicz lepkość oleju silnikowego, w którym stalowa kulka o promieniu 0,8 mm spada z prędkością graniczną równą 4,32 cm/s. Gęstości kulki i oleju wynoszą odpowiednio 7,86 i 0,88 g/ml.

94. Skoczek spadochronowy osiągnie prędkość graniczną, gdy opór powietrza zrówna się z jego wagą. Dla skoczka o dużej powierzchni, turbulencja jest ważnym czynnikiem przy dużych prędkościach. Tarcie w takim przypadku jest w przybliżeniu proporcjonalne do kwadratu prędkości. Przy założeniu, że wynosi ono $F_D = \rho A v^2 / 2$ i zrównawszy tę siłę z ciężarem skoczka, oblicz prędkość graniczną dla skoczka spadającego z rozpostartymi rękami i nogami równolegle do ziemi.

95. (a) Wykaż, że 5-procentowy spadek promienia powoduje 19-procentowy spadek strumienia przepływu laminarnego przez rurę, przy zachowaniu wartości pozostałych zmiennych. (b) Jaki wzrost strumienia spowoduje wzrost promienia o 5,00%, zakładając, że pozostałe zmienne się nie zmieniły?

96. Gdy lekarze diagnozują zatory tętnicze, mówią o redukcji przepływu (strumienia). Jeżeli strumień w tętnicy został zredukowany przez skrzep do 10,0% swojej normalnej wartości, a średnia różnica ciśnień wzrosła o 20,0%, to o ile promień średnicy został zmniejszony przez skrzep?

97. Wytrysk ropy naftowej w szybie wiertniczym wyrzuca ją na wysokość 25,0 m przez rurę o średnicy 0,100 m. Pomijając opór powietrza, ale uwzględniając opór rury i zakładając przepływ laminarny, oblicz ciśnienie przy wejściu do 50-metrowej rury, przez którą wylatuje ropa. Załóż, że gęstość ropy naftowej wynosi $900\ \text{kg/m}^3$, a jej lepkość $1{,}00\ \text{N} \cdot \text{s/m}^2$ (lub $1{,}00\ \text{Pa} \cdot \text{s}$). Zauważ, że musisz wziąć pod uwagę ciśnienie 50-metrowej kolumny ropy w rurze.

98. Beton jest pompuje się z betoniarki do miejsca, w którym zostanie wylany. Strumień ma wartość 200 l/min i płynie przez przewód o długości 50,0 m i średnicy 8,00 cm, a ciśnienie przy pompie wynosi $8{,}00 \cdot 10^6\ \text{N/m}^2$. (a) Oblicz opór w przewodzie. (b) Jaka jest lepkość betonu, przy założeniu, że przepływ jest laminarny? (c) Jaka moc została dostarczona, jeśli miejsce, do którego pompuje się beton, znajduje się na tym samym poziomie co pompa? Możesz pominąć moc potrzebną do zwiększenia prędkości betonu.

99. Wykaż, że przepływ ropy w trakcie wytrysku z szybu jest laminarny dla wypływu na wysokość 25 m przez rurę o średnicy 0,100 m. Pionowo ustawiona rura ma długość 50 m. Załóż, że gęstość ropy to $900\ \text{kg/m}^3$, a jej lepkość $1{,}00\ \text{N} \cdot \text{s} / \text{m}^2$ (czyli $1{,}00\ \text{Pa} \cdot \text{s}$).

100. Oblicz liczbę Reynoldsa dla przepływu wody przez; (a) dyszę o promieniu 0,250 cm oraz (b) wąż ogrodowego o promieniu 0,900 cm z dołączoną dyszą. Strumień przez wąż i dyszę wynosi 0,500 l/s. Czy przepływ w tych elementach może być laminarny?

101. Wąż strażacki ma wewnętrzną średnicę 6,40 cm. Załóż, że przepływ w nim wynosi 40,0 l/s przy początkowym ciśnieniu manometrycznym równym $1{,}62 \cdot 10^6\ \text{N} / \text{m}^2$. Wąż wzniesiony jest do wysokości 10,0 m na drabinie i kończy się dyszą o średnicy 3,00 cm. Oblicz liczby Reynoldsa dla przepływu w wężu strażackim oraz w dyszy i pokaż, że w obu przypadkach musi on być turbulentny.

102. Przy jakim strumieniu może pojawić się turbulencja w rurze z wodą o średnicy 0,200 m? Załóż temperaturę wody równą $20\ {}^\circ\text{C}$.

ZADANIA DODATKOWE

103. Przed powstaniem cyfrowych urządzeń zapisujących dane, takich jak pamięć w telefonie komórkowym, muzykę nagrywano na dyskach winylowych z wyciętymi rowkami o zmiennej głębokości. Gramofon używał igły, która poruszała się wzdłuż rowków, mierząc ich głębokość. Ciśnienie wywierane przez gramofon na igłę jest zaskakująco duże. Jeżeli odpowiednik masy 1,00 g jest utrzymywany przez igłę, której czubek ma promień 0,200 mm, to jakie ciśnienie w paskalach jest wywierane na płytę?

104. Wieże ciśnień gromadzą wodę ponad poziomem, na którym znajdują się użytkownicy, dla potrzeb zwiększonego zużycia, eliminując potrzebę stosowania pomp o dużej wydajności. Jak wysoko ponad poziomem, na którym są użytkownicy, musi znajdować się woda, aby wytworzyć ciśnienie manometryczne równe $3{,}00 \cdot 10^5\ \text{N} / \text{m}^2$?

105. Ciecz wodnista w ludzkim oku działa siłą 0,300 N na rogówkę o powierzchni $1{,}10\ \text{cm}^2$. Jakiemu ciśnieniu w mmHg odpowiadają te wartości?

106. (a) Przelicz odczyt normalnego ciśnienia krwi wynoszącego 120/80 mmHg na niutony na metr kwadratowy, nie używając przelicznika, tylko wykorzystując relację pomiędzy ciśnieniem a ciężarem płynu $(p = h\rho g)$. (b) Wyjaśnij, dlaczego ciśnienie krwi noworodka powinno być mniejsze niż u osoby dorosłej. Zwróć uwagę na wysokość, na jaką krew musi być pompowana.

107. Szybkowary znane są od ponad 300 lat, choć ich użycie znacznie się zmniejszyło w ostatnich latach (wczesne modele miały tę paskudną cechę, że zdarzało im się wybuchać). Jaką siłą muszą działać zatrzaski utrzymujące pokrywę szybkowaru, jeżeli średnica pokrywy wynosi $25{,}0\ \text{cm}$, a ciśnienie manometryczne wewnątrz niego ma wartość 300 atm? Pomiń wagę pokrywy.

108. Kości ptaków mają puste przestrzenie, co zmniejsza ciężar i jednocześnie powoduje, że mają znacznie mniejszą gęstość niż kości innych zwierząt. Załóż, że ornitolog waży ptasią kość w powietrzu i w wodzie i stwierdza, że jej masa wynosi 45,0 g, a masa pozorna, po zanurzeniu, 3,60 g (załóż, że kości są hermetyczne). (a) Jaką masę wody wyparła kość? (b) Jaka jest objętość kości? (c) Jaka jest jej średnia gęstość?

109. W pomiarze przez zanurzenie gęstości ciała kobiety stwierdzono, że jej masa wynosi 62,0 kg w powietrzu, a pozorna masa w wodzie 0,0850 kg po całkowitym zanurzeniu, poprzedzonym całkowitym wydechem. (a) Jaką masę wody wyparło ciało kobiety? (b) Jaka jest jej objętość? (c) Oblicz jej gęstość. (d) Jeżeli pojemność jej płuc wynosi 1,75 l, czy byłaby w stanie unosić się na wodzie bez poruszania kończynami, gdyby jej płuca były wypełnione powietrzem?

110. Niektóre ryby mają gęstość trochę mniejszą niż gęstość wody i muszą działać siłą (pływać), żeby pozostać pod wodą. Jaką siłą musi działać garnik wielki o masie 85,0 kg, aby pozostać pod wodą (morską), jeżeli gęstość jego ciała wynosi $1015\ \text{kg/m}^3$?

111. Ludzki układ krążenia ma w przybliżeniu $1 \cdot 10^9$ naczyń włosowatych. Każde z nich ma średnicę około $8\ \mu\text{m}$. Przy założeniu, że rzut serca wynosi 5 l/min, oblicz średnią prędkość przepływu krwi przez każde z tych naczyń.

112. Strumień krwi przez naczynie włosowate o promieniu $2{,}00 \cdot 10^{-6}\ \text{m}$ wynosi $3{,}80 \cdot 10^9\ \text{cm}^3 / \text{s}$. (a) Jaka jest prędkość przepływu krwi? (b) Przy założeniu, że cała krew znajdująca się w ciele przepływa przez naczynia włosowate, ile z nich potrzeba, aby przepuścić strumień o wartości $90{,}0\ \text{cm}^3/\text{s}$?

113. Lewa komora serca osoby dorosłej w spoczynku pompuje krew o strumieniu $83{,}0\ \text{cm}^3/\text{s}$, zwiększając jej ciśnienie o 110 mmHg, prędkość od 0,0 cm/s do 30,0 cm/s, a wysokość o 5,00 cm. (Wszystkie wartości są uśrednione po pełnej ewolucji serca.) Oblicz całkowitą moc lewej komory. Zwróć uwagę, że większość tej mocy jest używana do podniesienia ciśnienia krwi.

114. Pompa używana do osuszania piwnic, które są poniżej poziomu wód gruntowych, osusza zalaną piwnicę strumieniem 0,750 l/s, z ciśnieniem wyjściowym $3{,}00 \cdot 10^5\ \text{N} / \text{m}^2$. (a) Woda wlewa się do węża o

wewnętrznej średnicy 3,00 cm i wznosi do poziomu 2,50 m powyżej pompy. Jakie jest ciśnienie w tym punkcie? (b) Wąż przechodzi ponad fundamentem i opada o 0,500 m, a następnie rozszerza się do średnicy 4,00 cm. Jakie ciśnienie panuje w tym miejscu? Możesz pominąć straty związane z tarciem w obu częściach zadania.

115. Roztwór glukozy podaje się dożylnie strumieniem $4{,}00\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{min}$. Jaki będzie strumień, jeżeli glukozę zamienimy na krew, która ma tę samą gęstość co glukoza, ale jej lepkość jest 2,50 razy większa? Wszystkie pozostałe wartości pozostają takie same.

116. Mała tętnica ma długość $1{,}1 \cdot 10^{-3}$ m i promień $2{,}5 \cdot 10^{-5}$ m. Jeżeli spadek ciśnienia w tej tętnicy wynosi 1,3 kPa, to jaki jest w niej strumień? (Załóż, że temperatura wynosi $37\,^{\circ}\mathrm{C}$).

117. Angioplastyka to technika, w której tętnice częściowo zablokowane przez płytkę miażdżycową rozszerza się, aby zwiększyć przepływ krwi. O ile trzeba powiększyć promień tętnicy, aby 10-krotnie zwiększyć przepływ krwi?

118. Załóż, że płytka miażdżycowa zmniejsza promień naczynia krwionośnego do 90,0% początkowej wartości, a organizm kompensuje to zwężenie zwiększeniem różnicy ciśnień wzdłuż tego naczynia, aby utrzymać stały przepływ. (a) O ile musi wzrosnąć różnica ciśnień? (b) Gdyby przeszkoda dodatkowo powodowała turbulencje, to jaki wpływ miałyby one na strumień?

ZADANIA TRUDNIEJSZE

119. Ciśnienie na tamę pokazaną we wcześniejszym rozdziale zwiększa się wraz z głębokością. W związku z tym pojawia się moment siły działający na tamę. Oblicz wypadkowy moment siły działającej na tamę.

120. Temperatura atmosfery nie jest zawsze stała i może rosnąć lub maleć z wysokością. W statycznej atmosferze, gdy mieszanie pionowe jest pomijalne, temperatura zmniejsza się z szybkością w przybliżeniu równą 6,5 K na km. Wielkość tej zmiany temperatury ze wzrostem wysokości znana jest jako gradient pionowy Γ (Symbol ten to wielka grecka litera gamma.) Załóż, że ciśnienie na powierzchni Ziemi wynosi $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$, temperatura $\mathrm{T} = 293\,\mathrm{K}$, a gradient pionowy $-\Gamma = 6{,}5\,\mathrm{K/km}$. Oszacuj ciśnienie 3,0 km powyżej powierzchni Ziemi.

121. Okręt podwodny osiadł na mieliźnie i jego górny właz znajduje się na głębokości 25,0 m poniżej powierzchni wody. Oblicz siłę potrzebną do otwarcia włazu od wewnątrz przy założeniu, że jest on kołowy i ma średnicę 0,450 m. Ciśnienie atmosferyczne wewnątrz okrętu wynosi 1,00 atm.

122. Czasami pnie drzew pływają po jeziorze w pozycji pionowej, ponieważ jeden z końców nasiąknął wodą i stał się cięższy niż drugi. Jaka jest średnia gęstość pnia o jednorodnej średnicy, który pływa zanurzony jednym końcem, a 20% jego wysokości wystaje ponad wodę?

123. Powszechnie wiadomo, że oszuści sprzedają pokryte złotem sztabki wolframowe jako sztabki złote poniżej ceny złota, ale znacznie powyżej ceny wolframu. Z jaką dokładnością należy zmierzyć masę takiej sztaby w wodzie i w powietrzu, aby można było stwierdzić, czy jest to prawie czysty wolfram, czy czyste złoto?

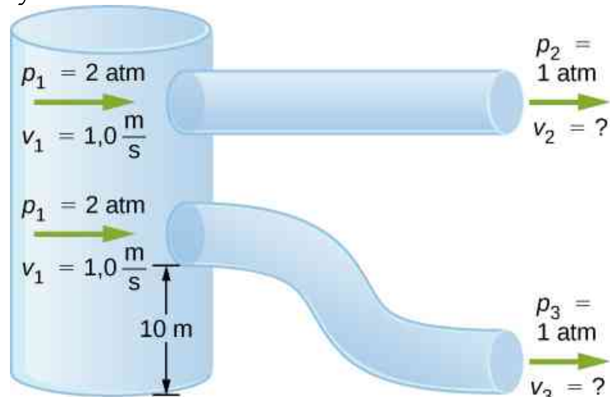
124. Objętość wnętrza domu odpowiada objętości prostopadłościanu o wymiarach 13,0 m szerokości na 20,0 m długości na 2,75 m wysokości. Dom ogrzewa grzejnik gazowy z nawiewem. Jego główny przewód wentylacyjny ma średnicę 0,300 m. Jaka jest średnia prędkość powietrza w przewodzie, jeżeli w ciągu 15 min całe powietrze w domu przechodzi przez grzejnik?

125. Wąż ogrodowy o średnicy 2,0 cm został użyty do napełnienia wiadra, które ma objętość 0,10 m^3. Na napełnienie wiadra potrzeba 1,2 min. Do węża doczepiona jest regulowana dysza, dzięki której można zmniejszyć średnicę otworu, co zwiększy prędkość wody. Wąż jest równoległy do powierzchni Ziemi na wysokości 1,0 m, a średnica otworu dyszy jest zmniejszana tak długo, aż strumień wody doleci do grządki odległej o 3,0 m. (a) Jaki jest strumień objętościowy wody przez dyszę, gdy średnica wynosi 2,0 cm? (b) Jaka jest prędkość wody wylatującej z węża? (c) Jaka musi być prędkość wody, aby strumień mógł dolecieć do grządki odległej o 3,0 m? (d) Jaka musi być średnica otworu dyszy, aby woda mogła dolecieć do grządki?

126. Często przytaczana zasada projektowania samolotów mówi, że skrzydła powinny generować około 1000 N siły nośnej na $1\,\mathrm{m}^2$ skrzydła. (Fakt, że skrzydła mają stronę wierzchnią i spodnią, nie podwaja tej powierzchni.) (a) Podczas startu samolot porusza się z prędkością 60,0 m/s, więc prędkość powietrza względem spodu skrzydła wynosi 60,0 m/s. Jak szybko musi się poruszać powietrze ponad górną częścią skrzydła, aby wywołać idealną siłę nośną, jeśli jego gęstość na poziomie morza wynosi $1{,}29\,\mathrm{kg/m}^3$? (b) Jak szybko musi się poruszać powietrze nad górną powierzchnią skrzydła podczas lotu z prędkością przelotową 245 m/s na wysokości, na której gęstość powietrza wynosi jedną czwartą gęstości na poziomie morza? (Zwróć uwagę, że nie jest to cała siła nośna samolotu – część z niej pochodzi z korpusu samolotu, część z odrzutu silników itd. Dodatkowo równanie Bernoulliego daje jedynie przybliżoną odpowiedź, gdyż powietrze, opływając skrzydła, wywołuje turbulencje.)

127. Dwie rury o stałej średnicy wychodzą z przepompowni i wyrzucają wodę z drugiej strony przez otwarty

na ciśnienie atmosferyczne koniec (patrz: rysunek poniżej). Woda wchodzi pod ciśnieniem 2 atm i z prędkością $v_1 = 1{,}0\ \mathrm{m/s}$. Jedna z rur opada o 10 m na swojej długości. Jaka jest prędkość wody wylatującej z każdej z tych rur?



128. Płyn początkowo płynie przez rurę strumieniem $100\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$. Aby zilustrować czułość strumienia na różne czynniki oblicz strumień powstały pod wpływem następujących zmian, przy pozostałych zmiennych o poprzednich wartościach. (a) Różnica ciśnień wzrasta o czynnik 1,50. (b) Użyto innego płynu o 3,0 razy większej lepkości. (c) Rurę zastąpiono inną, o 4,00 razy większej długości. (d) Rurę zastąpiono rurą o średnicy 0,100 oryginalnej średnicy. (e) Rurę zastąpiono jeszcze inną rurą o promieniu 0,100 oryginalnego promienia i o długości o połowę mniejszej przy podniesieniu ciśnienia o 1,50.

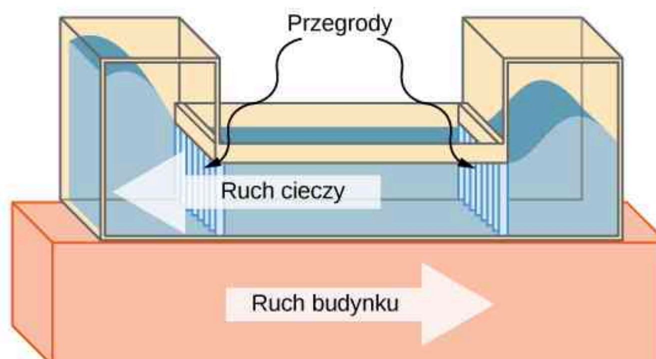
129. Podczas maratonu przepływ krwi u biegaczki rośnie do 10-krotności jej przepływu spoczynkowego. Lepkość jej krwi zaś spada do 95,0% normalnej wartości, a różnica ciśnień wzdłuż układu krwionośnego wzrasta o 50,0%. O ile średnio zwiększą się promienie jej naczyń krwionośnych?

130. W lecie, wcześnie rano, gdy zużycie w sąsiedztwie jest niskie, woda dostarczana do domu przez magistralę wodociągową ma ciśnienie $3{,}00 \cdot 10^5\ \mathrm{N/m^2}$. Wytwarza ono strumień 20,0 l/min w wężu ogrodowym. W późniejszej porze ciśnienie na przyłączu dochodzącym do domu spada i strumień w tym samym wężu wynosi jedynie 8,00 l/min. (a) Jakie ciśnienie jest teraz dostarczane do domu, jeśli opór się nie zmienił? (b) O ile strumień w magistrali wodociągowej musiał się zwiększyć, aby doprowadzić do takiego spadku dostarczonego ciśnienia? Ciśnienie na wejściu magistrali wodociągowej wynosi $5{,}00 \cdot 10^5\ \mathrm{N/m^2}$, a początkowy strumień wynosi 200 l/min. (c) Ilu więcej pojawiło się użytkowników, jeśli każdy z nich z rana zużywa 20,0 l/min?

131. Benzynę z rafinerii przesyła się do dużych odbiorców podziemnym rurociągiem. Strumień wynosi $3{,}00 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m^3/s}$, lepkość benzyny w rurociągu wynosi$1{,}00 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{N \cdot s/m^2}$, a jej gęstość $680\ \mathrm{kg/m^3}$. (a) Jaką minimalną średnicę musi mieć rurociąg, aby liczba Reynoldsa była poniżej 2000? (b) Jaką różnicę ciśnień należy utrzymywać pomiędzy początkiem a końcem każdego kilometra rurociągu, aby utrzymać ten strumień?

15 | DRGANIA





a) b)

Rysunek 15.1 (a) Budynek Comcast Center o wysokości około 305 metrów góruje nad panoramą Filadelfii w stanie Pensylwania. Górne piętra wieżowca mogą ulegać oscylacjom bocznym z powodu aktywności sejsmicznej i podmuchów wiatru. (b) Schematyczny rysunek powyżej przedstawia przestrajalny masowy tłumik drgań w postaci kolumn z wodą o objętości 1100 m^3. Zainstalowany na szczycie budynku układ zmniejsza amplitudę jego drgań.

Treść rozdziału

Wstęp

Analizę drgań rozpoczynamy od oscylacji układów takich jak wahadła i sprężyny. Chociaż układy te mogą wydawać się dość proste, mają wiele praktycznych zastosowań. Interesującym przykładem jest Comcast Center w Filadelfii o wysokości około 305 metrów. Wysoki budynek można traktować jak odwrócone wahadło fizyczne, w którym najwyższe piętra odchylają się na skutek drgań sejsmicznych lub podmuchów wiatru. W budynku Comcast zastosowano **masowy tłumik drgań** (ang. *mass damper*) w celu zmniejszenia amplitudy jego oscylacji. Jest to umieszczony na szczycie zbiornik o objętości 1100 m^3 z kolumnami wypełnionymi wodą. Kształt litery U sprawia, że woda w zbiorniku oscyluje z częstotliwością odpowiadającą częstotliwości drgań własnych budynku. Tłumienie zachodzi dzięki przegrodom regulującym wielkość turbulencji w przepływie wody.

15.1 | Ruch harmoniczny

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- podawać definicję okresu i częstotliwości drgań;
- wymieniać cechy ruchu harmonicznego;
- wyjaśniać pojęcie przesunięcia fazowego;
- zapisywać równania ruchu dla drgającego klocka na sprężynie;
- opisywać ruch masy drgającej na sprężynie w układzie pionowym.

Przy szarpnięciu struny gitary uzyskujemy trwający dość długo dźwięk o stałym tonie (Rysunek 15.2). Struna wykonuje drgania wokół położenia równowagi. Cykl jednego pełnego drgania rozpoczyna się w położeniu początkowym. Stąd struna przemieszcza się do jednego ze skrajnych położeń, po czym wędruje do drugiego skrajnego położenia i wreszcie powraca do położenia początkowego, kończąc tym samym cykl. **Ruch periodyczny** (ang. **periodic motion**) definiujemy jako powtarzającą się zmianę położenia w regularnych odstępach czasu. Przykładami mogą być: ruch struny gitary lub dziecko, które rozbujało się na huśtawce. W tym podrozdziale przedstawiamy podstawowe cechy drgań wraz z ich opisem matematycznym.



Rysunek 15.2 Struna gitarowa po szarpnięciu wykonuje drgania periodyczne (okresowe) w górę i w dół. Struna wywołuje drgania otaczających cząsteczek powietrza i wytwarza fale dźwiękowe. (Źródło: Yutaka Tsutano)

Okres i częstotliwość drgań

W ruchu periodycznym **okresem** (ang. **period**), oznaczanym T, nazywamy czas wykonania jednego pełnego drgania. Za jednostkę okresu przyjmujemy zazwyczaj sekundę, ale może być on wyrażony w innej jednostce czasu (np. minuta, godzina,...). Słowo „okres” oznacza też czas trwania jakiegoś zdarzenia, które może się powtarzać (ale nie musi). W tym podrozdziale zajmiemy się przede wszystkim ruchem okresowym, który z definicji jest ruchem powtarzalnym.

Pojęciem ściśle związanym z okresem jest częstotliwość. **Częstotliwość** (ang. **frequency**), oznaczaną f, określa się jako liczbę zdarzeń na jednostkę czasu. Dla ruchu periodycznego częstotliwość to liczba drgań (oscylacji) w jednostce czasu. Zależność między częstotliwością i okresem określa następujący wzór:

$$f = \frac{1}{T}. \tag{15.1}$$

W układzie SI jednostką częstotliwości jest *herc* (Hz). 1 Hz określa się jako jeden *cykl na sekundę*:

$$1\ \text{Hz} = 1\frac{\text{cykl}}{\text{sekunda}} \quad \text{albo} \quad 1\ \text{Hz} = \frac{1}{\text{s}} = 1\ \text{s}^{-1}.$$

Cykl to jedno pełne **drgnienie** (ang. **pulse**).

Przykład 15.1

Ustalenie częstotliwości fal stosowanych w ultrasonografii (USG)

Urządzenia ultradźwiękowe lekarze wykorzystują w celu obrazowania i badania narządów wewnętrznych ludzkiego ciała. Aparat USG emituje fale dźwiękowe o wysokiej częstotliwości, które odbijają się od narządów. Rejestracja i obróbka komputerowa danych pozwala uzyskać obraz, który następnie analizuje lekarz. Aby określić częstotliwość drgań, możemy zastosować wzór podany powyżej. Rozważmy urządzenie USG generujące ultradźwięki z oscylacjami o okresie $0{,}400\ \mu\text{s}$. Jaka jest częstotliwość tych drgań?

Strategia rozwiązania

Mamy już podany okres drgań (T), zatem musimy wyznaczyć częstotliwość (f).

Rozwiązanie

Podstawmy $0{,}400\ \mu\text{s}$ w miejsce T we wzorze $f = \frac{1}{T}$:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}400 \cdot 10^{-6}\ \text{s}}.$$

co daje:

$$f = 2{,}50 \cdot 10^{6}\ \text{Hz}.$$

Znaczenie

Ta częstotliwość dźwięku jest znacznie wyższa niż najwyższa częstotliwość, jaką człowiek może usłyszeć (zakres słyszalności dźwięków u człowieka wynosi od 20 Hz do ok. 20 000 Hz), dlatego falę tę nazywamy ultradźwiękową. Drgania generowane przez urządzenia USG o tak wysokiej częstotliwości umożliwiają nieinwazyjną diagnostykę medyczną, np. obserwację płodu w łonie matki.

Charakterystyka ruchu harmonicznego

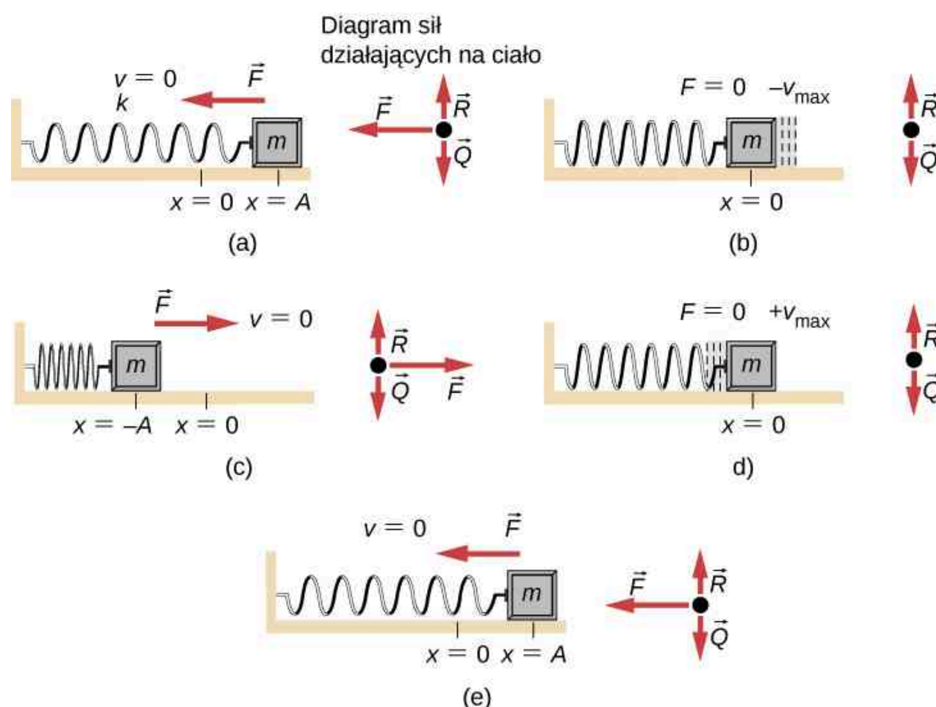
Bardzo powszechnym ruchem periodycznym jest **ruch harmoniczny** (ang. **simple harmonic motion**). Układem, który swobodnie oscyluje i wykonuje ruch harmoniczny, jest **oscylator harmoniczny** (ang. **harmonic oscillator**).

Ruch harmoniczny

W ruchu harmonicznym przyspieszenie układu, a więc i siła wypadkowa, są proporcjonalne do przemieszczenia i skierowane są w kierunku położenia równowagi.

Dobrym przykładem ruchu harmonicznego jest klocek o masie m przymocowany do nieważkiej sprężyny i poruszający się po powierzchni bez tarcia, tak jak pokazano na Rysunku 15.3. Masa wykonuje drgania wokół położenia równowagi, a siła wypadkowa działająca na obiekt jest równa sile wywieranej przez sprężynę. Siła ta spełnia **prawo Hooke’a** $F_s = -kx$, zgodnie z treścią poprzedniego rozdziału.

Jeżeli siłę wypadkową można opisać przez prawo Hooke'a i nie zachodzi *tłumienie* (spowalniające ruch ze względu na tarcie lub inną siłę niezachowawczą), to oscylator harmoniczny wykonuje drgania. Zakres wartości przemieszczeń po obu stronach względem położenia równowagi jest podobny, tak jak pokazano na Rysunku 15.3. Maksymalne przemieszczenie względem położenia równowagi nazywamy **amplitudą** (A). Jednostki amplitudy i przesunięcia są takie same, ale zależą od rodzaju drgań. W przypadku klocka na sprężynie jednostki amplitudy i przemieszczenia wyraża się w metrach.



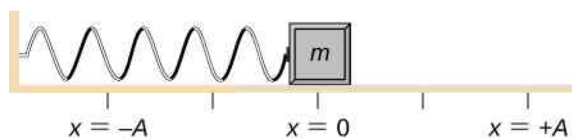
Rysunek 15.3 Dobrym przykładem oscylatora harmonicznego jest klocek przymocowany do sprężyny. Drugi koniec sprężyny przytwierdzono do ściany. Klocek porusza się po powierzchni bez tarcia. Położenie masy, gdy sprężyna nie jest ani rozciągnięta ani ściśnięta, oznaczono jako $x = 0$. Położenie to określa również stan równowagi. (a) Klocek przesunięto do położenia $x = A$, po czym swobodnie go puszczono. (b) Klocek przyspiesza i przemieszcza się w kierunku przeciwnym do zwrotu x i osiąga maksymalną ujemną prędkość w punkcie $x = 0$. (c) Klocek kontynuuje ruch w ujemnym kierunku x, zmniejszając swoją prędkość aż do zatrzymania się w punkcie $x = -A$. (d) Klocek, poruszając się w kierunku zgodnym ze zwrotem osi x, przyspiesza i osiąga maksymalną prędkość w punkcie $x = 0$. (e) Klocek kontynuuje ruch w kierunku dodatnim i zatrzymuje się w punkcie $x = A$. Ruch harmoniczny klocka ma amplitudę A i okres drgań T. Maksymalna prędkość klocka występuje, gdy przechodzi on przez punkt równowagi. Zastosowanie sztywniejszej sprężyny skróciłoby okres T drgań. Przy zwiększeniu masy klocka nastąpiłoby wydłużenie okresu T drgań.

W ruchu harmonicznym okres T i częstotliwość f drgań oscylatora harmonicznego nie zależą od amplitudy drgań, np. struna gitary oscyluje z taką samą częstotliwością zarówno przy mocnym, jak i delikatnym szarpnięciu.

Dwa ważne czynniki wpływają na okres drgań oscylatora harmonicznego: współczynnik sprężystości i masa układu drgającego. Układ z dużą wartością **współczynnika sprężystości** (k) ma krótszy okres drgań. Dzięki temu można, np. odpowiednio wybrać sztywność trampoliny. Im bardziej sztywna, tym szybciej oscyluje, a jej okres drgań jest krótszy. Okres zależy również od masy układu drgającego. Im układ ma większą masę, tym dłuższy jest okres drgań (np. ludzie o dużej masie oscylują na trampolinie z niższą częstotliwością niż ci o mniejszej masie). W rzeczywistości masa m i współczynnik sprężystości k są jedynymi czynnikami, które wpływają na okres i częstotliwość drgań w ruchu harmonicznym. Aby wyprowadzić wyrażenie na okres i częstotliwość drgań, musimy najpierw zdefiniować i przeanalizować równania ruchu.

Równania opisujące ruch harmoniczny

Przyjrzyjmy się klockowi przymocowanemu do sprężyny i poruszającemu się po stole bez tarcia (Rysunek 15.4). **Położenie równowagi** (miejsce, w którym sprężyna nie jest ani rozciągnięta, ani ściśnięta) oznaczono jako $x = 0$. W położeniu równowagi siła wypadkowa wynosi zero.

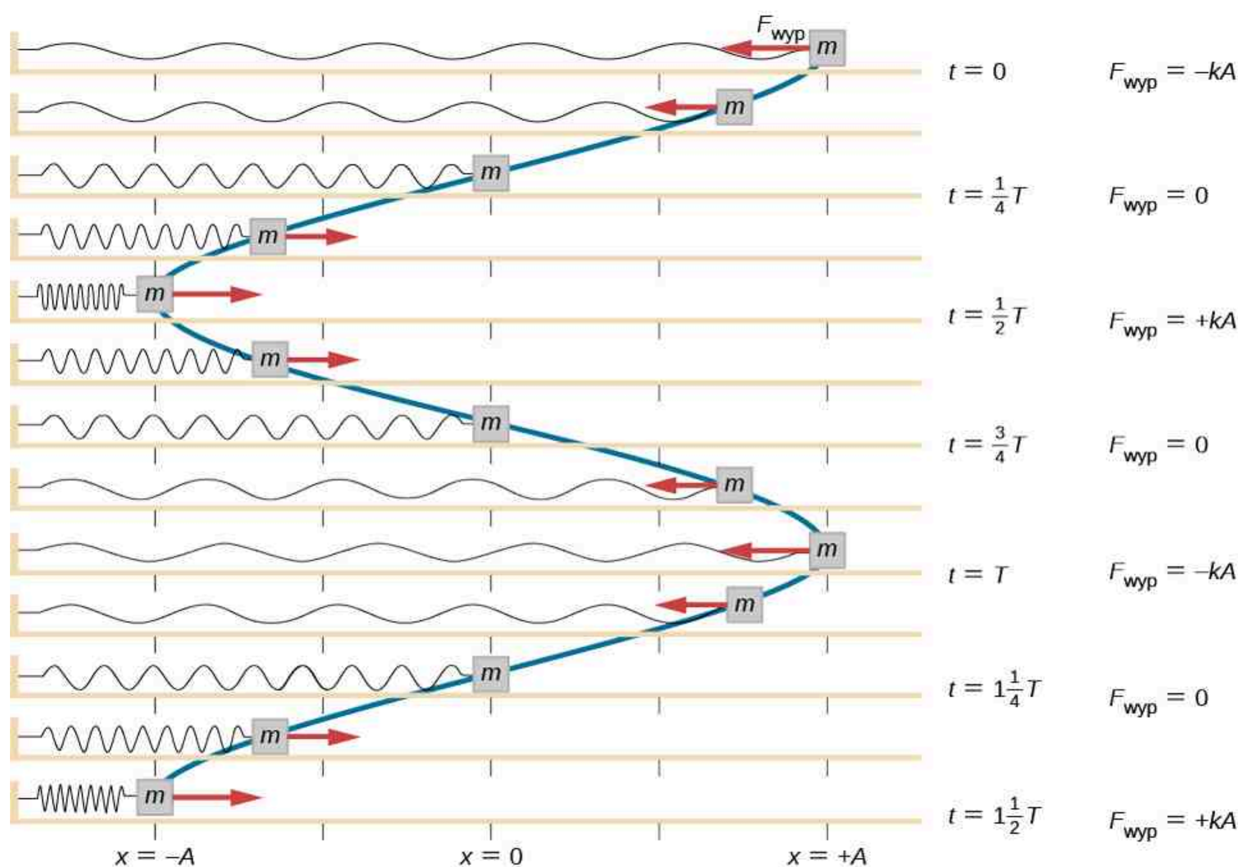


Rysunek 15.4 Klocek przymocowano do sprężyny i umieszczono na stole, po którym może poruszać się bez tarcia. Położenie równowagi dla sprężyny nieodkształconej oznaczono jako $x = 0$.

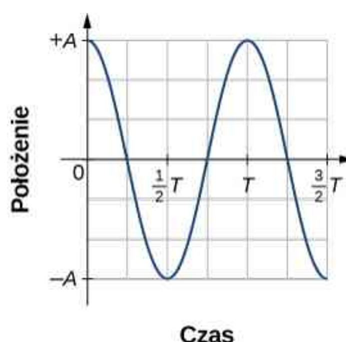
Przesuwamy klocek do położenia $x = +A$, wykonując przy tym pracę, a następnie go puszczamy. Maksymalną wartość położenia $x(A)$ nazywamy amplitudą ruchu drgającego. Klocek zaczyna oscylować w zakresie pomiędzy $x = +A$ a $x = -A$, gdzie A to amplituda ruchu, a T to okres drgań. Okres to czas trwania jednej oscylacji (cyklu). Rysunek 15.5 przedstawia ruch klocka, który wykonał półtora drgania (cyklu) od momentu zwolnienia. Rysunek 15.6 pokazuje wykres położenia klocka w funkcji czasu. Przebieg położenia w funkcji czasu możemy opisać funkcją cosinus o amplitudzie A i okresie T. Wartości funkcji $\cos\theta$ powtarzają się co każdą wielokrotność 2π, natomiast ruch klocka – co jeden okres T. Zauważmy, że wartości funkcji $\cos(2\pi t/T)$ powtarzają się dla każdej chwili t będącej wielokrotnością okresu drgań. Maksimum wartości funkcji cosinus wynosi jeden, dlatego konieczne jest pomnożenie tej funkcji przez amplitudę A.

$$x(t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = A\cos(\omega t)\,. \tag{15.2}$$

Przypomnijmy, że w rozdziale opisującym ruch po okręgu częstość kątową określiliśmy jako $\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$. W rozważanym przypadku wartość okresu drgań jest stała, a więc częstość kątową (kołową) definiuje się jako 2π podzielone przez wartość okresu drgań $\omega = 2\pi/T$.

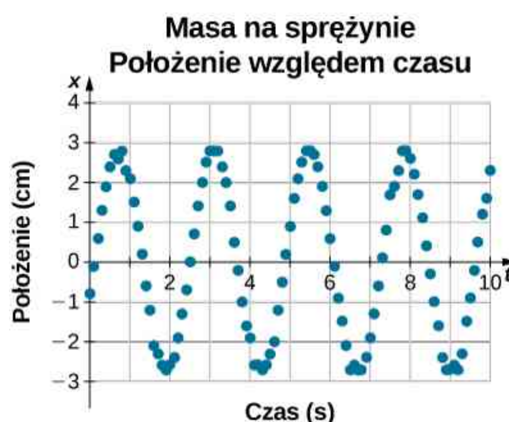


Rysunek 15.5 Klocek umieszczono na stole i przymocowano do jednego końca sprężyny. Drugi koniec sprężyny przymocowano do ściany. Klocek porusza się bez tarcia. Położenie równowagi, dla którego siła wypadkowa równa się zero, oznaczono jako $x = 0\ \text{m}$. Przesuwamy klocek do położenia w punkcie $x = +A$, następnie puszczamy go swobodnie. Masa oscyluje w zakresie położeń pomiędzy $x = +A$ a $x = -A$. Siłę wypadkową działającą na klocek pokazano w postaci wektora.



Rysunek 15.6 Wykres położenia klocka z Rysunku 15.5 w funkcji czasu. Przebieg położenia można modelować funkcją okresową taką jak sinus albo cosinus.

Wyrażenie przedstawiające położenie jako funkcję czasu $x(t) = A\cos(\omega t)$ jest dobrym modelem opisującym sytuację, w której położenie klocka w chwili początkowej $t = 0{,}00\ \text{s}$ jest równe amplitudzie A, a prędkość początkowa wynosi zero. Przykładowe dane eksperymentalne najprawdopodobniej wykażą, że położenie masy w chwili początkowej $t = 0{,}00\ \text{s}$ nie jest równe amplitudzie, a prędkość początkowa jest różna od zera. Rozważmy zbiór danych zebranych przez studenta w laboratorium dla 10 sekund ruchu, który przedstawiono na Rysunku 15.7.

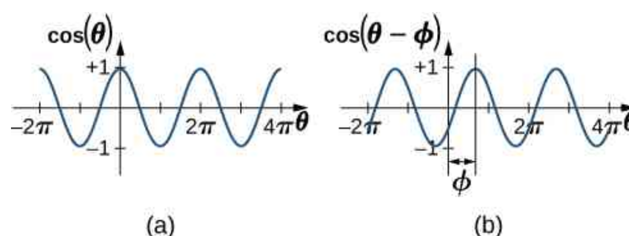


Rysunek 15.7 Dane przedstawiają położenie klocka przymocowanego do sprężyny. Student rejestrował dane w laboratorium, posługując się dalmierzem akustycznym. Dane dla chwili $t = 0{,}00\text{s}$ pokazują, że początkowe położenie klocka wynosi $x \approx -0{,}80\text{ cm} \neq 3{,}00\text{ cm}$, zatem początkowe położenie nie jest równe amplitudzie $x_0 = +A$. Prędkość jest pochodną przemieszczenia względem czasu, stąd można ją obliczyć z nachylenia stycznej do krzywej w danym punkcie. W chwili początkowej wartość kąta nachylenia stycznej nie jest równa zeru, więc prędkość nie wynosi $v = 0{,}00\text{ m/s}$ w chwili $t = 0{,}00\text{ s}$.

Dane na Rysunku 15.7 można opisywać funkcją periodyczną taką jak funkcja cosinus, którą na wykresie przesunięto w prawo. To przesunięcie znane jest jako **przesunięcie fazowe** i zwykle oznacza się je grecką literą fi (ϕ). Przemieszczenie jako funkcję czasu dla danego klocka na sprężynie opisuje wzór:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi).$$

Ten uogólniony wzór opisuje ruch harmoniczny, gdzie t oznacza czas mierzony w sekundach, ω jest częstością kołową mierzoną w radianach na sekundę (rad/s), A jest amplitudą mierzoną w metrach lub centymetrach, a ϕ jest przesunięciem fazowym wyrażonym w radianach (Rysunek 15.8). Należy zauważyć, że skoro funkcje sinus i cosinus różnią się jedynie o przesunięcie fazowe, to ruch harmoniczny może być modelowany zarówno przy użyciu funkcji cosinus, jak i sinus.



Rysunek 15.8 (a) Funkcja cosinus. (b) Funkcja cosinus przesunięta w prawo o kąt o wartości ϕ. Kąt ϕ określa przesunięcie fazowe funkcji.

Prędkość wykonującej ruch harmoniczny masy na sprężynie można wyznaczyć na podstawie pochodnej przemieszczenia względem czasu:

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A\cos(\omega t + \phi)) = -A\omega\sin(\omega t + \phi) = -v_{\text{max}}\sin(\omega t + \phi).$$

Ze względu na to, że funkcja sinus zmienia się w zakresie od -1 do +1, to prędkość maksymalna jest iloczynem amplitudy i częstości kątowej $(v_{\text{max}} = A\omega)$. Maksymalna prędkość występuje podczas przejścia przez położenie równowagi $(x = 0)$, kiedy masa porusza się w kierunku $x = +A$. Maksymalną prędkość w kierunku przeciwnym osiąga się w położeniu równowagi $(x = 0)$, kiedy masa porusza się w kierunku $x = -A$ i wynosi $-v_{\text{max}}$.

Przyspieszenie masy na sprężynie można wyznaczyć z pochodnej prędkości względem czasu:

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-A\omega\sin(\omega t + \phi)) = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi) = -a_{\text{max}}\cos(\omega t + \phi).$$

Wprowadziliśmy oznaczenie $a_{max} = A\omega^2$. W położeniu $x = -A$ przyspieszenie ciała osiąga maksymalną wartość bezwzględną, która wynosi $-a_{max}$.

Podsumowanie wzorów opisujących ruch harmoniczny

Podsumowując, ruch drgający masy na sprężynie może być opisywany następującymi równaniami:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \tag{15.3}$$

$$v(t) = -v_{max}\sin(\omega t + \phi) \tag{15.4}$$

$$a(t) = -a_{max}\cos(\omega t + \phi) \tag{15.5}$$

$$x_{max} = A \tag{15.6}$$

$$v_{max} = A\omega \tag{15.7}$$

$$a_{max} = A\omega^2. \tag{15.8}$$

W tym przypadku A jest amplitudą ruchu, T jest okresem drgań, ϕ jest przesunięciem fazowym, a $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ jest częstością kołową ruchu klocka.

Przykład 15.2

Wyznaczanie wyrażeń opisujących ruch klocka na sprężynie

Klocek o masie 2 kg umieszczono na idealnie gładkiej powierzchni, a tarcie nie wpływa na ruch klocka. Sprężynę o współczynniku sprężystości $k = 32{,}00\ \mathrm{N/m}$ przymocowano do klocka, a jej przeciwny koniec przyczepiono do ściany. Sprężyna może ulec skróceniu lub rozciągnięciu. Położenie równowagi układu oznaczono jako $x = 0{,}00\ \mathrm{m}$.

Praca wykonana nad klockiem powoduje jego przesunięcie do położenia $x = +0{,}02\ \mathrm{m}$. Klocek puszczono swobodnie, powodując jego oscylacje w zakresie wartości przemieszczeń pomiędzy $x = +0{,}02\ \mathrm{m}$ a $x = -0{,}02\ \mathrm{m}$. Okres drgań wynosi 1,57 s. Wyznacz wyrażenia opisujące ruch.

Strategia rozwiązania

Najpierw wyznaczamy wartość częstości kołowej. Przesunięcie fazowe jest zerowe, $\phi = 0{,}00\ \mathrm{rad}$, ponieważ ruch klocka zaczyna się w położeniu $x = A = +0{,}02\ \mathrm{m}$. Po wyznaczeniu częstości kątowej możemy określić maksymalne wartości prędkości i przyspieszenia klocka.

Rozwiązanie

Częstość kątową możemy wyznaczyć, a następnie użyć do wyliczenia maksymalnych wartości prędkości i przyspieszenia:

$$\omega = \frac{2\pi}{1{,}57\ \mathrm{s}} = 4{,}00\ \frac{1}{\mathrm{s}}$$

$$v_{max} = A\omega = 0{,}02\ \mathrm{m} \cdot 4{,}00\ \frac{1}{\mathrm{s}} = 0{,}08\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$a_{max} = A\omega^2 = 0{,}02\ \mathrm{m} \cdot \left(4{,}00\ \frac{1}{\mathrm{s}}\right)^2 = 0{,}32\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Możemy więc zapisać następujące wyrażenia opisujące ruch masy:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) = 0{,}02\,\text{m} \cdot \cos\left(4{,}00\,\frac{1}{\text{s}} \cdot t\right)$$
$$v(t) = -v_{\text{max}}\sin(\omega t + \phi) = -0{,}08\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sin\left(4{,}00\,\frac{1}{\text{s}} \cdot t\right)$$
$$a(t) = -a_{\text{max}}\cos(\omega t + \phi) = -0{,}32\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos\left(4{,}00\,\frac{1}{\text{s}} \cdot t\right).$$

Znaczenie

Dla dowolnej chwili ruchu drgającego możemy określić położenie, prędkość i przyspieszenie. Ważne jest, aby przy korzystaniu z kalkulatora ustalić tryb rad (radiany) jako jednostkę miary kąta.

Okres i częstotliwość drgań masy na sprężynie

Jedną z cech ruchu harmonicznego klocka umocowanego do sprężyny jest to, że częstość kołowa, a więc okres i częstotliwość drgań, zależą tylko od masy i współczynnika sprężystości, a nie od innych czynników (np. od amplitudy drgań). Możemy więc skorzystać z prawa Hooke'a i drugiej zasady dynamiki Newtona $\vec{F} = m\vec{a}$, aby znaleźć wzory na częstość kołową, częstotliwość i okres drgań.

Przyjrzyjmy się klockowi na sprężynie poruszającemu się po powierzchni bez tarcia. Na masę działają trzy siły: siła ciężkości, siła normalna i siła sprężystości. Siły, które działają prostopadle do powierzchni, to siła ciężkości i siła normalna, mające jednakowe wartości i przeciwne kierunki, a ich suma wynosi zero. Jedyną siłą, która działa równolegle do powierzchni, jest siła sprężystości, a więc siła wypadkowa jest równa sile wywieranej przez sprężynę na klocek:

$$\begin{aligned} F_x &= -kx \\ ma &= -kx \\ m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= -kx \\ \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= -\frac{k}{m}x. \end{aligned}$$

Podstawiając Równanie 15.3 i Równanie 15.5 w miejsce x i a otrzymujemy:

$$-A\omega^2\cos(\omega t + \phi) = -\frac{k}{m}A\cos(\omega t + \phi).$$

Po wyłączeniu podobnych członów wyznaczamy częstość kołową:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{15.9}$$

Częstość kołowa zależy jedynie od współczynnika sprężystości i masy klocka, a nie od amplitudy drgań. Wykorzystując wzór na częstość kołową $\omega = 2\pi/T$ otrzymujemy wzór na okres drgań:

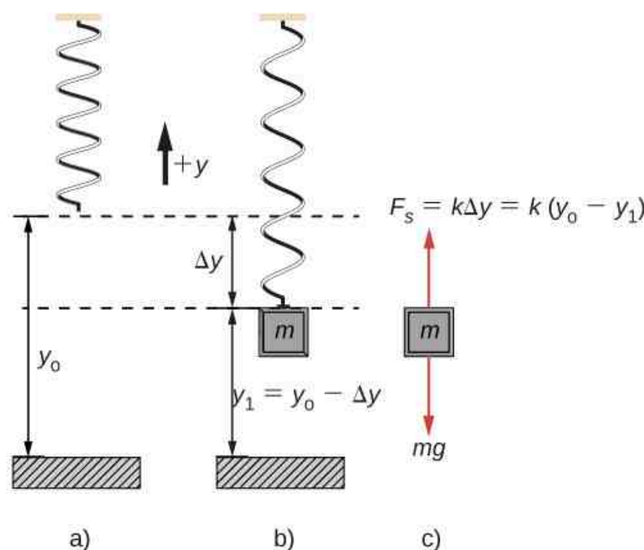
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{15.10}$$

Okres drgań zależy tylko od masy klocka i współczynnika sprężystości. Im większa masa, tym dłuższy okres, a im sztywniejsza sprężyna, tym okres jest krótszy. Częstotliwość opisuje wzór:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{15.11}$$

Drgania pionowe

Zgodnie z Rysunkiem 15.9 do sprężyny zawieszonej pionowo przymocowano klocek. Zauważmy, że siła grawitacji zmienia położenie równowagi układu. Na klocek działają dwie siły: ciężar i siła sprężystości. Siła ciężkości jest stała, a siła sprężystości zmienia się wraz ze zmianą długości sprężyny. Klocek wykonuje ruch harmoniczny.



Rysunek 15.9 Sprężynę zawieszono pod sufitem. Po przyłączeniu klocka masa znajduje się w nowym położeniu równowagi; w punkcie tym siła ciężkości jest zrównoważona siłą sprężystości. (a) Sprężyna zwisa z sufitu; położenie równowagi oznaczono jako y_o . (b) Masa, którą zamocowano na sprężynie, osiąga nowe położenie równowagi ($y_1 = y_o - \Delta y$), kiedy siła działająca na klocek równa się sile ciężkości. (c) Diagram dwóch sił działających na masę: siły ciężkości i siły sprężystości.

Gdy klocek osiąga położenie równowagi tak jak na Rysunku 15.9, wartość siły sprężystości jest równa wartości siły ciężkości działającej na klocek $F_{\text{wyp}} = F_{\text{s}} - mg = 0$, gdzie:

$$-k(-\Delta y) = mg.$$

Z rysunku możemy wywnioskować, że zmiana położenia wynosi $\Delta y = y_0 - y_1$, a zatem otrzymujemy:

$$k(y_0 - y_1) - mg = 0.$$

Jeżeli klocek przesuniemy w płaszczyźnie pionowej, a następnie powoli puścimy, to będzie oscylować wokół nowego położenia równowagi. Jak pokazano na Rysunku 15.10, jeżeli położenie klocka określono w funkcji czasu, to dane tworzą funkcję okresową.

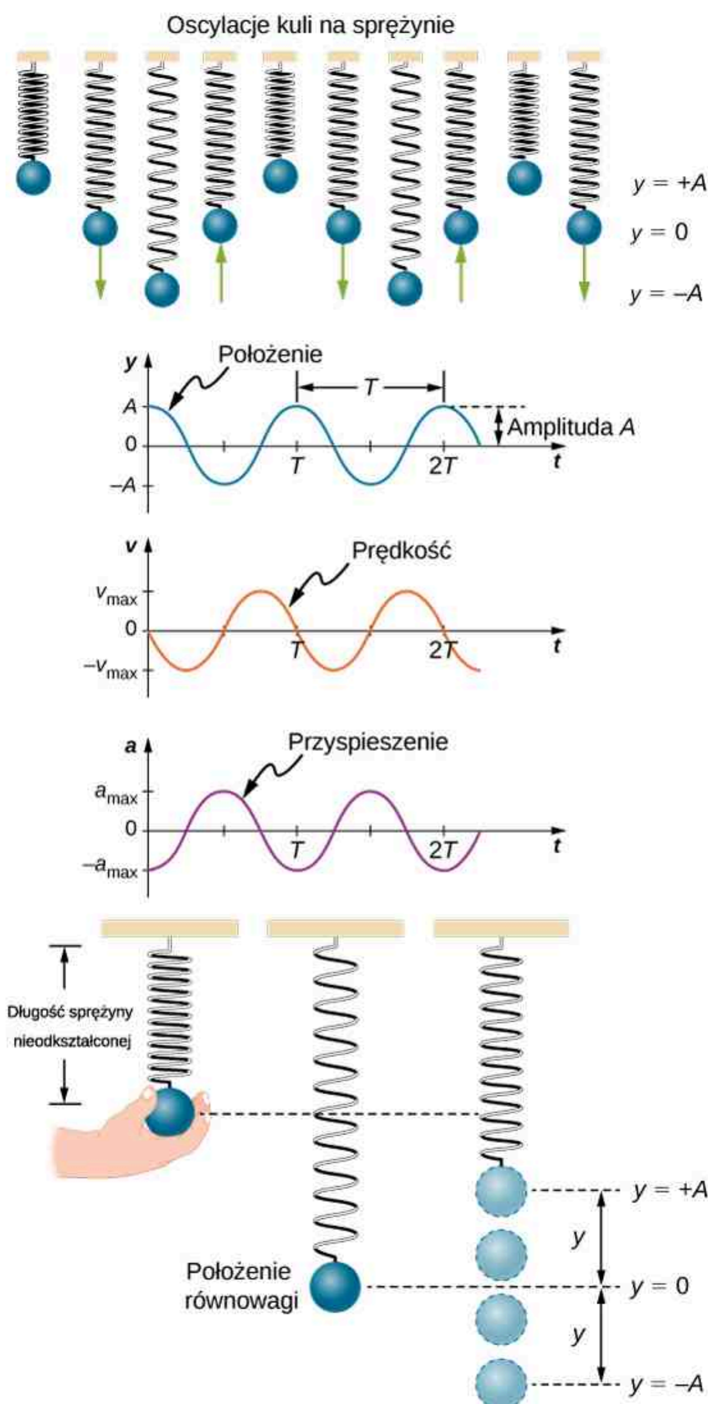
Jeśli klocek przesuniemy do pozycji y, to siła wypadkowa wyniesie $F_{\text{wyp}} = k(y - y_0) - mg = 0$. Dla położenia równowagi zachodzi zależność $mg = k\Delta y = ky_0 - ky_1$, a zatem:

$$F_{\text{wyp}} = ky - ky_0 - (ky_0 - ky_1) = -k(y - y_1).$$

Przypominamy, że y_1 jest położeniem równowagi, które możemy określić względem dowolnego punktu, może więc przykładowo wynosić $0\ \text{m}$. Wówczas siła wypadkowa wyniesie:

$$F_{\text{wyp}} = -ky$$
$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -ky.$$

Jest to więc zależność analogiczna do tej, którą wcześniej znaleźliśmy dla horyzontalnie drgającej masy na sprężynie. Działanie stałej siły grawitacji spowodowało jedynie zmianę położenia punktu równowagi. W związku z tym końcowe rozwiązanie powinno mieć taką samą postać jak dla klocka drgającego w poziomie: $y(t) = A\cos(\omega t + \phi)$. Zauważmy też, że ruch możemy opisać funkcją cosinus lub sinus, ponieważ te dwie funkcje różnią się jedynie o wartość przesunięcia fazowego. Podobnie równania określające prędkość i przyspieszenie klocka drgającego pionowo mają postać identyczną jak wzory dla ruchu horyzontalnego.



Rysunek 15.10 Wykresy $y(t)$, $v(t)$ i $a(t)$ w funkcji czasu t dla pionowych drgań kuli na sprężynie. Siłę wypadkową działającą na kulę można opisać prawem Hooke'a, więc kula porusza się ruchem harmonicznym. Należy zauważyć, że początkowe położenie osiąga wartość maksymalną A ; v jest początkowo zerowa, a następnie staje się ujemna, kiedy kula porusza się w dół. Początkowe przyspieszenie jest ujemne, następnie kula przesuwając się do położenia równowagi, osiąga zerową wartość przyspieszenia.

15.2 | Energia w ruchu harmonicznym

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać zasadę zachowania energii dla układu klocek–sprężyna;
- wyjaśniać pojęcia trwałych i nietrwałych położeń równowagi.

Aby odkształcić ciało, musimy wykonać pracę. Innymi słowy niezależnie od tego, czy chcemy szarpnąć strunę gitary, czy skrócić amortyzator w samochodzie, musimy zadziałać siłą z pewnej odległości. Jeśli jedynym rezultatem tego działania jest deformacja ciała i wykonana praca nie przekształca się w energię termiczną, energię fali dźwiękowej lub energię kinetyczną, to wykonana praca magazynuje się w zdeformowanym obiekcie jako pewna forma energii potencjalnej.

Przyjrzyjmy się klockowi połączonemu ze sprężyną, poruszającemu się ruchem harmonicznym po stole bez tarcia. Możemy zdefiniować energię potencjalną dla tego układu, ponieważ siła sprężystości jest siłą zachowawczą (opisaną w rozdziale dotyczącym energii potencjalnej sprężystości i zasady zachowania energii). Energię potencjalną stanowi energia zmagazynowana w sprężynie, gdy sprężyna jest odkształcona (rozciągnięta lub skrócona). Klocek może wykonywać drgania w jednym wymiarze w obecności siły sprężystości działającej równolegle do osi ruchu:

$$W = \int_{x_p}^{x_k} F_x \mathrm{d}x = \int_{x_p}^{x_k} -kx\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}kx^2\right]_{x_p}^{x_k} = -\left[\frac{1}{2}kx_k^2 - \frac{1}{2}kx_p^2\right] = -[E_{\mathrm{psprk}} - E_{\mathrm{psprp}}] = -\Delta E_{\mathrm{pspr}}.$$

Położenie równowagi oznaczone jako $x_i = 0{,}00 \text{ m}$ jest położeniem, dla którego energia zmagazynowana w sprężynie równa się zeru. Gdy sprężynę rozciągniemy lub skrócimy o odległość x, to energia potencjalna zmagazynowana w sprężynie wyniesie:

$$E_{\mathrm{pspr}} = \frac{1}{2}kx^2.$$

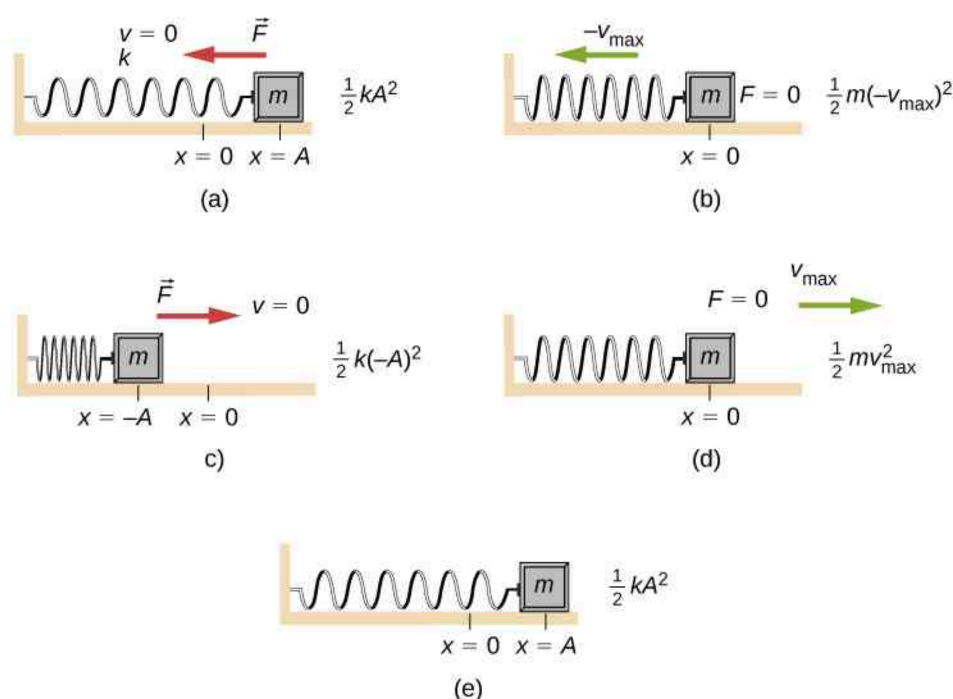
Energia i oscylator harmoniczny

Aby opisać energię oscylatora harmonicznego, musimy wziąć pod uwagę wszystkie formy energii. Zastanówmy się nad klockiem połączonym ze sprężyną, który oscyluje w ruchu harmonicznym, przesuwając się po powierzchni bez tarcia. Energia potencjalna zmagazynowana w odkształconej sprężynie wynosi:

$$E_{\mathrm{pspr}} = \frac{1}{2}kx^2.$$

W **oscylatorze harmonicznym** energia zmienia się z energii kinetycznej drgającej masy $E_{\mathrm{k}} = mv^2/2$ w energię potencjalną $E_{\mathrm{pspr}} = kx^2/2$ zmagazynowaną w sprężynie. W przypadku, gdy w ruchu harmonicznym układu masy i sprężyny nie występują siły dyssypacji, całkowita energia układu jest sumą energii potencjalnej i kinetycznej. Zasadę zachowania energii w tym układzie opisano poniżej. To podejście będzie słuszne dla wszystkich oscylatorów harmonicznych, w tym również dla przypadków, gdzie kluczową rolę odgrywa siła grawitacji.

Przyjrzyjmy się Rysunkowi 15.11, który przedstawia oscylujący klocek przymocowany do sprężyny. Przy braku tłumienia w ruchu harmonicznym energia przechodzi całkowicie z jednej formy w drugą w czasie, kiedy układ wykonuje drgania. W tym prostym przykładzie ruchu klocka na sprężynie po powierzchni bez tarcia w chwili początkowej cała energia magazynuje się w sprężynie. Energię tę nazywamy **energią potencjalną sprężystości**. Kiedy klocek zaczyna się poruszać, energia potencjalna sprężystości przekształca się w energię kinetyczną, a w położeniu równowagi w całości staje się energią kinetyczną klocka. Następnie energia kinetyczna z powrotem przekształca się w energię potencjalną sprężystości, gdy sprężyna jest rozciągana lub ściskana. W skrajnych położeniach prędkość klocka wynosi zero, a więc energia kinetyczna też jest równa zeru. Cykl przemian się powtarza. Zrozumienie zasady zachowania energii w tych cyklach pozwala zrozumieć zagadnienia omawiane w dalszej części podrozdziału, a także wyjaśnia ruch harmoniczny polegający na oscylacjach ładunku w obwodzie typu LC.



Rysunek 15.11 Przemiana energii w ruchu harmonicznym dla klocka przymocowanego do sprężyny. Ruch odbywa się bez tarcia powierzchniowego. (a) Gdy masa znajduje się w położeniu $x = +A$, cała energia magazynuje się w sprężynie jako energia potencjalna sprężystości $E_{pspr} = kA^2/2$. Energia kinetyczna jest równa zeru, ponieważ prędkość masy wynosi zero. (b) Gdy klocek porusza się w kierunku $x = -A$, masa przechodzi przez położenie $x = 0$. W tym momencie sprężyna nie jest ani rozciągnięta, ani skrócona, więc energia zmagazynowana w sprężynie wynosi zero. W położeniu $x = 0$ całkowita energia jest energią kinetyczną $E_k = m(-v_{max})^2/2$. (c) Masa kontynuuje ruch, aż osiągnie położenie $x = -A$, w którym klocek zatrzymuje się, a następnie zaczyna się poruszać w kierunku $x = +A$. W położeniu $x = -A$ całkowita energia magazynuje się jako energia potencjalna sprężystości $E_{pspr} = k(-A)^2/2$. Energia kinetyczna klocka jest równa zero. (d) Kiedy masa przechodzi przez położenie $x = 0$, energia kinetyczna wynosi $E_k = mv_{max}^2/2$, a energia potencjalna sprężystości jest zerowa. (e) Masa wraca do położenia $x = +A$, gdzie $E_k = 0$ i $E_{pspr} = kA^2/2$.

Rozważmy Rysunek 15.11, który przedstawia wartości energii w poszczególnych punktach ruchu drgającego klocka. Podczas gdy całkowita energia pozostaje wartością stałą, zmieniają się w czasie udziały energii kinetycznej klocka i energii potencjalnej zmagazynowanej w sprężynie:

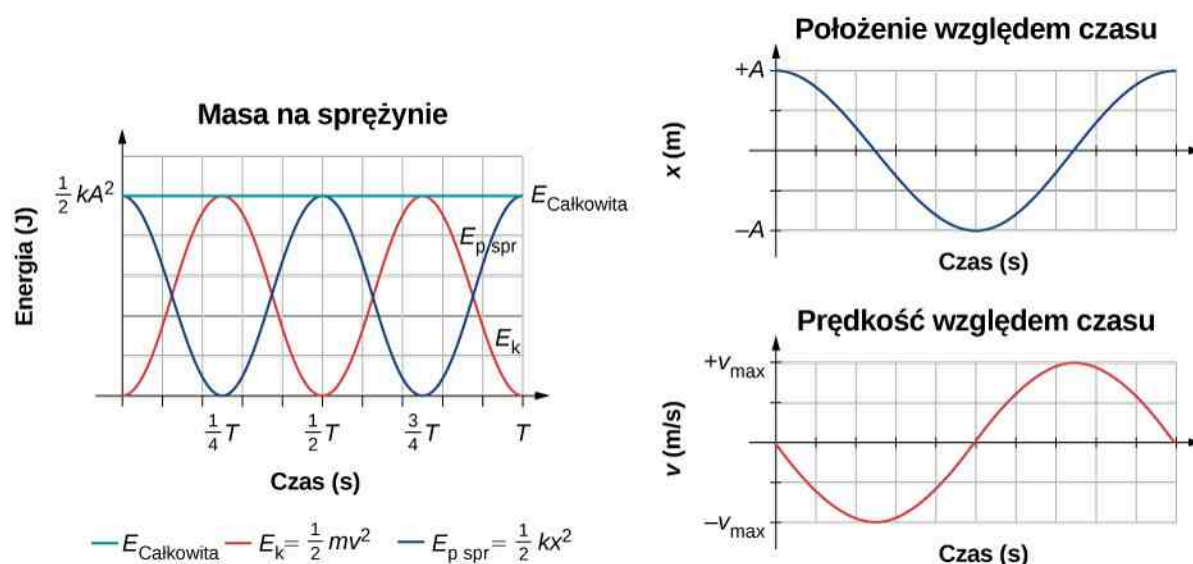
$$E_{całkowita} = E_{pspr} + E_k = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2.$$

Ruch klocka na sprężynie to ruch harmoniczny, który określają wyrażenia na położenie $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ i prędkość $v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$. Korzystając z tych wyrażeń, zależności trygonometrycznej $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ i relacji $\omega = \sqrt{k/m}$, możemy wyznaczyć energię całkowitą układu:

$$\begin{aligned} E_{całkowita} &= \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \phi) \\ &= \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}mA^2\frac{k}{m}\sin^2(\omega t + \phi) \\ &= \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \phi) \\ &= \frac{1}{2}kA^2\left(\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)\right) \\ &= \frac{1}{2}kA^2. \end{aligned}$$

Energia całkowita klocka i sprężyny jest równa sumie energii potencjalnej sprężystości zmagazynowanej w sprężynie oraz energii kinetycznej klocka i wzrasta wraz z kwadratem amplitudy drgań $E_{\text{całkowita}} = kA^2/2$. Energia całkowita układu jest stała w czasie.

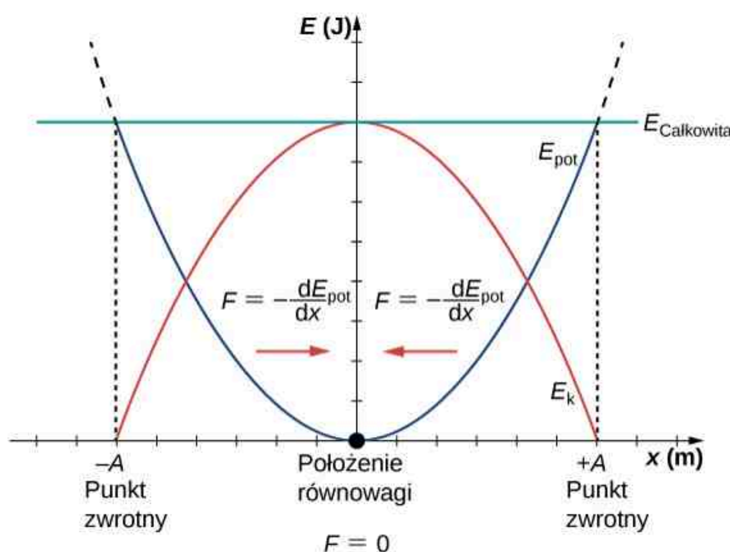
Warto zauważyć, że energia kinetyczna klocka zmienia się w czasie tak jak kwadrat funkcji sinus, natomiast energia potencjalna sprężystości zmienia się jak kwadrat funkcji cosinus. Niemniej jednak całkowita energia układu jest stała i zwiększa się wraz z kwadratem amplitudy drgań. Rysunek 15.12 przedstawia czasowe zależności energii potencjalnej sprężystości i energii kinetycznej oraz energię całkowitą układu klocka i sprężyny. Pokazano również wykresy położenia i prędkości klocka w funkcji czasu. W chwili czasu $t = 0$ s położenie klocka jest równe amplitudzie przesunięcia, energia potencjalna zmagazynowana w sprężynie jest równa $E_{\text{pspr}} = kA^2/2$, siła sprężystości działająca na klocek jest maksymalna i ma zwrot przeciwny do zwrotu osi x $(F_S = -kA)$. Prędkość i energia kinetyczna klocka w chwili $t = 0$ s mają wartości zerowe. W chwili $t = 0$ s klocek zwolniono, co dało początek ruchowi drgającemu.



Rysunek 15.12 Wykres energii kinetycznej, energii potencjalnej sprężystości i energii całkowitej układu w ruchu harmonicznym. Pokazano również wykresy położenia i prędkości w funkcji czasu. Całkowita energia układu jest stała, ale następuje zmiana udziałów energii kinetycznej i energii potencjalnej sprężystości. Kiedy energia kinetyczna osiąga wartość maksymalną, to energia potencjalna sprężystości wynosi zero. Dzieje się tak w chwilach, gdy prędkość klocka jest maksymalna i masa znajduje się w położeniu równowagi. Natomiast energia potencjalna sprężystości osiąga maksimum, gdy prędkość klocka wynosi zero. Całkowita energia stała w czasie jest sumą energii kinetycznej klocka oraz energii potencjalnej zmagazynowanej w sprężynie.

Oscylacje względem położenia równowagi

Powyżej rozważaliśmy energię układu w ruchu harmonicznym w funkcji czasu. Przeanalizujmy teraz energię **oscylatora harmonicznego** jako funkcję położenia klocka. Rysunek 15.13 przedstawia wykres energii układu względem położenia klocka poruszającego się ruchem harmonicznym.



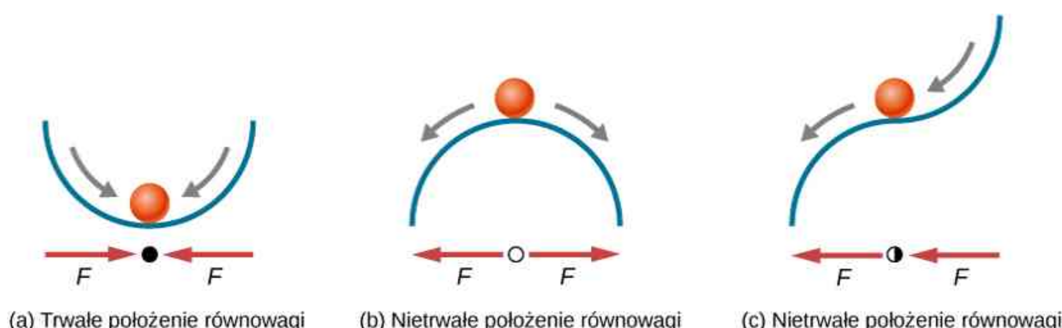
Rysunek 15.13 Wykres energii kinetycznej (czerwony), energii potencjalnej (niebieski) i energii całkowitej (zielony) oscylatora harmonicznego. Siłę opisano wyrażeniem $F = -dE_{\text{pot}}/dx$. Położenie równowagi oznaczono czarną kropką, w którym siła sprężystości jest równa zeru. Siła ta jest dodatnia, gdy $x < 0$, ujemna gdy $x > 0$, a równa zeru, gdy $x = 0$.

Kształt krzywej energii potencjalnej sprężystości na Rysunku 15.13 przypomina miskę. Gdy kulę umieścimy w misce, to osiągnie stan równowagi w najniższym punkcie naczynia $(x = 0)$. Dzieje się tak dlatego, że **siła zwrotna** jest skierowana do położenia równowagi. To położenie równowagi określa też *minimum energii potencjalnej*. Gdy kulę wytrącimy z położenia równowagi do nowego położenia $(x = +A)$, to wykona ona drgania wokół położenia równowagi. Na wykresie energii potencjalnej wartość siły możemy znaleźć dla dowolnego położenia jako tangens kąta nachylenia krzywej w punkcie x wzięty z przeciwnym znakiem $(F = -dE_{\text{pot}}/dx)$. Ze względu na to, że siłę po obu stronach położenia równowagi skierowano w kierunku tego punktu, równowagę tę nazywamy trwałą (stabilną). Położenia $x = A$ i $x = -A$ nazywamy **punktami zwrotnymi**. (Patrz: Energia potencjalna i zasada zachowania energii).

Musimy też pamiętać o **stabilności**, ponieważ jeśli położenie równowagi jest trwałe, to niewielkie zakłócenie działające na kulę, która początkowo znajduje się w punkcie równowagi trwałej $(x = 0)$, wywoła oscylacje kuli względem tego punktu. Siła działająca na kulę będzie skierowana w kierunku położenia równowagi trwałej. Natomiast w przypadku kuli znajdującej się w położeniu **równowagi nietrwałej** (niestabilnej, chwiejnej), nawet lekkie wychylenie z położenia równowagi spowoduje, że nie wróci już samoistnie do tego położenia równowagi.

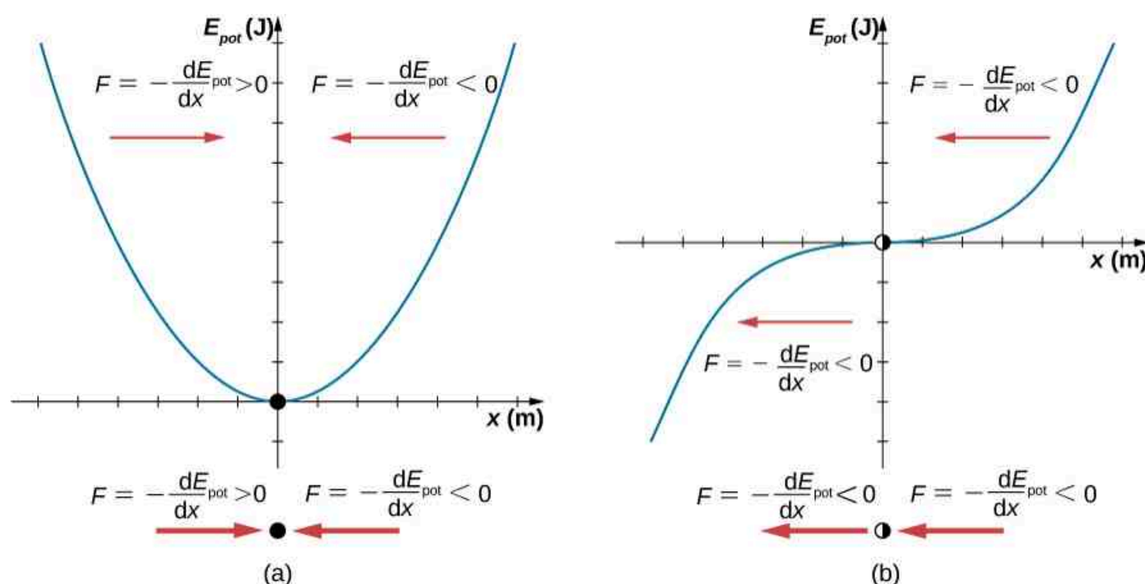
Rozważmy przykład kuli i miski. Jeśli miskę ustawimy dnem do podłoża, to nawet lekko wychylona kula będzie oscylować wokół trwałego punktu równowagi. Jeśli jednak naczynie odwrócimy dnem do góry, a kulę starannie położymy dokładnie w najwyższym punkcie, to może ona przez pewien czas utrzymać stan równowagi, gdyż działająca siła wypadkowa wyniesie zero. Wystarczy jednak delikatne wychylenie, by zainicjować stoczenie się kuli ze szczytu miski. Dzieje się tak dlatego, że siły działające po obu stronach punktu równowagi są skierowane od tego punktu. Punkt na szczycie miski znajduje się więc w stanie równowagi nietrwałej.

Rysunek 15.14 pokazuje trzy sytuacje. Pierwsza z nich przedstawia położenie równowagi trwałej, któremu odpowiada minimum energii potencjalnej (a); druga to punkt równowagi nietrwałej położony w maksimum energii potencjalnej (b); ostatnia sytuacja również dotyczy położenia równowagi nietrwałej, ponieważ jedynie siła po prawej stronie działa na kulę w kierunku położenia równowagi (c).



Rysunek 15.14 Przykłady położeń równowagi: (a) trwałe położenie równowagi, (b) i (c) nietrwałe położenia równowagi.

Procedura ustalenia, czy dane położenie równowagi jest trwałe czy nietrwałe, może być sformalizowana. Rozważmy krzywą energii potencjalnej pokazaną na Rysunku 15.15. Siła może zostać oszacowana na podstawie analizy nachylenia wykresu. Wartość siły jest określona wzorem $F = -\mathrm{d}E_{\mathrm{pot}} / \mathrm{d}x$. W punkcie (a), gdy $x < 0\ \mathrm{m}$, siła jest dodatnia. Gdy $x > 0\ \mathrm{m}$, siła ta jest ujemna. Wobec tego punkt przy $x = 0\ \mathrm{m}$ jest położeniem trwałym. W (b), gdy $x < 0\ \mathrm{m}$, siła jest ujemna. Gdy $x > 0\ \mathrm{m}$, siła jest również ujemna, więc punkt przy $x = 0\ \mathrm{m}$ jest nietrwałym położeniem.



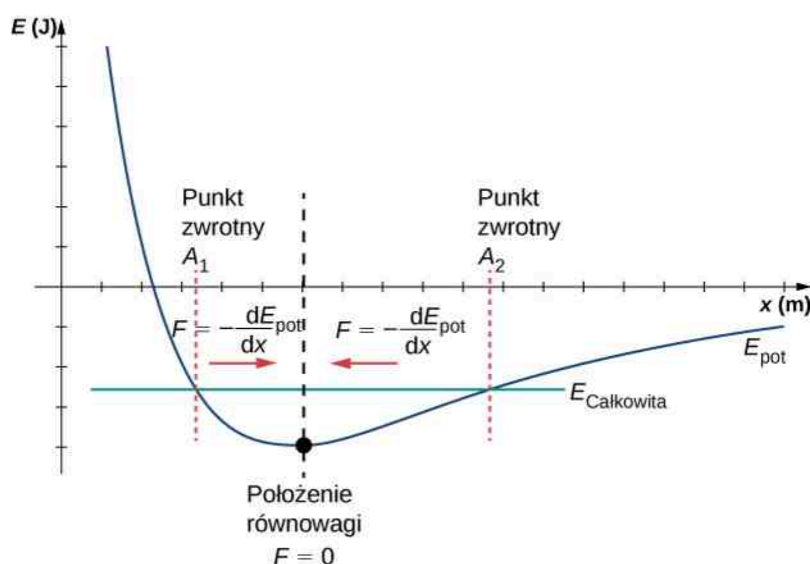
Rysunek 15.15 Dwa przykłady krzywej energii potencjalnej. Siła w danym punkcie jest równa ujemnej wartości tangensa kąta nachylenia krzywej w tym położeniu. (a) Wykres energii potencjalnej dla trwałego położenia równowagi. (b) Wykres energii potencjalnej dla nietrwałego położenia równowagi. Położenie to nazywa się czasem półstabilnym, ponieważ siła działająca dla położeń $x > 0\ \mathrm{m}$ jest zwrócona w kierunku punktu $x = 0\ \mathrm{m}$.

Koncepcja trwałego położenia równowagi znajduje praktyczne zastosowanie w opisie siły działającej pomiędzy dwoma obojętnymi atomami lub cząsteczkami. Gdy dwa atomy znajdują się w bliskim sąsiedztwie i są oddzielone kilkoma średnicami atomowymi, mogą wystąpić siły przyciągania. Jednym z przykładów sił przyciągania pomiędzy dwoma atomami są siły van der Waalsa. W przypadku dalszego zbliżania atomów, tak że ich powłoki elektronowe będą się nakładać, pojawią się siły odpychające. Siła oddziaływania pomiędzy dwoma atomami nie jest liniowa i nie można jej opisać przez układ dwóch mas odseparowanych sprężyną, ale atomy w cząsteczce mogą oscylować wokół punktu równowagi, jeśli przesuną się tylko trochę poza ten punkt. Na skutek działania sił przyciągających i odpychających atomy wykonują drgania.

Szczegółowa dyskusja na temat oddziaływań międzyatomowych wykracza poza zakres tego rozdziału, ale warto wiedzieć, że drgania atomów odbywają się wzdłuż **krzywej energii potencjalnej Lennarda-Jonesa 6-12**:

$$E_{\mathrm{pot}}(x) = 4\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{x} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x} \right)^{6} \right].$$

Wykres tej funkcji pokazano na Rysunku 15.16. Dwa parametry ε i σ wyznaczono na podstawie danych doświadczalnych.



Rysunek 15.16 Krzywa energii potencjalnej Lennarda-Jonesa dla układu dwóch obojętnych atomów. Jeżeli energia układu nie jest zbyt wysoka, to układ wykonuje drgania w pobliżu położenia równowagi pomiędzy dwoma punktami zwrotnymi.

Na wykresie można zauważyć, że krzywa energii potencjalnej Lennarda- Jonesa ma pewne podobieństwa do krzywej energii potencjalnej przedstawionej na Rysunku 15.13 dla oscylatora harmonicznego. Na krzywej potencjału Lennarda-Jonesa znajduje się położenie równowagi, dla którego energia potencjalna jest minimalna i siła działająca po obu stronach punktu równowagi skierowana jest w stronę tego punktu (tzw. siła zwrotna). Należy zauważyć, że w przeciwieństwie do oscylatora harmonicznego, kształt krzywej energii potencjalnej Lennarda-Jonesa nie jest symetryczny. Wynika to z faktu, że siła działająca pomiędzy atomami nie jest funkcją liniową względem położenia x, tzn. nie spełnia prawa Hooke'a tak, jak siła sprężystości. Atomy mogą wykonywać drgania wokół stanu równowagi x_{min}, ponieważ gdy $x < x_{\text{min}}$, siła jest dodatnia, natomiast gdy $x > x_{\text{min}}$, siła jest ujemna. Zauważmy, że gdy x zbliża się do zera, to nachylenie krzywej jest dość strome i tangens kąta nachylenia jest wartością ujemną, a to oznacza, że siła ma dużą wartość i jej zwrot jest zgodny ze zwrotem osi x. Można więc wywnioskować, że siła ta odpycha atomy od siebie. Z kolei dla położeń przyjmujących coraz większe wartości x, nachylenie staje się mniej strome, siła ma coraz mniejszą wartość, a jej zwrot jest przeciwny do zwrotu osi x. Wobec tego jeśli układ ma wystarczająco dużo energii, to atomy mogą ulec rozdzieleniu.

Możemy też obliczyć siły międzycząsteczkowe z funkcji energii potencjalnej. Zauważmy, że siła różni się od tej z prawa Hooke'a $(F = -kx)$, ale znając dwumian Newtona:

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots,$$

siłę tę można w przybliżeniu obliczyć z prawa Hooke'a.

Prędkość i zasada zachowania energii

Wróćmy do układu klocka i sprężyny z Rysunku 15.11. W chwili, gdy klocek zostaje wytrącony ze stanu spoczynku przy $x = A$, zaczyna poruszać się w kierunku położenia równowagi. Energia potencjalna sprężystości zmniejsza się, a prędkość i energia kinetyczna klocka wzrastają. W chwili $t = T/4$ klocek osiąga położenie równowagi $x = 0\,\text{m}$, gdzie zarówno siła działająca na klocek, jak i energia potencjalna są wartościami zerowymi. W położeniu równowagi klocek osiąga maksymalną ujemną prędkość o wartości $v = -A\omega$. Energia kinetyczna jest najwyższa i wynosi $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \frac{1}{2}kA^2$. W tej chwili siła działająca na klocek wynosi zero, ale pęd klocka powoduje kontynuację ruchu w kierunku punktu $x = -A$. W czasie dalszego ruchu klocka działa na niego siła o zwrocie zgodnym ze zwrotem osi x, a wartości prędkości i energii kinetycznej maleją. Energia potencjalna wzrasta wraz ze skracaniem się sprężyny. W chwili $t = T/2$ klocek osiąga położenie $x = -A$. W tym położeniu prędkość i energia kinetyczna są wartościami zerowymi. Siła sprężystości działająca na klocek wynosi $F = kA$, natomiast energię potencjalną zmagazynowanej w sprężynie wyrażono wzorem $E_{\text{pspr}} = kA^2/2$. Podczas drgań klocka energia całkowita jest stała i równa sumie energii potencjalnej i energii kinetycznej układu:

$$E_{\text{całkowita}} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2. \tag{15.12}$$

Można więc wyznaczyć wzór na prędkość klocka dla każdego położenia w ruchu harmonicznym:

$$|v| = \sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right)}. \tag{15.13}$$

Energia w oscylatorze harmonicznym wzrasta wraz z kwadratem amplitudy drgań. Rozważając różne układy drgające, często można się przekonać, że ich energia również jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy drgań.



15.1 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Zaproponuj sposób zmniejszenia maksymalnej prędkości oscylatora harmonicznego.

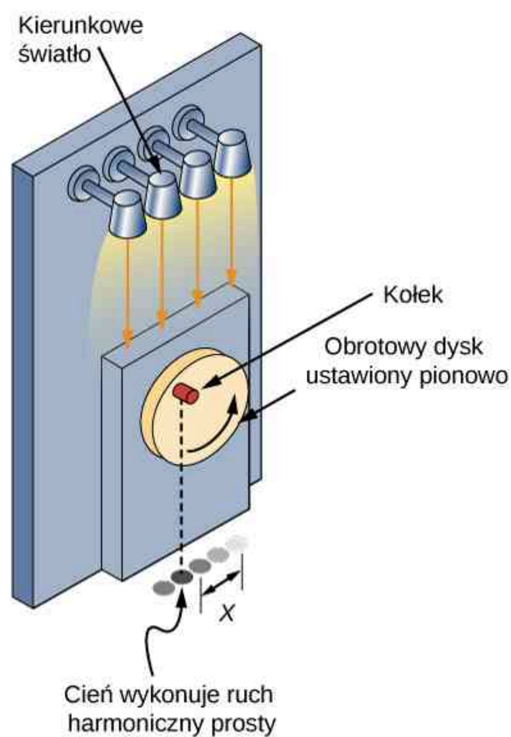
15.3 | Porównanie ruchu harmonicznego z ruchem jednostajnym po okręgu

Cel dydaktyczny

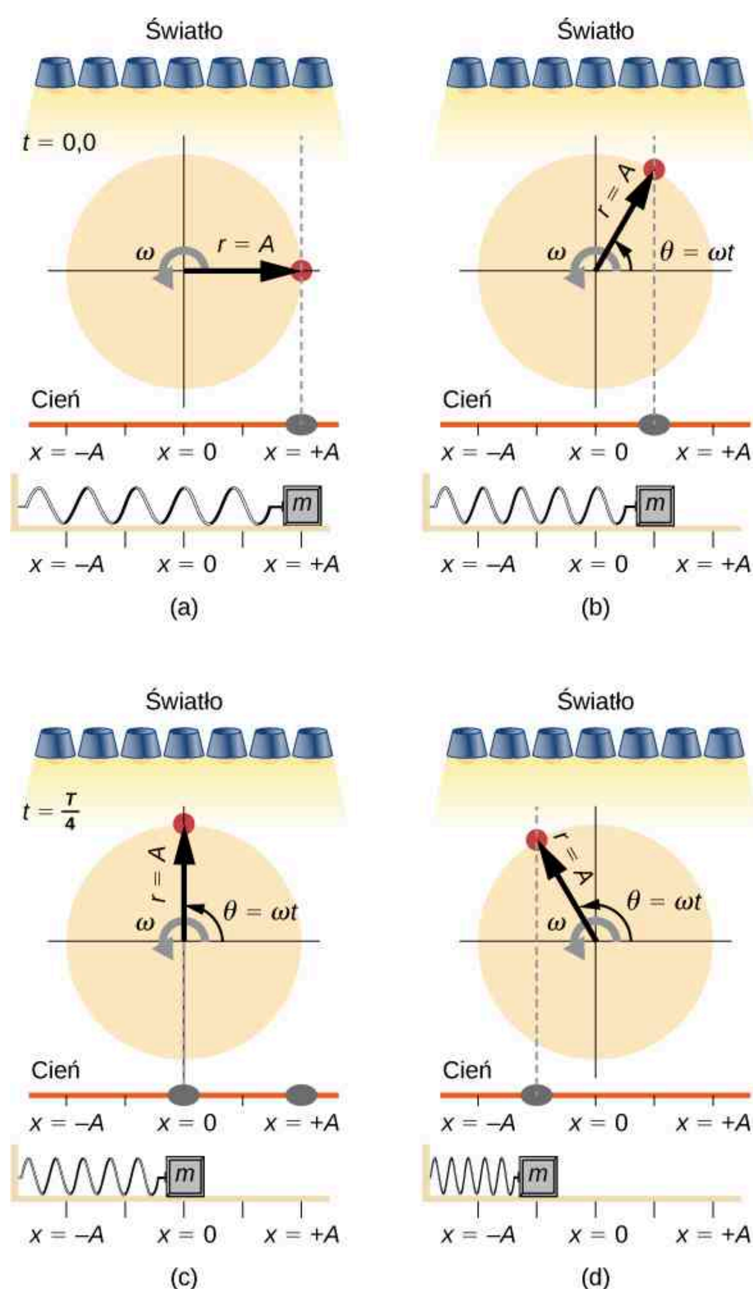
W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać, jak funkcje sinus i cosinus odnoszą się do ruchu ciała po okręgu;
- wyjaśniać związek pomiędzy ruchem harmonicznym a ruchem po okręgu.

Jednym ze sposobów na opisanie ruchu harmonicznego jest analiza **jednostajnego ruchu po okręgu** zgodnie z Rysunkiem 15.17. Marker (drewniany kołek) przymocowano do tarczy, która obraca się ze stałą częstością kątową. Rysunek 15.18 pokazuje ten dysk z markerem w rzucie bocznym. Umieszczenie lampy nad tarczą powoduje, że marker tworzy cień. Położenie cienia w punkcie $x = 0$ oznacza, że pozycja markera jest najniższa lub najwyższa. Dla dysku o promieniu $r = A$ obracającego się ze stałą prędkością kątową, cień oscyluje między położeniami $x = +A$ i $x = -A$. Wyobraźmy sobie klocek na sprężynie umieszczony tak, jak pokazano na Rysunku 15.18.



Rysunek 15.17 Obracający się ze stałą częstością kątową kołek rzuca cień, który porusza się ruchem harmonicznym.



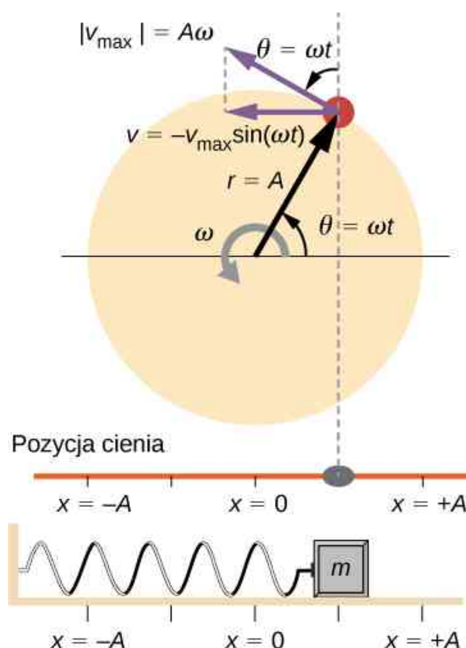
Rysunek 15.18 Światło skierowano na dysk w ten sposób, że kołek tworzy cień. Klocek na sprężynie porusza się ruchem harmonicznym. Jeśli dysk obraca się z odpowiednią częstością kątową, to cień kołka może poruszać się identycznie jak klocek. Jeśli nie ma dyssypacji energii z powodu działania sił niezachowawczych, klocek i cień będą synchronicznie oscylować. Na rysunku przedstawiono cztery migawki dla różnych chwil tego ruchu. (a) Koło startuje przy $\theta = 0^\circ$, a cień kołka znajduje się (podobnie jak klocek) w położeniu $x = +A$. (b) Rotujący dysk tworzy kąt $\theta = \omega t$, natomiast cień kołka znajduje się pomiędzy $x = +A$ a $x = 0$. (c) Dysk obraca się o kąt $\theta = 90^\circ$, podczas gdy klocek i jego cień osiągają położenie $x = 0$. (d) Dysk kontynuuje ruch, a cień śledzi jego położenie.

Jeśli dysk obraca się z odpowiednią częstością kątową, to cień przesuwa się tak samo jak klocek. Położenie cienia możemy opisać równaniem:

$$x(t) = A\cos(\omega t). \tag{15.14}$$

Przypomnijmy, że klocek przymocowany do sprężyny nie porusza się ze stałą prędkością. Z jaką częstością kątową musi się obracać koło, aby cień zawsze padał na klocek? Tę wartość częstości kątowej opisano zależnością 2π razy częstotliwość drgań $(\omega = 2\pi f)$.

Rysunek 15.19 przedstawia podstawowe zależności pomiędzy jednostajnym ruchem po okręgu a ruchem harmonicznym. Kołek leży na obwodzie dysku w odległości A od środka dysku. Oś x określa linia położona równolegle do podłoża i przecinająca dysk na pół. Oś y (niepokazana) jest określona przez linię prostopadłą do podłoża, która dzieli tarczę na lewą i prawą część. Środkiem dysku jest punkt $(x = 0, y = 0)$. Rzuty położenia kołka na oś x wyznaczają położenie cienia, który porusza się ruchem harmonicznym analogicznie jak klocek na sprężynie. Rysunek przedstawia migawkę z ruchu, kiedy cień przemieszcza się w lewo z prędkością v. **Prędkość styczna** kołka na okręgu jest równa v_{max} klocka na sprężynie. Składowa x prędkości kołka jest równa prędkości klocka na sprężynie.



Rysunek 15.19 Kołek porusza się ruchem jednostajnym po okręgu ze stałą prędkością kątową ω. Rzut kołka na oś x wykonuje ruch harmoniczny. Pokazano również wektor prędkości kołka na okręgu: v_{max} i jego rzut v na oś x. Warto zauważyć, że trójkąt tworzony przez wektory prędkości jest podobny do trójkąta przemieszczeń.

Za pomocą Rysunku 15.19 możemy przeanalizować prędkość cienia tworzonego przez kołek, który porusza się po okręgu z prędkością $v_{max} = A\omega$. Cień przemieszcza się z prędkością równą horyzontalnej składowej prędkości kołka:

$$v = -v_{max} \sin(\omega t). \quad (15.15)$$

Wynika z tego, że przyspieszenie wynosi:

$$a = -a_{max} \cos(\omega t). \quad (15.16)$$



15.2 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Jak stwierdzić, czy ciało porusza się ruchem jednostajnym po okręgu? Opisz, w jaki sposób można wykazać ruch harmoniczny tego ciała.

15.4 | Wahadła

Cel dydaktyczny

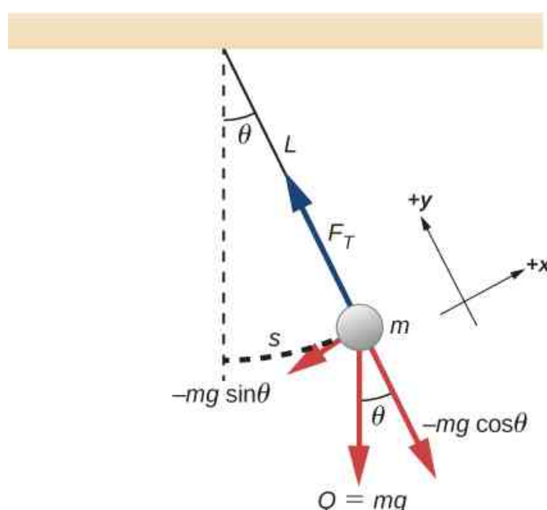
W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać siły działające na wahadło matematyczne;
- określać częstość kołową, częstotliwość i okres drgań wahadła, w zależności od długości wahadła i wartości przyspieszenia grawitacyjnego;
- wyznaczać okres drgań wahadła fizycznego;
- obliczać okres drgań wahadła torsyjnego.

Bez wahadła nie byłoby zabytkowych zegarów. Te proste mechanizmy nadal są w powszechnym użyciu. Wahadło może być np. stosowane do pomiaru przyspieszenia grawitacyjnego. Dla małych kątów wychyleń wahadło zachowuje się jak oscylator harmoniczny.

Wahadło matematyczne

Wahadło matematyczne jest zdefiniowane jako **masa punktowa** (ciężarek) zawieszona na nierozciągliwej, nieważkiej nici o długości L (Rysunek 15.20). Jedynymi siłami działającymi na masę są siła grawitacji i naprężenie nici. Nieważkość nici oznacza, że jej masa jest zaniedbywalnie mała w porównaniu do masy ciężarka.



Rysunek 15.20 Na wahadło matematyczne składają się ciężarek o masie skupionej w punkcie i nierozciągliwa nić o zaniedbywalnej masie. Liniowe przemieszczenie z położenia równowagi jest równe długości łuku s. Na rysunku pokazane są również siły działające na ciężarek. Prostopadła składowa siły wypadkowej $-mg\sin\theta$ działa w kierunku położenia równowagi ciężarka.

Rozważmy moment siły działającej na ciężarek. Jest on związany ze składową siły wypadkowej działającej stycznie do łuku. Moment siły to długość nici L pomnożona przez siłę wypadkową, która działa prostopadle do promienia łuku. Znak minus wskazuje, że moment siły działa w kierunku przeciwnym do przemieszczenia kątowego:

$$\begin{aligned} M &= -Lmg\sin\theta \\ I\varepsilon &= -Lmg\sin\theta \\ I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} &= -Lmg\sin\theta \\ mL^2\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} &= -Lmg\sin\theta \\ \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} &= -\frac{g}{L}\sin\theta. \end{aligned}$$

Rozwiązanie tego równania różniczkowego wymaga złożonych rachunków i wykracza poza zakres tego rozdziału. Warto zauważyć, że dla małych kątów (mniej niż 15 stopni), $\sin\theta$ i θ różnią się mniej niż 1%, co pozwala na zastosowanie przybliżenia $\sin\theta \approx \theta$. Kąt θ opisuje położenie wahadła. W przybliżeniu dla małych kątów θ możemy uprościć równanie różniczkowe do postaci:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \frac{g}{L}\theta. \tag{15.17}$$

Ze względu na to, że równanie to ma tę samą postać co równanie ruchu harmonicznego, łatwo jest zaproponować rozwiązanie. Częstość kołowa wynosi:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}, \tag{15.18}$$

a okres drgań to:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \tag{15.19}$$

Okres drgań wahadła matematycznego zależy więc wyłącznie od jego długości i przyspieszenia grawitacyjnego. Nie mają na niego wpływu ani masa ciężarka, ani amplituda maksymalnego kąta w zakresie do około $15°$. Dlatego też zegary mechaniczne wykorzystujące wahadło mogą precyzyjnie odmierzać czas.

Warto podkreślić wpływ g na T. Jeżeli długość wahadła jest dokładnie znana, to można je zastosować do pomiaru przyspieszenia grawitacyjnego tak jak w poniższym przykładzie.

Przykład 15.3

Wyznaczanie przyspieszenia ziemskiego na postawie pomiaru okresu wahadła

Jaka jest wartość przyspieszenia grawitacyjnego w danym miejscu pomiarowym, jeśli wahadło o długości 75 cm ma okres drgań 1,7357 s?

Strategia rozwiązania

Naszym celem jest wyznaczenie g ; wartości znane to okres drgań T i długość wahadła L. Z zależności $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ możemy wyznaczyć g, jeśli założymy, że kąt maksymalnego odchylenia jest mniejszy niż 15° .

Rozwiązanie

1. Zależność $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ podnieś do kwadratu i wyznacz wzór na g :

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}$$

2. Podstaw podane wartości do wzoru:

$$g = 4\pi^2 \frac{0{,}75\text{ m}}{(1{,}7357\text{ s})^2}$$

3. Wyznacz wartość g :

$$g = 9{,}8281 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Znaczenie

Przedstawiona metoda wyznaczania przyspieszenia ziemskiego może być bardzo dokładna, jeśli wykonamy pomiary przy maksymalnym kącie o wartości poniżej $0,5^\circ$. Dzięki temu błąd spowodowany przybliżeniem $\sin\theta \approx \theta$ będzie mniejszy.

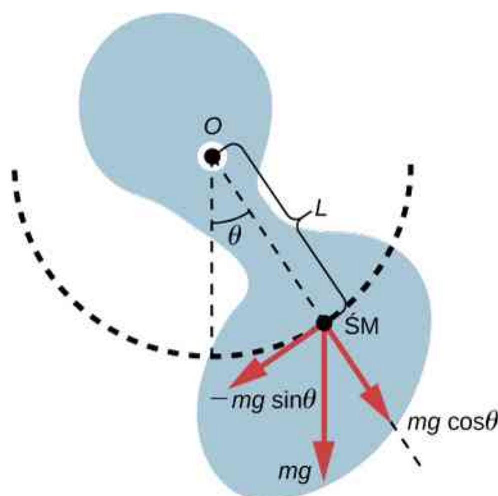


15.3 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Inżynier zbudował dwa wahadła. Oba podwieszono pod sufitem pomieszczenia i zastosowano do tego linki o małym przekroju. Każdy z ciężarków zawisł 2 cm nad podłogą. Pierwsze wahadło ma masę 10 kg, a drugie 100 kg. Oba wychylono o kąt 12° . Opisz ruch wahadeł.

Wahadło fizyczne

Każde ciało może oscylować jak wahadło. Rozważmy kubek do kawy wiszący na haczyku w spiżarni. Jeśli kubek zostanie wytrącony z położenia równowagi, to zacznie wykonywać oscylacje tam i z powrotem (podobnie jak wahadło) aż do chwili, gdy drgania ulegną wygaszeniu. Wahadło matematyczne opisano jako układ składający się z masy punktowej i nici. Natomiast **wahadło fizyczne** to dowolne ciało, którego oscylacje są podobne do wahadła matematycznego, ale które nie może być opisane jako masa punktowa na nici, ponieważ jego równanie ruchu musi uwzględnić rozkład masy.

W wahadle matematycznym siła grawitacji działa na środek ciężarka, natomiast w wahadle fizycznym – na środek masy (ŚM) ciała. Ciało oscyluje wokół punktu O. Rozważmy ciało o złożonym kształcie tak jak pokazano na Rysunku 15.21.



Rysunek 15.21 Wahadłem fizycznym może być dowolne ciało, które oscyluje jak wahadło, ale nie można go opisać jako masę punktową na nitce. Siła grawitacji działa na środek masy (ŚM), a jej składowa prostopadła do ramienia L odpowiada za oscylacje ciała. Znak minus dla tej składowej oznacza, że jej kierunek jest przeciwny do narastającego kąta θ.

Gdy wahadło fizyczne zawiesimy w punkcie, tak, by miało ono swobodę obrotu, to obrót ten będzie zachodził pod wpływem momentu siły przyłożonej do ŚM, a konkretnie składowej siły grawitacji, działającej stycznie do ruchu ŚM. Wartość tej składowej siły grawitacji wynosi $-mg \sin \theta$, a ujemny znak wynika z kierunku działania siły, który jest przeciwny do kierunku narastania kąta wychylenia. Moment siły opisuje wyrażenie $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, a więc wartość ta jest równa iloczynowi długości ramienia oraz składowej stycznej działającej siły: $|\tau| = rF \sin \theta$. L oznacza długość ramienia liczoną od punktu zawieszenia wahadła do ŚM. By opisać ruch drgającego ciała, zacznijmy od wyznaczenia wypadkowego momentu siły. Zauważmy, że podobnie jak w przypadku wahadła matematycznego, oscylacje przebiegają w zakresie małych kątów. Możemy więc założyć, że $\sin \theta \approx \theta$. Zgodnie z opisem ruchu obrotowego ciała względem ustalonej osi obrotu (Obroty wokół stałej osi)ustalmy, że wypadkowy moment siły jest równy iloczynowi momentu bezwładności $I = \int r^2 \mathrm{d}m$ oraz przyspieszenia kątowego ε, gdzie $\varepsilon = \mathrm{d}^2\theta / \mathrm{d}t^2$:

$$I\alpha = M_{\text{wyp}} = -Lmg \sin \theta.$$

Jeśli zastosujemy przybliżenie małych kątów i przeprowadzimy proste przekształcenia, otrzymamy:

$$\begin{aligned} I\varepsilon &= -Lmg\theta \\ I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} &= -Lmg\theta \\ \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} &= -\frac{mgl}{I}\theta. \end{aligned}$$

Po raz kolejny otrzymujemy równanie różniczkowe, które przedstawia drugą pochodną przemieszczenia kątowego względem czasu jako iloczyn pewnej ujemnej stałej $-mgL/I$ razy wartość kąta θ. Rozwiązaniem tego równania jest:

$$\theta(t) = \Theta \cos(\omega t + \phi),$$

gdzie Θ to maksymalne przesunięcie kątowe. Częstość kołowa wynosi:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}, \tag{15.20}$$

a wartość okresu drgań wahadła fizycznego określa wzór:

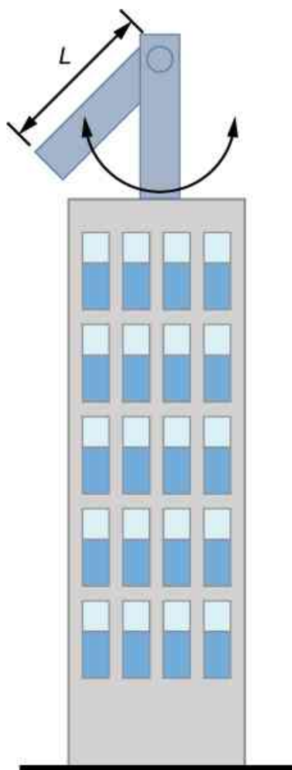
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}. \qquad (15.21)$$

Zauważmy, że dla wahadła matematycznego moment bezwładności wynosi $I = \int r^2 \mathrm{d}m = mL^2$, a wyrażenie na okres drgań upraszcza się do postaci $T = 2\pi\sqrt{L/g}$.

Przykład 15.4

Ograniczenie efektu kołysania wieżowca

W warunkach silnych podmuchów wiatru lub fali sejsmicznej konstrukcja drapacza chmur może oscylować z amplitudą około dwóch metrów i z częstotliwością około 20 Hz. Istnieją zaawansowane rozwiązania inżynierskie polegające na zastosowaniu wahadła fizycznego zainstalowanego na szczycie wieżowca. Wówczas w sytuacji, kiedy wieżowiec przechyla się na prawo, wahadło to wykonuje wahnięcie w przeciwną stronę, co wygasza efekt kołysania konstrukcji. Jeśli przyjmiemy, że oscylacje mają częstotliwość 0,50 Hz, będziemy mogli zaprojektować wahadło w postaci długiego pręta o masie 100 ton, zbudowane z materiałów o stałej gęstości z punktem obrotu znajdującym się na końcu pręta (rysunek poniżej). Jaka powinna być długość ramienia wahadła?



Strategia rozwiązania

Naszym zadaniem jest wyznaczenie długości ramienia wahadła fizycznego. Musimy najpierw znaleźć wartość momentu bezwładności ramienia, a następnie zastosować wzór na okres drgań wahadła fizycznego.

Rozwiązanie

1. Znajdź moment bezwładności pręta o długości L i masie M dla ŚM:

$$\frac{1}{12}ML^2$$

2. Użyj twierdzenia Steinera dla momentu bezwładności bryły sztywnej względem osi obrotu:

$$I = I_{\text{ŚM}} + \frac{L^2}{4} M = \frac{1}{12} ML^2 + \frac{1}{4} ML^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

3. Okres drgań wahadła fizycznego wynosi $T = 2\pi\sqrt{I/(mgL)}$. Jeśli podstawimy wyrażenie na moment bezwładności pręta, będziemy mogli wyznaczyć długość ramienia L:

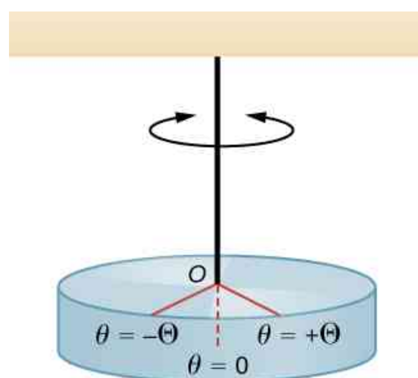
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{MgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{3g}};$$
$$L = 3g\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = 3\left(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)\left(\frac{2\text{ s}}{2\pi}\right)^2 = 2{,}98\text{ m}.$$

Znaczenie

Jest wiele sposobów na redukcję oscylacji wieżowca, m.in. dobór odpowiedniego kształtu budynku, zastosowanie kilku wahadeł fizycznych lub masowego tłumika drgań.

Wahadło torsyjne

Wahadło torsyjne składa się z bryły sztywnej zawieszonej na lekkim drucie (Rysunek 15.22). Na skutek początkowego skręcenia wahadła o mały kąt (o maksymalnej wartości Θ) możemy obserwować drgania swobodne wahadła polegające na oscylacjach w zakresie kątów pomiędzy $(\theta = +\Theta)$ a $(\theta = -\Theta)$. Moment siły wywołuje naprężenie skręcające drutu (nici), które dąży do przywrócenia bryły do położenia równowagi.



Rysunek 15.22 Wahadło torsyjne składa się ze sztywnej bryły (np. tarczy) zawieszonej na drucie. Bryła wykonuje oscylacje w zakresie kątów od $\theta = +\Theta$ do $\theta = -\Theta$.

Moment siły jest proporcjonalny do wartości kąta θ

$$M = -\kappa\theta.$$

Stałą κ (kappa) nazywamy **momentem kierującym** i jest to współczynnik charakteryzujący dany drut. Znak minus oznacza, że moment siły działa w kierunku przeciwnym do zwiększania kąta skręcenia wahadła. Wypadkowy moment siły jest równy momentowi bezwładności razy przyspieszenie kątowe:

$$I\frac{\text{d}^2\theta}{\text{d}t^2} = -\kappa\theta$$
$$\frac{\text{d}^2\theta}{\text{d}t^2} = -\frac{\kappa}{I}\theta.$$

Równanie to wskazuje, że druga pochodna kąta względem czasu równa się ujemnej stałej pomnożonej przez wartość kąta. Ten wzór jest bardzo podobny do równania $\text{d}^2x/\text{d}t^2 = -kx/m$ dla ruchu harmonicznego, w którym okres drgań klocka na sprężynie opisano zależnością $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Wobec tego okres drgań wahadła torsyjnego może zostać wyrażony w postaci:

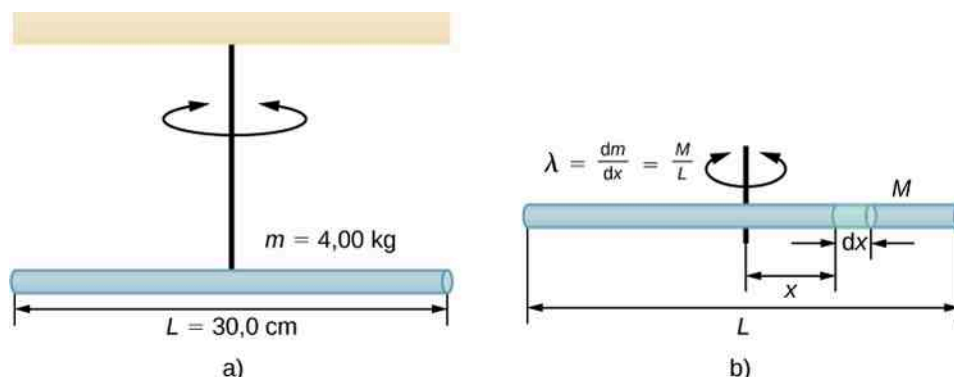
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}. \quad (15.22)$$

Jednostka momentu kierującego ma wymiar $[\kappa] = \mathrm{N \cdot m} = (\mathrm{kg \cdot m/s^2}) \cdot \mathrm{m} = \mathrm{kg \cdot m^2/s^2}$, natomiast jednostką miary momentu bezwładności jest $[I] = \mathrm{kg{\cdot}m^2}$, z czego widać, że jednostką okresu drgań jest sekunda.

Przykład 15.5

Pomiar momentu kierującego drutu

Pręt ma długość $l = 0{,}30\ \mathrm{m}$ i masę $4\ \mathrm{kg}$. Drut przyłączono do ŚM pręta, a cały układ podwieszono do sufitu (Rysunek 15.23). Pręt skręcono o kąt 10 stopni od położenia równowagi i puszczono swobodnie. Pręt wykonuje drgania o okresie $0{,}5\ \mathrm{s}$. Jaka jest wartość momentu kierującego κ?



Rysunek 15.23 (a) Drut z prętem podwieszony do sufitu. (b) Rysunek pomocniczy do wyznaczenia momentu bezwładności pręta.

Strategia rozwiązania

Naszym celem jest wyznaczenie momentu kierującego drutu. Najpierw musimy obliczyć moment bezwładności pręta.

Rozwiązanie

1. Znajdź moment bezwładności pręta względem osi przechodzącej przez ŚM według wzoru:
2. $I_{ŚM} = \int x^2 \mathrm{d}m = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \lambda \mathrm{d}x = \lambda\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \lambda\frac{2L^3}{24} = \frac{M}{L}\frac{2L^3}{24} = \frac{1}{12}ML^2.$
3. Wyznacz moment kierujący, stosując wzór na okres drgań:
   $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$
4. $$\kappa = I\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$
   $$= \frac{1}{12} \cdot 4\ \mathrm{kg} \cdot (0{,}3\ \mathrm{m})^2 \cdot \left(\frac{2\pi}{0{,}5\ \mathrm{s}}\right)^2 = 4{,}73\ \mathrm{N \cdot m}.$$

Znaczenie

Podobnie jak w przypadku współczynnika sprężystości w układzie klocka ze sprężyną, im większy jest moment kierujący, tym krótszy okres drgań oscylatora.

15.5 | Drgania tłumione

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać ruch oscylatora harmonicznego tłumionego;
- zapisywać wzory na ruch oscylatora, kiedy drgania są tłumione.

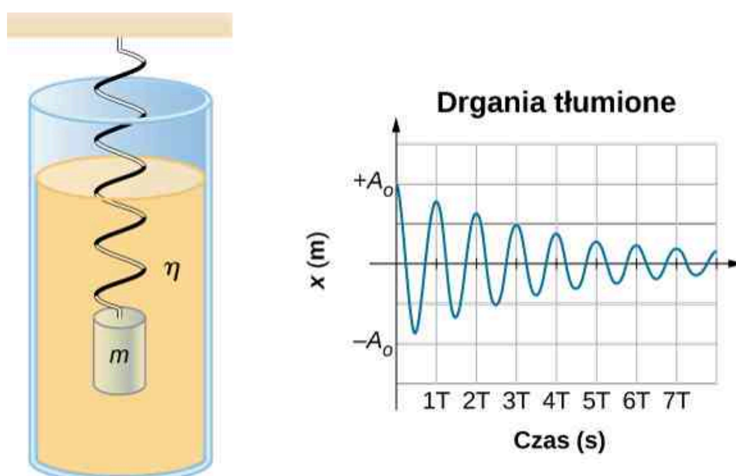
W otaczającym nas świecie obserwowane drgania rzadko mają postać ruchu harmonicznego, ponieważ zwykle siła oporu tłumi drgania, co przy braku siły podtrzymującej prowadzi do stopniowego wygaszania oscylacji. Omówimy więc przykłady **tłumienia drgań harmonicznych** i odpowiednio zmodyfikujemy równania ruchu, aby opisać ten bardziej uogólniony przypadek drgań.

Po szarpnięciu struny gitarowej obserwujemy zanik jej drgań w czasie kilku sekund. Aby huśtawka kontynuowała oscylacje, musimy ją popychać (Rysunek 15.24). Choć często możemy stworzyć takie warunki, w których siły oporu i inne siły niezachowawcze można zaniedbać, przypadki swobodnych, nietłumionych drgań są rzadkie. Bywają też sytuacje, kiedy drgania są czymś niepożądanym i celowo staramy się je tłumić jak np. w przypadku amortyzatorów w samochodach.



Rysunek 15.24 Jeśli chcemy huśtać się na huśtawce, musimy wykonywać odpowiednie ruchy ciała w celu kompensacji strat energii wynikających z obecności sił oporu ośrodka i sił tarcia. (Źródło: Bob Mical).

Rysunek 15.25 przedstawia klocek o masie m przymocowany do sprężyny o współczynniku sprężystości k. Klocek podniesiono do położenia A_0, które jest początkową amplitudą, a następnie puszczono go swobodnie. Klocek wykonuje drgania wokół położenia równowagi w cieczy o lepkości η, a kolejne uzyskiwane wartości amplitudy maleją wraz z upływem czasu. Jest to typowy wykres dla układu ze słabym tłumieniem. Ten zanik oscylacji wywołują siły oporu ośrodka, a więc siły niezachowawcze, których działanie powoduje tworzenie różnych form energii termicznej kosztem energii oscylatora (obniżenie energii kinetycznej i energii potencjalnej sprężystości). W warunkach słabego tłumienia okres i częstotliwość drgań są podobne do odpowiednich wartości w swobodnym oscylatorze harmonicznym.



Rysunek 15.25 Ciężarek zawieszony na sprężynie wykonuje drgania w cieczy o lepkości η. Wartość okresu drgań pozostaje stała, ale amplitudy kolejnych oscylacji zmniejszają się na skutek tłumienia drgań przez lepki ośrodek.

Rozważmy działanie sił na ciężarek, który ma masę m. Należy zauważyć, że siła ciężkości działająca na ten ciężarek jest kompensowana zmianą położenia równowagi, co już omawialiśmy w rozdziale. Na siłę wypadkową wpływa zarówno siła sprężystości związana ze sprężyną, jak i siła oporu ośrodka (F_O). Jeśli maksymalna prędkość drgającego ciężarka jest mała, to siła oporu ośrodka jest proporcjonalna do prędkości ciała i działa przeciwnie do kierunku ruchu ciężarka $(F_O = -bv)$. W tych warunkach wypadkowa siła działająca na ciężarek o masie m wynosi:

$$ma = -bv - kx.$$

Możemy zapisać ten wzór w postaci równania różniczkowego:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = 0. \tag{15.23}$$

Aby zaproponować rozwiązanie tego równania różniczkowego, przeanalizujmy wykres położenia ciężarka względem czasu przedstawiony na Rysunku 15.26. Krzywa ta przypomina funkcję cosinus, która ma postać funkcji wykładniczej $A_0 e^{-\alpha t}$, gdzie $\alpha = \frac{b}{2m}$. Rozwiązaniem jest:

$$x(t) = A_0 e^{-\frac{t}{b}} \cos(\omega t + \phi). \tag{15.24}$$

Rozwiązanie to spełnia równanie różniczkowe, a udowodnienie tego pozostawiamy jako ćwiczenie. W tym celu wyznacz pierwszą i drugą pochodną względem czasu i wstaw je do Równania 15.23. Możemy również stwierdzić, że Równanie 15.24 jest rozwiązaniem, jeśli:

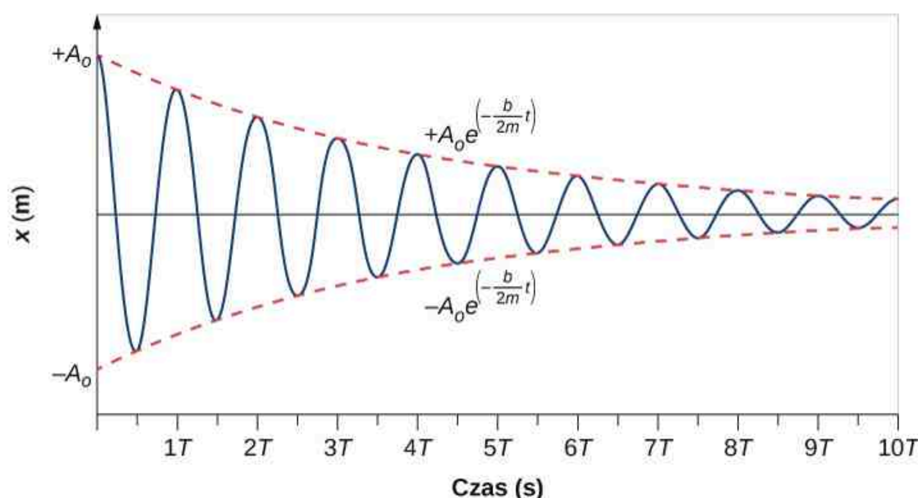
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}.$$

Przypomnijmy, że częstość kołowa ω_0 drgań oscylatora harmonicznego niethumionego jest równa pierwiastkowi kwadratowemu ze współczynnika sprężystości sprężyny podzielonemu przez masę ciężarka. Wartość ta może być traktowana jako **częstotliwość własna** (naturalna częstość kołowa drgań), którą opisuje wzór:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (15.25)$$

Natomiast w przypadku drgań tłumionych częstość kołowa wynosi:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}. \quad (15.26)$$



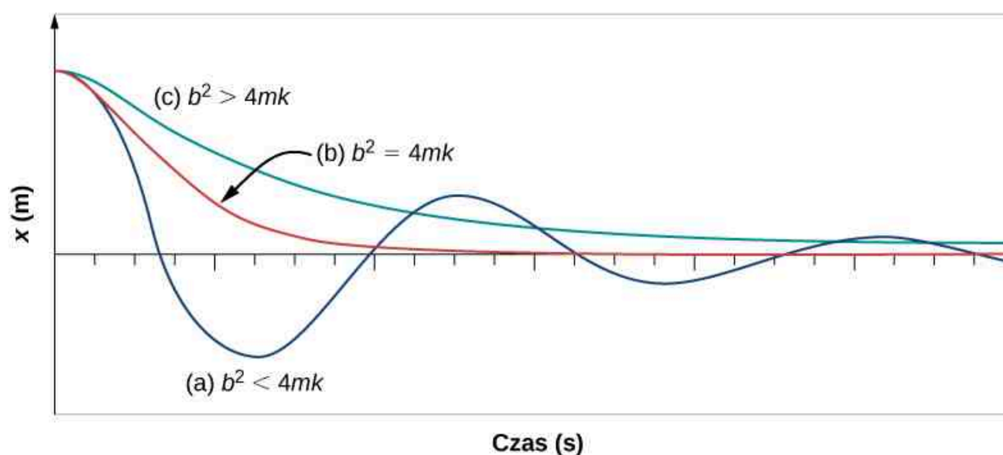
Rysunek 15.26 Położenie względem czasu dla ciężarka zawieszonego na sprężynie drgającego w cieczy jako ośrodku tłumiącym drgania. Zauważmy, że krzywa ma postać funkcji cosinus z obwiednią o charakterze funkcji wykładniczej.

Kiedy zaczęliśmy opisywać ruch harmoniczny tłumiony, stwierdziliśmy, że tłumienie musi być małe. Pojawiają się więc dwa pytania: dlaczego tłumienie powinno być małe i jak to dokładnie opisać? Jeśli stopniowo *zwiększamy* wartość tłumienia w układzie, to okres i częstotliwość drgań będą się zmieniać. Ze względu na to, że siła oporu ośrodka działa przeciwnie do kierunku ruchu, to ruch drgający spowolni się (wypadkowa siła działająca na ciężarek jest mniejsza). Częstość kołową opisuje wzór:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}.$$

Gdy współczynnik oporu b wzrasta, $\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2$ maleje i ostatecznie osiąga wartość zero, gdy $b = \sqrt{4mk}$. Dalsze zwiększenie b powoduje, że $\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2$ przyjmuje ujemną wartość, a $\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$ jest liczbą zespoloną. W przypadku bardzo dużego tłumienia układ nie wykazuje oscylacji i powoli zmierza do położenia równowagi.

Rysunek 15.27 przedstawia czasowy przebieg przemieszczenia oscylatora harmonicznego dla różnych wartości współczynnika tłumienia. Kiedy współczynnik tłumienia b jest mały $b < \sqrt{4mk}$, układ wykonuje drgania z **tłumieniem podkrytycznym**, zgodnie z krzywą (a), amplituda w kolejnych chwilach ruchu zmniejsza się wykładniczo. Wiele oscylatorów wykazuje drgania z tłumieniem podkrytycznym, m.in. drgający klocek na sprężynie. Choć współczynnik tłumienia jest małą wartością, to w końcu drgania zanikają i klocek osiąga stan bezruchu. Jeśli współczynnik tłumienia wynosi $b = \sqrt{4mk}$, to zachodzi **tłumienie krytyczne**, a zachowanie układu przedstawia krzywa (b). W tych warunkach układ nie oscyluje, ale asymptotycznie zbliża się do położenia równowagi w jak najkrótszym czasie. Możliwie najszybszy zanik niepożądanych drgań bywa kwestią niezwykle ważną, a przykładem układu z tłumieniem krytycznym są amortyzatory w samochodzie. Z kolei krzywa (c) na Rysunku 15.27 przedstawia układ z **tłumieniem nadkrytycznym**, dla którego $b > \sqrt{4mk}$. Początkowe wychylenie przy tłumieniu nadkrytycznym z czasem zanika.



Rysunek 15.27 Położenie względem czasu dla układu składającego się z masy i sprężyny w lepkiej cieczy. (a) Jeśli tłumienie jest małe $\left(b < \sqrt{4mk}\right)$, masa oscyluje i powoli zmniejsza się amplituda drgań ze względu na utratę energii na skutek działania sił niezachowawczych. Przypadkiem granicznym jest (b) kiedy współczynnik tłumienia wynosi dokładnie $\left(b = \sqrt{4mk}\right)$. (c) Gdy tłumienie jest bardzo duże $\left(b > \sqrt{4mk}\right)$, masa nie oscyluje po początkowym wychyleniu, ale wolno zmierza do położenia równowagi.

Tłumienie krytyczne bywa cechą pożądaną, ponieważ taki układ potrafi bardzo szybko powrócić do stanu równowagi i pozostaje w tym stanie. Ponadto jeśli do układu z tłumieniem krytycznym przyłożymy stałą siłę, to uzyska on nowe położenie równowagi w możliwie najkrótszym czasie bez efektu przekraczania tego położenia i bez oscylacji wokół nowego położenia równowagi.


15.4 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Dlaczego swobodne, nietłumione oscylatory harmoniczne są rzadko spotykane?

15.6 | Drgania wymuszone

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

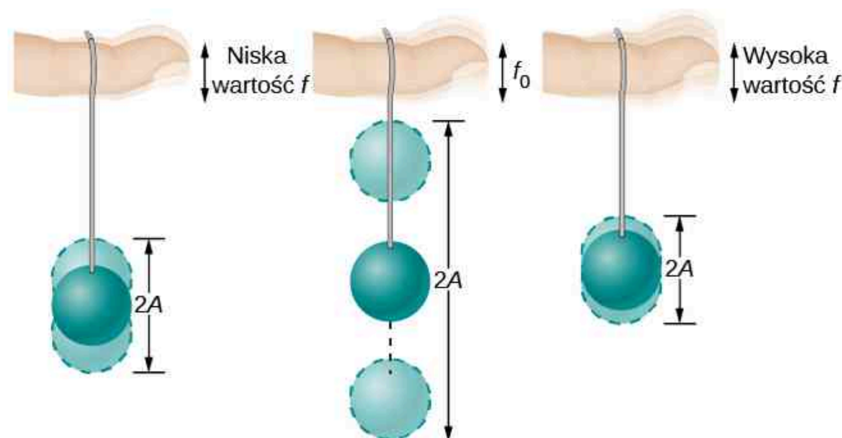
- definiować zjawisko drgań wymuszonych;
- zapisywać wzory związane z zagadnieniem drgań wymuszonych;
- wyjaśniać pojęcie rezonansu i jego wpływ na amplitudę drgań oscylatora;
- wymieniać cechy charakterystyczne układu drgającego w rezonansie.

Zaśpiewaj głośno jakiś dźwięk przy fortepianie (Rysunek 15.28) z odseparowanymi tłumikami strun. W odpowiedzi instrument wyda identyczny dźwięk, ponieważ struny o częstotliwościach takich jak twój głos będą w rezonansie z wygenerowaną przez ciebie falą akustyczną. To dobry przykład pokazujący, że struny fortepianu najłatwiej zmusić do drgań z częstotliwościami własnymi. W tym podrozdziale opiszemy sytuację z przyłożeniem **siły wymuszającej** do oscylatora harmonicznego. Działanie siły wymuszającej zwiększa energię układu przy pewnej częstotliwości, niekoniecznie tej samej, co częstotliwość drgań własnych oscylatora. Warto przypomnieć, że częstotliwość drgań własnych oscylatora jest to częstotliwość swobodnych drgań układu zachodzących w nieobecności zarówno siły wymuszającej, jak i oporu ośrodka.



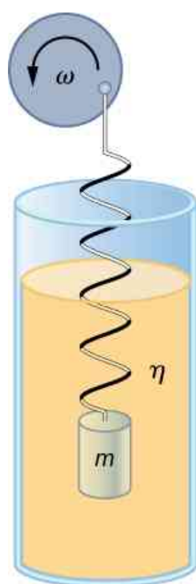
Rysunek 15.28 Możesz wprawić w wibracje struny fortepianowe, działając na nie falą dźwiękową swojego głosu.

Większość z nas bawiła się zabawkami składającymi się z ciała zawieszonego na elastycznej gumce, a więc układami podobnymi do pokazanego na Rysunku 15.29. Wyobraź sobie, że palec na rysunku jest twoim palcem. Początkowo trzymasz palec w bezruchu i możesz stwierdzić, że kulka wykonuje drgania w górę i w dół. Możesz też zauważyć słabe tłumienie drgań. Jeśli powoli zaczniesz poruszać palcem w górę i w dół, kulka będzie podążać za palcem, a drgania będą miały małą amplitudę. Jeżeli następnie zwiększysz częstotliwość ruchu palca, to kulka zareaguje oscylacjami z rosnącą amplitudą drgań. Jeśli będziesz wymuszać drgania kulki z częstotliwością drgań własnych oscylatora, wówczas ich amplituda przy każdej kolejnej oscylacji będzie coraz większa. Zjawisko wprowadzenia układu w drgania o częstotliwości równej częstotliwości drgań własnych oscylatora nazywa się **rezonansem**. W sytuacji, kiedy występują drgania wymuszone, mówimy że układ *rezonuje*. Kiedy częstotliwość wymuszania drgań jest stopniowo zwiększana powyżej częstotliwości rezonansowej, amplituda drgań kulki ulega zmniejszeniu. W warunkach, gdy twój palec oscyluje bardzo szybko, oscylacje kulki praktycznie zanikają.



Rysunek 15.29 Kulka na gumce drga w odpowiedzi na ruchy palca, na którym ją zawieszono. Jeśli palec porusza się z częstotliwością taką jak częstotliwość drgań własnych f_0 kulki, to uzyskujemy rezonans przejawiający się gwałtownym wzrostem amplitudy drgań kulki. Przy wyższych i niższych częstotliwościach ruchu palca energia jest przekazywana kulce mniej efektywnie, przez co kulka ma mniejszą amplitudę drgań.

Przeprowadźmy proste doświadczenie. Przymocujmy klocek o masie m do sprężyny zanurzonej w naczyniu z lepką cieczą. To podobny układ do omawianego już wcześniej oscylatora harmonicznego tłumionego. Tym razem zamiast podwieszać swobodny koniec sprężyny do sztywnego zawieszenia, przymocujmy ją do tarczy napędzanej przez silnik o zmiennej częstotliwości obrotów. Silnik rotuje z prędkością kątową ω. Obracająca się tarcza dostarcza energię do układu poprzez wykonanie pracy na skutek działania siły wymuszającej $F_{wym} = F_0 \sin(\omega t)$ na sprężynę. Układ eksperymentalny pokazano na Rysunku 15.30.



Rysunek 15.30 Obracająca się tarcza napędzana silnikiem o zmiennej prędkości wymusza ruch oscylatora tłumionego.

Możemy przeanalizować ruch klocka o masie m, stosując drugą zasadę dynamiki Newtona ($\vec{F}_{\text{wyp}} = m\vec{a}$). Proponowane równanie różniczkowe jest podobne do równania dla oscylatora harmonicznego tłumionego, przy czym dodano człon związany z siłą wymuszającą:

$$-kx - b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + F_0 \sin(\omega t) = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}. \qquad (15.27)$$

Kiedy oscylator zaczyna wykonywać drgania pod wpływem okresowej siły wymuszającej, początkowy ruch klocka może wydawać się przebiegiem chaotycznym, dlatego stan ten nazywamy przejściowym. Po pewnym czasie drgania oscylatora stabilizują się, a ruch klocka staje się periodyczny (stan ustalony). W warunkach stabilizacji rozwiązanie równania różniczkowego można przedstawić jako:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi). \qquad (15.28)$$

Pozostaje w ramach ćwiczenia udowodnić, że to rozwiązanie spełnia równanie różniczkowe. Po wyznaczeniu pierwszej i drugiej pochodnej przemieszczenia względem czasu $x(t)$ i podstawieniu ich do równania różniczkowego możemy stwierdzić, że $x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ jest rozwiązaniem, jeśli amplituda drgań wynosi:

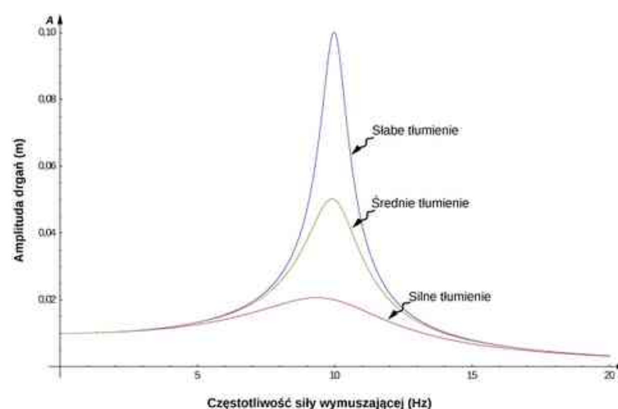
$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + b^2\omega^2}}, \qquad (15.29)$$

gdzie $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ jest częstością kołową własną układu klocka na sprężynie. Przypomnijmy, że częstość kątowa, a co za tym idzie i częstotliwość siły wymuszającej, może być regulowana kontrolką silnika. Patrząc na mianownik wzoru na amplitudę, możemy stwierdzić, że kiedy częstość kołowa ω siły wymuszającej jest znaczenie mniejsza lub większa od częstości kołowej własnej oscylatora, to człon $\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2$ jest znaczącą dodatnią wartością, co powoduje, że

wartość mianownika jest wysoka i w efekcie amplituda drgań klocka jest mała. Natomiast kiedy częstość kołowa siły wymuszającej zbliża się do częstości własnej układu, wtedy mianownik staje się małą wartością, a amplituda oscylacji jest znacząca. Maksymalną amplitudę drgań klocka uzyskuje się, kiedy częstotliwość siły wymuszającej jest bliska częstotliwości własnej oscylatora: $A_{\text{max}} = \frac{F_0}{b\sqrt{\omega^2 + \frac{b^2}{4m^2}}}$.

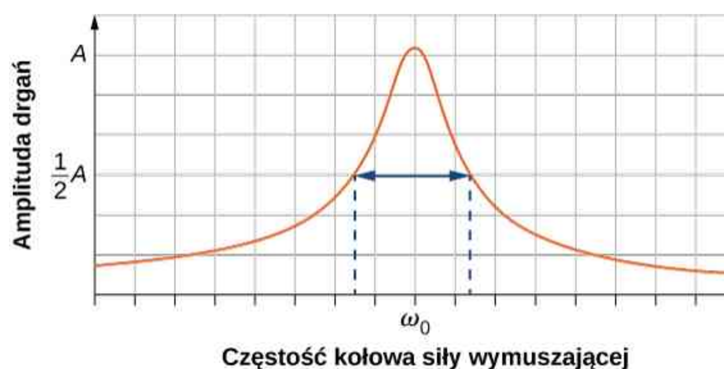
Rysunek 15.31 przedstawia wykres amplitudy drgań oscylatora tłumionego w funkcji częstotliwości periodycznej siły wymuszającej drgania. Każda z trzech krzywych została wykreślona dla innej wartości współczynnika tłumienia. Szczególnie wysokie maksima obserwuje się dla układów z minimalnym udziałem tłumienia, co przekłada się na mniejsze straty energetyczne ze względu na opór ośrodka. Zauważmy, że amplituda drgań rośnie, gdy współczynnik tłumienia maleje, a w granicy nieobecności tłumienia ($b = 0$) amplituda drgań przyjmuje wartość nieskończoności.

Zauważmy również, że siła wymuszająca o małej amplitudzie może spowodować odpowiedź oscylatora w postaci bardzo dużych amplitud drgań. Zjawisko to znane jest jako rezonans. Często przytaczanym przykładem rezonansu jest rodzic popychający dziecko na huśtawce. Kiedy dziecko chce się huśtać wyżej, rodzic nie próbuje popchnąć huśtawki z rozbiegu, przykładając ogromną jednorazową siłę w bardzo krótkim czasie. Stosuje raczej strategię kolejnych, małych pchnięć huśtawki z odpowiednią częstotliwością, a amplituda wahnięć huśtawki stopniowo wzrasta. Jest to rozsądniejsze rozwiązanie.



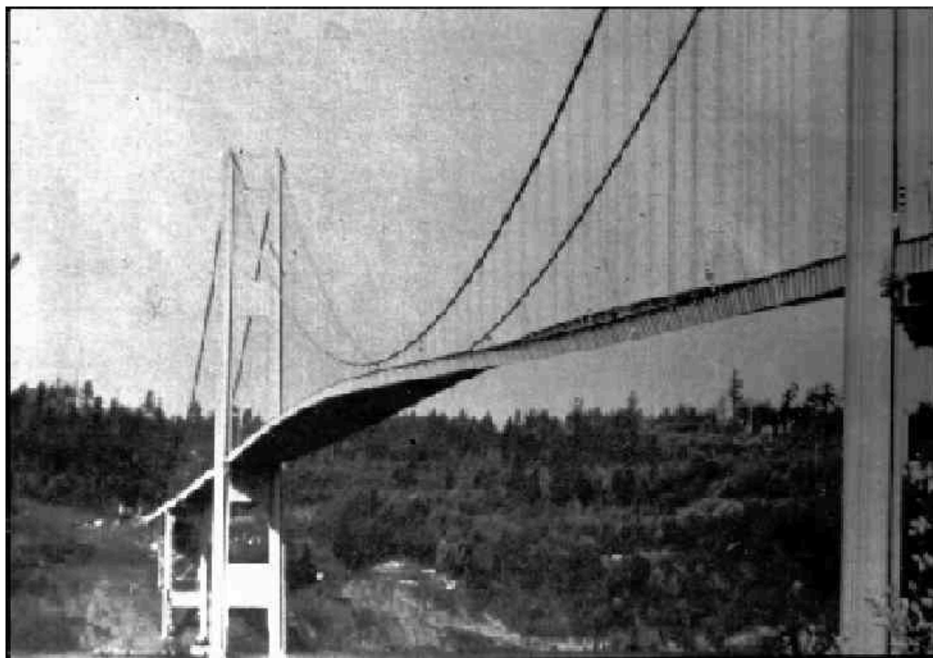
Rysunek 15.31 Amplituda oscylatora harmonicznego w funkcji częstotliwości siły wymuszającej drgania. Krzywe reprezentują oscylator o tej samej częstotliwości własnej drgań, ale o różnych współczynnikach tłumienia. Rezonans występuje, gdy częstotliwość siły wymuszającej jest bliska częstotliwości własnej oscylatora. Największą wartość amplitudy drgań obserwuje się przy minimalnej wartości współczynnika tłumienia. Krzywa jest też najwęższa w warunkach najmniejszego tłumienia.

Warto zauważyć, że szerokości krzywych rezonansowych pokazanych na Rysunku 15.31 zależą od współczynnika tłumienia: im mniejsze tłumienie, tym krzywa jest węższa. Zatem w warunkach małego tłumienia częstotliwość siły wymuszającej musi być dobrana bardzo precyzyjnie, aby uzyskać rezonans. Na przykład radio ma obwód składający się z rezystora, kondensatora i cewki. Obwód ten cechuje wąska krzywa rezonansowa oraz możliwość strojenia częstotliwości, co przekłada się na selektywny wybór częstotliwości stacji radiowej. Dobroć układu zdefiniowana jest jako stosunek własnej częstości kołowej oscylatora do szerokości krzywej rezonansowej ($Q = \omega_0 / \Delta\omega$), tak jak pokazano na Rysunku 15.32. W warunkach słabego tłumienia parametr dobroci wynosi $Q \approx \omega_0 m / b$.



Rysunek 15.32 Parametr dobroci układu zdefiniowano jako częstość własną układu ω_0 podzieloną przez szerokość krzywej $\Delta\omega$ w połowie amplitudy.

Opisane cechy drgań wymuszonych znajdują zastosowanie w wielu układach. Na przykład obrazowanie metodą rezonansu magnetycznego jest szeroko stosowanym narzędziem diagnostyki medycznej, w którym to jądra atomowe (głównie wodoru) rezonują z falami radiowymi (rzędu 100 MHz). We wszystkich tych przypadkach sprawność transferu energii od źródła siły wymuszającej do oscylatora jest najwyższa w warunkach rezonansu. Rysunek 15.33 przedstawia zdjęcie słynnego mostu Tacoma, który jest jednym z najgłośniejszych przypadków niszczącej siły drgań wymuszonych. Inny przykład to most Millennium w Londynie, który z tego samego powodu trzeba było na krótko zamknąć w celu oceny zniszczeń spowodowanych zjawiskiem rezonansu. Przed ponownym otwarciem trzeba było przebudować konstrukcję mostu.



Rysunek 15.33 W 1940 r. most w Tacoma w stanie Waszyngton uległ zniszczeniu. Przyczyną był wiejący od oceanu zmienny wiatr, który choć słabszy od huraganu, wprowadził most w oscylacje przy częstotliwości rezonansowej. Gdy kable nośne uległy zerwaniu, współczynnik tłumienia spadł, co spowodowało jeszcze większą amplitudę oscylacji i doprowadziło do zawalenia całej konstrukcji.



15.5 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Jedna ze słynnych sztuczek magicznych polega na rozbijaniu głosem kryształowego kielicha. Wyjaśnij ten efekt, posługując się pojęciami rezonansu i częstotliwości własnej układu.

PODSUMOWANIE ROZDZIAŁU 15

KLUCZOWE POJĘCIA

amplituda (ang. amplitude) maksymalne przemieszczenie ciała z położenia równowagi w czasie ruchu oscylacyjnego

częstotliwość (ang. frequency) liczba zdarzeń okresowych przypadająca na jednostkę czasu

częstotliwość własna (ang. natural angular frequency) częstotliwość drgań swobodnego oscylatora harmonicznego

drgnienie (ang. oscillation) pojedyncza lub powtarzalna zmiana wielkości fizycznej, polegająca na przejściu z jednej skrajnej wartości do drugiej i z powrotem

energia potencjalna sprężystości (ang. elastic potential energy) energia potencjalna zmagazynowana w układzie na skutek zniekształcenia elementu sprężystego, np. na skutek rozciągnięcia sprężyny

okres (ang. period) czas trwania jednego pełnego drgnienia w ruchu drgającym

oscylator harmoniczny (ang. simple harmonic oscillator) układ, który drga w RH, gdzie siła zwrotna jest proporcjonalna do przemieszczenia i działa na ciało w kierunku położenia równowagi

położenie równowagi (ang. equilibrium position) pozycja oscylatora, kiedy sprężyna jest nieodkształcona tzn. ani nie jest rozciągnięta, ani ściśnięta

przesunięcie fazowe (ang. phase shift) kąt wyrażony w radianach stosowany w funkcji cosinus lub sinus, aby przesunąć funkcję na lewo lub na prawo, w celu dopasowania funkcji do danych zarejestrowanych dla ruchu oscylatora harmonicznego

rezonans (ang. resonance) duża amplituda drgań wytworzonych w układzie na skutek działania siły wymuszającej o małej amplitudzie i częstotliwości równej częstotliwości rezonansowej oscylatora

ruch harmoniczny (ang. simple harmonic motion) ruch drgający układu, gdzie siła zwrotna jest proporcjonalna do przemieszczenia i działa na ciało w kierunku położenia równowagi

ruch periodyczny (ang. periodic motion) ruch cyklicznie powtarzający się w równych odstępach czasu

siła zwrotna (ang. restoring force) siła działająca w kierunku położenia równowagi oscylatora

stan trwałej równowagi (ang. stable equilibrium point) położenie w którym wypadkowa siła działająca na ciało wynosi zero, a w przypadku małego przemieszczenia ciała pojawia się siła zwrotna, która działa w kierunku położenia równowagi

tłumienie krytyczne (ang. critically dampened) tłumienie powodujące możliwie najszybszy powrót oscylatora do stanu równowagi, przy czym w ruchu tym nie występują oscylacje wokół położenia równowagi

tłumienie nadkrytyczne (ang. overdampened) tłumienie skutkujące powolnym powrotem oscylatora do stanu równowagi, przy czym oscylacje wokół stanu równowagi nie występują

tłumienie podkrytyczne (ang. underdampened) tłumienie powodujące zanik kolejnych amplitud drgań aż do zera

wahadło fizyczne (ang. physical pendulum) dowolne ciało sztywne o złożonej budowie, które można wprawić w drgania kątowe jak wahadło matematyczne

wahadło matematyczne (ang. simple pendulum) masa skupiona w punkcie, zawieszona na nieważkiej nici

wahadło torsyjne (ang. torsional pendulum) ciało zawieszone na drucie, które na skutek skręcenia drutu wykonuje drgania kątowe

współczynnik sprężystości (ang. force constant) parametr charakteryzujący sprężynę, zdefiniowany jako stosunek siły przyłożonej do sprężyny do uzyskanego przemieszczenia

NAJWAŻNIEJSZE WZORY

Relacja pomiędzy częstotliwością a okresem drgań	$f = \frac{1}{T}$
Położenie w ruchu harmonicznym przy $\phi = 0$	$x(t) = A\cos(\omega t)$
Przemieszczenie w ruchu harmonicznym	$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

Prędkość w ruchu harmonicznym	$v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$
Przyspieszenie w ruchu harmonicznym	$a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi)$
Maksymalne przemieszczenie (amplituda) w ruchu harmonicznym	$x_{max} = A$
Maksymalna prędkość w ruchu harmonicznym	$\|v_{max}\| = A\omega$
Maksymalne przyspieszenie w ruchu harmonicznym	$\|a_{max}\| = A\omega^2$
Częstość kołowa w układzie drgającego klocka na sprężynie w ruchu harmonicznym	$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
Okres drgań układu drgającego klocka na sprężynie w ruchu harmonicznym	$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
Częstotliwość drgań układu drgającego klocka na sprężynie w ruchu harmonicznym	$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$
Całkowita energia układu drgającego klocka na sprężynie w ruchu harmonicznym	$E_{całkowita} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2$
Prędkość drgającego klocka na sprężynie w ruchu harmonicznym	$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right)}$
Składowa *x* promienia obracającego się dysku	$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$
Składowa *x* prędkości krawędzi obracającego się dysku	$v(t) = -v_{max}\sin(\omega t + \phi)$
Składowa *x* przyspieszenia krawędzi obracającego się dysku	$a(t) = -a_{max}\cos(\omega t + \phi)$
Różniczkowe równanie ruchu wahadła matematycznego	$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$
Częstość kołowa dla wahadła matematycznego	$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$
Okres drgań wahadła matematycznego	$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$
Częstość kołowa wahadła fizycznego	$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$
Okres drgań wahadła fizycznego	$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}$
Okres drgań wahadła torsyjnego	$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$
Równanie różniczkowe ruchu oscylatora harmonicznego tłumionego	$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$
Rozwiązanie równania oscylatora harmonicznego z tłumieniem podkrytycznym	$x(t) = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t + \phi)$
Własna częstość kołowa układu klocka na sprężynie	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
Częstość kołowa oscylatora harmonicznego z tłumieniem podkrytycznym	$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$
Równanie różniczkowe ruchu oscylatora harmonicznego z drganiami wymuszonymi w obecności tłumienia	$-kx - b\frac{dx}{dt} + F_0\sin(\omega t) = m\frac{d^2x}{dt^2}$
Rozwiązanie równania oscylatora harmonicznego z drganiami wymuszonymi i tłumieniem	$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$
Amplituda drgań w układzie z drganiami wymuszonymi i tłumieniem	$A = \frac{F_o}{\sqrt{m\left(\omega^2 - \omega_o^2\right)^2 + b^2\omega^2}}$

PODSUMOWANIE

15.1 Ruch harmoniczny

- Ruch periodyczny to powtarzające się drgania. Czas wykonania jednego pełnego drgnienia to okres T, liczba drgań na jednostkę czasu definiuje zaś częstotliwość f. Obie wielkości są związane relacją $f = \frac{1}{T}$.
- Ruch harmoniczny jest ruchem drgającym układu, w którym siła zwrotna zmienia się wraz z przemieszczeniem i działa w kierunku do niego przeciwnym.
- Maksymalne przemieszczenie to amplituda A. Dla oscylatora harmonicznego częstość kołowa ω, okres drgań T i ich częstotliwość f są odpowiednio określone wzorami $\omega = \sqrt{k/m}$, $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ i $f = \sqrt{k/m}/(2\pi)$, gdzie m jest masą klocka a k – współczynnikiem sprężystości sprężyny.
- W oscylatorze harmonicznym przemieszczenie jest funkcją czasu określoną wzorem $x(t) = A\cos(2\pi t/T + \phi) = A\cos(\omega t + \phi)$.
- Prędkość jest wyrażona relacją $v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi) = -v_{\text{max}}\sin(\omega t + \phi)$, gdzie $v_{\text{max}} = A\omega = A\sqrt{k/m}$.
- Przyspieszenie określa wzór $a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi) = -a_{\text{max}}\cos(\omega t + \phi)$, gdzie $a_{\text{max}} = A\omega^2 = Ak/m$.

15.2 Energia w ruchu harmonicznym

- Najprostszy rodzaj drgań dotyczy układów, które można opisać prawem Hooke'a: $F = -kx$, gdzie F jest siłą zwrotną, x jest przemieszczeniem z położenia równowagi lub deformacją, a k jest współczynnikiem sprężystości układu.
- W układzie opisywanym prawem Hooke'a energia potencjalna ciała odkształconego sprężyście wynosi $E_{\text{pspr}} = kx^2/2$.
- Energia całkowita w oscylatorze harmonicznym jest stała w czasie i dzielona pomiędzy energię potencjalną sprężystości i energię kinetyczną:

$$E_{\text{całkowita}} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \text{const.}$$

- Wartość prędkości jako funkcję położenia dla oscylatora harmonicznego określa zależność:

$$|v| = \sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right)}$$

15.3 Porównanie ruchu harmonicznego z ruchem jednostajnym po okręgu

- Rozważ dysk o promieniu A poruszający się ze stałą prędkością kątową ω. Punkt na krawędzi dysku porusza się ze stałą prędkością styczną $v_{\text{max}} = A\omega$. Rzut promienia na oś x opisuje wzór $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, gdzie ϕ jest przesunięciem fazowym. Z kolei składowa x prędkości stycznej to $v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$.

15.4 Wahadła

- Ciało o masie m zawieszone na nieważkiej nici o długości L tworzy wahadło matematyczne, którego drgania są ruchem harmonicznym przy amplitudzie kąta nie przekraczającej 15°. Okres drgań wahadła opisuje wzór $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, gdzie L jest długością nici a g – przyspieszeniem ziemskim.
- Okres drgań wahadła fizycznego można wyznaczyć ze wzoru $T = 2\pi\sqrt{I/(mgL)}$, jeśli znamy moment bezwładności. Odległość pomiędzy osią obrotu a środkiem masy wynosi L.
- Okres drgań wahadła torsyjnego określa wzór $T = 2\pi\sqrt{I/\kappa}$, wymagana jest więc znajomość momentu bezwładności wahadła i momentu kierującego drutu.

15.5 Drgania tłumione

- W oscylatorach harmonicznych tłumionych działają siły niezachowawcze, które powodują dyssypację energii.

- Tłumienie krytyczne powoduje, że układ możliwie najszybciej, asymptotycznie wraca do położenia równowagi.
- Układ drgający z tłumieniem podkrytycznym wykonuje drgania wokół położenia równowagi.
- Układ z tłumieniem nadkrytycznym osiąga stan równowagi wolniej niż ten z tłumieniem krytycznym.

15.6 Drgania wymuszone

- Częstotliwość własna układu to częstotliwość, w której układ oscyluje swobodnie, o ile nie działa na niego siła wymuszająca ani siły oporu ośrodka.
- Rezonans w oscylatorze harmonicznym zachodzi pod wpływem periodycznej siły wymuszającej działającej z taką częstotliwością, jak częstotliwość rezonansowa układu. W tych warunkach obserwujemy drgania rezonansowe o dużej amplitudzie.
- Amplituda drgań wymuszonych w pobliżu rezonansu jest tym wyższa, im słabsze jest tłumienie. Wzrost tłumienia układu powoduje poszerzenie krzywej amplitudowej w odpowiedzi na częstotliwość siły wymuszającej.

PYTANIA

15.1 Ruch harmoniczny

1. Jakie warunki należy spełnić, aby zachodził ruch harmoniczny?

2. Odpowiedz na poniższe pytania.
a. Jeśli częstotliwość drgań w układzie nie jest stała, to czy te drgania są ruchem harmonicznym?
b. Czy możesz podać przykłady ruchu okresowego, w których częstotliwość zależy od amplitudy drgań?

3. Podaj przykład oscylatora, w którym częstotliwość jest niezależna od amplitudy drgań.

4. Wyjaśnij, dlaczego zakłada się, że ciało wykonane ze sztywnego materiału będzie drgać z większą częstotliwością niż ciało zbudowane z bardziej miękkiego materiału.

5. Mijając na autostradzie ciężarówkę z przyczepą, zauważasz, że przyczepa wolno kołysze się w górę i w dół. Co jest bardziej prawdopodobne: przyczepa jest mocno obciążona czy prawie pusta? Wyjaśnij to.

6. Niektórzy tuningują samochody, m.in. przez obniżenie zawieszenia. Czy powinni zainstalować sztywniejsze amortyzatory? Wyjaśnij swoją odpowiedź.

15.2 Energia w ruchu harmonicznym

7. Opisz przykładowy układ ze zmagazynowaną energią potencjalną sprężystości.

8. Na podstawie analizy energii układu uzasadnij, w jaki sposób siły dyssypacyjne takie jak tarcie, zmniejszają amplitudę kolejnych drgań oscylatora harmonicznego. Wyjaśnij również, w jaki sposób mechanizm napędowy może zrekompensować te straty energii (takim układem jest np. zegar wahadłowy).

9. Temperatura ziemskiej atmosfery oscyluje między maksimum (ok. południa) a minimum (przed wschodem słońca). Czy Twoim zdaniem atmosfera jest w stanie równowagi trwałej czy nietrwałej?

15.3 Porównanie ruchu harmonicznego z ruchem jednostajnym po okręgu

10. Czy analogię pomiędzy ruchem harmonicznym a ruchem ciała po okręgu można wykazać także dla układu ciężarka umocowanego na sprężynie zwisającego pionowo z sufitu? Odpowiedź uzasadnij. Czy lepiej jest zastosować do opisu ruchu funkcję sinus czy cosinus?

11. Masa przymocowana do sprężyny wykonuje drgania na powierzchni stołu bez tarcia. Jeśli maksymalna prędkość masy zostałaby zwiększona, to który z parametrów obracającego się dysku należałoby zmienić?

15.4 Wahadła

12. Zegary wahadłowe odmierzają prawidłowo czas dzięki odpowiedniej regulacji długości wahadła. Załóżmy, że przeprowadzasz się do innego miasta, gdzie przyspieszenie ziemskie jest nieco większe. Czy w nowym miejscu powinieneś skrócić czy wydłużyć wahadło, aby twój zegar właściwie odmierzał czas? Odpowiedź uzasadnij.

13. Wieżowy zegar wahadłowy działa w oparciu o pomiar okresu drgań wahadła. Wiosną zegar działa bardzo precyzyjnie, ale latem lub zimą długość wahadła się zmienia. Większość materiałów pod wpływem wzrostu temperatury rozszerza się. Czy wobec tego latem zegar przyspiesza, czy zwalnia? Jak jest zimą?

14. Rejestrowane położenie ciała można opisać funkcją sinus lub cosinus przy zastosowaniu odpowiedniej wartości przesunięcia fazowego. Jeśli jest możliwość wyboru, to której funkcji użyjesz? Przyjmij, że przesu-

nięcie fazowe wynosi zero, a wybrana funkcja to sinus, i opisz następujące parametry: początkowe położenie ciała, prędkość i przyspieszenie. Jaką postać mają te wzory, kiedy zastosujesz funkcję cosinus?

15.5 Drgania tłumione

15. Podaj przykład oscylatora harmonicznego tłumionego (są one bardziej rozpowszechnione niż swobodne oscylatory harmoniczne).

16. Samochód przejeżdżający przez próg zwalniający wpada w drganie. Opisz przebieg drgań z tłumieniem:
a) nadkrytycznym
b) podkrytycznym
c) krytycznym.

17. W większości oscylatorów harmonicznych zachodzi tłumienie i w nieobecności siły wymuszającej drgania ulegają wygaszeniu. Wyjaśnij to.

15.6 Drgania wymuszone

18. Dlaczego w czasie przemarszu przez most żołnierze otrzymują rozkaz „Dowolny krok!”, aby nie szli "w nogę"?

19. Czy uważasz, że w świecie rzeczywistym istnieje przykład oscylatora harmonicznego, który jest całkowicie wolny od tłumienia? Spróbuj utworzyć listę pięciu przykładów dla ruchu harmonicznego swobodnego i drugą listę oscylatorów harmonicznych z tłumieniem. Która lista była prostsza do przygotowania?

20. W celu przeprowadzenia diagnostyki silnika samochodowego inżynierowie stosują wibroakustyczne metody pomiarowe. Niepożądane drgania mogą generować dźwięk, który jest głośny i uciążliwy dla kierowcy, a część silnika może ulec przedwczesnemu zużyciu. Załóżmy, że w problemowe drgania dotyczą części silnika o długości L zrobionej z materiału o masie M. Co można zrobić, aby ten problem wyeliminować?

ZADANIA

15.1 Ruch harmoniczny

21. Udowodnij, że zastosowanie równania $x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ będzie też prowadzić do tego samego wzoru na okres drgań układu masy na sprężynie. Dlaczego zagadnienie to analizowaliśmy, korzystając z funkcji cosinus?

22. Jaki jest okres drgań prądu w sieci elektrycznej, jeśli częstotliwość wynosi 50,0 Hz?

23. Jeśli w czasie wykonywania intensywnych ćwiczeń twoje tętno wynosi 150 uderzeń na minutę, to ile trwa jedno uderzenie serca wyrażone w sekundach?

24. Wyznacz częstotliwość kamertonu, który wykonuje jedno pełne drganie w czasie $2{,}50 \cdot 10^{-3}\,\text{s}$.

25. Stroboskop generuje błysk co $8{,}00 \cdot 10^{-5}\,\text{s}$. Jaka jest częstotliwość błysków?

26. Opona ma wzór bieżnika z poprzecznymi rowkami umieszczonymi co 2 cm. Każdy rowek odpowiada za pojedyncze drganie. Jaka jest częstotliwość tych drgań, jeśli samochód porusza się z prędkością 30 m/s?

27. Każdy tłok w silniku generuje impuls dźwiękowy co drugi obrót wału korbowego.
a. Jak szybko porusza się samochód wyścigowy wyposażony w ośmiocylindrowy silnik, jeśli emituje on dźwięk o częstotliwości 750 Hz, a wał korbowy wykonuje 2000 obrotów na kilometr drogi?
b. Ile obrotów na minutę wykonuje silnik?

28. Mechaniczny zegar z kukułką odmierza czas na podstawie drgań masy na sprężynie. Masa ta może być ozdobną figurką, np. aniołkiem. Jak należy dobrać współczynnik sprężystości, aby uzyskać okres 0,5 s dla masy 0,015 kg?

29. Przyłączona do sprężyny masa m_0 zwisa pionowo. Zostaje ona podniesiona nieco do góry i puszczona swobodnie. Wykonuje oscylacje z częstotliwością f_0. Jeśli zastąpimy ją inną masą o wartości dziewięciokrotnie wyższej i powtórzymy eksperyment, to o jaką krotność zmieni się częstotliwość f_0 drgań?

30. Masa 0,5 kg zawieszona na sprężynie wykonuje drgania z okresem 1,50 s. O ile musimy zwiększyć masę drgającego ciała, aby uzyskać okres drgań równy 2 s?

31. Z jaką dokładnością powinna być dobrana masa w poprzednim zadaniu, jeśli chcemy, aby okres drgań nie był dłuższy niż 2,01 s ani krótszy niż 1,99 s? Podaj oczekiwany procentowy błąd względny przy doborze masy i określ dopuszczalny zakres masy ciężarka.

15.2 Energia w ruchu harmonicznym

32. Paczkę z rybami zawieszono na wadze sprężynowej.

a. Jaki jest współczynnik sprężystości, jeśli przy masie paczki równej 10 kg sprężyna rozciąga się o 8 cm?
b. Ile waży ryba, która rozciąga sprężynę o 5,50 cm?
c. Kreski podziałki zostały naniesione co pół kilograma. Jak daleko od siebie leżą kreski?

33. W boksie olimpijskim górny limit dla zawodnika wagi ciężkiej wynosi 91 kg. Przy rutynowym sprawdzeniu wagi stwierdzono, że szalka pod wpływem masy 120 kg obniża się o 0,75 cm i że waga funkcjonuje zgodnie z

prawem Hooke'a.
a. Jaki jest współczynnik sprężystości wagi?
b. Jeśli bokser staje na wadze i szalka obniża się o 0,48 cm, to czy zawodnik ten mieści się w kategorii wagi ciężkiej?

34. Niektóre pistolety typu BB do wystrzału kulki wykorzystują tłok sprężynowy.
a. Oblicz współczynnik sprężystości sprężyny tłoka o masie 0,05 kg, tak aby przy początkowym ściśnięciu sprężyny o 0,15 m tłok ten osiągnął prędkość maksymalną 20,0 m/s.
b. Jaką siłę należy przyłożyć do sprężyny, aby osiągnąć takie skrócenie?

35. Drążków pogo używa się najczęściej jako zabawek i służą do skakania przy użyciu sprężyny. Kiedy człowiek o masie 80 kg stanie na drążku pogo, sprężyna ulega skróceniu o 0,120 m.
a. Jaki jest współczynnik sprężystości sprężyny?
b. Czy sprężyna będzie ulegała większemu ściśnięciu podczas skakania?

36. Jeśli zawiesimy na sprężynie masę 0,3 kg, długość tej sprężyny wyniesie 0,2 m, a przy zawieszonej masie 1,95 kg ta długość to 0,75 m.
a. Jaki jest współczynnik sprężystości sprężyny?
b. Jaka jest długość sprężyny nieobciążonej?

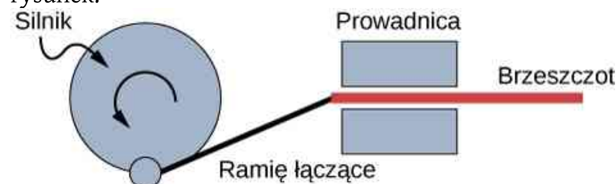
37. Współczynnik sprężystości liny nylonowej wynosi $1{,}40 \cdot 10^4\ \mathrm{N/m}$. Na linie wisi amator wspinaczki górskiej.
a. Jaka jest częstotliwość oscylacji wspinacza na linie, jeśli sumaryczna jego masa, wraz z ekwipunkiem, wynosi 90 kg?
b. O ile rozciągnie się lina, zanim zahamuje jego upadek, jeśli długość luzu liny (czyli wolnego spadania wspinacza) wynosi 2 m? (*Wskazówka:* zastosuj zasadę zachowania energii).
c. Rozwiąż ponownie oba zagadnienia w sytuacji, kiedy wspinacz wisi na dwukrotnie dłuższej linie z tego samego materiału.

15.3 Porównanie ruchu harmonicznego z ruchem jednostajnym po okręgu

38. Oscylacje masy na sprężynie w układzie pionowym można również opisać za pomocą obracającego się dysku z markerem. Zamiast świecących pionowo w dół lamp umocowanych horyzontalnie w linii nad dyskiem, można ustawić lampy pionowo, a ich światło skierować na bok obracającego się dysku z markerem. W ten sposób można uzyskać na ścianie plamkę cienia, która będzie się poruszać w górę i w dół. Napisz wzory opisujące ruch plamki, przyjmując że jej położenie w chwili $t = 0$ s wynosi $y = 0$ m, a następnie plamka porusza się w kierunku dodatnich wartości osi y.

39. Nowoczesny mechanizm zegara wykorzystuje masę 0,01 kg oscylującą na sprężynie o współczynniku sprężystości 1,25 N/m.
a. Jaka jest maksymalna prędkość ciała wykonującego drgania w zakresie od -3 cm do +3 cm względem położenia równowagi?
b. Ile dżuli energii kinetycznej ma ciało w chwili najwyższej prędkości?

40. Piła szablasta wykorzystuje obroty silnika do wprawienia brzeszczotu w ruch posuwisto-zwrotny w lewo-prawo; mechanizm jarzmowy przedstawia poniższy rysunek.



Oszacuj maksymalną prędkość brzeszczotu podczas jego przemieszczania się, jeśli tarcza silnika obraca się z częstotliwością 60 Hz i ma promień 3 cm.

41. O zachodzie słońca student stoi na skraju karuzeli o promieniu $2\ \mathrm{m}$, która obraca się pięć razy na minutę. Student rzuca cień na pobliski budynek.
a. Napisz równanie dla położenia cienia.
b. Napisz równanie prędkości cienia.

15.4 Wahadła

42. Jaką długość ma wahadło o okresie drgań 0,500 s?

43. Niektórzy uważają, że wahadło o okresie drgań 1 s może być poruszane "siłą umysłu", czyli bez fizycznej ingerencji (tzw. psychokineza), ponieważ taki okres drgań zgadza się z przeciętnym tętnem człowieka. Bez względu na prawdziwość tej tezy, oblicz długość takiego wahadła.

44. Jaki jest okres drgań wahadła o długości 1 m?

45. Ile czasu potrzebuje dziecko na huśtawce na wykonanie wahnięcia w tę i z powrotem (jedno pełne drganie), jeśli jego środek ciężkości znajduje się 4 m poniżej punktu zawieszenia?

46. Wahadło w zegarze z kukułką ma długość 5 cm. Jaka jest częstotliwość drgań wahadła?

47. Dwie papugi siedzą razem na huśtawce, a ich łączny środek masy znajduje się 10 cm poniżej punktu zawieszenia. Podaj częstotliwość oscylacji huśtawki.

48. a. Wahadło, które ma okres 3,00000 s w miejscu, gdzie przyspieszenie ziemskie wynosi $9{,}79\ \mathrm{m/s}^2$ przeniesiono do miejsca, w którym przyspieszenie g wynosi $9{,}82\ \mathrm{m/s}^2$. Jaki jest okres drgań wahadła w nowym miejscu?
b. W oparciu o relację pomiędzy okresem drgań i przyspieszeniem ziemskim wyjaśnij, dlaczego tak wiele cyfr znaczących jest potrzebnych do wyznaczenia wartości okresu drgań.

49. Wahadło o okresie drgań 2,00000 s w jednym miejscu ($g = 9{,}80\ \mathrm{m/s}^2$) zostało przeniesione do nowego miejsca, w którym okres drgań wynosi 1,99796 s. Wyznacz przyspieszenie ziemskie w nowym miejscu.

50. a. Jaki jest wpływ podwojenia długości wahadła na okres drgań?
b. Oceń wpływ zmniejszenia długości wahadła o 5 % na okres drgań.

15.5 Drgania tłumione

51. Oscylator słabo tłumiony wykonuje drgania, a w każdym kolejnym cyklu amplituda tych drgań jest mniejsza o $3{,}0\%$. Jaki procent energii mechanicznej oscylatora jest tracony w każdym cyklu?

15.6 Drgania wymuszone

52. Ile energii muszą rozproszyć amortyzatory w samochodzie o masie 1200 kg w celu wygaszenia drgania, którego początkowa prędkość przy przejściu przez położenie równowagi wynosi 0,800 m/s? Załóż, że samochód całkowicie wraca do pierwotnej pozycji.

53. Jeśli samochód ma układ zawieszenia o współczynniku sprężystości $5 \cdot 10^4\ \mathrm{N/m}$, to ile energii muszą rozproszyć amortyzatory, aby wygasić drganie z początkowym maksymalnym przemieszczeniem 0,075 m?

54. Jak bardzo rozciągnie się w pionie sprężyna o współczynniku sprężystości 40,0 N/m, jeśli zawiesimy masę 0,500 kg tak, że będzie ona w bezruchu? b) Policz, jaki jest na tym odcinku ubytek energii potencjalnej grawitacji dla masy 0,500 kg. c) Część energii potencjalnej grawitacji przekształcono w energię potencjalną sprężystości. Policz więc energię potencjalną sprężystości dla tego układu i porównaj ze stratą energii potencjalnej grawitacji. Wyjaśnij, co odpowiada za powstałą różnicę.

55. Na powierzchni horyzontalnej ciało o masie 0,750 kg połączono ze sprężyną o współczynniku sprężystości 150 N/m. Tarcie statyczne zachodzi pomiędzy ciałem a powierzchnią ze współczynnikiem tarcia 0,100.
a. Określ maksymalne rozciągnięcie sprężyny, przy którym masa nie będzie się poruszać.
b. Jeśli ciało wykonuje drgania z początkową amplitudą dwukrotnie wyższą niż odległość znaleziona powyżej i współczynnik tarcia kinetycznego wynosi 0,085, to jaka jest całkowita droga przebyta przez ciało aż do zatrzymania? Załóż, że ruch zaczyna się w położeniu amplitudy.

ZADANIA DODATKOWE

56. Wisząca pionowo sprężyna początkowo miała swoją naturalną długość. Następnie do sprężyny przyczepiono ciało o masie m. Ciało puszczone swobodnie zaczyna wykonywać drgania w górę i w dół. Amplituda drgań jest więc odległością pomiędzy nowym położeniem równowagi układu a położeniem równowagi sprężyny bez przyłączonej masy. a) Pokaż, że w najniższym położeniu układu sprężyna działa na ciało skierowaną do góry siłą o wartości 2,00 mg. b) Załóż, że sprężyna o współczynniku sprężystości 10,0 N/m, zwisa pionowo, a położenie wolnego końca sprężyny wynosi 0,00 m. Gdzie znajduje się nowe położenie równowagi po przyłączeniu do sprężyny ciała o masie 0,25 kg? c) Dla układu opisanego we wstępie zadania znajdź amplitudę drgań ciała wprawionego w ruch, jeśli współczynnik sprężystości wynosi 10 N/m i ciało ma masę 0,25 kg. d) Wyznacz maksymalną prędkość ciała.

57. Zawodniczka przed skokiem z trampoliny porusza się ruchem harmonicznym. Jej masa ciała wynosi 55,0 kg, a okres drgań 0,800 s. Następnym zawodnikiem jest mężczyzna, dla którego okres drgań wynosi 1,05 s. Jaka jest jego masa, jeśli zaniedbamy masę trampoliny?

58. Pusta trampolina wykonuje drgania w górę i w dół ruchem harmonicznym z częstotliwością 4,00 Hz. Efektywna masa trampoliny wynosi 10,0 kg. Jaka jest częstotliwość zawodnika o masie 75,0 kg na tej trampolinie?

59. Urządzenie pokazane na poniższej fotografii zabawia małe dzieci. Maluch umieszczony w specjalnej uprzęży wykonuje oscylacje na sprężynie podwieszonej do framugi drzwi.
a. Jeśli sprężyna rozciąga się o 0,250 m gdy dziecko ma masę 8,0 kg, to jaki jest jej współczynnik sprężystości?
b. Jaki jest okres drgań dziecka na sprężynie?
c. Jaka jest maksymalna prędkość dziecka przy amplitudzie oscylacji 0,200 m?

Źródło ilustracji: Lisa Doehnert



60. Do jednego z końców sprężyny o $k = 100\,\mathrm{N/m}$, którą można ściskać i rozciągać, przymocowano ciało o masie $5\,\mathrm{kg}$. Ciało spoczywa na stole. Drugi koniec sprężyny zakotwiczono w ścianie. Położenie równowagi traktuje się jako zerową wartość położenia. Student przesuwa ciało w położenie $x = 4{,}0\,\mathrm{cm}$ i puszcza je swobodnie. Ciało wykonuje drgania w ruchu harmonicznym, poruszając się bez tarcia po stole. a) Napisz równania ruchu ciała. b) Znajdź położenie, prędkość i przyspieszenie ciała w chwili $t = 3{,}00\,\mathrm{s}$.

61. Wahadło matematyczne przetransportowano z Ziemi na Księżyc. Przyspieszenie grawitacyjne na Księżycu wynosi $1{,}63\,\mathrm{m/s^2}$. Jaka jest relacja pomiędzy okresami drgań wahadła w tych dwóch miejscach?

62. Jak szybko zegar wahadłowy będzie odmierzał czas na Księżycu, gdzie przyspieszenie grawitacyjne wynosi $1{,}63\,\mathrm{m/s^2}$, jeśli ten sam zegar na Ziemi dokładnie odmierza czas? Znajdź rzeczywisty czas (w godzinach) odpowiadający 1 godzinie odmierzonej przez zegar na Księżycu.

63. Jeśli zegar wahadłowy spieszy się o 5,00 s na dzień, to jaka musi być względna zmiana długości wahadła, aby działał perfekcyjnie?

64. Na przymocowanej do sufitu lince o długości 1 m wisi ciało o masie 2 kg. Wystrzelono pocisk o masie 100 g, który przy prędkości 20 m/s zderza się sprężyście z tym ciałem. Napisz równanie ruchu dla drgającego wahadła, zaniedbując opory powietrza.

65. Na przymocowanej do sufitu lince o długości 1 m wisi ciało o masie 2 kg. Wystrzelono pocisk o masie 100 g, który przy prędkości 20 m/s zderza się niesprężyście z tym ciałem, w wyniku czego pocisk i ciało przylegają do siebie. Napisz równanie ruchu dla drgającego wahadła, zaniedbując opory powietrza.

66. U dziadka stoi zegar, którego wahadło ma temperaturę $T = 20°\mathrm{C}$, długość $L_0 = 1\,\mathrm{m}$ oraz masę M. Wahadło to w przybliżeniu jest prętem oscylującym wokół jednego końca. W jakim stopniu (procentowo) zmieni się okres drgań wahadła, jeśli temperatura podniesie się o $10°\mathrm{C}$? Załóż, że długość wahadła zmienia się liniowo wraz z temperaturą według wzoru $L = L_0\,(1 + \alpha \Delta T)$, a pręt jest mosiężny o $\alpha = 18 \cdot 10^{-6}\,{}^{\circ}\mathrm{C}^{-1}$.

67. Klocek o masie 2 kg leży na stole bez tarcia. Sprężynę o współczynniku sprężystości 100 N/m przyczepiono z jednej strony do klocka, a z drugiej do ściany. Na klocku położono dodatkowy klocek o masie 0,5 kg. Dolny klocek delikatnie przesunięto do położenia $x = +A$ i puszczony wolno. Statyczny współczynnik tarcia pomiędzy klockami wynosi 0,45.
a. Jaki jest okres drgań układu?
b. Jaka jest możliwie maksymalna amplituda drgań układu, przy której górny klocek (0,5 kg) nie uległ jeszcze zsunięciu z dolnego?

ZADANIA TRUDNIEJSZE

68. Zawieszenie linowe mocujące most oscyluje z efektywnym współczynnikiem sprężystości $1{,}00 \cdot 10^8\,\mathrm{N/m}$. a) Jaka jest potrzebna energia, aby wprowadzić układ w drgania o amplitudzie 0,1 m? b) Jeśli żołnierze maszerują przez most synchronicznie w cyklu odpowiadającym częstotliwości własnej mostu i w każdej sekundzie zwiększają energię o $1{,}00 \cdot 10^4\,\mathrm{J}$, to ile potrzeba czasu, aby most zwiększył amplitudę drgań z 0,100 m do 0,500 m?

69. 25 października 1964 roku w trakcie sztormu na Bałtyku podmuchy wiatru w Trójmieście osiągały prędkość 162 km/h. Obecnie inżynierowie przygotowują projekt wieżowca, którego konstrukcja będzie niewrażliwa na takie podmuchy. Na szczycie budynku zostanie zainstalowane ciało o masie $4 \cdot 10^5\,\mathrm{kg}$ zawieszone na sprężynach z możliwością regulacji współczynnika sprężystości. Jest to układ tłumika masowego o takiej samej częstotliwości jak częstotliwość drgań budynku, a więc w warunkach silnych wiatrów ciało to będzie wprowadzane w oscylacje zamiast budynku.
a. Jaki musi być efektywny współczynnik sprężystości, aby tłumik masowy oscylował z okresem drgań równym 2 s?
b. Jaka energia jest zmagazynowana w sprężynach dla przemieszczenia 2 m z położenia równowagi?

70. W atmosferze w warunkach równowagi stabilnej (kiedy temperatura wzrasta wraz z wysokością) małe objętości powietrza mogą wykonywać drgania w górę i w dół na skutek siły zwrotnej zapewnionej przez siłę wyporu powietrza. Częstotliwość drgań cząstek powietrza jest miarą stabilności atmosfery. Zakładając, że przyspieszenie cząstki powietrza można opisać jako $\frac{\partial^2 z'}{\partial t^2} = \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho(z)}{\partial z} z'$, wykaż, że $z' = z_0' e^{t\sqrt{-N^2}}$ jest rozwiązaniem, gdzie N jest częstotliwością Brunta-Vaisali. Pamiętaj, że w warunkach stabilnej atmosfery gęstość maleje wraz z wysokością, a małe objętości powietrza wykonują drgania w górę i w dół.

71. Rozważ potencjał van der Waalsa $U(r) = U_o \left[\left(\frac{R_o}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{R_o}{r}\right)^6\right]$ stosowany do opisywania oddziaływania dwóch cząsteczek z minimum energii potencjalnej przy $r = R_o$. Znajdź wzór na siłę jako funkcję odległości r. Następnie załóż, że przemieszczenia są małe ($r = R_o + r'$) i użyj wzoru dwumianowego Newtona:

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots,$$

aby pokazać, że w przybliżeniu małych wychyleń siła ta zachowuje się analogicznie do prawa Hooke'a.

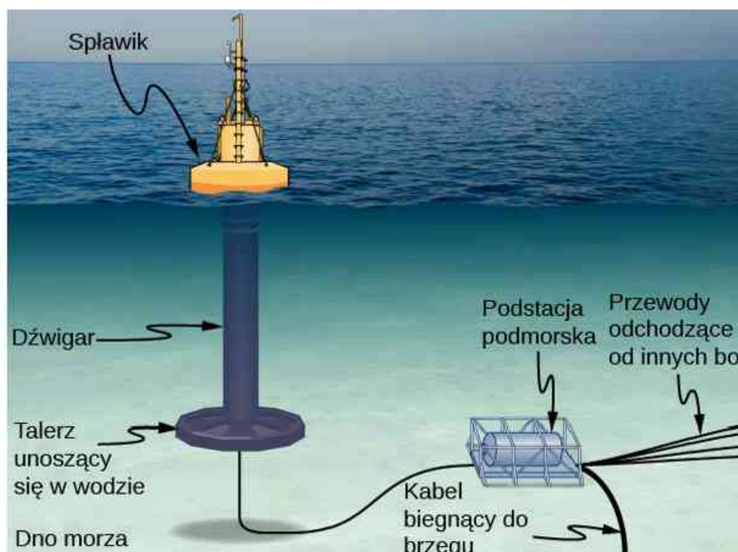
72. Zegar wahadłowy dokładnie odmierzał czas, ale

pewnego dnia, dokładnie w południe, długość wahadła uległa zmianie o 1,000 %. Jaki czas wskaże zegar 24 godziny później? Przeprowadź obliczenia z dokładnością do czterech miejsc po przecinku, mając też na uwadze, że w odpowiedzi powinny się znaleźć dwa wyniki.

73. a. Sprężyny w samochodzie terenowym działają jak pojedyncza sprężyna o współczynniku sprężystości $1{,}30 \cdot 10^5\ \mathrm{N/m}$. O jaki dystans obniży się zawieszenie samochodu przy obciążeniu go ładunkiem o masie 1000 kg?
b. Jeśli samochód ma cztery identyczne sprężyny, to ile wynosi współczynnik sprężystości każdej z nich?

16 | FALE





Rysunek 16.1 Z badań nad odnawialnymi źródłami energii wywodzi się koncepcja boi wytwarzającej prąd elektryczny. Opracowano wiele wersji tego urządzenia. Model pokazany na rysunku przekształca energię ruchu boi w płaszczyźnie pionowej (tj. w górę i w dół) i poziomej (tj. z boku na bok) w energię ruchu obrotowego. W ten sposób uruchomiony zostaje generator prądu elektrycznego. Energia elektryczna magazynowana jest w baterii.

Treść rozdziału

Wstęp

W tym rozdziale zajmiemy się fizyką ruchu falowego. Skupimy się na falach mechanicznych, które są zaburzeniami rozchodzącymi się za pośrednictwem ośrodka materialnego, takiego jak powietrze lub woda. Podobnie jak w przypadku ruchu harmonicznego prostego, opisanego w poprzednim rozdziale, energia fal przenoszona za pośrednictwem ośrodka materialnego jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy. Fale powstające na powierzchni wody są falami poprzecznymi, a ich energia rozchodzi się w płaszczyźnie poziomej, podczas gdy cząsteczki wody poruszają się w górę i w dół pod wpływem sił sprężystości. Boja, której schemat pokazano na rysunku powyżej, jest używana do wytwarzania elektryczności z energii fal oceanicznych. Fale rozchodzące się po powierzchni oceanu wprawiają boję w ruch pionowy, a jego energia zostaje przekształcona w energię ruchu obrotowego. Ruch obrotowy uruchamia wirnik w generatorze prądu elektrycznego, ten zaś ładuje baterie, które są używane jako stałe źródło prądu przez końcowego odbiorcę. Testy tego modelu przeprowadziła amerykańska marynarka wojenna w ramach projektu mającego zapewnić dostawy energii elektrycznej do sieci ochrony wybrzeża. Wynik był pozytywny, badany model dostarczał energię o mocy średnio 350 W. Co więcej, boja okazała się odporna na trudne warunki atmosferyczne, na przykład w 2011 r. przetrwała huragan Irene u wybrzeży New Jersey.

Zagadnienia omawiane w tym rozdziale będą podstawą wielu innych, ciekawych tematów, m.in. dotyczących procesów przekazywania informacji i koncepcji mechaniki kwantowej.

16.1 | Fale biegnące

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- definiować długość, amplitudę, okres, częstotliwość i prędkość fali;
- wyjaśniać różnicę między falą podłużną a falą poprzeczną oraz podawać przykłady każdego rodzaju fal;
- wymieniać rodzaje fal.

W rozdziale Drgania przekonaliśmy się, że ruch drgający jest ważnym rodzajem ruchu, ponieważ pozwala wyjaśnić wiele zjawisk fizycznych. Jest on istotny również dlatego, że drgania wytwarzają fale, a te z kolei odgrywają fundamentalną rolę w całej fizyce. Wiele pojęć i wzorów, które poznaliśmy w rozdziale poświęconym drganiom, można zastosować również do ruchu falowego (Rysunek 16.2).



Rysunek 16.2 Gdy słyszymy słowo „fala”, zwykle pierwszym obrazem, który pojawia się w naszych myślach, jest fala morska. Mają one wiele cech wspólnych z falami, które będziemy tu omawiać, jednak mechanizm ich powstawania jest dość złożony, a jego opisanie wybiega poza zakres tego rozdziału. Fale morskie mają charakter nieliniowy, dlatego zastosowanie do nich prostych koncepcji przedstawionych w tym rozdziale, choć wydaje się naturalne, to nie odda w pełni ich natury. (Źródło: Steve Jurvetson)

Rodzaje fal

Pojęcie **fala** (ang. **wave**) oznacza zaburzenie, które rozchodzi się od miejsca, w którym powstało. Wyróżnia się trzy podstawowe typy fal: mechaniczne, elektromagnetyczne i fale materii.

Fale mechaniczne (ang. **mechanical waves**) podlegają zasadom dynamiki Newtona i wymagają obecności **ośrodka** materialnego, czyli substancji, w której mogą się rozchodzić. Gdy ośrodek ulega odkształceniu, wówczas pojawiają się w nim siły sprężystości. Fale mechaniczne przenoszą energię i pęd, nie przenosząc przy tym masy. Przykładami fal mechanicznych są fale na wodzie, fale dźwiękowe i fale sejsmiczne. Ośrodkiem dla fal na wodzie jest woda, natomiast dla fal dźwiękowych zwykle jest to powietrze, ale mogą się one rozchodzić również w innych ośrodkach. Zagadnienie to dokładniej omówimy w rozdziale Dźwięk. W przypadku fal na powierzchni wody zaburzenie może powstać na przykład na skutek wrzucenia do niej kamienia lub pod wpływem ruchów ciała pływaka. Natomiast dla fal dźwiękowych wspomniane zaburzenia to zmiany ciśnienia powietrza, które mogą być skutkiem drgań membrany głośnika lub wibracji kamertonu (w obu przypadkach przez zaburzenia rozumiemy drgania cząstek ośrodka). Dla fal mechanicznych energia i pęd są przenoszone wraz z przemieszczaniem się fali, tymczasem ich masa drga wokół położenia

równowagi (to zagadnienie omówimy w podrozdziale Energia i moc fali). Trzęsienia Ziemi generują fale sejsmiczne, z którymi wiąże się kilka typów zaburzeń, w tym zniekształcenia powierzchni Ziemi i zaburzenia ciśnień pod jej powierzchnią. Fale sejsmiczne przemieszczają się w ośrodkach stałych i ciekłych tworzących Ziemię. W tym rozdziale skupimy się jednak na falach mechanicznych.

Fale elektromagnetyczne (ang. **electromagnetic waves**) są związane z drganiami pól elektrycznych i magnetycznych i nie wymagają obecności ośrodka. Popularne przykłady tego rodzaju fal to: promieniowanie γ, promieniowanie rentgenowskie, promieniowanie ultrafioletowe, światło widzialne, promieniowanie podczerwone, mikrofale i fale radiowe. Fale elektromagnetyczne rozchodzą się w próżni z prędkością światła $v = c = 2{,}99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, tak jak światło docierające do powierzchni Ziemi z przestrzeni kosmicznej. Wykazują również pewne podobieństwa do fal mechanicznych. Zagadnienie to zostanie omówione szczegółowo w rozdziale Fale elektromagnetyczne (https://cnx.org/content/m65888/latest/) .

Fale materii (ang. **matter waves**) są kluczowym zagadnieniem działu fizyki znanego jako mechanika kwantowa. Są one związane z takimi cząstkami jak protony, elektrony, neutrony i inne występujące w przyrodzie cząstki elementarne. Teoria, według której każda cząstka materialna ma właściwości falowe, została po raz pierwszy sformułowana przez Louisa de Broglie’a w 1924 roku. Fale materii zostaną omówione w rozdziale Fotony i fale materii (https://cnx.org/content/m65889/latest/) .

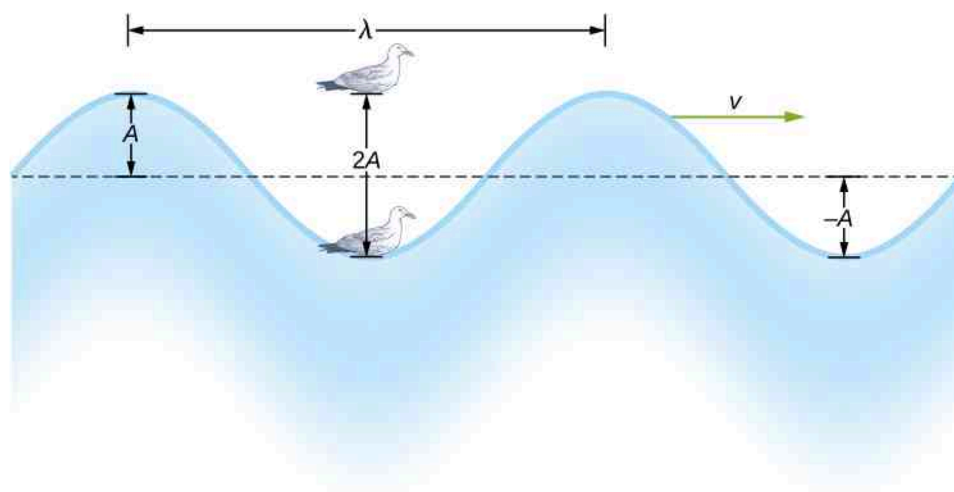
Fale mechaniczne

W oparciu o przykład fal mechanicznych można okreslić wielkości wspólne dla wszystkich rodzajów fal, takie jak amplituda, długość, okres, częstotliwość i energia. Pełną charakterystykę fal możemy podać przy zastosowaniu zaledwie kilku zasad.

Najprostsze fale mechaniczne są powtarzalne i charakteryzują się prostym ruchem harmonicznym. Te proste fale harmoniczne możemy opisać korzystając z funkcji sinus i cosinus. Dla przykładu rozważmy uproszczoną falę na powierzchni wody pokazaną na Rysunku 16.3. W odróżnieniu od skomplikowanych fal oceanicznych, w przypadku fal na powierzchni wody cząsteczki wody wykonują ruch w płaszczyźnie pionowej, natomiast zaburzenie rozchodzi się w płaszczyźnie poziomej. Pokazana na Rysunku 16.3 mewa, siedząca na powierzchni wody jest wprawiana w proste drgania harmoniczne w górę i w dół. Fala rozchodząca się po powierzchni wody charakteryzuje się obecnością grzbietów (najwyższy punkt fali) i dolin (najniższy punkt fali). Czas potrzebny na wykonanie jednego pełnego ruchu drgającego w górę i w dół nazywa się okresem fali T. Częstotliwość fali to liczba fal przebiegających przez dowolny punkt w jednostce czasu i wynosi $f = 1/T$. Okres może być wyrażony w dowolnej jednostce czasu, zwykle jednak jest to sekunda; natomiast częstotliwość zwykle podaje się w hercach (Hz), gdzie $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$.

Długość fali (ang. **wavelength**) oznacza się grecką literą lambda (λ) i można ją podawać w metrach, centymetrach i innych jednostkach długości. Długość fali mierzy się pomiędzy dwoma podobnymi punktami ośrodka o tej samej wysokości i wychyleniu. Na Rysunku 16.3 zmierzono odległość między dwoma najbliższymi grzbietami fali (czyli zmierzono długość fali). Zgodnie z tym, co wspomnieliśmy wcześniej, okres to czas jednego pełnego drgania. Okres to także czas, w którym fala pokona odcinek drogi o długości równej jednej długości fali.

Amplituda fali (ang. **wave amplitude**) oznaczana A jest maksymalnym wychyleniem ośrodka z położenia równowagi. Na Rysunku 16.3 położenie równowagi oznaczono linią przerywaną. Odpowiada ono poziomowi, na jakim utrzymywałaby się powierzchnia wody, gdyby ruch falowy nie występował. Ponieważ nasza fala jest symetryczna, $+A$ jest odległością grzbietu od położenia równowagi, a $-A$ – odległością doliny od położenia równowagi. Amplitudę można wyrażać w metrach, centymetrach lub innych jednostkach długości.



Rysunek 16.3 Fale rozchodzące się na powierzchni wody wprawiają siedzącą na powierzchni wody mewę w ruch harmoniczny prosty w górę i w dół. Długość fali wynosi λ i odpowiada odległości pomiędzy sąsiadującymi identycznymi punktami fali. Amplituda fali A jest maksymalnym wychyleniem fali z położenia równowagi (położenie równowagi oznaczono linią przerywaną). W tym przykładzie cząsteczki ośrodka poruszają się w górę i w dół, podczas gdy zaburzenie rozchodzi się równolegle do powierzchni z prędkością v.

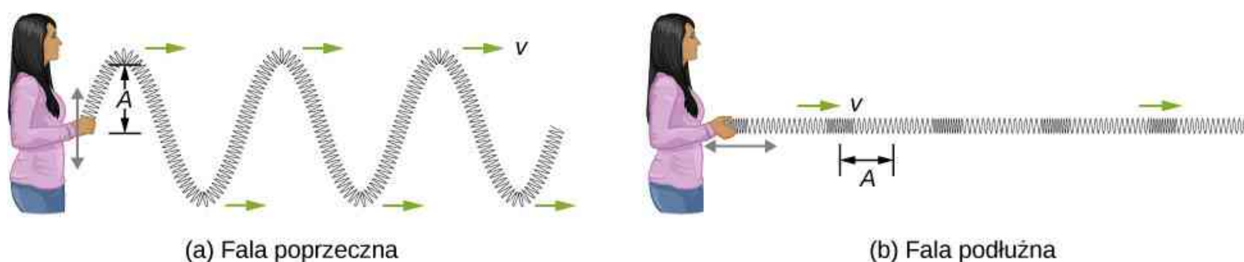
Na rysunku fala na wodzie rozchodzi się w ośrodku z prędkością $\vec{v}$. **Prędkość fali** (ang. **wave velocity**) to iloraz odległości, jaką fala pokonuje i czasu trwania ruchu. Z kolei **szybkość fali** (ang. **wave speed**) jest wartością prędkości rozchodzenia się fali, przy czym w polskiej literaturze zwykle prędkości i szybkości fali nie rozróżnia się. Można to zapisać w postaci równania:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f. \tag{16.1}$$

Ta fundamentalna zależność jest prawdziwa dla wszystkich typów fal. Dla fal na wodzie v jest prędkością rozchodzenia się fali powierzchniowej, dla dźwięku v – jest prędkością dźwięku, a dla światła widzialnego – prędkością światła.

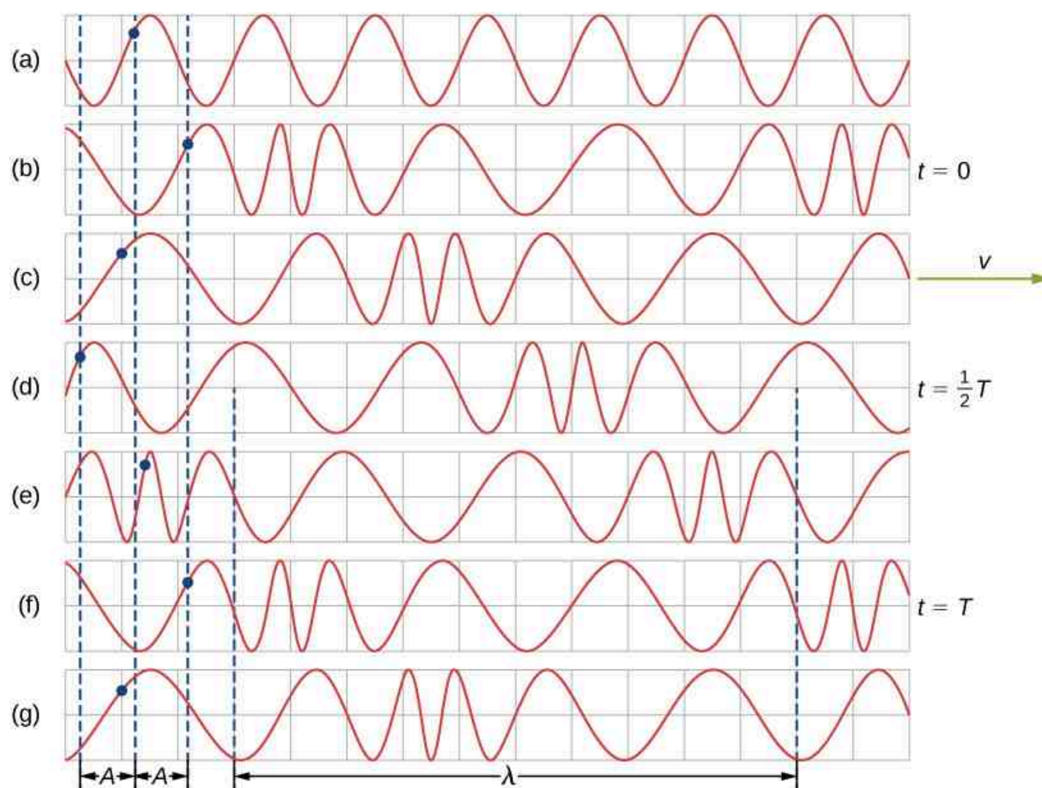
Fale poprzeczne i podłużne

Wiemy już, że prosta fala mechaniczna składa się z okresowych zaburzeń, które rozchodzą się od jednego punktu ośrodka do drugiego. Na Rysunku 16.4 (a) fala rozchodzi się w płaszczyźnie poziomej, natomiast zaburzenie ośrodka zachodzi w płaszczyźnie pionowej. Taką falę nazywamy **falą poprzeczną** (ang. **transverse wave**). Fala poprzeczna może się rozchodzić w dowolnym kierunku, ale zaburzenie ośrodka zachodzi w kierunku prostopadłym do kierunku rozchodzenia się fali. Z kolei dla **fali podłużnej** (ang. **longitudinal wave**) zaburzenie zachodzi w kierunku równoległym do kierunku rozchodzenia się fali. Rysunek 16.4 (b) pokazuje przykładową falę podłużną. Wielkość zaburzenia odpowiada amplitudzie fali A, która jest całkowicie niezależna od szybkości rozchodzenia się fali v.



Rysunek 16.4 (a) W przypadku fal poprzecznych ośrodek drga w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku rozchodzenia się fali. W pokazanym przykładzie sprężyna poruszana jest w płaszczyźnie pionowej, natomiast fala biegnie w prawo w płaszczyźnie poziomej.
(b) W przypadku fali podłużnej ośrodek drga w kierunku równoległym do kierunku rozchodzenia się fali. Powoduje to drganie sprężyny tam i z powrotem, podczas gdy fala biegnie w prawo.

Prosta graficzna reprezentacja fal przedstawionych na Rysunku 16.4 (b) jest pokazana na Rysunku 16.5. Rysunek 16.5 (a) przedstawia początkowy kształt sprężyny, zanim jeszcze wzdłuż niej powstała fala. Punkt, który będzie nas interesował, oznaczono granatową kropką Rysunek 16.5 (b)-(g) przedstawia odwzorowanie ruchu sprężyny w odstępach czasu, co 1/4 okresu, w których sprężyna porusza się tam i z powrotem wzdłuż osi x ze stałą częstotliwością. Zaburzenia ośrodka są widoczne jako naprzemienne wydłużenia i skrócenia odległości między zwojami sprężyny. Należy zauważyć, że punkt zaznaczony granatową kropką wykonuje drgania wokół położenia równowagi w zakresie odległości odpowiadających A, gdy fala podłużna przemieszcza się ze stałą prędkością wzdłuż osi x. Odległość A jest amplitudą fali. Współrzędna y położenia kropki nie zmienia się w trakcie rozchodzenia się fali wzdłuż sprężyny. Długość fali została zmierzona na Rysunku 16.5 (d). Zależy ona od jej prędkości i częstotliwości siły wymuszającej.



Rysunek 16.5 (a) Prosta graficzna prezentacja odcinka naprężonej sprężyny pokazanego na Rysunku 16.4 (b) w chwili początkowej. Punkt, który będziemy śledzić, został oznaczony granatową kropką. (b)-(g). Fala podłużna generowana jest przez drgania końca sprężyny tam i z powrotem wzdłuż osi x. Fala podłużna o długości λ przemieszcza się wzdłuż sprężyny w kierunku zgodnym ze zwrotem osi x z prędkością v. W celach poglądowych sposób odmierzania długości fali przedstawiono na (d). Należy zauważyć, że interesujący nas punkt porusza się tam i z powrotem w zakresie odległości odpowiadających A.

Fale mogą być poprzeczne, podłużne lub stanowić kombinację obu tych typów. Przykładami fal poprzecznych są fale powstające na strunach instrumentów muzycznych lub na powierzchni wody. Fale dźwiękowe rozchodzące się

w powietrzu lub wodzie są falami podłużnymi. W ich przypadku zaburzenia ośrodka to okresowe zmiany ciśnienia, które rozchodzą się w płynie. Płyny nie mają wytrzymałości na ścinanie, dlatego też rozchodzące się w nich fale dźwiękowe są falami podłużnymi. Dźwięki rozchodzące się w ciałach stałych mogą mieć zarówno składową podłużną, jak i poprzeczną. Trzęsienia Ziemi generują fale sejsmiczne, które również mają te dwie składowe. Są one nazywane odpowiednio falą typu P (lub składową dylatacyjną) oraz falą typu S (lub składową torsyjną). Składowe te posiadają ważne cechy indywidualne, np. rozchodzą się z różnymi prędkościami. Za trzęsienia Ziemi mogą również odpowiadać fale powierzchniowe, podobne do fal powstających na powierzchni wody. Również fale oceaniczne mają składowe podłużne i poprzeczne.

Przykład 16.1

Fale na sznurze

Student wziął sznur o długości 30,00 m i przymocował jeden koniec do ściany w laboratorium fizycznym. Następnie, uchwyciwszy wolny koniec w taki sposób, by utrzymywać stałe naprężenie sznura, zaczął nim poruszać w górę i w dół z częstotliwością 2,00 Hz, generując fale mechaniczne. Maksymalne wychylenie końca sznura wynosiło 20,00 cm. Pierwsza fala uderzyła w ścianę po upływie 6,00 s od chwili jej powstania.(a) Ile wynosi prędkość fali? (b) Ile wynosi okres fali? (c) Jaka jest długość fali?

Strategia rozwiązania

a. Prędkość fali można obliczyć dzieląc przebytą odległość przez czas.
b. Okres fali jest odwrotnością częstotliwości siły wymuszającej.
c. Znając prędkość fali i okres można obliczyć jej długość $v = \lambda/T$.

Rozwiązanie

a. Pierwsza fala przebyła 30,00 m w ciągu 6,00 s:

$$v = \frac{30{,}00\ \mathrm{m}}{6{,}00\ \mathrm{s}} = 5{,}00\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

b. Okres fali jest równy odwrotności częstotliwości:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{2{,}00\ \mathrm{s}^{-1}} = 0{,}50\ \mathrm{s}.$$

c. Długość fali jest równa iloczynowi prędkości i okresu:

$$\lambda = vT = 5{,}00\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 0{,}50\ \mathrm{s} = 2{,}50\ \mathrm{m}.$$

Znaczenie

Częstotliwość fali równa się częstotliwości siły wymuszającej wytwarzającej tę falę.



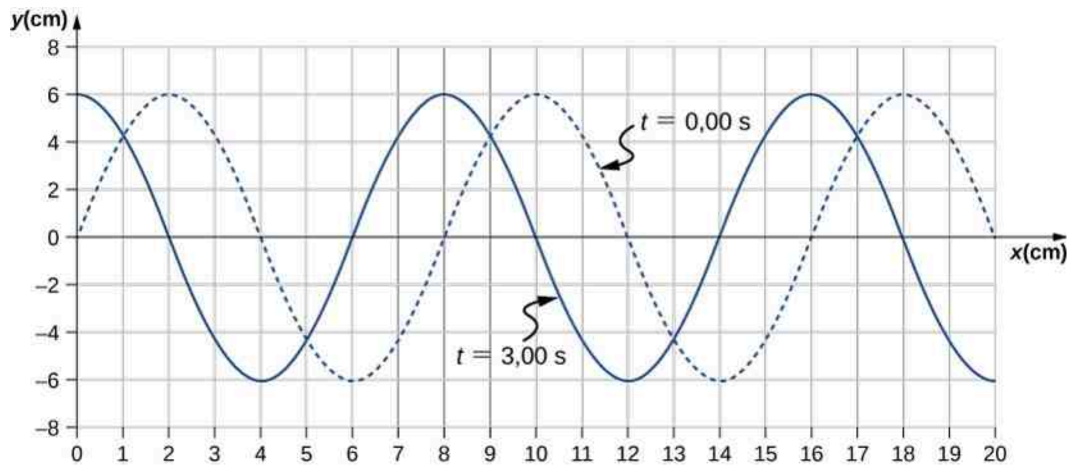
16.1 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Szarpnięcie struny gitary wytwarza drgania, na skutek czego wzdłuż niej rozchodzi się fala. Wibracje struny powodują, że cząsteczki powietrza zaczynają drgać, tworząc falę dźwiękową, o częstotliwości równiej częstotliwości drgań struny. Czy długość fali dźwiękowej jest zawsze równa długości fali rozchodzącej się wzdłuż struny?

Przykład 16.2

Cechy charakterystyczne fal

Mechaniczna fala poprzeczna rozchodzi się ze stałą prędkością w kierunku zgodnym ze zwrotem osi x (jak pokazano na Rysunku 16.4) (a). Ośrodek wykonuje drgania w zakresie od $+A$ do $-A$ wokół położenia równowagi. Wykres na Rysunku 16.6 (a) przedstawia zależność wychylenia sprężyny (y) w funkcji położenia (x), przy czym zwrot osi x jest zgodny z kierunkiem rozchodzenia się fali. Linią przerywaną pokazano

wychylenie sprężyny w funkcji położenia x w chwili $t = 0{,}00$ s . Linia ciągła pokazuje zależność y od x dla $t = 3{,}00$ s . (a) Oblicz długość i amplitudę fali. (b) Znajdź prędkość rozchodzenia się fali. (c) Oblicz okres i częstotliwość fali.



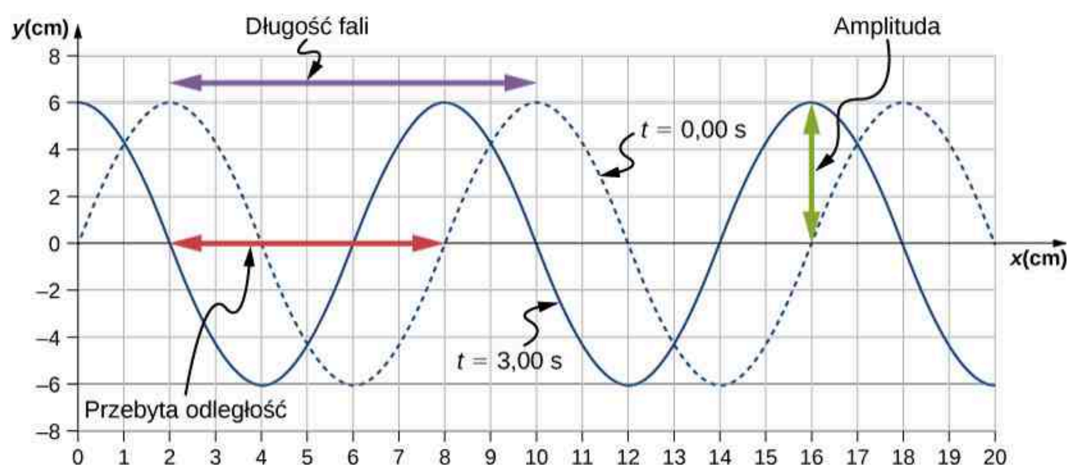
Rysunek 16.6 Fala poprzeczna w dwóch różnych chwilach t.

Strategia rozwiązania

a. Amplitudę i długość fali można odczytać z wykresu.
b. Ponieważ prędkość jest stała, prędkość fali można obliczyć dzieląc odległość jaką fala przebyła przez czas potrzebny na przebycie tej odległości.
c. Okres można obliczyć z $v = \frac{\lambda}{T}$, a częstotliwość z $f = \frac{1}{T}$.

Rozwiązanie

a. Długość fali (fioletowa strzałka) i amplitudę (zielona strzałka) odczytujemy z wykresu na Rysunku 16.7 (b). Długość fali wynosi $\lambda = 8{,}00$ cm , natomiast amplituda równa się $A = 6{,}00$ cm.



Rysunek 16.7 Cechy charakterystyczne omawianych fal.

b. Odległość, jaką fala przebyła w czasie od chwili $t = 0{,}00$ s do chwili $t = 3{,}00$ s można odczytać z wykresu. Zwróćmy uwagę na czerwoną strzałkę, która pokazuje odległość jaką przebył grzbiet w ciągu 3 s. Wynosi ona $8{,}00 \text{ cm} - 2{,}00 \text{ cm} = 6{,}00 \text{ cm}$. Prędkość wynosi:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{8{,}00\ \text{cm} - 2{,}00\ \text{cm}}{3{,}00\ \text{cm} - 0{,}00\ \text{cm}} = 2{,}00\frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

c. Okres obliczamy z zależności $T = \frac{\lambda}{v} = \frac{8{,}00\ \text{cm}}{2{,}00\ \text{cm/s}} = 4{,}00\ \text{s}$, natomiast częstotliwość $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{4{,}00\ \text{s}} = 0{,}25\ \text{Hz}$.

Znaczenie

Zauważmy, że długość fali można obliczyć na podstawie położenia na wykresie dwóch kolejnych punktów o tym samym nachyleniu. Należy wybrać takie punkty, które są najwygodniejsze do dalszych obliczeń.



16.2 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Prędkość rozchodzenia się mechanicznych fal poprzecznych lub podłużnych może być stała, jeśli zaburzenie przemieszcza się w ośrodku. Czy prędkość drgań cząsteczek ośrodka dla fali poprzecznej jest także stała?

16.2 | Matematyczny opis fali

Cel dydaktyczny

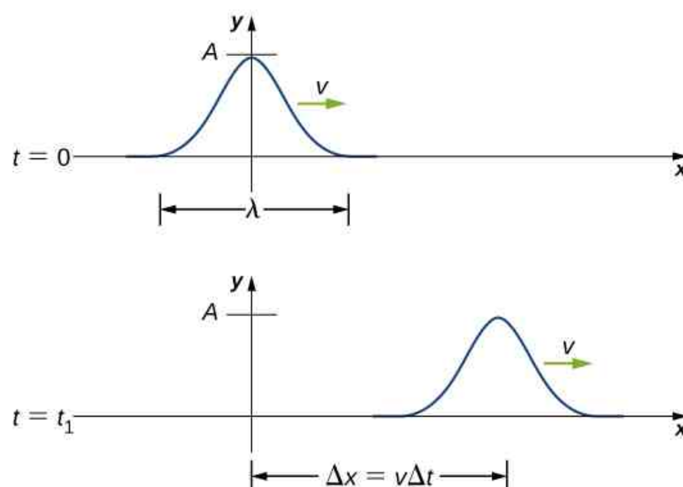
W tym podrozdziale nauczysz się:

- podawać matematyczną postać fali biegnącej ze stałą prędkością;
- obliczać prędkość i przyspieszenie ośrodka;
- wyjaśniać różnicę między prędkością ośrodka a prędkością rozchodzenia się fali.

W poprzednim rozdziale opisywaliśmy fale okresowe, definiując takie wielkości jak: długość, okres, amplituda oraz prędkość fali. Fale jednak możemy też opisać, rozważając ruch cząstek ośrodka, przez który fala przechodzi. Położenie cząstek ośrodka można określić za pomocą tzw. **funkcji falowej** (ang. **wave function**). Pozwala ona określić nie tylko położenie, ale także prędkość i przyspieszenie cząstek ośrodka, przez który biegnie fala w dowolnej chwili.

Impulsy

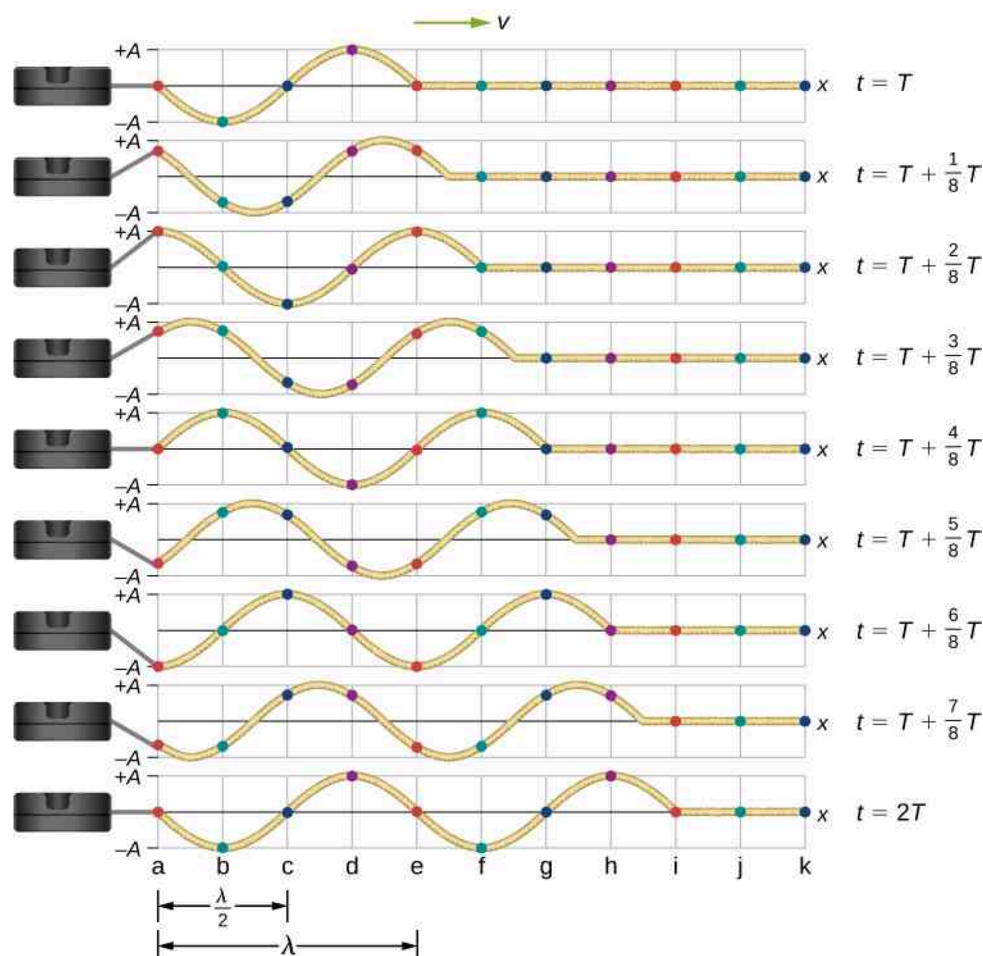
Impuls (ang. **pulse**) oznacza falę wytworzoną przez pojedyncze zaburzenie ośrodka. Impuls ma stałą amplitudę i rozchodzi się ze stałą prędkością. Z uwagi na stałą prędkość droga, którą pokonuje w czasie Δt, wynosi $\Delta x = v\Delta t$ (Rysunek 16.8).



Rysunek 16.8 W chwili $t = 0$ impuls znajduje się w położeniu $x = 0$, a jego amplituda wynosi A. Podczas ruchu impuls zachowuje stały kształt, przebywając drogę $\Delta x = v\Delta t$ w czasie Δt.

Opis sinusoidalnej fali jednowymiarowej za pomocą modelu funkcji falowej

Rozważmy strunę poddaną stałemu naprężeniu F_T , której jeden koniec jest unieruchomiony, a drugi – swobodny – jest wprawiany w drgania w zakresie między $y = +A$ a $y = -A$. Rysunek 16.9 pokazuje obrazy fali w kolejnych chwilach równych wielokrotnościom 1/8 części okresu, przy czym w położeniu wyjściowym zostało już wykonane jedno pełne drganie $(t = T)$.



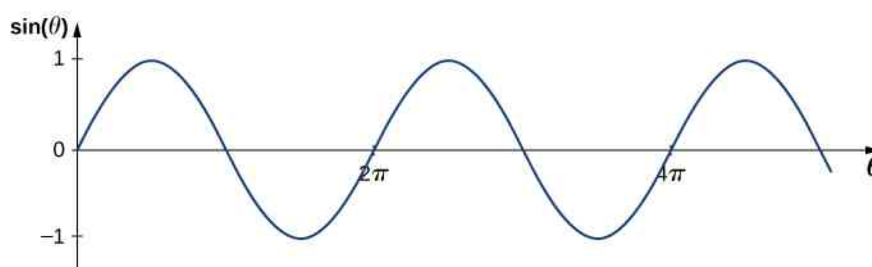
Rysunek 16.9 Obrazy fali poprzecznej przemieszczającej się wzdłuż struny poddanej stałemu naprężeniu. Fala powstała w chwili $t = T$, a kolejne obrazy pokazują ją w chwilach co $\frac{1}{8}T$. Kolorowymi kropkami zaznaczono punkty odniesienia na strunie. Tym samym kolorem zaznaczono punkty, które znajdują się w odległości równej jednej długości fali od siebie.

Zauważmy, że każdy zaznaczony na kolorowo punkt struny wykonuje proste drgania harmoniczne w górę i w dół w zakresie pomiędzy $y = +A$ a $y = -A$, natomiast okres wynosi T. Fala biegnąca wzdłuż struny jest sinusoidalna i przemieszcza się w prawo wraz z upływem czasu.

W tym miejscu przypomnijmy znaną nam z algebry definicję, zgodnie z którą, jeżeli $f(x)$ jest dowolną funkcją, to $f\ (x - d)$ oznacza tę samą funkcję, ale przesuniętą w kierunku zgodnym ze zwrotem osi x o odległość d. Funkcja $f\ (x + d)$ oznacza zaś tę samą funkcję przesuniętą w kierunku przeciwnym do zwrotu osi x o odległość d. Chcemy zdefiniować funkcję falową, która określi położenie y dla każdego punktu x struny w dowolnie wybranej chwili t.

Jeżeli popatrzymy na pierwszy obraz fali na Rysunku 16.9, to zauważymy, że współrzędną y struny dla wartości odciętych z przedziału od $x = 0$ do $x = \lambda$ możemy opisać przy użyciu funkcji sinus. Fala przemieszcza się wzdłuż struny o jedną długość fali w czasie równym jednemu okresowi, jak możemy zauważyć na drugim obrazie. Z tego wynika, że fala porusza się ze stałą prędkością, równą $v = \lambda/T$.

Przypominamy, że funkcja sinus jest funkcją kąta θ i przyjmuje wartości pomiędzy $+1$ a -1, a jej okres wynosi 2π rad (Rysunek 16.10). Jednakże współrzędne y cząstek ośrodka, a zarazem funkcji falowej, przybierają wartości pomiędzy $+A$ a $-A$, a okres takiej funkcji równa się λ.



Rysunek 16.10 Funkcja sinus przyjmuje wartości z przedziału od $+1$ do -1, a jej okres wynosi 2π rad.

Aby opisać falę przy użyciu funkcji okresowej, rozważmy stosunek kąta do położenia:

$$\frac{\theta}{x} = \frac{2\pi}{\lambda},$$
$$\theta = \frac{2\pi}{\lambda}x.$$

Po zastosowaniu $\theta = 2\pi x / \lambda$ i pomnożeniu funkcji sinus przez amplitudę A możemy obliczyć postać funkcji opisującej położenie y struny w zależności od położenia x:

$$y(x) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right).$$

Fala przemieszcza się wzdłuż struny w kierunku osi x ze stałą prędkością v i pokonuje odcinek vt w czasie t. Funkcję falową definiuje się jako:

$$y(x,t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right).$$

Wygodnie jest zapisywać funkcję falową w bardziej zwartej postaci. Po pomnożeniu przez $\frac{2\pi}{\lambda}$ otrzymujemy następujące równanie:

$$y(x,t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{\lambda}vt\right).$$

Wielkość $\frac{2\pi}{\lambda}$ definiuje się jako **liczbę falową** (ang. **wave number**). Symbolem liczby falowej jest k, a jej jednostką jest m^{-1} :

$$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda} \quad (16.2)$$

Jak pamiętamy z rozdziału Drgania, termin **częstość kołowa** definiuje się jako $\omega = 2\pi / T$. Drugi wyraz w definicji funkcji falowej przyjmie zatem postać:

$$\frac{2\pi}{\lambda}vt = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{T}\right)t = \frac{2\pi}{T}t = \omega t.$$

Funkcja falowa dla prostej fali harmonicznej na strunie uprości się do:

$$y(x,t) = A \sin(kx \mp \omega t),$$

gdzie A oznacza amplitudę, $k = 2\pi/\lambda$ jest liczbą falową, $\omega = 2\pi/T$ częstość kołową, znak minus (–) oznacza falę biegnącą w kierunku zgodnym ze zwrotem osi x, a znak plus $(+)$ falę biegnącą przeciwnie do zwrotu osi x. Prędkość fali wynosi:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda}{T}\left(\frac{2\pi}{2\pi}\right) = \frac{\omega}{k}. \quad (16.3)$$

Wróćmy do naszych rozważań na temat masy zawieszonej na sprężynie. Położenie masy było opisywane jako $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$. Kąt ϕ to przesunięcie fazowe, które uwzględnia sytuację, gdy początkowe położenie masy jest inne niż $x = +A$, a początkowa prędkość jest inna niż $v = 0$. Z tych samych powodów funkcja falowa zawiera fazę początkową. Funkcja falowa ma postać:

$$y(x, t) = A\sin(kx \mp \omega t + \phi) \quad (16.4)$$

Argument funkcji sinus:

$$(kx \mp \omega t + \phi) \quad (16.5)$$

nazywa się **fazą** (ang. **phase**), gdzie ϕ jest fazą początkową (lub przesunięciem fazowym) funkcji falowej. Znak wyrażenia ωt zależy od kierunku rozchodzenia się fali. Niech ujemny znak dla fali z fazą początkową równą 0 $(\phi = 0)$. Faza fali wynosi $kx - \omega t$. Rozważmy punkt, odpowiadający grzbietowi fali. Grzbiet pojawi się wtedy, gdy $\sin(kx - \omega t) = 1{,}00$, tj. gdy $kx - \omega t = n\pi + \frac{\pi}{2}$, dla dowolnej całkowitej wartości n. Przykładowo jeden z grzbietów pojawia się dla $kx - \omega t = \pi/2$. Gdy fala biegnie, rośnie wartość czasu i x musi również wzrosnąć, tak aby faza była równa $\pi/2$. Z tego wynika, że znak minus oznacza falę biegnącą w kierunku zgodnym ze zwrotem osi x. Przeanalizujmy drugą sytuację, tj. gdy $kx + \omega t = \pi/2$. Wraz ze wzrostem wartości czasu, x musi zmaleć, aby faza była równa $\pi/2$. Znaku plus używa się dla fal biegnących przeciwnie do zwrotu osi x. Podsumowując, $y(x, t) = A\sin(kx - \omega t + \phi)$ oznacza falę biegnącą w kierunku zgodnym ze zwrotem osi x, a $y(x, t) = A\sin(kx + \omega t + \phi)$ falę biegnącą w przeciwną stronę.

Równanie 16.4 opisuje prostą harmoniczną funkcję falową. Funkcja falowa może być zapisana jako $f(x, t) = f(x - vt)$. Jeszcze w tym rozdziale dowiemy się, że jest ona rozwiązaniem równania falowego. Zauważmy, że zapis $y(x, t) = A\cos(kx + \omega t + \phi')$ też jest zasadny, ponieważ odnosi się do przypadku $\phi' = \phi - \pi/2$.

Strategia rozwiązywania zadań: szukanie charakterystyk funkcji falowych

1. Aby obliczyć amplitudę, długość fali, okres i częstotliwość fali sinusoidalnej, należy zapisać funkcję falową w postaci $y(x, t) = A\sin(kx - \omega t + \phi)$.
2. Amplitudę można odczytać bezpośrednio z równania i wynosi ona A.
3. Okres fali można obliczyć z częstości kołowej $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
4. Częstotliwość można obliczyć przy użyciu: $f = \frac{1}{T}$.
5. Długość fali można wyznaczyć, korzystając z liczby falowej $\lambda = \frac{2\pi}{k}$.

Przykład 16.3

Cechy charakterystyczne fali biegnącej wzdłuż struny

Fala poprzeczna biegnąca wzdłuż struny ma postać:

$$y(x, t) = A\sin(kx - \omega t) = 0{,}2\,\text{m} \cdot \sin(6{,}28\,\text{m}^{-1} \cdot x - 1{,}57\,\text{s}^{-1} \cdot t)$$

Oblicz amplitudę, długość fali, okres i prędkość fali.

Strategia rozwiązania

Wszystkie te wielkości można obliczyć na podstawie stałych zawartych w równaniu lub z relacji łączących te wielkości.

Rozwiązanie

1. Amplitudę, liczbę falową i częstość kołową można odczytać bezpośrednio z równania falowego:

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t) = 0{,}2\ \text{m} \cdot \sin(6{,}28\ \text{m}^{-1} \cdot x - 1{,}57\ \text{s}^{-1} \cdot t)$$

$$(A = 0{,}2\ \text{m};\ k = 6{,}28\ \text{m}^{-1};\ \omega = 1{,}57\ \text{s}^{-1})$$

2. Długość fali obliczamy przy użyciu znanej liczby falowej:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$
$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{6{,}28\ \text{m}^{-1}} = 1{,}0\ \text{m}.$$

3. Okres fali można wyliczyć na podstawie częstości kołowej:

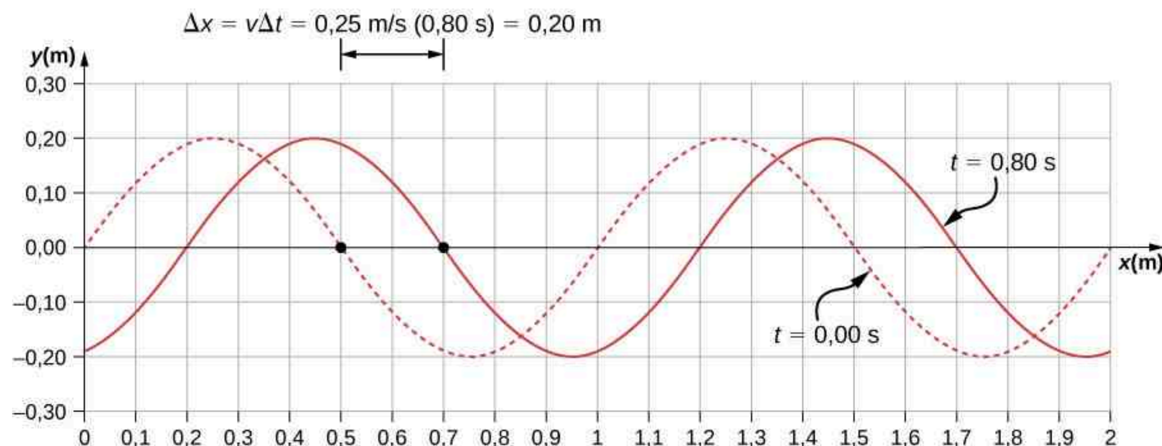
$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1{,}57\ \text{s}^{-1}} = 4\ \text{s}.$$

4. Prędkość fali obliczamy przy wykorzystaniu liczby falowej i częstości kołowej. Kierunek rozchodzenia się fali można określić na podstawie znaku wyrażenia $kx \mp \omega t$. Znak ujemny sugeruje, że fala biegnie w kierunku zgodnym z kierunkiem osi x:

$$|v| = \frac{\omega}{k} = \frac{1{,}57\ \text{s}^{-1}}{6{,}28\ \text{m}^{-1}} = 0{,}25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

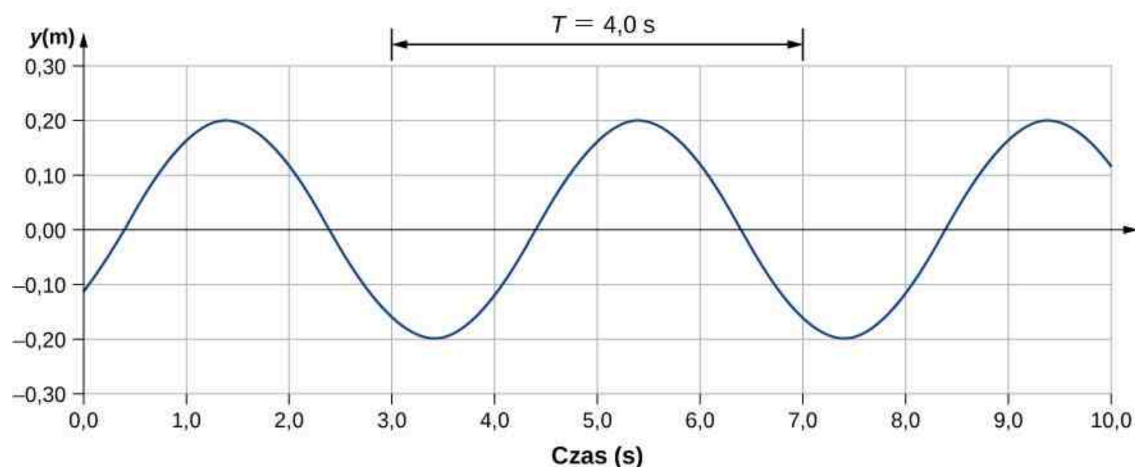
Znaczenie

Wszystkie powyższe wielkości są zawarte w równaniu falowym. Zauważmy, że prędkość fali jest jej prędkością w kierunku równoległym do kierunku rozchodzenia się fali. Przedstawienie wychylenia ośrodka y w funkcji położenia x dla dwóch różnych chwil czasu: $t = 0{,}00\ \text{s}$ oraz $t = 0{,}80\ \text{s}$ pozwala na graficzną wizualizację fali (Rysunek 16.11).



Rysunek 16.11 Wykres wychylenia fali y w funkcji położenia x. Linia przerywana przedstawia falę w chwili $t = 0{,}00$ s, a linia ciągła falę w chwili $t = 0{,}80$ s. Ponieważ prędkość fali jest stała, to odległość jaką fala pokonuje równa się iloczynowi prędkości i odcinka czasu. Czarna kropka wskazuje punkt, który będzie pomocny przy obliczeniu przemieszczenia fali. Cząstki ośrodka poruszają się w górę i w dół, podczas gdy fala przemieszcza się w prawo.

W przykładzie przedstawionym powyżej mamy do czynienia z falą poprzeczną, która porusza się w płaszczyźnie poziomej, podczas gdy cząstki ośrodka drgają w górę i w dół, prostopadle do kierunku ruchu fali. Na Rysunku 16.12 pokazano ruch cząstki ośrodka, której położenie wynosi $x = 0{,}60$ m w funkcji czasu. Zauważmy, że cząstki ośrodka przyjmują położenia $y = +0{,}20$ m i $y = -0{,}20$ m po upływie każdych 4,0 s.



Rysunek 16.12 Wykres wychylenia fali y w funkcji czasu t dla położenia $x = 0{,}6$ m. Ośrodek wykonuje drgania w zakresie wartości od $y = +0{,}20$ m do $y = -0{,}20$ m w ciągu każdego okresu. Okres możemy zmierzyć na podstawie położenia dwóch najbliższych punktów o tych samych amplitudach i identycznych prędkościach $(\partial y/\partial t)$. Prędkość możemy obliczyć na podstawie tangensa kąta nachylenia wykresu $y = f(t)$. Zauważmy, że dla czasów $t = 3{,}00\ s$ i $t = 7{,}00 s$, wychylenia i prędkości są takie same. Okres drgań wynosi 4,00 s.



16.3 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Powyższa funkcja falowa została obliczona przy zastosowaniu funkcji sinus. Czy można było użyć funkcji cosinus?

Prędkość i przyspieszenie ośrodka

Jak widzieliśmy w Przykładzie 16.4 prędkość fali jest stała i oddaje prędkość fali rozchodzącej się w ośrodku, a nie

prędkość cząsteczek, które go tworzą. Drobiny wykonują drgania wokół położenia równowagi wtedy, gdy fala rozchodzi się w ośrodku. W przypadku fali poprzecznej, która rozchodzi się w kierunku zgodnym ze zwrotem osi x, cząstki wykonują drgania w górę i w dół, wzdłuż osi y, w kierunku prostopadłym do ruchu fali. Prędkość cząsteczek ośrodka nie jest stała, co oznacza występowanie przyspieszenia. Prędkość tę, która jest prostopadła do prędkości fali w przypadku fal poprzecznych, można obliczyć z pochodnej cząstkowej funkcji falowej. Należy wtedy potraktować wszystkie zmienne jako stałe, z wyjątkiem zmiennej, której pochodną obliczamy. Dla pochodnej cząstkowej po czasie t zmienna x jest traktowana jako stała. W tym ćwiczeniu szukamy prędkości poprzecznej w danym punkcie, czyli wartość x się nie zmienia. Mamy zatem:

$$\begin{aligned} y(x,t) &= A\sin(kx-\omega t+\phi) \\ v_y(x,t) &= \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(A\sin(kx-\omega t+\phi)\right) \\ &= -A\omega\cos(kx-\omega t+\phi) \\ &= -v_{y\,\max}\cos(kx-\omega t+\phi). \end{aligned}$$

Maksymalna prędkość ośrodka wynosi $\left|v_{y_{\max}}\right| = A\omega$. Z tą zależnością spotkaliśmy się już w rozdziale Drgania.

Przyspieszenie ośrodka obliczymy przy użyciu pochodnej cząstkowej prędkości po czasie:

$$\begin{aligned} a_y\,(x,t) &= \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-A\omega\cos\,(kx-\omega t+\phi)\right) \\ &= -A\omega^2\sin\,(kx-\omega t+\phi) \\ &= -a_{y\,\max}\sin\,(kx-\omega t+\phi)\,. \end{aligned}$$

Maksymalne przyspieszenie wynosi $\left|a_{y_{\max}}\right| = A\omega^2$. Cząsteczki ośrodka wykonują drgania harmoniczne proste.

Równanie falowe

Obliczyliśmy już prędkość cząsteczki ośrodka w punkcie x przy użyciu pochodnej cząstkowej współrzędnej y po czasie. Dla fali poprzecznej prędkość ta jest prostopadła do kierunku rozchodzenia się fali. Przyspieszenie możemy wyznaczyć, obliczając drugą pochodną położenia po czasie (lub pierwszą pochodną prędkości po czasie):

$$a_y\,(x,t) = \frac{\partial^2 y\,(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(A\sin\,(kx-\omega t+\phi)\right) = -A\omega^2\sin\,(kx-\omega t+\phi)\,.$$

Rozważmy teraz pochodną cząstkową po zmiennej x, gdzie czas jest wielkością stałą. Pierwsza pochodna cząstkowa opisuje nachylenie fali w punkcie x, w chwili t:

$$\text{nachylenie} = \frac{\partial y\,(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(A\sin\,(kx-\omega t+\phi)\right) = Ak\cos\,(kx-\omega t+\phi)\,.$$

Druga pochodna cząstkowa informuje nas, jak nachylenie fali zmienia się w zależności od położenia. Innymi słowy opisuje krzywiznę fali, którą rozumiemy jako:

$$\text{krzywizna} = \frac{\partial^2 y\,(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial^2 x}\left(A\sin\,(kx-\omega t+\phi)\right) = -Ak^2\sin\,(kx-\omega t+\phi)\,.$$

Stosunek przyspieszenia i krzywizny prowadzi do bardzo ważnej w fizyce zależności, nazywanej **liniowym równaniem falowym** (ang. **linear wave equation**): $v = \omega/k$. Nazywa się ono też równaniem drgającej struny.

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}}{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}} &= \frac{-A\omega^2\sin(kx-\omega t+\phi)}{-Ak^2\sin(kx-\omega t+\phi)} \\ &= \frac{\omega^2}{k^2} = v^2, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}. \quad (16.6)$$

Równanie 16.6 jest liniowym równaniem falowym, jednym z najważniejszych równań w fizyce i inżynierii. Choć tutaj zostało ono użyte dla fali poprzecznej, ma ono również zastosowanie do fal podłużnych. Równanie to odnosi się do fali sinusoidalnej, lecz można go także użyć do obliczenia impulsu i każdej innej fali $y(x,t) = f(x \mp vt)$. Określenie „liniowe równanie falowe” związane jest z liniowym charakterem sił sprężystości działających w ośrodku.

Jeśli dwie funkcje falowe są rozwiązaniami liniowego równania falowego, wówczas suma obu tych funkcji jest również rozwiązaniem równania falowego. Weźmy dwie fale poprzeczne, które rozchodzą się w tym samym ośrodku wzdłuż osi x. Zauważmy, że poszczególne fale mogą być opisane funkcjami falowymi $y_1(x,t) = f(x \mp vt)$ i $y_2(x,t) = g(x \mp vt)$, które są rozwiązaniami liniowych równań falowych, a zatem są liniowymi funkcjami falowymi. Suma tych funkcji falowych jest również funkcją falową:

$$y_1(x,t) + y_2(x,t) = f(x \mp vt) + g(x \mp vt).$$

Rozważmy liniowe równanie falowe:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(f+g)}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2(f+g)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\right]. \end{aligned}$$

Ten przykład pokazuje, że jeśli dwie liniowe funkcje falowe dodamy algebraicznie, wtedy wypadkowa funkcja falowa też będzie spełniać liniowe równanie falowe. Określa ona wychylenie ośrodka w każdym punkcie wzdłuż osi x. Jeśli dwie fale liniowe znajdują się w tym samym ośrodku, to mogą ulegać interferencji. Jeśli obie są opisywane liniowymi funkcjami falowymi, to należy je do siebie dodać, aby znaleźć równanie falowe fali wypadkowej, utworzonej w wyniku interferencji. Wychylenie ośrodka w każdym punkcie jest algebraiczną sumą wychyleń spowodowanych przez każdą falę z osobna.

Idąc o krok dalej, załóżmy że funkcje falowe $y_1(x,t) = f(x \mp vt)$ i $y_2(x,t) = g(x \mp vt)$ są rozwiązaniami równań falowych, a A i B są stałymi. Wtedy suma: $Ay_1(x,t) + By_2(x,y)$ jest także rozwiązaniem równania falowego. Ta własność jest znana jako zasada **superpozycji** (ang. **superposition**). Interferencja i superpozycja są szczegółowo omawiane w podrozdziale Interferencja fal.

Przykład 16.4

Interferencja fal na strunie

Wyobraź sobie długą strunę, której każdy koniec trzyma inny student. Student A wprawia koniec struny w drgania, wytwarzając falę opisywaną równaniem: $y_1(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$. Student B wytwarza falę o dwukrotnie większej częstotliwości. Obie fale poruszają się z takimi samymi prędkościami $v = \omega / k$ oraz interferują, tworząc falę wypadkową, którą opisuje równanie: $y_R(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$. Oblicz prędkość fali wypadkowej, posługując się równaniami falowymi:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}.$$

Strategia rozwiązania

Najpierw napisz równanie falowe dla fali, którą utworzył student B. Zauważ, że częstość kołowa drugiej fali jest dwa razy większa niż częstość pierwszej fali (2ω). Ponieważ prędkości obu fal są takie same, liczba falowa drugiej fali jest dwa razy większa niż pierwszej fali ($2k$. Napisz równanie falowe dla fali wypadkowej, która jest sumą obu napisanych wcześniej funkcji falowych. Oblicz drugą pochodną cząstkową po położeniu i po czasie. Korzystając z równania falowego, oblicz prędkość fali wypadkowej.

Rozwiązanie

1. Napisz równanie falowe drugiej fali: $y_2(x,t) = A\sin(2kx + 2\omega t)$.

2. Napisz równanie fali wypadkowej:

$$y_R(x,t) = y_1(x,t) + y(x,t) = A\sin(kx - \omega t) + A\sin(2kx + 2\omega t).$$

3. Oblicz pochodne cząstkowe:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y_R(x,t)}{\partial x} &= -Ak\cos(kx - \omega t) + 2Ak\cos(2kx + 2\omega t),\\
\frac{\partial^2 y_R(x,t)}{\partial^2 x} &= -Ak^2\sin(kx - \omega t) - 4Ak^2\sin(2kx + 2\omega t),\\
\frac{\partial y_R(x,t)}{\partial t} &= -A\omega\cos(kx - \omega t) + 2A\omega\cos(2kx + 2\omega t),\\
\frac{\partial^2 y_R(x,t)}{\partial^2 t} &= -A\omega^2\sin(kx - \omega t) - 4A\omega^2\sin(2kx + 2\omega t).
\end{aligned}$$

4. Oblicz prędkość fali wypadkowej, korzystając z równania falowego:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2},\\
-Ak^2\sin(kx - \omega t) - 4Ak^2\sin(2kx + 2\omega t) &= \frac{1}{v^2}\left(-A\omega^2\sin(kx - \omega t) - 4A\omega^2\sin(2kx + 2\omega t)\right),\\
k^2\left(-A\sin(kx - \omega t) - 4A\sin(2kx + 2\omega t)\right) &= \frac{\omega^2}{v^2}\left(-A\sin(kx - \omega t) - 4A\sin(2kx + 2\omega t)\right),\\
k^2 &= \frac{\omega^2}{v^2},\; |v| = \frac{\omega}{k}.
\end{aligned}$$

Znaczenie

Prędkość wypadkowej fali jest równa prędkości fali pierwotnej $v = \omega / k$. W następnym podrozdziale pokażemy, że prędkość prostej fali harmonicznej na strunie zależy od naprężenia struny i masy przypadającej na jednostkę jej długości. Nie powinno być zatem zaskoczeniem, że prędkości fal składowych i prędkość fali wypadkowej są takie same.



16.4 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Równanie fali $\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$ jest prawdziwe dla każdej fali w postaci $y(x,t) = f(x \mp vt)$. W poprzednim rozdziale stwierdziliśmy, że funkcja cosinus może być użyta również do opisu prostej mechanicznej fali harmonicznej. Sprawdź, czy funkcja:

$$y(x,t) = 0{,}50\,\text{m} \cdot \cos\left(0{,}20\pi\,\text{m}^{-1} \cdot x - 4{,}00\pi\,\text{s}^{-1} \cdot t + \frac{\pi}{10}\right)$$

jest rozwiązaniem równania falowego.

Każde zaburzenie, które spełnia równanie falowe, może rozchodzić się jako fala wzdłuż osi x z prędkością v. Jest to prawdziwe dla fali na strunie, fal dźwiękowych, elektromagnetycznych oraz innego typu fal.

16.3 | Prędkość fali na naprężonej strunie

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- określać czynniki, które wpływają na prędkość fali na strunie;
- pisać wzory określające prędkość fali na strunie i uogólniać je dla innych ośrodków.

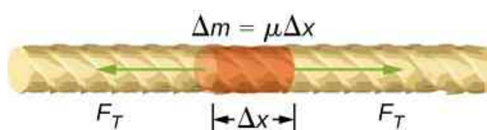
Prędkość fali zależy od właściwości ośrodka. Przykładowo, prędkość fali rozchodzącej się wzdłuż struny gitary oraz długość tej fali określają częstotliwość wytwarzanego dźwięku. Struny gitary mają różne grubości i są wykonywane z materiałów o różnych własnościach. Mówimy, że mają różne **gęstości liniowe** (ang. **linear density**). Gęstość liniową definiuje się jako masę przypadającą na jednostkę długości:

$$\mu = \frac{\text{masa struny}}{\text{długość struny}} = \frac{m}{l}. \quad (16.7)$$

W tym rozdziale będziemy się zajmować jedynie strunami, które mają stałą gęstość liniową. W takim przypadku, to masa Δm krótkiego odcinka struny Δx wynosi $\Delta m = \mu \Delta x$. Przykładowo jeśli długość struny wynosi 2,00 m, a jej masa 0,06 kg, to gęstość liniowa równa się $\mu = 0{,}06\,\text{kg}/2{,}00\,\text{m} = 0{,}03\,\text{kg}/\text{m}$. Jeśli od struny odetniemy odcinek o długości 1,00 mm, wówczas masa tego odcinka będzie równa $\Delta m = \mu \Delta m = 0{,}03\,\text{kg}/\text{m} \cdot 0{,}001\,\text{m} = 3{,}00 \cdot 10^{-5}\,\text{kg}$. Naprężenie strun gitary można zmieniać za pośrednictwem obrotowych wrzecion, zwanych kołkami, wokół których nawinięte są struny. Gęstości liniowe oraz naciągu strun gitary stanowią o prędkości fali rozchodzącej się wzdłuż struny oraz o częstotliwości wytwarzanego dźwięku. Częstotliwość ta jest proporcjonalna do prędkości fali.

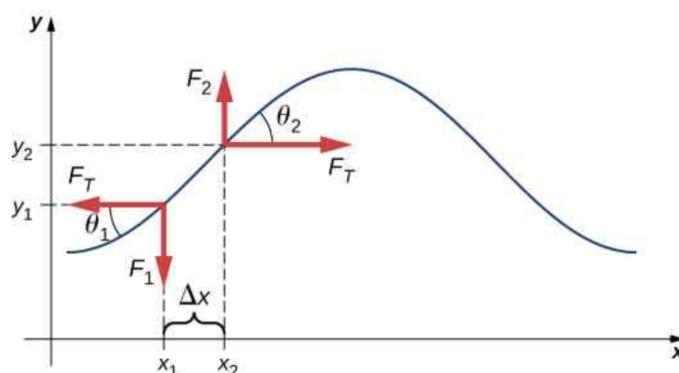
Prędkość fali na naprężonej strunie

Aby przekonać się, w jaki sposób prędkość fali na strunie zależy od jej naprężenia i liniowej gęstości, rozważmy rozchodzący się wzdłuż niej impuls (Rysunek 16.13). Kiedy struna znajduje się w położeniu równowagi, naprężenie struny F_T jest stałe. Rozważmy krótki odcinek struny o masie równej $\Delta m = \mu \Delta x$. Odcinek ten znajduje się w położeniu równowagi, a naprężenia działające na każdy z jego końców odcinka są równe co do wartości, ale mają przeciwne zwroty.



Rysunek 16.13 Odcinek struny poddany naprężeniu F_T. Znajduje się on w stanie równowagi statycznej, a naprężenia działające na każdy jego koniec są równe co do wartości, ale przeciwnie skierowane.

Jeśli szarpniemy naciągniętą strunę, wzdłuż niej powstanie fala poprzeczna, która będzie się rozchodzić w kierunku zgodnym ze zwrotem osi x, co pokazano na Rysunku 16.14. W celach poglądowych zaznaczono rozważany powyżej odcinek. Wykonuje on drgania w płaszczyźnie prostopadłej do ruchu fali pod wpływem działania siły sprężystości, ale nie przemieszcza się wzdłuż osi x. Naprężenia F_T są przyłożone do obu końców odcinka i skierowane wzdłuż osi x. Siły te są stałe i niezależne od położenia oraz czasu.



Rysunek 16.14 Naciągniętą strunę szarpnięto, co spowodowało wytworzenie impulsu, biegnącego wzdłuż struny w kierunku zgodnym ze zwrotem osi x.

Załóżmy, że wychylenie struny z położenia równowagi jest małe. Siła wypadkowa działająca na rozważany odcinek jest skierowana wzdłuż struny i stanowi sumę jej naprężenia oraz siły sprężystości. Składowe x naprężenia równoważą się, dlatego do wyliczenia siły wypadkowej rozważamy jedynie składowe y. Wartość składowej x siły naprężenia struny oznaczono jako F_T (Rysunek 16.14). Składową y siły naciągu wyliczymy, jeśli zauważymy, że

$\text{tg}\,\theta_1 = -F_1/F_T$ i $\text{tg}\,\theta_2 = -F_2/F_T$. Tangens kąta θ ($\text{tg}\,\theta$) jest równy nachyleniu funkcji w danym punkcie, co można obliczyć po prostu jako pochodną cząstkową y po x w tym punkcie. Stosunek F_1/F_T ma wartość ujemną w punkcie x_1, a F_2/F_T jest równe nachyleniu w punkcie x_2:

$$\frac{F_1}{F_T} = -\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_1} \quad \text{i} \quad \frac{F_2}{F_T} = -\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_2}.$$

Siła wypadkowa działająca na rozważany odcinek może być zapisana jako:

$$F_{\text{wypadkowa}} = F_1 + F_2 = F_T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_2} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_1}\right].$$

Na mocy drugiej zasady dynamiki Newtona siła wypadkowa równa się iloczynowi masy i przyspieszenia. Gęstość liniowa struny μ jest to masa przypadająca na jednostkę długości struny, a masa odcinka struny wynosi $\mu\Delta x$, stąd otrzymujemy:

$$F_T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_2} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_1}\right] = \Delta m a,$$

$$F_T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_2} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_1}\right] = \mu\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Po podzieleniu przez $F_T\,\Delta x$ i przyjęciu, że Δx dąży do zera, mamy:

$$\frac{\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_2} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_1}\right]}{\Delta x} = \frac{\mu}{F_T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_2} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x_1}\right]}{\Delta x} = \frac{\mu}{F_T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F_T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Przypomnijmy, że liniowe równanie falowe ma postać:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}.$$

Stąd:

$$\frac{1}{v^2} = \frac{\mu}{F_T}.$$

Po wyliczeniu v z powyższej zależności przekonamy się, że prędkość fali na strunie zależy od naprężenia i gęstości liniowej.

Prędkość fali na naprężonej strunie

Prędkość impulsu, podobnie jak i fali, na naprężonej strunie możemy wyliczyć z równania:

$$|v| = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}, \qquad (16.8)$$

gdzie F_T jest naprężeniem struny, a μ masą przypadającą na jednostkę długości struny.

Przykład 16.5

Prędkość fali na strunie gitary

W gitarze sześciostrunowej struna wysokiego E ma gęstość liniową $\mu_{\text{wysokie E}} = 3{,}09 \cdot 10^{-4}\ \text{kg/m}$, natomiast struna niskiego E ma gęstość $\mu_{\text{niskie E}} = 5{,}78 \cdot 10^{-3}\ \text{kg/m}$ (a). Jaka będzie prędkość wytworzonej fali, jeżeli uderzymy strunę wysokiego E, o naprężeniu 56,40 N? (b) Gęstość liniowa struny niskiego E jest w przybliżeniu 20 razy większa niż gęstość liniowa struny wysokiego E. Czy naprężenie struny niskiego E powinno być większe, czy mniejsze od naprężenia struny wysokiego E, jeśli fale biegnące wzdłuż każdej ze strun mają taką samą prędkość? Jakie są przybliżone wartości naprężeń? (c) Oblicz, jakie byłoby naprężenie struny niskiego E, gdyby prędkości obu dźwięków były takie same.

Strategia rozwiązania

a. Prędkość fali można obliczyć z gęstości liniowej i naciągu $v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$.

b. Z równania $v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$ wynika, że jeżeli gęstość liniowa wzrośnie 20 razy, to naciąg powinien wzrosnąć także 20 razy.

c. Znając prędkość i gęstość liniową, można obliczyć naprężenie $F_T = \mu v^2$.

Rozwiązanie

a. Oblicz prędkość fali z równania:

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = \sqrt{\frac{56{,}5\ \text{N}}{3{,}09 \cdot 10^{-4}\ \text{kg/m}}} = 427{,}23\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

b. Naprężenie powinno się zwiększyć 20 razy. Byłoby zatem nieco mniejsze niż 1128 N.

c. Oblicz naprężenie z równania:
$F_T = \mu v^2 = 5{,}78 \cdot 10^{-3}\ \text{kg/m} \cdot (4{,}27\ \text{m/s})^2 = 1055{,}00\ \text{N}$.
Podana wartość została oszacowana z błędem7% .

Znaczenie

Struny gitary sześciostrunowej (wysokie e1, h, g, d, a oraz E) po uderzeniu drgają z częstotliwościami: 329,63 Hz; 246,94 Hz; 196,00 Hz; 146,83 Hz; 110,00 Hz oraz 82,41 Hz. Częstotliwości zależą od prędkości fali na strunie i długości fali. Struny mają różne gęstości liniowe i są strojone przez zmianę ich naciągu. W podrozdziale Interferencja fal przekonamy się, że długość fali zależy od długości struny i warunków brzegowych. Aby zagrać dźwięk inny niż standardowy, należy zmienić długość struny przez jej dociśnięcie do progu.



16.5 Sprawdź, czy rozumiesz. Prędkość fali na strunie zależy od naprężenia i gęstości liniowej masy. Jak zmieni się prędkość fali na strunie, jeśli podwoimy wartość naprężenia?

Prędkość fali w płynie

Prędkość fali na strunie zależy od pierwiastka kwadratowego z naprężenia podzielonego przez masę przypadającą na jednostkę długości. Ogólnie rzecz ujmując, prędkość fali w ośrodku zależy od własności sprężystych ośrodka i jego bezwładności:

$$|v| = \sqrt{\frac{\text{sprężystość}}{\text{bezwładność}}}.$$

Sprężystość ośrodka oznacza zdolność jego cząsteczek do osiągania stanu równowagi po zaburzeniu. Bezwładność oznacza opór, jaki cząsteczki stawiają wobec zmian prędkości.

Prędkość fali podłużnej w płynie zależy od jego gęstości i współczynnika sprężystości objętościowej:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}. \tag{16.9}$$

Współczynnik sprężystości objętościowej definiuje się jako $B = -\frac{\Delta P}{\Delta V / V_0}$, gdzie ΔP oznacza zmianę ciśnienia, a mianownik wyraża stosunek zmiany objętości do objętości początkowej, natomiast $\rho \equiv \frac{m}{V}$ oznacza masę przypadającą na jednostkę objętości. Przykładowo dźwięk jest falą mechaniczną, która może się rozchodzić w płynie lub ciele stałym. Prędkość dźwięku w powietrzu przy ciśnieniu atmosferycznym, wynoszącym $1{,}013 \cdot 10^5$ Pa, oraz w temperaturze 20°C wynosi $v_s \approx 343{,}00$ m/s. Ponieważ gęstość zależy od temperatury, prędkość dźwięku w powietrzu zależy od temperatury powietrza. Będziemy to zagadnienie omawiali w rozdziale Dźwięk.

16.4 | Energia i moc fali

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- wyjaśniać, w jaki sposób fala lub impuls falowy przenoszą energię;
- wyjaśniać, jak energia fali zależy od amplitudy fali.

Wszystkie fale przenoszą energię, co czasami możemy zaobserwować bezpośrednio. Trzęsienia ziemi są w stanie doszczętnie zniszczyć całe miasta (Rysunek 16.15). Hałas może uszkodzić komórki nerwowe narządu słuchu, co powoduje trwały ubytek słuchu. Ultradźwięki pomocne są w leczeniu nadwerężonych mięśni. Wiązka laserowa może być użyta do zniwelowania komórek nowotworowych. Fale wodne podmywają plaże.



Rysunek 16.15 Zniszczenia spowodowane trzęsieniem ziemi to namacalny dowód na to, że fale przenoszą energię. Magnituda (dawniej skala Richtera), w której mierzy się siłę wstrząsu, jest skalą logarytmiczną uwzględniającą zarówno amplitudę wstrząsu, jak i energię, jaką wstrząs przenosi.

W tym rozdziale poznamy wzory, które ilościowo opisują energię fal. Mają one fundamentalne znaczenie dla wszystkich pozostałych fal, które poznamy podczas kursu fizyki.

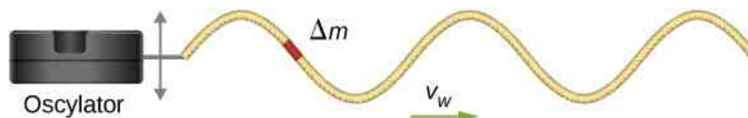
Energia fal

Energia fali zależy od jej amplitudy i częstotliwości, co udowadniają liczbne przykłady. Trzęsienia ziemi o dużych amplitudach powodują znaczne zniszczenia. Głośne dźwięki mają dużą amplitudę i wytwarzane są przez źródła o większej amplitudzie drgań niż w przypadku dźwięków o mniejszej amplitudzie. Wysokie fale morskie niszczą wybrzeże w dużo większym stopniu niż niskie fale. Tymczasem powróćmy do przypadku mewy siedzącej na powierzchni wody, omawianego wcześniej w tym rozdziale (Rysunek 16.3). Ptak wykonuje drgania pod wpływem ruchu falowego, co powoduje zmiany jej energii potencjalnej. Im większa amplituda fali, tym większa zmiana energii potencjalnej mewy.

Jeśli przyjmiemy, że fala jest pakietem energii, to okaże się, że fala o wysokiej częstotliwości może dostarczyć więcej takich pakietów w jednostce czasu niż fala o niskiej częstotliwości. Pokażemy, że średnie tempo transportu energii przez falę mechaniczną jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy oraz kwadratu częstotliwości. Jeśli dwie fale mechaniczne mają te same amplitudy, ale jedna z nich ma częstotliwość równą podwojonej częstotliwości drugiej, to fala o wyższej częstotliwości może przenosić energię cztery razy szybciej. Zauważmy, że choć szybkość transportu energii przez falę mechaniczną jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy i kwadratu częstotliwości fali, to dla fali elektromagnetycznej szybkość transportu pozostaje proporcjonalna do kwadratu amplitudy, ale jest niezależna od częstotliwości.

Moc fal

Rozważmy sinusoidalną falę na drgającej strunie, pokazaną na Rysunku 16.16. Pręt jest wprawiany w drgania przy pomocy specjalnego urządzenia, zwanego oscylatorem. Pręt połączony jest ze struną o jednorodnej gęstości masy, dzięki czemu struna jest również wprawiana w drgania, które wytwarzają wzdłuż niej falę sinusoidalną. Innymi słowy, pręt wytwarza energię, która rozchodzi się wzdłuż struny. Rozważmy element struny o masie Δm (Rysunek 16.16). Ponieważ energia rozchodzi się wzdłuż struny, to każdy jej element drga z tą samą częstotliwością, z jaką rozchodzi się fala. Każdy element struny może być opisany za pomocą modelu prostego oscylatora harmonicznego. Ponieważ struna ma stałą gęstość liniową $\mu = \Delta m / \Delta x$, każdy odcinek struny ma masę $\Delta m = \mu \Delta x$.



Rysunek 16.16 Oscylator wprawia w drgania pręt, a ten następnie wprawia w drgania połączoną z nim strunę. Wskutek drgań struny powstaje fala, która przemieszcza się wzdłuż pręta z prędkością v. Prędkość fali zależy od naprężenia struny i jej liniowej gęstości masy. Odcinek struny o masie Δm wykonuje drgania o częstotliwości równej częstotliwości fali.

Całkowita energia mechaniczna fali to suma energii kinetycznej i potencjalnej. Energia kinetyczna $K = \frac{1}{2}mv^2$ każdego odcinka struny o długości Δx wynosi $\Delta K = \frac{1}{2}(\Delta m)\, v_y^2$. Każdy odcinek wykonuje drgania w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku rozchodzenia się fali. Jeśli liniowa gęstość masy jest stała, to energia kinetyczna każdego odcinka struny o długości Δx wynosi:

$$\Delta K = \frac{1}{2}(\mu \Delta x)\, v_y^2.$$

Napiszmy równanie różniczkowe, przyjmując, że długość odcinka struny dąży do zera:

$$\mathrm{d}K = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{2}(\mu \Delta x) v_y^2 = \frac{1}{2}(\mu \mathrm{d}x) v_y^2.$$

Dla fali sinusoidalnej o częstości kołowej ω położenie każdego odcinka można opisać jako $y\,(x, t) = A \sin\,(kx - \omega t)$. Każdy odcinek struny wykonuje drgania z prędkością $v_y = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -A\omega \cos\,(kx - \omega t)$. Energia kinetyczna każdego odcinka struny wynosi:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}K &= \frac{1}{2}(\mu \mathrm{d}x)(-A\omega \cos(kx - \omega t))^2, \\ &= \frac{1}{2}(\mu \mathrm{d}x)A^2\omega^2 \cos^2(kx - \omega t). \end{aligned}$$

Fala może mieć długość równą wielokrotności długości fali. Aby dokonać normalizacji energii, rozważmy energię kinetyczną przypadającą na jednostkę długości fali. Taka energia kinetyczna może być policzona jako całka po długości fali:

$$dK = \frac{1}{2}(\mu dx)(A^2\omega^2 \cos^2(kx)),$$
$$K = \int_0^\lambda dK = \int_0^\lambda \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2 \cos^2(kx)dx = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2 \int_0^\lambda \cos^2(kx)dx,$$
$$K_\lambda = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2\left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4k}\sin(2kx)\right]_0^\lambda = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2\left[\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4k}\sin(2k\lambda) - \frac{1}{4k}\sin(0)\right],$$
$$K_\lambda = \frac{1}{4}\mu A^2\omega^2\lambda.$$

Fala ma również energię potencjalną. Podobnie jak w przypadku masy wykonującej drgania na sprężynie, dla fal również mówimy o sile zachowawczej. Powoduje ona, że odcinek sprężyny wychylony z położenia równowagi powraca do niego. Energię potencjalną dla takiego odcinka możemy wyliczyć, jeśli znamy stałą sprężystości. W rozdziale Drgania dowiedzieliśmy się, że energia potencjalna zmagazynowana w sprężynie wynosi $U = \frac{1}{2}k_s x^2$, gdzie położenie równowagi definiowane jest jako: $x = 0{,}00\text{ m}$. Gdy masa zawieszona na sprężynie wykonuje proste drgania harmoniczne, częstość kołowa wynosi $\omega = \sqrt{k_s / m}$. Stała sprężystości wynosi $k_s = \Delta m\omega^2$. Energia potencjalna odcinka sprężyny wynosi:

$$\Delta U = \frac{1}{2}k_s x^2 = \frac{1}{2}\Delta m\omega^2 x^2.$$

Zwróćmy uwagę, że k_s jest stałą sprężystości, a nie liczbą falową $k = 2\pi / \lambda$. Możemy użyć powyższego równania, aby wyliczyć ilość energii przypadającą na jednostkę długości fali. Całkując po odcinku o długości równej długości fali, wyliczymy energię potencjalną przypadającą na długość fali:

$$dU = \frac{1}{2}k_s x^2 = \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2 dx,$$
$$U_\lambda = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \int_0^\lambda \cos^2(kx)dx = \frac{1}{4}\mu A^2\omega^2\lambda.$$

Energia potencjalna przypadająca na jednostkę długości fali równa się energii kinetycznej przypadającej na jednostkę długości fali.

Całkowita energia przypadająca na jednostkę długości fali to suma energii potencjalnej i kinetycznej:

$$E_\lambda = U_\lambda + K_\lambda,$$
$$E_\lambda = \frac{1}{4}\mu A^2\omega^2\lambda + \frac{1}{4}\mu A^2\omega^2\lambda = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2\lambda.$$

Uśrednioną w czasie moc sinusoidalnej fali mechanicznej, przez którą należy rozumieć średnią szybkość przenoszenia energii przez falę, możemy obliczyć, jeśli podzielimy całkowitą energię przez czas przekazywania energii. Jeśli prędkość fali sinusoidalnej jest stała, to dla jednostkowej długości fali czas ten jest równy okresowi fali. Zatem dla fali sinusoidalnej uśredniona w czasie moc to energia podzielona przez okres. Długość fali podzielona przez okres to prędkość.

$$P_{\text{średnie}} = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2\frac{\lambda}{T} = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2 v. \quad (16.10)$$

Zwróćmy uwagę, że uśredniona w czasie moc fali sinusoidalnej jest wprost proporcjonalna do kwadratu amplitudy fali i do kwadratu częstości kołowej fali. Przypomnijmy sobie, że częstość kołowa wynosi $\omega = 2\pi f$, zatem **moc fali mechanicznej** jest również proporcjonalna do kwadratu amplitudy i kwadratu częstotliwości fali.

Przykład 16.6

Moc dostarczana do struny przez oscylator

Rozważmy dwumetrową strunę o masie 70,00 g połączoną z oscylatorem, jak pokazano na Rysunku 16.16. Jej naprężenie wynosi 90,0 N. Po włączeniu, oscylator wytwarza drgania o częstotliwości 60 Hz, które wywołują sinusoidalną falę na strunie. Amplituda fali wynosi 4,00 cm, a prędkość jest stała. Ile wynosi uśredniona w czasie moc dostarczana fali?

Strategia rozwiązania

Moc dostarczana fali powinna być równa uśrednionej w czasie mocy fali na strunie. Znamy masę struny m_s, długość struny L_s oraz jej naprężenie F_T. Prędkość fali na strunie możemy wyliczyć z liniowej gęstości masy i naprężenia. Struna drga z częstotliwością równą częstotliwości drgań oscylatora, co pozwala obliczyć częstość kołową.

Rozwiązanie

1. Zacznijmy od wzoru na uśrednioną w czasie moc fali sinusoidalnej na strunie:

$$P = \frac{1}{2}\mu A^2 \omega^2 v.$$

   Amplituda jest podana. Musimy obliczyć liniową gęstość masy struny, częstość kołową fali na strunie i jej prędkość.

2. Musimy obliczyć liniową gęstość, aby wyliczyć potem prędkość fali:

$$\mu = \frac{m_s}{L_s} = \frac{0{,}070\,\mathrm{kg}}{2{,}00\,\mathrm{m}} = 0{,}035\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}.$$

3. Prędkość fali możemy obliczyć na podstawie gęstości liniowej i naprężenia struny:

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = \sqrt{\frac{90{,}00\,\mathrm{N}}{0{,}035\,\mathrm{kg/m}}} = 50{,}71\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

4. Częstość kołową możemy obliczyć z częstotliwości:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 60\,\frac{1}{\mathrm{s}} = 376{,}80\,\frac{1}{\mathrm{s}}.$$

5. Obliczamy uśrednioną w czasie moc:

$$P = \frac{1}{2}\mu A^2 \omega^2 v = \frac{1}{2} \cdot 0{,}035\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}} \cdot (0{,}040\,\mathrm{m})^2 \cdot (376{,}8\,\frac{1}{\mathrm{s}})^2 \cdot 50{,}71\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 201{,}59\,\mathrm{W}.$$

Znaczenie

Uśredniona w czasie moc fali sinusoidalnej jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy fali i kwadratu częstości kołowej fali. Tak jest dla większości fal mechanicznych. Jeśli albo częstość kołowa, albo amplituda fali ulegną podwojeniu, wówczas moc wzrośnie czterokrotnie. Uśredniona w czasie moc fali na strunie jest również proporcjonalna do prędkości sinusoidalnej fali na strunie. Jeśli prędkość wzrośnie dwa razy, to poprzez czterokrotny wzrost naprężenia moc również wzrośnie dwukrotnie.



16.6 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Czy uśredniona w czasie moc fali sinusoidalnej na strunie jest proporcjonalna do liniowej gęstości struny?

Wyrażenia na energię fali i uśrednioną w czasie moc dotyczą fali sinusoidalnej na strunie. Generalnie energia fali mechanicznej i jej moc są proporcjonalne do kwadratu amplitudy i kwadratu częstości kołowej (a zatem również do kwadratu częstotliwości).

Inną ważną wielkością jest natężenie fali. Fale mogą być skupione lub rozrzedzone. Przykładowo fale sejsmiczne

potrafią rozchodzić się na bardzo duże odległości. Im bardziej oddalą się od źródła, tym mniejszych dokonają zniszczeń. Odległość, na jaką oddaliła się fala, pozwala obliczyć powierzchnię, przez którą przechodzi. Znając powierzchnię, możemy wyliczyć **natężenie** (ang. **intensity**) oznaczane I, czyli moc przypadającą na jednostkę powierzchni:

$$I = \frac{P}{A}, \tag{16.11}$$

gdzie P jest mocą, jaką przenosi fala, przechodząc przez powierzchnię A. Podana definicja jest prawdziwa dla każdego zagadnienia, w którym zachodzi transport energii. W układzie SI jednostką natężenia jest $\mathrm{W/m^2}$. Wiele fal występujących w przyrodzie to fale koncentryczne, które rozchodzą się od źródła w postaci powierzchni sferycznych. Na przykład głośnik zamocowany na słupie wytwarza fale kuliste. Chociaż fale dźwiękowe będziemy omawiać w następnym rozdziale, to już tutaj chcemy zasygnalizowac, że im dalej znajdujemy się od głośnika, tym dźwięk dochodzący do naszych uszu jest słabszy. Im większą odległość pokona fala, tym jej promień fali zakreśli większą powierzchnię $A = 4\pi r^2$. Natężenie fali kulistej wynosi zatem:

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}. \tag{16.12}$$

Jeśli nie ma rozpraszania, energia pozostaje stała w trakcie ruchu fali kulistej, ale jej natężenie zmniejsza się w miarę oddalania się fali od źródła, ponieważ wzrasta jej powierzchnia.

W przypadku ruchu dwuwymiarowej fali kulistej jej obwód się powiększa, ponieważ wzrasta promień. Jeśli wrzucimy kamień do sadzawki, wokół źródła zaczną rozchodzić się koncentryczne fale. W miarę wzrostu odległości od ich źródła natężenie się zmniejsza proporcjonalnie do $1/r$ a nie $1/r^2$.

16.5 | Interferencja fal

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

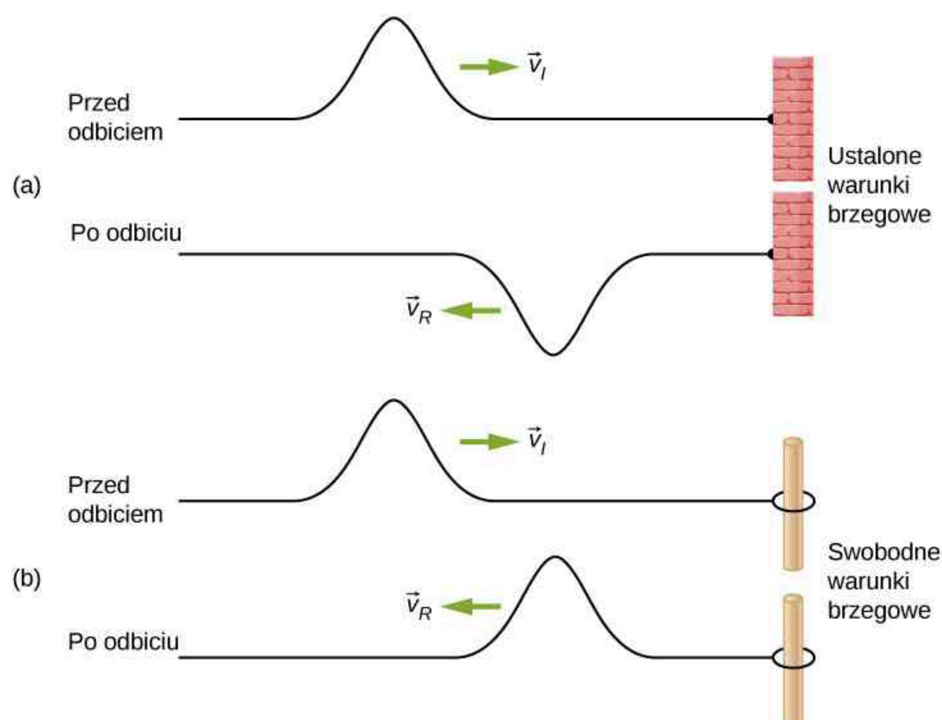
- wyjaśniać zjawiska odbicia fal mechanicznych na granicy ośrodka i ich przechodzenia przez granicę ośrodka;
- definiować pojęcia interferencji i superpozycji;
- znajdować falę wypadkową dwóch fal sinusoidalnych, różniących się jedynie fazą.

Do tej pory zajmowaliśmy się falami mechanicznymi rozchodzącymi się w ośrodku, nie uwzględniając tego, co się stanie, jeśli fala napotka granicę ośrodka lub jeśli napotka inną falę, rozchodzącą się w tym samym ośrodku. Fala, która napotka granicę ośrodka, może ulec całkowitemu lub częściowemu odbiciu od niej. Na przykład jeśli staniemy w pewnej odległości od urwiska i krzykniemy, to usłyszymy dźwięk odbity od urwiska, czyli echo. Fale rozchodzące się w tym samym ośrodku mogą ze sobą oddziaływać. Jeśli do sadzawki wpadną dwa kamienie w niewielkiej odległości od siebie, to fale, które się utworzą, nałożą się na siebie. To zjawisko nazywamy interferencją. W tym rozdziale zajmiemy się nim bardziej szczegółowo, wykazując, że zjawisko to różni się od zagadnień punktu materialnego czy bryły sztywnej. Później, gdy będziemy zajmować się fizyką współczesną, zobaczymy, że dopiero gdy badamy materię na poziomie atomowym, możemy zauważyć podobieństwa między falami a cząstkami.

Odbicie i transmisja

Fala rozchodząc się w ośrodku i napotyka jego granicę, ulega odbiciu. Fala, która biegnie w kierunku granicy ośrodka, to fala padająca, natomiast fala, która odbiła się od granicy, to fala odbita. Sposób, w jaki odbija się od granicy ośrodka, zależy od warunków brzegowych, a dokładnie od tego, czy granica jest ustalona i wynosi zero, czy może przyjmo-

wać dowolne wartości (Rysunek 16.17). Przez **ustalone warunki brzegowe** (ang. **fixed boundary condition**) rozumiemy sytuację, gdy granica ośrodka nie ma swobody ruchu. Analogicznie, **swobodne warunki brzegowe** (ang. **free boundary condition**) oznaczają sytuację, gdy granica ośrodka może zmieniać swoje położenie.

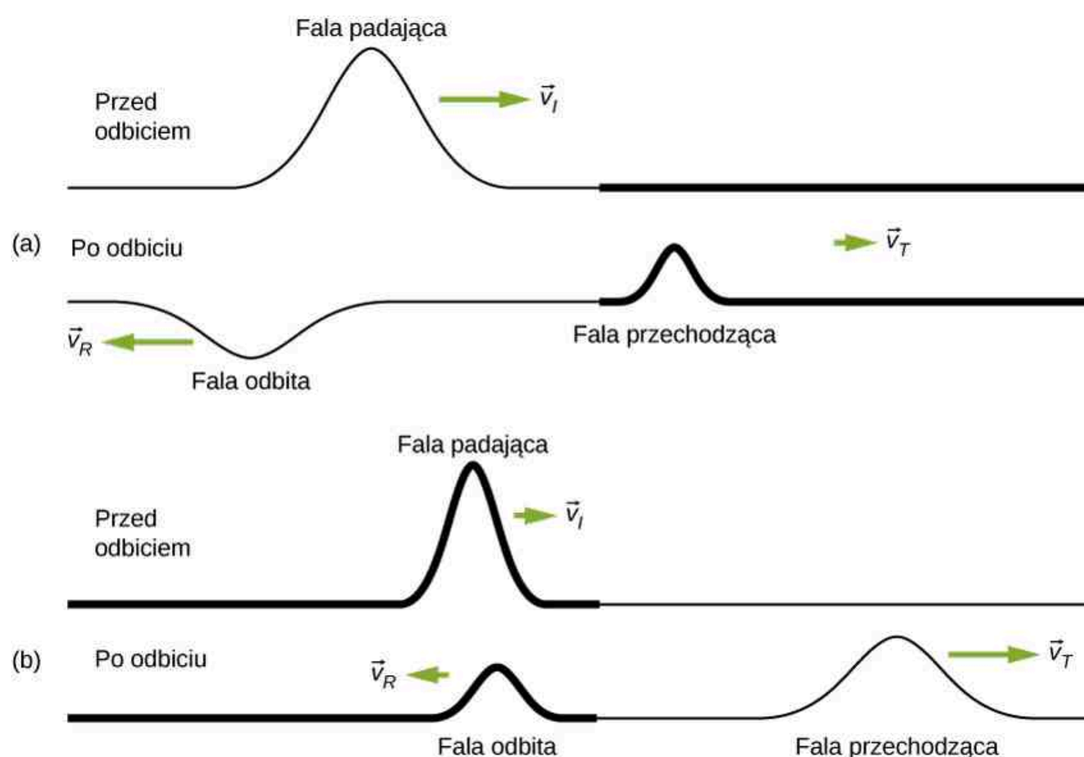


Rysunek 16.17 (a) Jeden koniec struny jest ustalony i nie ma swobody ruchu. Fala biegnąca wzdłuż struny, napotykając *ustalone warunki brzegowe*, po odbiciu zmienia fazę o $180°$ (π rad) w porównaniu z fazą fali padającej. (b) Jeden koniec struny jest zamocowany do drążka o pomijalnej masie, przy czym drążek ma swobodę ruchu. Fala rozchodząca się wzdłuż struny, napotykając *swobodne warunki brzegowe* , odbija się i zmienia fazę o $0°$ (0 rad) w porównaniu z fazą fali padającej.

Rysunek 16.17 (a) prezentuje sytuację dla ustalonych warunków brzegowych. Jeden koniec struny jest przytwierdzony do ściany, co zapobiega przemieszczaniu się ośrodka (tu: struny). Amplituda fali odbitej jest równa amplitudzie fali padającej, ale faza fali odbitej różni się o $180°$ (π rad) od fazy fali padającej. Zmianę fazy możemy objaśnić, korzystając z trzeciej zasady dynamiki Newtona, zgodnie z którą jeśli ciało A działa na ciało B, wówczas ciało B oddziałuje na ciało A siłą o takiej samej wartości, ale skierowaną przeciwnie. Kiedy fala padająca napotyka przeszkodę w postaci ściany, to siła, z jaką struna oddziałuje na ścianę, ma przeciwny zwrot do siły, z jaką ściana oddziałuje na strunę. Zwróćmy uwagę, że grzbiet fali padającej odpowiada dolinie fali odbitej i *vice versa*.

Rysunek 16.17 (b) pokazuje z kolei swobodne warunki brzegowe. Koniec struny jest zamocowany do drążka o pomijalnej masie, przez co struna ma swobodę ruchu. Również i w tym przypadku fala padająca odbija się od granicy ośrodków, ale w takich warunkach fale odbita i padająca mają zgodne fazy. Fala, padając na granicę ośrodków, działa na drążek siłą, która powoduje jego przyspieszenie. Maksymalne wychylenie drążka równa się amplitudzie fali. Następnie drążek wraca do położenia równowagi pod wpływem siły sprężystości struny. Jak pokazano na rysunku, położenie grzbietu fali padającej odpowiada położeniu grzbietu fali odbitej. Analogicznie położenie doliny fali padającej odpowiadałoby położeniu doliny fali odbitej. Amplitudy fali padającej i odbitej są sobie równe.

Czasami jednak granica ośrodka nie jest ani ustalona, ani swobodna. Na Rysunku 16.18 (a) przedstawiono sytuację, w której struna o małej liniowej gęstości masy jest połączona ze struną o większej liniowej gęstości masy. Wówczas oprócz fali odbitej i fali padającej występuje dodatkowo fala przechodząca, która jest w zgodnej fazie z falą padającą. Amplitudy fal przechodzącej i odbitej są mniejsze niż amplituda fali padającej. Jeśli naprężenia obu strun są równe, wówczas fala rozchodzi się szybciej w strunie o niższej liniowej gęstości masy.



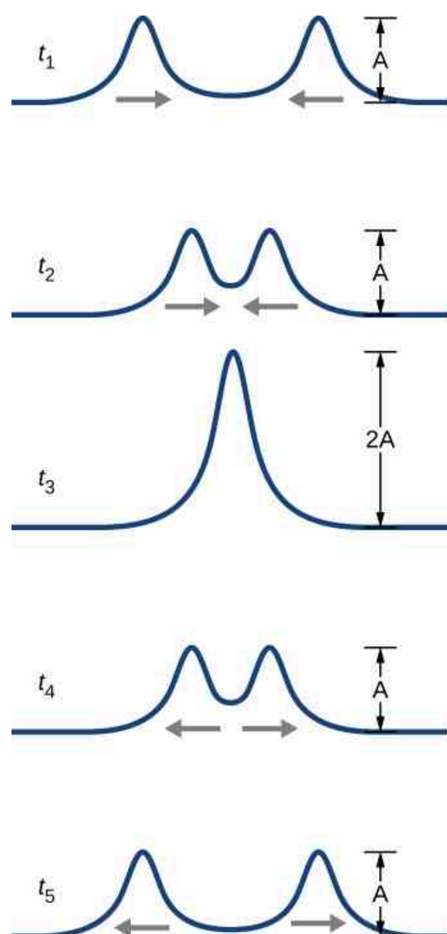
Rysunek 16.18 Fale biegnące wzdłuż dwóch typów strun: pogrubioną linią zaznaczono falę biegnącą wzdłuż struny o większej liniowej gęstości masy, a cieńszą linią zaznaczono falę wzdłuż struny o mniejszej liniowej gęstości. Obie struny poddano takim samym naprężeniom. Fala biegnąca wzdłuż struny o niższej gęstości liniowej porusza się szybciej niż fala biegnąca wzdłuż struny o wyższej gęstości. (a) Jeśli fala przechodzi z ośrodka o mniejszej gęstości liniowej do ośrodka o większej gęstości, to faza fali odbitej różni się o $180°$ (π rad) od fazy fali padającej, a faza fali przechodzącej jest zgodna z fazą fali padającej. (b) Gdy fala przechodzi z ośrodka o większej gęstości liniowej do ośrodka o mniejszej gęstości, fazy fali odbitej i przechodzącej są zgodne z fazą fali padającej.

Na Rysunku 16.18 (b) struna o dużej liniowej gęstości masy jest połączona ze struną o małej liniowej gęstości. Faza fali odbitej w takim przypadku jest zgodna z fazą fali padającej. Pojawia się również fala przechodząca o fazie zgodnej z fazą fali padającej. Amplitudy fal przechodzącej i odbitej są mniejsze niż amplituda fali padającej. Jeśli naprężenia obu strun są jednakowe, fala rozchodzi się szybciej w strunie o niższej gęstości masy.

Superpozycja i interferencja

Większość fal występujących w przyrodzie to jednak bardziej skomplikowane, zjawiska. Większość ciekawych fal mechanicznych stanowią kombinacje dwóch lub większej liczby fal rozchodzących się w tym samym ośrodku. Aby nauczyć się je analizować, musimy poznać zagadnienie superpozycji fal.

Rozważmy dwa impulsy o takiej samej amplitudzie, które biegną naprzeciwko siebie w tym samym ośrodku, jak pokazano na Rysunku 16.19. W efekcie fale pokryją się, w wyniku czego powstanie fala o amplitudzie dwa razy większej, a następnie fale zaczną biec w przeciwnych kierunkach. Zjawisko to nazywa się **interferencją** (ang. **interference**).



Rysunek 16.19 Impulsy biegną naprzeciwko siebie i ulegają interferencji. Pojęcie interferencji odnosi się do sytuacji, kiedy fale nałożą się na siebie.

Aby prześledzić zjawisko interferencji, posłużymy się zasadą superpozycji fal. Dla fal mechanicznych zasada **superpozycji** (ang. **superposition**) mówi, że jeśli co najmniej dwie fale biegnące nałożą się na siebie w tym samym punkcie, to wypadkowe położenie cząstki ośrodka w tym punkcie jest algebraiczną sumą położeń tego punktu dla każdej fali z osobna. Zasadę superpozycji można stosować dla fal na strunie, fal dźwiękowych, fal na powierzchni wody i innych. Fale elektromagnetyczne także jej podlegają, ale w ich przypadku nie dodaje się położeń punktu ośrodka, lecz natężenia pól elektrycznego i magnetycznego. Fale, które nie podlegają zasadzie superpozycji, to fale nieliniowe. W tym rozdziale mówimy tylko o falach liniowych, w szczególności sinusoidalnych.

W celu wyjaśnienia zasady superpozycji posłużymy się liniowym równaniem falowym. W podrozdziale Matematyczny opis fal zdefiniowaliśmy falę liniową jako falę, której reprezentacją matematyczną jest liniowe równanie falowe. W przypadku fali poprzecznej na strunie, na którą działa siła sprężystości o charakterze liniowym, ma ono postać:

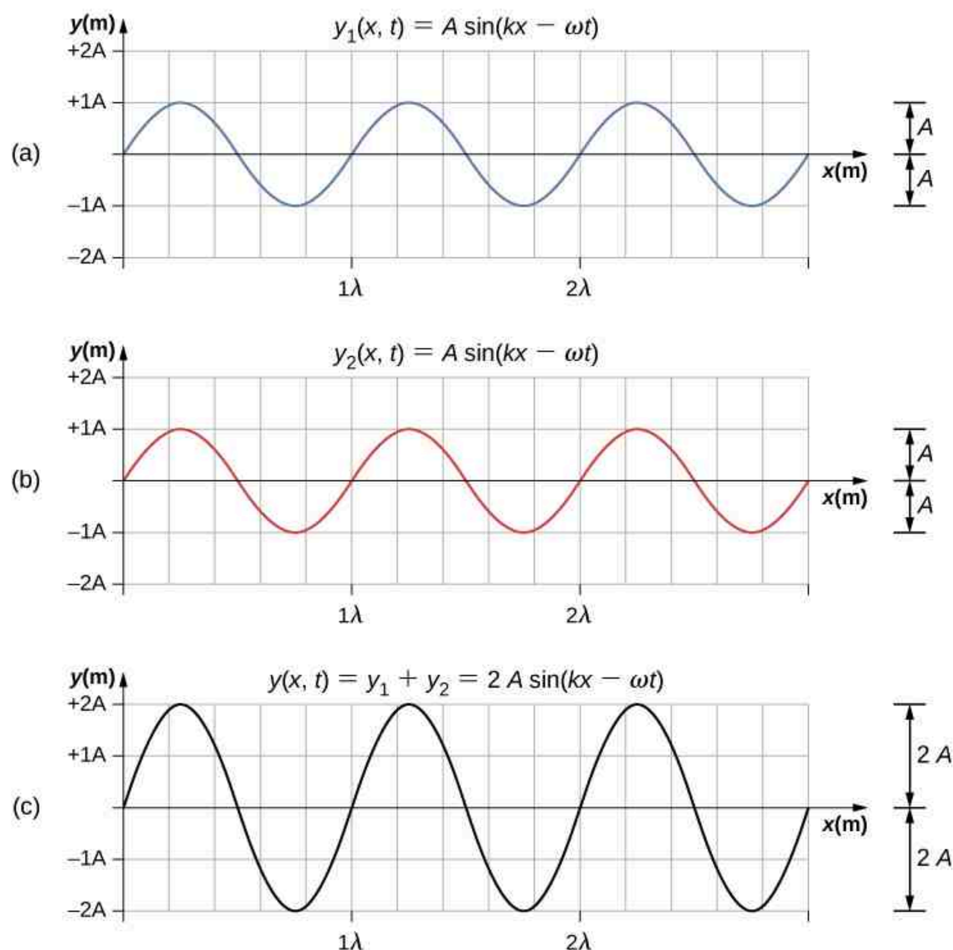
$$\frac{\partial^2 y\,(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 y\,(x,t)}{\partial t^2}.$$

Każda funkcja falowa $y(x,t) = y\,(x \mp vt)$, której argument jest funkcją liniową $(x \mp vt)$, jest rozwiązaniem liniowego równania falowego. Jeśli funkcje falowe $y_1\,(x,t)$ i $y_2\,(x,t)$ są rozwiązaniami liniowych równań falowych, to suma dwóch funkcji $y_1\,(x,t) + y_2\,(x,t)$ jest również rozwiązaniem liniowego równania falowego. Na fale mechaniczne, które spełniają zasadę superpozycji, zwykle narzucone jest ograniczenie, że amplitudy muszą być małe w stosunku do długości fali. Jeśli amplituda byłaby zbyt duża, to ośrodek uległby takiemu odkształceniu, że siła sprężystości przestałaby być liniowa.

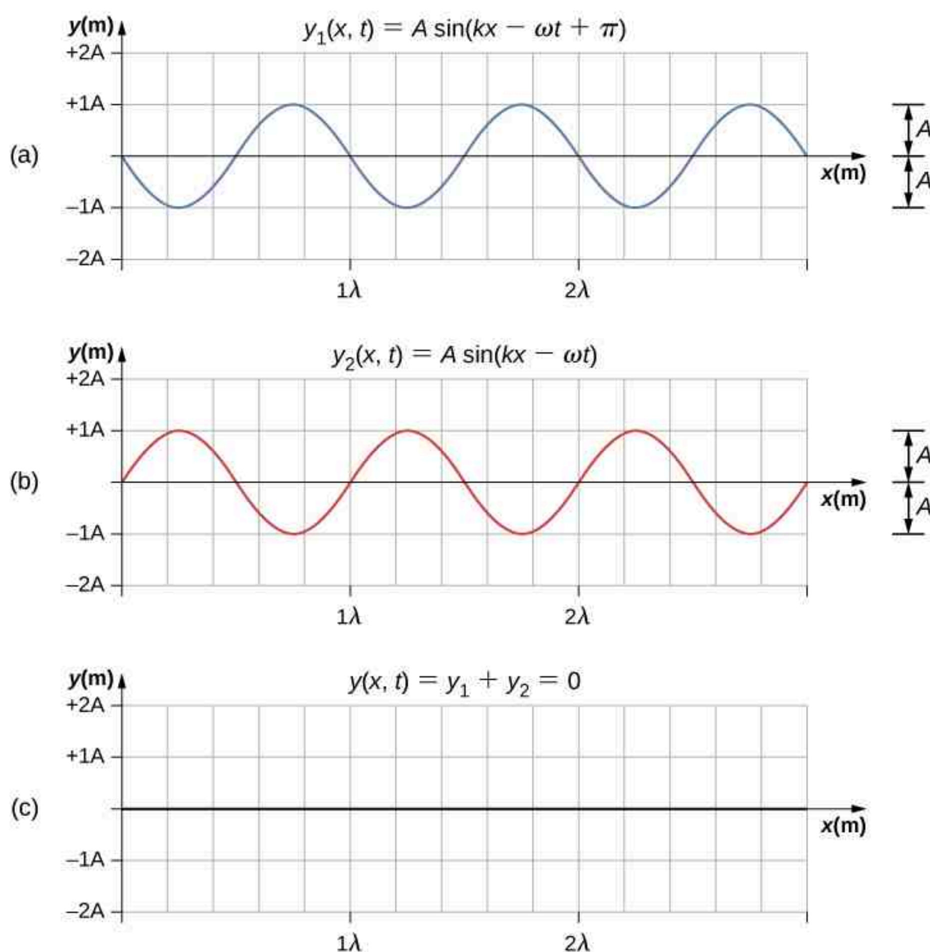
Fale mogą ulegać interferencji konstruktywnej lub destruktywnej. Na Rysunku 16.20 pokazano dwie identyczne fale sinusoidalne, które mają takie same fazy. Rysunek 16.20 (a) i (b) przedstawia dwie fale liniowe, natomiast na Rysunku 16.20 (c) pokazano falę wypadkową utworzoną w wyniku algebraicznego dodania tych fal. Zarówno grzbiety, jak i doliny obu fal leżą w tych samych miejscach. W takim przypadku zachodzi **wzmacnianie**, inaczej **interferencja konstruktywna** (ang. **constructive interference**), w wyniku czego powstaje fala o amplitudzie dwukrotnie większej niż amplitudy fal wyjściowych, ale o tej samej długości.

Rysunek 16.21 przedstawia dwie takie same fale, których fazy różnią się o 180°. W takim przypadku zachodzi

wygaszanie, inaczej **interferencja destruktywna** (ang. **destructive interference**). Rysunek 16.21 (a) i (b) przedstawia dwie wyjściowe fale, natomiast Rysunek 16.21 (c) pokazuje falę, która jest wynikiem superpozycji dwóch fal. Ponieważ położenie grzbietu jednej fali odpowiada położeniu doliny drugiej, amplituda fali wypadkowej wynosi zero, innymi słowy w przypadku wygaszania fala znika.

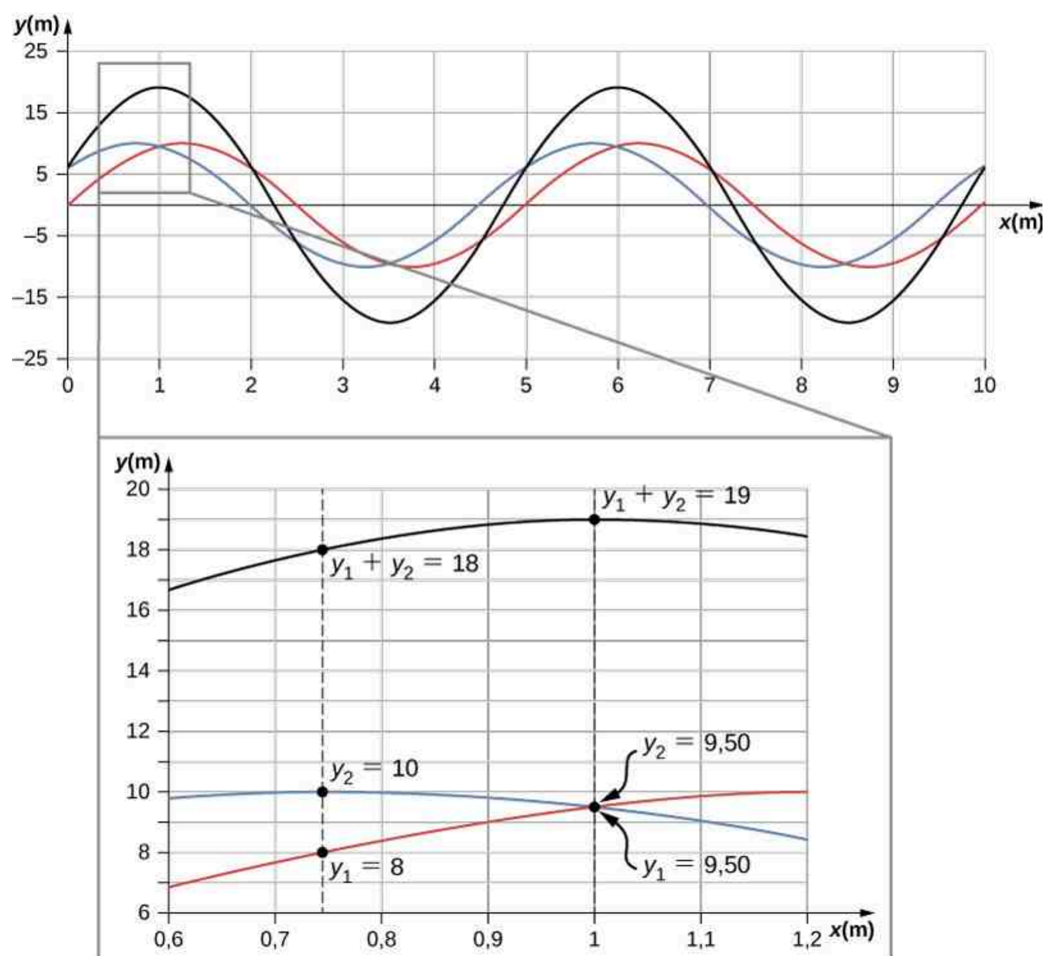


Rysunek 16.20 Wzmacnianie interferencyjne dwóch fal prowadzi do powstania fali o dwukrotnie większej amplitudzie, lecz o tej samej długości.



Rysunek 16.21 Wygaszanie dwóch fal, których fazy różnią się o $180°$ (π rad), prowadzi do powstania fali o zerowej amplitudzie.

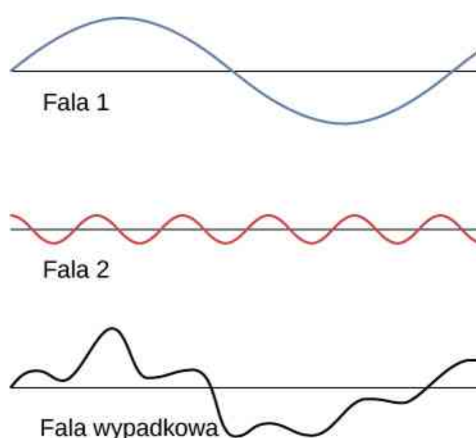
Gdy fale liniowe ulegają interferencji, fala wypadkowa jest algebraiczną sumą fal składowych, jak zaprezentowaliśmy to przy okazji omawiania zasady superpozycji. Fakt ten zilustrowano na Rysunku 16.22, gdzie widzimy dwie fale (zaznaczone liniami niebieską i czerwoną) oraz falę wypadkową (zaznaczoną linią czarną).



Rysunek 16.22 Gdy dwie fale rozchodzące się w tym samym ośrodku interferują ze sobą, to wychylenie fali wypadkowej w każdym punkcie jest sumą algebraiczną fal składowych. Na rysunku widzimy dwie fale (linie czerwona i niebieska) dodane do siebie oraz falę wypadkową (linia czarna). Mogą one reprezentować dowolne rodzaje fal liniowych, na przykład fale powstające na powierzchni sadzawki, fale na strunie, dźwięk, fale elektromagnetyczne.

Superpozycja większości fal prowadzi do powstania efektów, które są kombinacją interferencji konstruktywnej i destruktywnej, przy czym efekt zależy od miejsca i czasu obserwacji. Dźwięki wytwarzane przez wieżę stereo w jednym miejscu są głośne, a w innych ciche. Oznacza to, że w niektórych miejscach zachodzi interferencyjne wzmacnianie, a w innych osłabianie. Wieża stereo ma co najmniej dwa głośniki. Dźwięki wytwarzane przez każdy z nich mogą odbijać się od ścian. Wszystkie fale odbite interferują ze sobą, a fala wypadkowa jest ich superpozycją.

Rozważyliśmy kilka przykładów, w których superpozycji ulegały fale podobne do siebie. Na Rysunku 16.23 prezentujemy przykład superpozycji dwóch różnych fal, gdzie po dodaniu zaburzeń obu otrzymujemy falę wypadkową.



Rysunek 16.23 Superpozycja fal nieidentycznych prowadzi zarówno do wzmacniania, jak i do osłabiania interferencyjnego.

W przypadkach, gdy co najmniej dwie fale mechaniczne interferują ze sobą, obraz interferencyjny utworzony przez falę wypadkową może być dość skomplikowany, nieposiadający żadnych rozpoznawalnych cech. To właśnie ta złożoność powoduje, że dźwięk brzmi ciekawie i chcemy go słuchać. Innym wartym wspomnienia przykładem superpozycji są fale stojące, które są wytwarzane przez fale biegnące w różnych kierunkach. Fale stojące omówimy w następnym podrozdziale.


Spróbuj wykorzystać tę symulację (https://openstaxcollege.org/l/21waveinterfer) , aby wytworzyć fale. Jako źródła możesz użyć cieknącego kranu, głośnika lub lasera. Aby utworzyć wzór interferencyjny, musisz użyć drugiego źródła fali lub pary szczelin. Do obserwacji możesz wybrać jedno źródło lub dwa źródła. W przypadku symulacji z wykorzystaniem dwóch źródeł możesz zaobserwować wzór interferencyjny, jaki powstanie na skutek dodawania się fal o różnych częstotliwościach i amplitudach.

Superpozycja fal sinusoidalnych o różnych fazach

Wiele przypadków, z którymi mamy do czynienia w fizyce, dotyczy dwóch fal sinusoidalnych o tych samych amplitudach, liczbach falowych i częstościach kołowych, ale różnych **fazach**:

$$y_1(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \phi),$$
$$y_2(x,t) = A\sin(kx - \omega t).$$

Jeśli te dwie fale rozchodzą się w tym samym ośrodku, to fala wypadkowa, która powstaje wskutek superpozycji, ma postać:

$$y_R(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \phi) + A\sin(kx - \omega t).$$

Jeśli zastosujemy tożsamość trygonometryczną:

$$\sin u + \sin v = 2\sin\left(\frac{u+v}{2}\right)\cos\left(\frac{u-v}{2}\right),$$

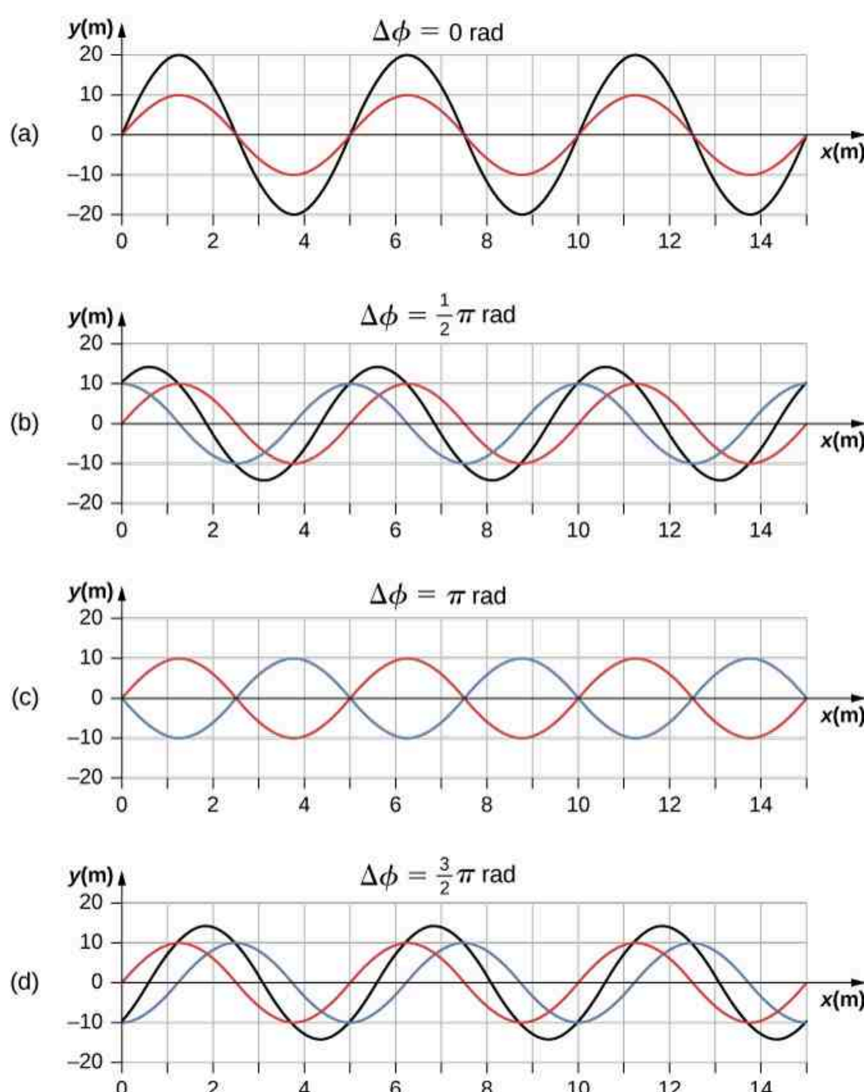
gdzie $u = kx - \omega t + \phi$ i $v = kx - \omega t$, to fala wypadkowa przyjmie postać:

$$\begin{aligned} y_R(x,t) &= y_1(x,t) + y_2(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \phi) + A\sin(kx - \omega t) \\ &= 2A\sin\left(\tfrac{(kx-\omega t+\phi)+(kx-\omega t)}{2}\right)\cos\left(\tfrac{(kx-\omega t+\phi)-(kx-\omega t)}{2}\right) \\ &= 2A\sin\left(kx - \omega t + \tfrac{\phi}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\phi}{2}\right). \end{aligned}$$

Powyższe równanie można też zapisać jako:

$$y_R(x,t) = \left[2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\right]\sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right). \tag{16.13}$$

Fala wypadkowa ma tę samą liczbę falową i tę samą częstość kołową co fala pierwotna. Jej amplituda wynosi $A_R = 2A\cos(\phi/2)$, a faza początkowa równa się połowie fazy początkowej fali pierwotnej. Przykłady fal, które różnią się jedynie fazą, zostały pokazane na Rysunku 16.24. Fale zaznaczone na niebiesko i czerwono mają te same amplitudy, liczby falowe i częstości kołowe, ale różne fazy. Oznacza to, że mają te same okresy, długości i częstotliwości. Fala zaznaczona na czarno jest wynikiem superpozycji tych dwóch fal. Gdy różnica faz tych fal wynosi zero, wówczas są one w zgodnych fazach, a fala wypadkowa ma tę samą liczbę falową i częstość kołową, natomiast jej amplituda równa się dwukrotnej amplitudzie fal wyjściowych (patrz: Rysunek 16.24 (a)). Jest to przykład wzmacniania interferencyjnego. Jeśli różnica faz wynosi $180°$, to wynikiem interferencji jest wygaszanie (patrz: Rysunek 16.24 (c)). Fala wypadkowa ma amplitudę równą zero. Przy każdej innej różnicy faz powstaje fala o liczbie falowej i częstości kołowej równych tym parametrom obu fal padających. Faza początkowa fali wypadkowej wynosi $\phi/2$, a jej amplituda $2A\cos(\phi/2)$. Przykłady pokazano na Rysunku 16.24 (b) i (d).



Rysunek 16.24 Superpozycja dwóch fal o tych samych amplitudach, długościach, częstotliwościach, ale różnych fazach. Fala czerwona jest opisana funkcją falową $y_1(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$, natomiast fala niebieska funkcją $y_2(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \phi)$. Na czarno zaznaczono falę będącą wynikiem dodania tych dwóch fal. Różnice faz fal wynoszą: (a) 0,00 rad, (b) $\pi/2$ rad, (c) π rad, (d) $3\pi/2$ rad.

16.6 | Fale stojące i rezonans

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać fale stojące i wyjaśniać ich powstawanie;
- opisywać mody fal stojących na strunie;
- podawać różnorodne przykłady fal stojących.

W tym rozdziale zajmowaliśmy się już falami biegnącymi, które przenosiły energię z jednego miejsca w inne. W pewnych warunkach fale mogą jednak odbijać się tam i z powrotem, przybierając charakter fal stacjonarnych, nazywanych **falami stojącymi** (ang. **standing wave**).

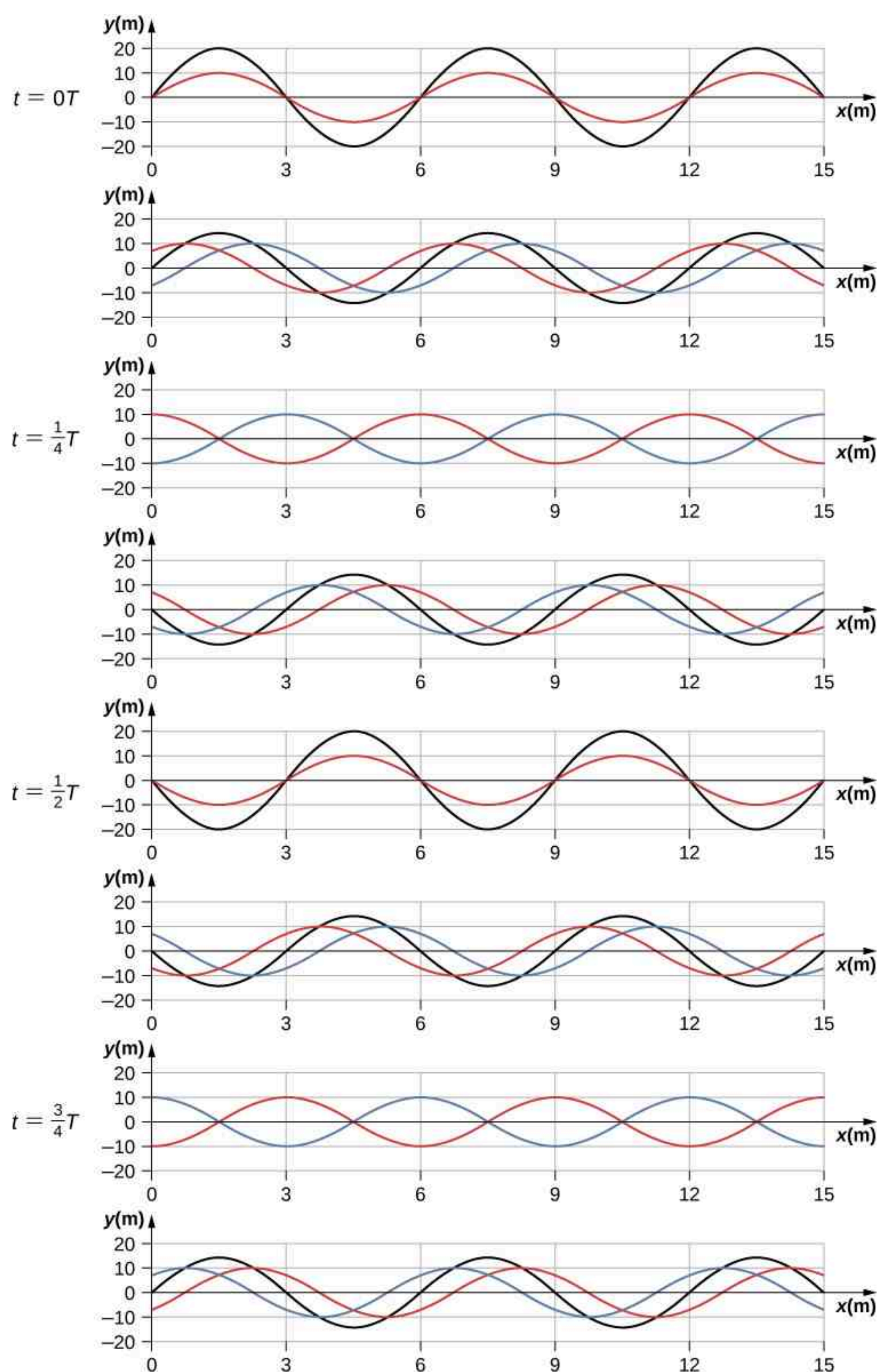
Inny ciekawy efekt to **rezonans** (ang. **resonance**). W rozdziale Drgania zdefiniowaliśmy rezonans jako zjawisko, w którym siła wymuszająca o niewielkiej amplitudzie może spowodować ruch o dużej amplitudzie. Przykładem jest dziecko huśtające się na huśtawce, co da się opisać jako wahadło fizyczne. Popchnięcia o małej amplitudzie, jakie stosuje rodzic, huśtając dziecko, powodują ruch huśtawki o dużej amplitudzie. Zjawisko rezonansu może mieć korzystne znaczenie, czego przykładem jest powstawanie dźwięków w instrumentach strunowych. Może jednak też mieć niszczący potencjał, czego przykładem jest zawalenie się budynków podczas trzęsienia Ziemi. W przypadku fal stojących fale o stosunkowo dużej amplitudzie tworzą się w wyniku superpozycji fal o mniejszych amplitudach.

Fale stojące

Czasami fale nie przemieszczają się. Na Rysunku 16.25 pokazano eksperyment, który możemy wykonać w domu. Miskę z mlekiem stawiamy na obudowie zwykłego wiatraka. Drgania, które wiatrak wytwarza, spowodują powstanie kulistych fal stojących w mleku. Takie fale powstają w wyniku superpozycji dwóch lub więcej fal biegnących (Rysunek 16.26), które są identyczne, ale przemieszczają się w przeciwnych kierunkach. Fale te nakładają się na siebie, a zaburzenia się dodają. Jeśli mają one takie same amplitudy i długości, możemy zaobserwować naprzemiennie występujące efekty wzmacniania i osłabiania interferencyjnego. Fala wypadkowa wygląda tak, jakby stała w miejscu, stąd nazwa fala stojąca.



Rysunek 16.25 Fale stojące zostały utworzone na powierzchni mleka w misce, umieszczonej na obudowie wiatraka. Drgania wiatraka powodują, że powierzchnia mleka drga.



Rysunek 16.26 Kolejne obrazy fali sinusoidalnej. Fala czerwona porusza się w kierunku ujemnej półosi osi x, a fala niebieska biegnie w kierunku zgodnym z kierunkiem dodatniej półosi x. Fala wypadkowa została zaznaczona czarną linią. Rozważając falę wypadkową w punktach o współrzędnych $x = 0\text{ m}, 3\text{ m}, 6\text{ m}, 9\text{ m}, 12\text{ m}, 15\text{ m}$, możemy zauważyć, że fala wypadkowa zawsze ma w tych punktach wartość zero, niezależnie od czasu. Punkty te nazywa się węzłami. Pomiędzy każdymi dwoma węzłami występuje strzałka, czyli miejsce, w którym drgania ośrodka osiągają amplitudę równą sumie amplitud poszczególnych fal.

Rozważmy dwie identyczne fale, które biegną w przeciwnych kierunkach. Pierwsza fala opisana jest równaniem falowym $y_1\,(x, t) = A\,\sin\,(kx - \omega t)$, natomiast druga równaniem $y_2\,(x, t) = A\,\sin\,(kx + \omega t)$. Fale interferują ze sobą, tworząc falę wypadkową:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t),$$
$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t) + A\sin(kx + \omega t).$$

Zapis ten możemy uprościć, korzystając z tożsamości trygonometrycznej:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$

gdzie $\alpha = kx$ i $\beta = \omega t$, co daje wyrażenie:

$$y(x,t) = A[\sin(kx)\cos(\omega t) - \cos(kx)\sin(\omega t) + \sin(kx)\cos(\omega t) - \cos(kx)\sin(\omega t)],$$

upraszczające się do:

$$y(x,t) = 2A\sin(kx)\cos(\omega t). \tag{16.14}$$

Zauważmy, że fala wypadkowa jest sinusoidalną funkcją położenia pomnożonego przez funkcję cosinus, której argumentem jest czas. Wykres $y(x,t)$ w funkcji x dla różnych chwil czasu przedstawiono na Rysunku 16.26. Fala oznaczona czerwoną linią porusza się w kierunku przeciwnym do zwrotu osi x, fala oznaczona niebieską linią – w kierunku zgodnym ze zwrotem osi x, a fala oznaczona czarną linią jest sumą obu fal. Nakładanie się fal czerwonej i niebieskiej prowadzi do naprzemiennych efektów wzmacniania i osłabiania interferencyjnego.

Początkowo, w chwili $t = 0$, te dwie fale mają zgodne fazy, a fala wypadkowa ma amplitudę równą dwukrotności amplitudy fal wyjściowych. Fale mają również zgodne fazy w chwili $t = T/2$. Tak naprawdę fale mają zgodne fazy w chwilach równych każdej całkowitej wielokrotności połowy okresu:

$$t = n\frac{T}{2}, \quad \text{gdzie} \quad n = 0,1,2,3\ldots \quad \text{(zgodne fazy)}.$$

Dla innych chwil czasu fazy tych dwóch fal różnią się o $180°$ (π rad), a fala wypadkowa jest równa zero. Ma to miejsce dla:

$$t = \frac{1}{4}T, \frac{3}{4}T, \frac{5}{4}T, \ldots, \frac{n}{4}T, \quad \text{gdzie} \quad n = 1,3,5,\ldots \quad \text{(przeciwne fazy)}.$$

Zwróćmy uwagę, że w niektórych punktach x fali wypadkowej wychylenie jest równe zero, niezależnie od tego, czy fale składowe są w fazie zgodnej czy w przeciwnej. Te punkty to **węzły** (ang. **node**). Zastanówmy się, kiedy się one pojawiając. Rozważmy rozwiązanie, które jest sumą obu fal składowych:

$$y(x,t) = 2A\sin(kx)\cos(\omega t).$$

Położenie węzłów znajdziemy, jeśli ustalimy, w których punktach funkcja sinus przyjmuje wartości równe zero.

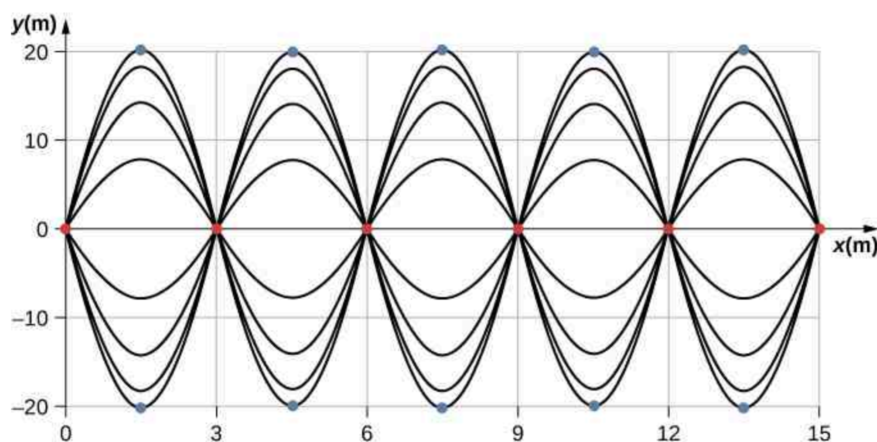
$$\begin{aligned}
\sin(kx) &= 0 \\
kx &= 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots \\
\frac{2\pi}{\lambda}x &= 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots \\
x &= 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \cdots = \frac{n\pi}{2}, \quad \text{gdzie} \quad n = 0,1,2,3,\ldots
\end{aligned}$$

Istnieją również punkty, w których y przyjmuje wartości między $y = \pm A$. Te punkty to **strzałki** (ang. **antinode**). Ich położenie znajdziemy, ustalając dla jakich wartości x spełniony jest warunek: $\sin(kx) = \pm 1$.

$$\begin{aligned}
\sin(kx) &= \pm 1 \\
kx &= \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \ldots \\
\frac{2\pi}{\lambda}x &= \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \ldots \\
x &= \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \cdots = \frac{n\lambda}{4}, \quad \text{gdzie} \quad n = 1,3,5,\ldots
\end{aligned}$$

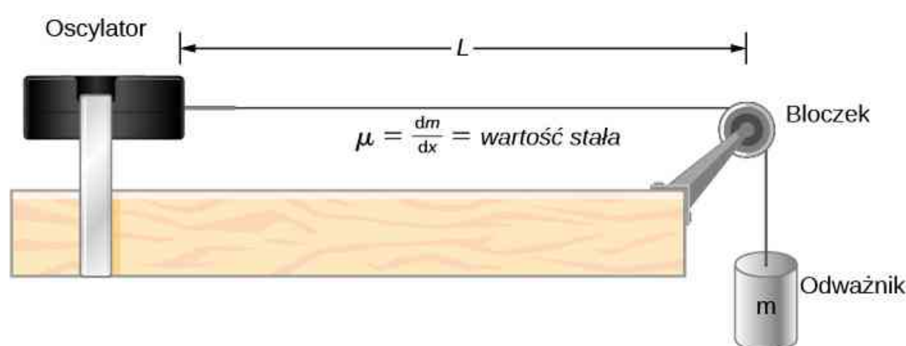
Fala wypadkowa pokazana jest na Rysunku 16.27. Powstała ona z nałożenia się dwóch identycznych fal biegnących w przeciwnych kierunkach. Falę wypadkową można opisać funkcją sinus, jej węzły występują w punktach odpowiadających całkowitym wielokrotnościom długości fali. Strzałki to punkty, w których wychylenia są równe $y = \pm 2A$ z uwagi na to, że funkcja cos (ωt) przyjmuje wartości między ± 1.

Fala wypadkowa nie porusza się wzdłuż osi x, mimo iż powstała z dwóch fal, z których jedna biegła w kierunku zgodnym, a druga w kierunku przeciwnym do zwrotu osi x. Rysunek 16.27 pokazuje kilka możliwych fal wypadkowych. Węzły oznaczone zostały czerwonymi kropkami, a strzałki niebieskimi.



Rysunek 16.27 Gdy dwie identyczne fale biegną w przeciwnych kierunkach, fala wypadkowa jest falą stojącą. Węzły powstają w punktach odpowiadających całkowitym wielokrotnościom połowy długości fali. Strzałki z kolei odpowiadają nieparzystym wielokrotnościom 1/4 długości fali. Odpowiadające takim punktom wychylenia są równe $y = \pm A$. Węzły zostały oznaczone czerwonymi kropkami, a strzałki niebieskimi.

Popularnym przykładem fal stojących są fale wytwarzane w strunowych instrumentach muzycznych. Gdy szarpniemy strunę, impulsy biegną w przeciwnych kierunkach. Koniec struny jest zamocowany na stałe, zatem węzły powstają w punktach odpowiadających punktom brzegowym takiego układu. Można w nich regulować częstości rezonansowe struny. Zjawisko rezonansu na strunie instrumentu możemy zaobserwować, posługując się układem pokazanym na Rysunku 16.28.



Rysunek 16.28 Zestaw laboratoryjny do prezentacji fal stojących na strunie. Na każdym końcu struny o stałej liniowej gęstości masy tworzą się węzły. Oba punkty graniczne struny odległe są o L. Odważnik zapewnia naprężenie struny, prędkość fali na strunie jest proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z naprężenia podzielonego przez liniową gęstość masy.

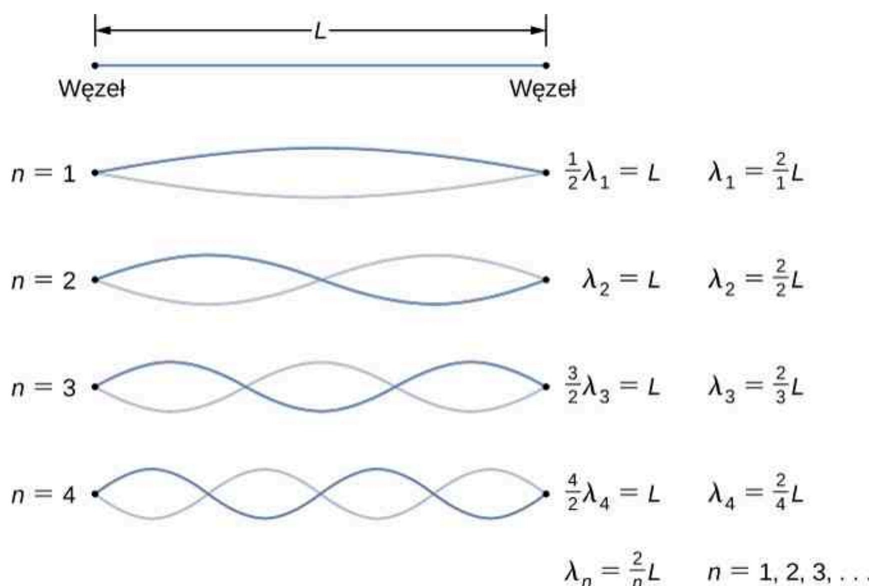
Zestaw laboratoryjny przedstawia sprężynę połączoną z oscylatorem, który powoduje drgania struny z częstotliwością f. Drugi koniec struny jest przerzucony przez bloczek, wzdłuż którego struna porusza się bez tarcia. Wiszący pionowo koniec struny obciążono odważnikiem, który zapewnia stałe jej naprężenie. Struna ma stałą liniową gęstość masy (masa przypadająca na jednostkę długości) μ, a prędkość, z jaką fala biegnie wzdłuż struny, wynosi $v = \sqrt{F_T / \mu} = \sqrt{mg / \mu}$ (Równanie 16.7). Symetryczne warunki brzegowe (na każdym końcu struny powstaje węzeł) wyznaczają możliwe częstotliwości, które pobudzają strunę do drgań. Wolno zwiększając częstotliwość od zera, otrzymujemy pierwszy mod $n = 1$, co pokazano na Rysunku 16.29. Pierwszy mod, nazywany też podstawowym

lub pierwszą harmoniczną, odpowiada fali o długości równej połowie długości fali, a zatem długość fali jest równa podwojonej odległości pomiędzy węzłami $\lambda_1 = 2L$. **Częstotliwość podstawowa** (ang. **fundamental frequency**) lub pierwsza harmoniczna wynosi:

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L},$$

gdzie prędkość fali równa się $v = \sqrt{F_T / \mu}$. Wzrost częstotliwości przy stałym naprężeniu struny prowadzi do drugiej harmonicznej, czyli $n = 2$. Ten mod odpowiada jednostkowej długości fali $\lambda_2 = L$, a częstotliwość równa się podwojonej częstotliwości podstawowej:

$$f_2 = \frac{v}{\lambda_2} = \frac{v}{L} = 2f_1.$$



Rysunek 16.29 Fale stojące powstają wzdłuż struny o długości L. Na każdym końcu powstaje węzeł. Węzły określają możliwe częstotliwości, które pobudzają strunę. W celach poglądowych amplituda drgań jest stała. Obraz fali stojącej na strunie to tzw. mod podstawowy. W warunkach laboratoryjnych możemy zmniejszyć amplitudę fali, a zwiększyć częstotliwość.

Dwa kolejne mody, tj. trzecia i czwarta harmoniczna, odpowiadają długościom fali $\lambda_3 = 2L/3$ i $\lambda_4 = 2L/4$. Są one wzbudzane przez częstotliwości $f_3 = \frac{3v}{2L} = 3f_1$ i $f_4 = \frac{4v}{2L} = 4f_1$. Częstotliwości wyższe niż f_1 nazywa się **nadtonami** (ang. **overtone**). Wyrażenia na długość fali i częstotliwość mają postać:

$$\lambda_n = \frac{2}{n}L, \quad \text{gdzie} \quad n = 1,2,3,\ldots \tag{16.15}$$

$$f_n = n\frac{v}{2L} = nf_1, \quad \text{gdzie} \quad n = 1,2,3,\ldots \tag{16.16}$$

Różne konfiguracje fali stojącej, które można utworzyć wzdłuż struny, przedstawione na Rysunku 16.29, nazywa się **modami normalnymi** (ang. **normal mode**); używa się też zwrotu **mody własne** lub **drgania własne**. Generujące je częstości to częstości normalne lub własne. Podsumowując, częstotliwość, która wytwarza pierwszy mod normalny,

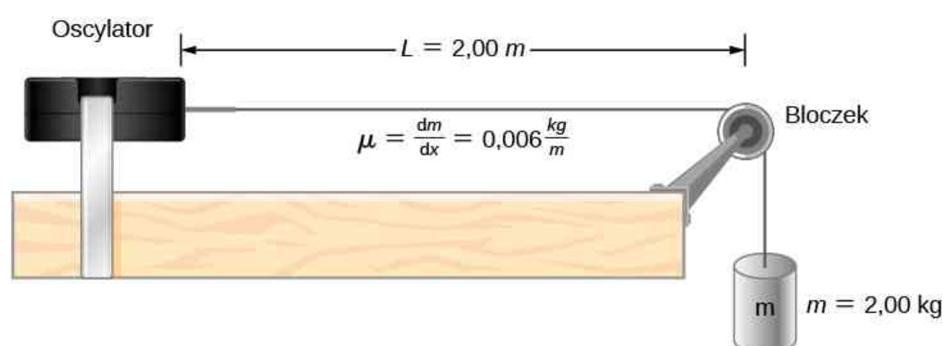
to częstotliwość podstawowa (lub pierwsza harmoniczna). Każda częstotliwość wyższa od podstawowej to nadton. Częstotliwość, która odpowiada $n = 2$, to pierwszy nadton (lub druga harmoniczna). Częstotliwość odpowiadająca $n = 3$ to drugi nadton (lub trzecia harmoniczna) itd.

Relacje przedstawione przez Równanie 16.15 i Równanie 16.16 wynikają z równania falowego dla struny, na której końcach powstają węzły lub strzałki. Kiedy na obu końcach struny są takie same warunki, wówczas mówimy o symetrycznych warunkach brzegowych.

Przykład 16.7

Fale stojące na strunie

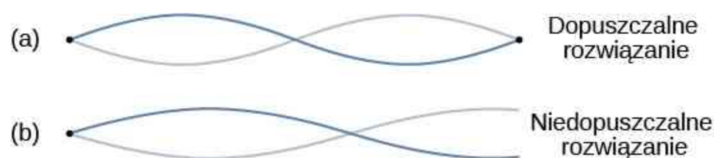
Rozważmy strunę o długości $L = 2{,}00\ \text{m}$, której jeden koniec jest połączony z oscylatorem o regulowanej częstotliwości, jak pokazano na Rysunku 16.30. Fale biegną wzdłuż struny i odbijają się w miejscu, gdzie występuje bloczek. Struna ma stałą liniową gęstość masy $\mu = 0{,}006\ \text{kg/m}$. Drugi koniec struny jest przerzucony przez bloczek o pomijalnej masie, wzdłuż którego struna porusza się bez tarcia. Koniec struny jest obciążony odważnikiem o masie 2,00 kg, który zapewnia stałe naprężenie struny. (a) Jaka jest prędkość fal wzdłuż struny? (b) Narysuj fale stojące odpowiadające trzem pierwszym modom i opisz rysunki, podając długość fali. (c) Podaj częstotliwości, które spowodują powstanie trzech pierwszych modów.



Rysunek 16.30 Struna połączona z oscylatorem o regulowanej częstotliwości.

Strategia rozwiązania

a. Prędkość fali możemy obliczyć ze wzoru $v = \sqrt{F_T / \mu}$. Naprężenie pochodzi od obciążnika na końcu struny.
b. Postać fal stojących zależy od warunków brzegowych. Na każdym końcu struny musi powstać węzeł. Pierwszy mod odpowiada połowie długości fali. Drugi obliczymy, gdy dodamy do pierwszego połowę długości fali. Jest to najprostszy sposób, aby na końcach struny powstały węzły. Przykładowo jeśli dodamy 1/4 długości fali, to na końcu struny powstanie strzałka, a wtedy warunki brzegowe nie będą spełnione. Sytuację taką przedstawia Rysunek 16.31.
c. Ponieważ prędkość fali równa się długości fali pomnożonej przez częstotliwość, to częstotliwość obliczymy jako prędkość fali podzieloną przez jej długość.



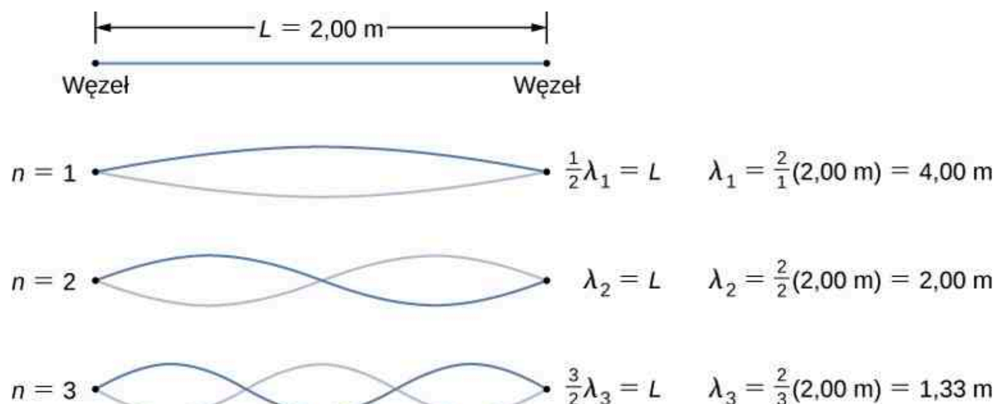
Rysunek 16.31 (a) Rysunek przedstawia drugi mod struny, który spełnia warunki brzegowe, zgodnie z którymi na obu końcach struny powstają węzły. (b) Ta sytuacja jest niedopuszczalna, gdyż nie zostałby utworzony mod normalny ze względu na niespełnienie warunków brzegowych. Na jednym końcu występuje węzeł, a na drugim strzałka.

Rozwiązanie

a. Wychodzimy ze wzoru na prędkość fali na strunie. Naprężenie obliczymy w oparciu o znaną masę odważnika. Liniowa gęstość struny jest podana. Szybkość wynosi:

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = \sqrt{\frac{mg}{\mu}} = \sqrt{\frac{2\,\text{kg} \cdot 9{,}8\,\text{m}/\text{s}^2}{0{,}006\,\text{kg}/\text{m}}} = 57{,}15\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

b. Pierwszy normalny mod, przy którym mamy węzły na obu końcach struny, odpowiada połowie długości fali. Następne dwa mody możemy obliczyć, dodając połowę długości fali.



c. Częstotliwości pierwszych trzech modów możemy obliczyć ze wzoru $f = v_w / \lambda$.

$$f_1 = \frac{v_w}{\lambda_1} = \frac{57{,}15\text{ m/s}}{4{,}00\text{ m}} = 14{,}29\text{ Hz}$$
$$f_2 = \frac{v_w}{\lambda_2} = \frac{57{,}15\text{ m/s}}{2{,}00\text{ m}} = 28{,}58\text{ Hz}$$
$$f_3 = \frac{v_w}{\lambda_3} = \frac{57{,}15\text{ m/s}}{1{,}333\text{ m}} = 42{,}87\text{ Hz}$$

Znaczenie

Trzy mody w tym przykładzie mogły powstać dzięki temu, że utrzymywano stałe naprężenie struny, a częstotliwość drgań można było zmieniać. Stałe naprężenie struny powoduje, że fala rozchodzi się ze stałą prędkością. Takie same mody moglibyśmy utworzyć, utrzymując stałą częstotliwość drgań, a zmieniając prędkość fali (przez zmianę masy odważnika).



Wykorzystaj symulację (https://openstaxcollege.org/l/21normalmodes) , aby zaobserwować widmo modów normalnych dla jedno- lub dwuwymiarowego układu sprzężonych oscylatorów. Możesz zmieniać liczbę odważników i warunki początkowe. Dla układu jednowymiarowego obejrzyj falę poprzeczną i podłużną.



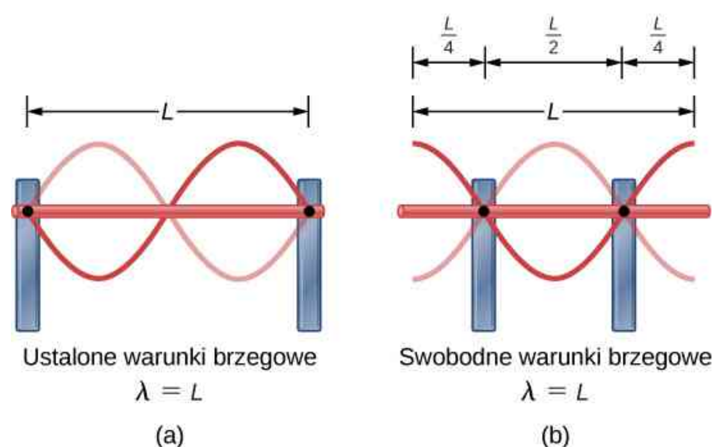
16.7 Sprawdź, czy rozumiesz. Wzory na długość fali i częstotliwość modów fali, które można utworzyć na strunie, mają postać:

$$\lambda_n = \frac{2}{n}L, \quad \text{gdzie} \quad n = 1{,}2, 3, \ldots, \quad \text{oraz}$$
$$f_n = n\frac{v}{2L} = nf_1, \quad \text{gdzie} \quad n = 1{,}2, 3, \ldots$$

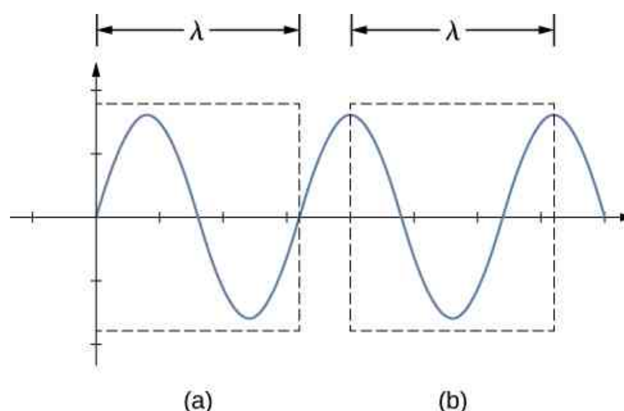
Wzory te zostały wyprowadzone przy założeniu, że na obu końcach strun występują symetryczne warunki brzegowe. Powyższe mody zostały otrzymane dla dwóch identycznych fal, ale biegnących w przeciwnych kierunkach, wzdłuż odcinka o długości L, na którego obu końcach powstają węzły. Czy te wzory są prawdziwe dla sytuacji, gdy na obu końcach odcinka powstają strzałki? Omów postać modów normalnych dla ośrodka o swobodnych warunkach brzegowych. Nie przejmuj się, jeśli w tej chwili nie jesteś w stanie wyobrazić sobie takiego ośrodka, rozważ jedynie dwie fale sinusoidalne wzdłuż odcinka o długości L, na którego końcach tworzą się strzałki.

Swobodne warunki brzegowe, które omówiliśmy w ostatniej sekcji mogą być trudne do wyobrażenia. Jak może wyglądać taki układ, którego jeden koniec jest swobodny i może wykonywać drgania? Na Rysunku 16.32 pokazano dwie

możliwe konfiguracje metalowego pręta (czerwona linia) podpartego w dwóch punktach (podparcia narysowano na niebiesko). Na Rysunku 16.32 (a) pręt jest podparty na obu końcach. Mówimy tu o ustalonych warunkach brzegowych. Przy pewnych częstotliwościach pręt można wprawić w rezonans. Powstanie fala stojąca o długości równej długości pręta, a na obu końcach pręta powstaną węzły. Na Rysunku 16.32 (b) pręt jest podparty w punktach, odległych od każdego końca o 1/4 długości pręta. Na obu końcach pręta występują swobodne warunki brzegowe. Przy pewnych częstotliwościach pręt wpada w rezonans, powstaje fala stojąca o długości równej długości pręta, a na obu końcach pręta powstają strzałki. Jeśli nie wiesz, jak zmierzyć długość fali, przypomnij sobie, że mierzy się ją pomiędzy dwoma najbliższymi, identycznymi punktami (Rysunek 16.33).



Rysunek 16.32 (a) Pręt metalowy o długości L (czerwony) jest zamocowany na obu końcach (punkty podparcia są zaznaczone niebiesko) na obu końcach. Gdy pręt zostaje pobudzony, to przy pewnych częstotliwościach zacznie rezonować. Długość powstałej fali, będzie równa długości pręta a na obu jego końcach utworzone zostaną węzły. (b) Ten sam metalowy pręt o długości L (czerwony) został podparty w punktach oddalonych od każdego końca o 1/4 jego długości. Przy odpowiednich częstotliwościach pręt wpada w rezonans. Powstała w jego wyniku fala stojąca ma długość równą długości pręta, a na obu jego końcach powstają strzałki.



Rysunek 16.33 Długość fali można zmierzyć pomiędzy dwoma identycznymi punktami. Dla fali na strunie oznacza to punkty o tych samych wychyleniach i nachyleniach. (a) Długość fali zmierzono pomiędzy dwoma najbliższymi punktami o zerowych wychyleniach, nachylenie jest dodatnie i przyjmuje wartość maksymalną. (b) Długość fali zmierzono pomiędzy dwoma identycznymi punktami, w których wychylenia są maksymalne, a nachylenia równe zero.

Zwróćmy uwagę, że zagadnienie fal stojących może ulec komplikacji. Na Rysunku 16.32 (a) pokazano mod $n = 2$ fali stojącej. Odpowiadająca mu długość fali wynosi L. W takim przypadku może też powstać mod $n = 1$ fali stojącej o długości równej $2L$. Czy możliwe jest otrzymanie modu $n = 1$ dla konfiguracji przedstawionej na Rysunku 16.32 (b)? Odpowiedź brzmi: nie. W takim przypadku muszą być spełnione dodatkowe warunki brzegowe. Ponieważ pręt jest podparty w punktach odległych o 1/4 swojej długości od każdego końca, w tych miejscach musi pojawić się węzeł, a to ogranicza możliwe mody powstałych fal stojących. Rozważ, czy inne mody fal stojących są możliwe. Zauważ przy tym, że jeśli układ został wprawiony w drgania, które nie prowadzą do rezonansu, to drgania mogą występować, ale ich amplituda jest mniejsza niż amplituda drgań rezonansowych.

W inżynierii mechanicznej stosuje się dźwięki wytwarzane przez drgające części złożonych układów mechanicznych, aby zdiagnozować problemy występujące w takich układach. Przypuśćmy, że jakaś część samochodu rezonuje z częstotliwością równą częstotliwości drgań silnika samochodu, powodując niepożądane drgania w samochodzie. Może to spowodować szybkie zniszczenie silnika. Inżynierowie rejestrują dźwięki wytwarzane przez silnik, następnie stosują procedurę zwaną analizą Fouriera, aby określić częstotliwości wytwarzanych dźwięków, co pozwala ostatecznie wykryć, która część samochodu ulega rezonansowi. Problem można rozwiązać, zmieniając skład chemiczny materiału użytego do produkcji tej części lub jej długość.

W świecie fizyki możemy znaleźć wiele innych przykładów rezonansu fal stojących. Jednym z nich może być powietrze wewnątrz rury, w instrumentach muzycznych, takich jak flety, które pobudzone do rezonansu, stają się źródłem przyjemnych dla ucha dźwięków. Zagadnieniem tym zajmiemy się w rozdziale Dźwięk.

Są też przypadki, w których **rezonans** może być przyczyną problemów. Skutki trzęsień Ziemi to przykłady działania rezonansu, powstawania fal stojących, a także wzmacniania i wygaszania interferencyjnego. Jeśli budynek zacznie drgać przez kilka sekund z częstotliwością odpowiadającą częstotliwości jego drgań własnych, doprowadzi to do rezonansu, wskutek czego budynek runie. Określone wymiary budynku mogą spełniać warunki do powstania fal stojących, przez co budowle o danej wysokości ulegają zniszczeniu, a inne pozostają nienaruszone. Ważna jest również wielkość dachu. Często hale gimnastyczne, hipermarkety i kościoły ulegają zniszczeniu w większym stopniu niż pojedyncze budynki. Dachy o większej powierzchni podparte jedynie na krawędziach ulegają rezonansowi przy częstotliwościach równych częstotliwości trzęsienia Ziemi, przez co dochodzi do ich zawalenia. Ponieważ fale sejsmiczne biegną wzdłuż powierzchni Ziemi i odbijają się od gęstszych skał, w pewnych miejscach dochodzi do wzmocnienia interferencyjnego. Dlatego też nieraz obszary położone niedaleko od epicentrum wstrząsu nie doznają większych strat, natomiast bardziej odległe zostają zburzone.

PODSUMOWANIE ROZDZIAŁU 16

KLUCZOWE POJĘCIA

częstotliwość podstawowa (ang. fundamental frequency) najniższa częstotliwość, która może wygenerować falę stojącą

długość fali (ang. wavelength) odległość pomiędzy najbliższymi identycznymi punktami fali

fala (ang. wave) zaburzenie, które rozchodzi się z miejsca powstania i przenosi energię

fala mechaniczna (ang. mechanical wave) fala, która podlega zasadom dynamiki Newtona i wymaga obecności ośrodka materialnego

fala podłużna (ang. longitudinal wave) fala, w której zaburzenie rozchodzi się równolegle do kierunku przemieszczania się fali

fala poprzeczna (ang. transverse wave) fala, w której zaburzenie rozchodzi się prostopadle do kierunku ruchu fali

fala stojąca (ang. standing wave) fala, która odbija się tam i z powrotem w ograniczonej przestrzeni

funkcja falowa (ang. wave function) model matematyczny opisujący położenie cząstki ośrodka

impuls (ang. pulse) pojedyncze zaburzenie, które przemieszcza się przez ośrodek, przenosząc energię, ale nie przenosząc masy

interferencja (ang. interference) nakładanie się dwóch lub większej liczby fal w tym samym punkcie i w tej samej chwili

liczba falowa (ang. wave number) $\frac{2\pi}{\lambda}$

liniowe równanie fali (ang. linear wave equation) równanie opisujące falę, która jest wynikiem liniowych sił sprężystości działających w ośrodku; każda funkcja będąca rozwiązaniem równania falowego opisuje falę biegnącą w kierunku zgodnym ze zwrotem osi x lub w kierunku przeciwnym do zwrotu osi x ze stałą prędkością v

mod podstawowy (ang. normal mode) najprostsza możliwa konfiguracja fali stojącej na strunie

nadton (ang. overtone) częstotliwość, która generuje falę stojącą, wyższa niż częstotliwość podstawowa

natężenie fali (ang. intensity) I moc przypadająca na jednostkę powierzchni

prędkość fali (ang. wave velocity) prędkość, z jaką przemieszcza się zaburzenie; nazywana również prędkością propagacji fali

strzałka (ang. antinode) punkt, w którym amplituda fali stojącej jest maksymalna

superpozycja (ang. superposition) zjawisko, które występuje, gdy conajmniej dwie fale spotykają się w tym samym punkcie

swobodne warunki brzegowe (ang. free boundary condition) warunki charakteryzujące się tym, że granica ośrodka może zmienić swoje położenie

szybkość fali (ang. wave speed) wartość prędkości fali

ustalone warunki brzegowe (ang. fixed boundary condition) warunki charakteryzujące się tym, że granica ośrodka nie może zmienić swojego położenia

wygaszanie interferencyjne (ang. destructive interference) zjawisko występujące, gdy dwie identyczne fale mają przeciwne fazy w tym samym punkcie, tj. gdy grzbiet jednej fali odpowiada dolinie drugiej

wzmacnianie interferencyjne (ang. constructive interference) zjawisko występujące, gdy dwie fale osiągną określony punkt dokładnie w tej samej chwili, t.j. grzbiety i doliny obu fal mają to samo położenie

węzeł (ang. node) punkt, w którym struna jest nieruchoma czyli, węzły są punktami, w których wychylenia fali stojącej wynoszą zero

NAJWAŻNIEJSZE WZORY

Prędkość fali	$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$

Liniowa gęstość masy	$\mu = \frac{\text{masa struny}}{\text{długość struny}}$
Prędkość fali lub impulsu na strunie poddanej naprężeniu	$\|v\| = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$
Prędkość fali w płynie	$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$
Fala wypadkowa powstała w wyniku superpozycji dwóch identycznych fal sinusoidalnych różniących się fazą	$y_R(x, t) = 2A \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)$
Liczba falowa	$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$
Szybkość fali	$v = \frac{\omega}{k}$
Fala okresowa	$y(x, t) = A \sin(kx \mp \omega t + \phi)$
Faza fali	$kx \mp \omega t + \phi$
Liniowe równanie fali	$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v_w^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$
Moc fali przypadająca na jedną długość fali	$P_{\text{średnia}} = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{1}{2}\mu A^2 \omega^2 \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{2}\mu A^2 \omega^2 v$
Natężenie	$I = \frac{P}{A}$
Natężenie fali kulistej	$I = \frac{P}{4\pi r^2}$
Równanie fali stojącej	$y(x, t) = 2A \sin(kx) \cos(\omega t)$
Długość fali dla symetrycznych warunków brzegowych	$\lambda_n = \frac{2}{n}L, \quad n = 1,2,3,\ldots$
Częstotliwość dla symetrycznych warunków brzegowych	$f_n = n\frac{v}{2L} = nf_1$, dla $n = 1, 2, 3, \ldots$

PODSUMOWANIE

16.1 Fale biegnące

- Fala jest zaburzeniem ośrodka, które rozchodzi się z prędkością v.
- Długość fali λ to odległość pomiędzy sąsiednimi identycznymi punktami fali. Prędkość i długość fali zależą od częstotliwości i okresu, zgodnie z równaniem $v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$.
- Fale mechaniczne wymagają obecności ośrodka i podlegają zasadom dynamiki Newtona.
- Fale elektromagnetyczne są zaburzeniami pola elektrycznego i magnetycznego i nie wymagają ośrodka.
- Fale materii mają fundamentalne znaczenie dla mechaniki kwantowej i są związane z protonami, elektronami, neutronami i innymi cząstkami występującymi w przyrodzie.
- Dla fali poprzecznej kierunek drgań cząstek ośrodka jest prostopadły do kierunku rozchodzenia się fali, natomiast w przypadku fali podłużnej kierunek rozchodzenia się fali jest równoległy do kierunku drgań cząstek ośrodka.

16.2 Matematyczny opis fali

- Fala jest drganiem (wielkości fizycznej), które rozchodzi się w ośrodku, czemu towarzyszy przenoszenie energii, które odbywa się w kierunku zgodnym z kierunkiem prędkości fali. Cząstki ośrodka mogą drgać w różny sposób, np. w górę i w dół, tam i z powrotem, na boki wokół położenia równowagi.
- Fala sinusoidalna w chwili $t = 0{,}00\ \text{s}$ może być przedstawiona jako funkcja położenia. Przykładami takich funkcji są: $y(x) = A \sin(kx + \phi)$ oraz $y(x) = A \cos(kx + \phi)$.
- Przyjmijmy, że znamy funkcję falową zależną jedynie od położenia x opisującą falę w danej chwili. Ruch impulsu lub innej fali rozchodzącej się ze stałą prędkością może być opisany tą samą funkcją, jeśli zastąpimy x wyrażeniem $x \mp vt$. Znak minus oznacza ruch w prawo, a plus - w przeciwnym kierunku.
- Funkcja falowa dana jest równaniem: $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi)$, gdzie $k = 2\pi/\lambda$ jest liczbą falową, $\omega = 2\pi/T$ jest częstością kołową, a ϕ fazą początkową.

- Fala rozchodzi się ze stałą prędkością v_w, a cząstki ośrodka drgają wokół położenia równowagi. Stałą prędkość fali możemy wyliczyć z równania $v = \lambda / T = \omega / k$.

16.3 Prędkość fali na naprężonej strunie

- Prędkość fali na strunie zależy od gęstości liniowej struny i jej naprężenia. Gęstość liniowa to masa przypadająca na jednostkę długości struny.
- Ogólnie prędkość dźwięku zależy od pierwiastka kwadratowego stosunku własności sprężystych ośrodka i jego bezwładności.
- Prędkość dźwięku w powietrzu w temperaturze $T = 20°\mathrm{C}$ wynosi w przybliżeniu $v_s = 343{,}00\ \mathrm{m/s}$.

16.4 Energia i moc fali

- Energia i moc fali są proporcjonalne do kwadratu amplitudy fali i kwadratu częstości kołowej fali.
- Uśredniona w czasie moc fali sinusoidalnej na strunie wynosi: $P_{\text{średnia}} = \frac{1}{2}\mu A^2 \omega^2 v$, gdzie μ jest liniową gęstością masy struny, A amplitudą fali, ω częstością kołową fali, a v prędkością fali.
- Natężenie definiuje się jako moc przypadającą na jednostkę powierzchni. Dla fali kulistej powierzchnia wynosi $A = 4\pi r^2$, a natężenie $I = \frac{P}{4\pi r^2}$. Gdy fala oddala się od źródła, to energia zostaje zachowana, ale natężenie się zmniejsza, gdyż powierzchnia fali wzrasta.

16.5 Interferencja fal

- Superpozycja oznacza dodawanie wychyleń fal.
- Wzmacnianie interferencyjne występuje, gdy superpozycji ulegną dwie identyczne fale, które są w zgodnych fazach.
- Osłabianie interferencyjne występuje, gdy superpozycji ulegną dwie identyczne fale, których fazy różnią się o $180°\ (\pi\ \mathrm{rad})$.
- Amplituda fali, która powstaje w wyniku superpozycji dwóch fal sinusoidalnych różniących się tylko fazą, zależy od różnicy faz.

16.6 Fale stojące i rezonans

- Fala stojąca jest wynikiem superpozycji dwóch fal. Amplituda fali stojącej zmienia się w każdym punkcie, ale fala taka się nie rozchodzi.
- Węzły to punkty fali stojącej mające amplitudę równą zero.
- Strzałki to punkty fali stojącej o maksymalnej amplitudzie.
- Mody normalne fali na strunie są możliwymi falami stojącymi. Najniższa częstotliwość, która prowadzi do powstania fali stojącej, to częstotliwość podstawowa (fundamentalna). Wyższe częstotliwości wytwarzające fale stojące, to nadtony.

PYTANIA

16.1 Fale biegnące

1. Podaj po jednym przykładzie fali poprzecznej i fali podłużnej. Jaki jest kierunek rozchodzenia się fali, a jaki drgań ośrodka w każdym z podanych przykładów?

2. Sinusoidalna fala poprzeczna ma długość 2,80 m. W czasie 0,10 s punkt o współrzędnej x leżący wzdłuż struny przemieszcza się z położenia maksymalnego $y = 0{,}03\ \mathrm{m}$ do położenia równowagi $y = 0$. Ile wynoszą: okres, częstotliwość i prędkość fali?

3. Wyjaśnij różnicę między prędkością rozchodzenia się fali a częstotliwością fali mechanicznej. Która z tych wielkości wpływa na długość fali i w jaki sposób?

4. Rozważ naprężoną sprężynę. Wzdłuż niej mogą powstawać zarówno fale poprzeczne, jak i podłużne. Jak wytworzyć każdy typ fal?

5. Rozważ falę wytworzoną na sprężynie poruszanej ręką w górę i w dół. Czy długość takiej fali zależy od drogi, którą pokonuje ręka?

6. Sinusoidalna fala poprzeczna, która powstała na naprężonej sprężynie ma okres T. Każdy odcinek sprężyny porusza się prostopadle do kierunku rozchodzenia się fali. Amplituda ruchu sprężyny wynosi A. Czy drgania każdego odcinka mają okres równy okresowi drgań fali? Jaka będzie odpowiedź na to pytanie, jeśli amplitudę fali poprzecznej podwoimy, a okres pozostawimy bez zmiany?

7. Fala elektromagnetyczna, przykładowo światło, nie wymaga ośrodka. Czy jesteś w stanie podać przykład potwierdzający to stwierdzenie?

16.2 Matematyczny opis fali

8. Jeśli poruszałbyś końcem sprężyny w górę i w dół 10 razy na sekundę, to jakie byłyby częstotliwość i okres sinusoidalnej fali utworzonej na sprężynie?

9. Gdybyś poruszał końcem naprężonej sprężyny w górę i w dół z częstotliwością f, mógłbyś utworzyć sinusoidalną falę poprzeczną wzdłuż sprężyny. Czy liczba falowa zależy od częstotliwości, z jaką potrząsałbyś sprężyną?

10. Czy prędkość drgań poprzecznych naprężonej struny, wzdłuż której rozchodzi się sinusoidalna fala poprzeczna, zależy od prędkości rozchodzenia się fali?

11. W tym rozdziale rozważaliśmy fale, których prędkość jest stała. Czy dla ośrodka można mówić o przyspieszeniu?

12. Po wrzuceniu kamyka do sadzawki możemy zauważyć powstawanie koncentrycznych fal zamiast pojedynczej fali. Czy potrafisz to wyjaśnić?

16.3 Prędkość fali na naprężonej strunie

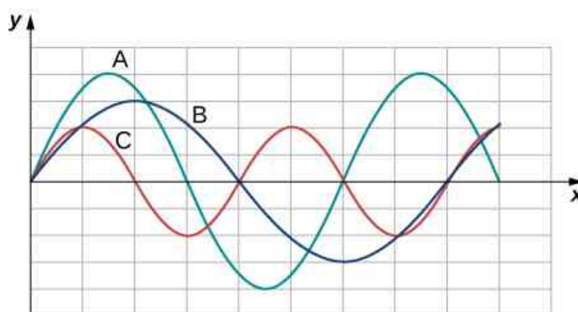
13. Ile razy wzrośnie prędkość fali na strunie, jeżeli naprężenie struny zwiększy się czterokrotnie?

14. Czy dźwięk porusza się szybciej w wodzie słonej niż w słodkiej, jeśli temperatury obu są takie same, a dźwięk biegnie po ich powierzchni?

$\rho_{\text{słodka}} \approx 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$,
$\rho_{\text{słona}} \approx 1030 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$,
$B_{\text{słodka}} = 2{,}15 \cdot 10^9 \text{ Pa}$,
$B_{\text{słodka}} = 2{,}34 \cdot 10^9 \text{ Pa}$

15. Struny gitary mają różne liniowe gęstości masy. Jeśli strunę o niższej gęstości i strunę o wyższej gęstości poddamy tym samym naprężeniom, to wzdłuż której z nich powstanie fala o większej prędkości?

16. Poniżej pokazano trzy fale, które wytworzono na strunie w różnych chwilach czasu. Naprężenia strun są stałe. (a) Uporządkuj fale pod względem ich długości. (b) Uporządkuj fale pod względem ich częstotliwości.



17. Linie trakcji elektrycznej rozmieszczone pomiędzy dwoma słupami czasami ulegają zerwaniu na skutek silnych podmuchów wiatru. Prędkość fali na takiej linii zależy od jej naprężenia. Co jest jego źródłem?

18. Dwie struny różniące się liniowymi gęstościami masy połączono w jedną strunę. Koniec struny o większej gęstości liniowej przytwierdzono do ściany. Koniec o mniejszej gęstości student trzyma w ręku. Następnie student uderzył ręką koniec struny, wytwarzając falę. Gdyby naprężenie struny było stałe w całej jej długości, to czy prędkość fali w obu fragmentach struny byłaby identyczna?

16.4 Energia i moc fali

19. Rozważ naprężoną strunę o stałej liniowej gęstości masy. Siła zewnętrzna powoduje powstanie na niej fali o znanej częstości kołowej i amplitudzie. Jeśli częstotliwość siły zewnętrznej zmniejszy się o połowę, to jak zmieni się uśredniona w czasie moc przenoszona przez tę falę?

20. Amplituda koncentrycznej fali na wodzie zmniejsza się w miarę wzrostu odległości od punktu, w którym wrzucono kamień. Wyjaśnij dlaczego.

21. W przypadku poprzecznej fali ruch struny zachodzi w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku rozchodzenia się fali. Jak to możliwe, że energia jest przenoszona wzdłuż struny?

22. Energia słoneczna ogrzewa te miejsca na kuli ziemskiej, które w ciągu dnia zwrócone są do Słońca. Dlaczego na biegunach jest zimno, podczas gdy na równiku jest ciepło?

23. Natężenie fali kulistej zmniejsza się w miarę oddalania się jej od źródła. Jeśli w pobliżu źródła natężenie wynosi I_0, to w jakiej odległości od źródła fala będzie miała natężenie 9 razy mniejsze?

16.5 Interferencja fal

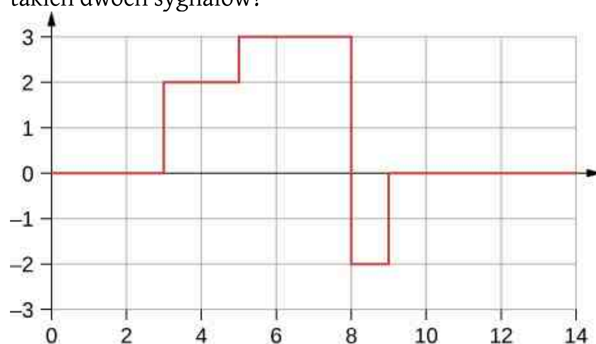
24. Fala padająca rozchodzi się wzdłuż struny zamocowanej do ściany z prędkością v. Fala odbija się od końca struny. Opisz falę odbitą.

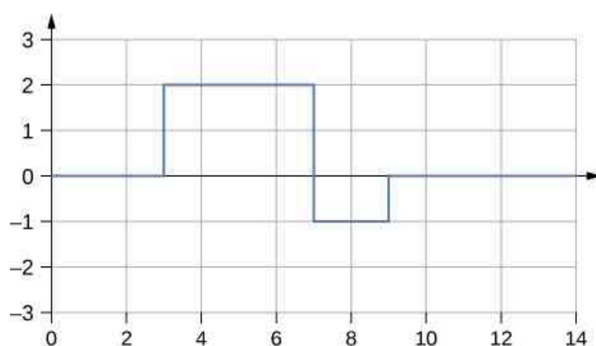
25. Struna o długości 2,00 m i liniowej gęstości masy

$\mu = 0{,}006\ \text{kg/m}$ jest połączona z końcem struny o długości 2,00 m i liniowej gęstości masy $\mu = 0{,}012\ \text{kg/m}$. Koniec struny o wyższej gęstości przytwierdzono do ściany, natomiast swobodny koniec struny o niższej liniowej gęstości masy student trzyma w ręku w taki sposób, by naprężenie obu strun było takie samo. Opisz zjawiska zachodzące na granicy obu strun w przypadku gdy student wytworzył impuls wzdłuż struny.

26. Dwóch studentów trzyma końce długiej struny. Każdy z nich wytwarza falę sinusoidalną na swoim końcu. Fale poruszają się w przeciwnych kierunkach. Jak będzie wyglądała fala, która jest wynikiem nałożenia się obu fal w punkcie odpowiadającym połowie długości struny.

27. Wiele zagadnień omawianych w tym rozdziale może mieć zastosowanie do fal innych niż mechaniczne. W elektronice mamy do czynienia z falami przedstawionymi na poniższym rysunku. Taka fala może zostać utworzona przez urządzenie zwane konwerterem analogowo-cyfrowym, które przekształca ciągły sygnał napięcia na sygnał dyskretny. Jaki będzie wynik superpozycji takich dwóch sygnałów?





28. Każdy z dwóch końców struny o stałej liniowej gęstości masy jest trzymany przez studenta. Naprężenie struny jest stałe. Każdy student wytwarza falę poprzez rozhuśtanie struny. (a) Czy jest możliwe, aby fale miały równe prędkości? (b) Czy fale mogą mieć różne częstotliwości? (c) Czy fale mogą mieć różne długości?

16.6 Fale stojące i rezonans

29. Producent ciężarówek zauważył, że rozpora silnika przedwcześnie ulega zużyciu. Inżynier ustalił, że wpada ona w rezonans przy pewnych częstotliwościach silnika. Jakie dwie cechy rozpory można zmodyfikować, aby usunąć problem?

30. Dlaczego dachy kościołów częściej ulegają zniszczeniom podczas trzęsień Ziemi niż budynki mieszkalne?

31. Pocieranie palcem brzegu kieliszka z winem może go wprawić w rezonans. Wyjaśnij dlaczego.

32. Klimatyzatory umieszcza się czasami na dachach domów. Sporadycznie mogą one powodować, że na górnych piętrach domu słyszalne jest buczenie. Dlaczego? Jak można ograniczyć to zjawisko?

33. Rozważmy falę stojącą, opisaną równaniem $y\,(x, t) = 4{,}00\ \text{cm}\ \sin\left(3\ \text{m}^{-1} x\right) \cos\left(4\ \text{s}^{-1} t\right)$. Czy w punkcie $x = 0{,}00\ \text{m}$ powstaje węzeł czy strzałka? Jeśli fala stojąca jest opisana przez równanie $y\,(x, t) = 4{,}00\ \text{cm}\ \sin\left(3\ \text{m}^{-1} x + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(4\ \text{s}^{-1} t\right)$, to czy w punkcie $x = 0{,}00\ \text{m}$ powstanie węzeł czy strzałka?

ZADANIA

16.1 Fale biegnące

34. Burze na Bałtyku mogą powodować powstawanie fal, które przemieszczają się do wybrzeża oddalonego o 12 km. Jak długo trwa ten ruch, jeśli prędkość fali wynosi 15,0 m/s?

35. Fale w basenie przemieszczają się z prędkością 0,75 m/s. Na jednym końcu basenu stoi człowiek, który uderza ręką powierzchnię wody, obserwując falę, która biegnie do przeciwległego końca basenu, odbija się od niego i wraca po upływie 30,00 s. Ile wynosi długość basenu?

36. Powiewy wiatru tworzą na oceanie falę o długości 5,00 cm, poruszającą się z prędkością 2,00 m/s. Jaka jest jej częstotliwość?

37. Ile razy w ciągu minuty łódka kołysze się na powierzchni wody, jeśli powstała w wyniku tego fala ma

długość 40,0 m i rozchodzi się z prędkością 5,00 m/s?

38. Harcerze na obozie potrząsają mostem linowym, który właśnie przekroczyli i obserwują fale o wysokości 8,00 m. Jaka będzie prędkość rozchodzenia się fal, jeśli będą potrząsać mostem dwa razy na sekundę?

39. Jaka jest długość fali, którą wytwarzasz w basenie, uderzając rękoma z częstotliwością 2,00 Hz, jeśli fale rozchodzą się z prędkością 0,800 m/s?

40. Jaka jest długość fali sejsmicznej, która powoduje drgania o częstotliwości 10,0 Hz i przenosi się do miejsca odległego o 84,0 km w ciągu 12,0 s?

41. Fale radiowe transmitowane z prędkością $v = c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ przez sondę kosmiczną *Voyager* mają długość 0,120 m. Jaka jest ich częstotliwość?

42. Ludzkie ucho jest w stanie rozróżniać dźwięki, które dochodzą do każdego ucha z osobna z opóźnieniem 0,34 ms. (a) Przypuśćmy, że źródło dźwięku o niskiej częstotliwości znajduje się na prawo od osoby, której uszy są oddalone od siebie w przybliżeniu o 18 cm, a prędkość dźwięku wynosi ok. 340 m/s. Jak długi jest interwał czasu między chwilą, w której dźwięk dobiega do prawego ucha, a chwilą, w której dźwięk dobiega do lewego ucha? (b) Załóż, że ta sama osoba nurkuje i źródło dźwięku o niskiej częstotliwości znajduje się z prawej strony nurka. Jak długi jest interwał czasu w tym przypadku, jeśli prędkość dźwięku w wodzie wynosi 1500 m/s? (c) Co jest istotne dla interwałów czasu w obu tych sytuacjach?

43. (a) Sejsmografy dokonują pomiaru czasu wystąpienia trzęsienia Ziemi z dokładnością do 0,100 s. W celu oszacowania położenia epicentrum wstrząsu geologowie porównują czasy nadejścia fal S i P, które poruszają się z różnymi prędkościami. Jeśli fale prędkości fal S i P wynoszą odpowiednio 4,00 km/s i 7,20 km/s, to z jaką precyzją możemy obliczyć położenie epicentrum? (b) Fale sejsmiczne z wnętrza Ziemi powstające podczas detonowania bomb jądrowych mogą być użyte do zlokalizowania miejsca przeprowadzenia próby i wykrycia sprawcy naruszenia zakazu wykonywania takich testów. Oceń granice dokładności obliczeń do części (a).

44. Harcerka odbywa 10-kilometrowy marsz, żeby zdobyć odznakę. Podczas marszu zauważa klif w pewnej odległości od niej. Pragnąc obliczyć czas potrzebny na dojście do klifu i wiedząc, że prędkość dźwięku wynosi w przybliżeniu 343 m/s, krzyczy i zauważa, że echo wraca po upływie mniej więcej 2,00 s. Jeśli dziewczynka jest w stanie pokonać 1,00 km w ciągu 10 minut, to ile czasu zajmie jej dotarcie do klifu?

45. Inżynier ds. zapewnienia jakości w firmie produkującej patelnie dostał polecenie sprawdzenia jakości nowej linii patelni z powłoką zapobiegającą przywieraniu. Powłoka powinna mieć grubość 1,00 mm. Jedna z dostępnych metod polega na zmierzeniu grubości powłoki przy pomocy śruby mikrometrycznej. Jednak wymaga ona zerwania powłoki z patelni, jest zatem inwazyjna dla produktu. Inżynier zdecydował się zastosować metodę nieinwazyjną, w której generator wytwarza ultradźwięki o częstotliwości $f = 25 \text{ kHz}$. Ultradźwięki były przepuszczane przez badaną powłokę, następnie odbijały się one od powierzchni metalu i ulegały interferencji z falami biegnącymi. Mierzono czas przejścia fali przez powłokę. Długość fali ultradźwiękowej w powłoce wyniosła 0,076 m. Jaki powinien być czas przejścia fali przez powłokę, jeśli ma ona prawidłową grubość (1,00 mm)?

16.2 Matematyczny opis fali

46. Impuls może być opisany jako pojedyncze zaburzenie falowe, które przenosi się przez ośrodek. Rozważ impuls, który w chwili $t = 0{,}00 \text{ s}$ jest opisany równaniem $y(x) = \frac{6{,}00 \text{ m}^3}{x^2 + 2{,}00 \text{ m}^2}$, a którego położenie wynosi $x = 0{,}00 \text{ m}$. Impuls rozchodzi się z prędkością $v = 3{,}00 \text{ m/s}$ zgodnie ze zwrotem osi x. (a) Ile wynosi amplituda impulsu? (b) Podaj równanie impulsu jako funkcję położenia i czasu. (c) Jakie jest położenie impulsu w chwili $t = 5{,}00 \text{ s}$?

47. Fala poprzeczna na strunie jest opisana funkcją falową
$y(x, t) = 0{,}20 \text{ cm} \cdot \sin\left(2{,}00 \text{ m}^{-1} \cdot x - 3{,}00 \text{ s}^{-1} \cdot t + \frac{\pi}{16}\right)$.
Jakie jest wychylenie struny względem położenia równowagi dla $x = 4{,}00 \text{ m}$ w chwili $t = 10{,}00 \text{ s}$?

48. Rozważ funkcję falową
$y(x, t) = 3{,}00 \text{ cm} \cdot \sin\left(0{,}4 \text{ m}^{-1} \cdot x - 2{,}00 \text{ s}^{-1} \cdot t + \frac{\pi}{10}\right)$.
Podaj okres, długość, prędkość i fazę początkową tej fali.

49. Dane jest równanie impulsu:
$y(x, t) = e^{-2{,}77\left(\frac{2{,}00(x - 2{,}00 \text{ m/s}(t))}{5{,}00 \text{ m}}\right)^2}$. Korzystając z arkusza kalkulacyjnego, narysuj wykres wychylenia ośrodka y w funkcji położenia x. Przedstaw zależności (na tym samym wykresie) dla chwil czasu $t = 0{,}00 \text{ s}$ oraz $t = 3{,}00 \text{ s}$. Jakie będzie położenie impulsu w chwili $t = 3{,}00 \text{ s}$?

50. W chwili $t = 0{,}00 \text{ s}$ fala jest opisana funkcją falową, która zależy od położenia. Równanie ma postać: $y(x) = 0{,}30 \text{ m} \cdot \sin\left(6{,}28 \text{ m}^{-1} \cdot x\right)$. Fala pokonuje odcinek 4,00 m w czasie 0,50 s w kierunku zgodnym ze zwrotem osi x. Napisz równanie falowe jako funkcję położenia i czasu.

51. Fala jest opisana funkcją
$y(x, t) = 0{,}25 \text{ m} \cdot \sin\left(0{,}30 \text{ m}^{-1} \cdot x - 0{,}90 \text{ s}^{-1} \cdot t + \frac{\pi}{3}\right)$.
Oblicz: (a) amplitudę, (b) liczbę falową, (c) częstość kołową, (d) prędkość fali, (e) fazę początkową, (f) długość fali, (g) okres fali.

52. Fala na powierzchni wody ma amplitudę 0,6 m, a odległość pomiędzy sąsiednimi dolinami fali wynosi

8,00 m. Fala rozchodzi się z prędkością 1,5 m/s w kierunku zgodnym ze zwrotem osi x. W chwili czasu $t = 0$ wychylenie wynosi zero, a v_y jest dodatnie. (a) Zakładając, że jest to fala sinusoidalna, podaj postać równania fali. (b) W arkuszu kalkulacyjnym narysuj przebieg fali dla chwil czasu $t = 0{,}00\ \mathrm{s}$ oraz $t = 2{,}00\ \mathrm{s}$ na tym samym wykresie. Sprawdź, czy fala pokonuje odległość 3,00 m w czasie 2,00 s.

53. Fala jest przedstwiona funkcją falową: $y(x, t) = 0{,}30\ \mathrm{m} \cdot \sin\left[\frac{2\pi}{4{,}50\ \mathrm{m}}\left(x - 18{,}00\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t\right)\right]$. Podaj amplitudę, długość, szybkość, okres i częstotliwość tej fali.

54. Podłużna fala na strunie jest opisana funkcją falową $y(x, t) = 0{,}50\ \mathrm{cm} \cdot \sin\left(1{,}57\ \mathrm{m}^{-1} \cdot x - 6{,}28\ \mathrm{s}^{-1} \cdot t\right)$. (a) Jaka jest prędkość tej fali? (b) Jaka jest wartość maksymalnej prędkości wychyleń struny w kierunku prostopadłym do kierunku ruchu fali?

55. Pływak zauważył, że jednego dnia fale na powierzchni morza były okresowe i przypominały falę sinusoidalną. Oszacował, że pionowa odległość pomiędzy grzbietem a doliną fali wynosi około 0,45 m, a odległość pomiędzy dwoma grzbietami 1,8 m. Naliczył 12 fal w ciągu każdych 2 min. Napisz prostą funkcję falową opisującą tę falę.

56. Rozważ falę opisaną funkcją falową $y\,(x, t) = 0{,}3\ \mathrm{m}\ \sin\left(2{,}00\ \mathrm{m}^{-1} x - 628{,}00\ \mathrm{s}^{-1} t\right)$. (a) Ile grzbietów przebiegnie przez punkt, w którym stoi obserwator, w ciągu 2,00 min? (b) Jak daleko przemieści się fala w tym czasie?

57. Rozważ dwie fale opisane funkcjami falowymi $y_1\,(x, t) = 0{,}50\ \mathrm{m}\ \sin\left(\frac{2\pi}{3{,}00\ \mathrm{m}} x + \frac{2\pi}{4{,}00\ \mathrm{s}} t\right)$ i $y_2\,(x, t) = 0{,}50\ \mathrm{m}\ \sin\left(\frac{2\pi}{6{,}00\ \mathrm{m}} x - \frac{2\pi}{4.00\ \mathrm{s}} t\right)$. Podaj podobieństwa i różnice między nimi.

58. Rozważ dwie fale opisane funkcjami falowymi: $y_1\,(x, t) = 0{,}20\ \mathrm{m}\ \sin\left(\frac{2\pi}{6{,}00\ \mathrm{m}} x - \frac{2\pi}{4{,}00\ \mathrm{s}} t\right)$ oraz $y_2\,(x, t) = 0{,}20\ \mathrm{m}\ \cos\left(\frac{2\pi}{6{,}00\ \mathrm{m}} x - \frac{2\pi}{4{,}00\ \mathrm{s}} t\right)$. Podaj podobieństwa i różnice między tymi falami.

59. Prędkość fali poprzecznej na strunie wynosi 300,00 m/s, jej długość 0,50 m, a amplituda 20,00 cm. Jaki czas jest potrzebny, aby cząstka na strunie przebyła odległość 5,00 km?

16.3 Prędkość fali na naprężonej strunie

60. Fala poprzeczna rozchodzi się wzdłuż struny o długości 5,00 m z prędkością 30,00 m/s. Struna poddana jest naprężeniu 10,00 N. Ile wynosi masa struny?

61. Drut miedziany ma gęstość $\rho = 8920\ \mathrm{kg/m^3}$, jego promień wynosi 1,20 mm, a długość L. Poddano go naprężeniu 10,00 N i wzdłuż niego wytworzono falę poprzeczną. (a) Jaka jest liniowa gęstość masy drutu? (b) Jaka jest prędkość fali rozchodzącej się wzdłuż drutu?

62. Struna fortepianu ma liniową gęstość masy $\mu = 4{,}95 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg/m}$. Ile powinno wynosić naprężenie struny, aby prędkość fali wyniosła 500,00 m/s?

63. Struna o liniowej gęstości masy $\mu = 0{,}0060\ \mathrm{kg/m}$ jest przymocowana do sufitu. Do jej swobodnego końca przywiązano odważnik o masie 20 kg. Struna została uderzona i wzdłuż niej powstała fala. Oszacuj prędkość tej fali.

64. Sznur ma liniową gęstość masy $\mu = 0{,}0075\ \mathrm{kg/m}$, a jego długość wynosi 3 m. Został on szarpnięty i w ciągu 0,20 s fala dobiegła do jego końca. Jakie jest naprężenie sznura?

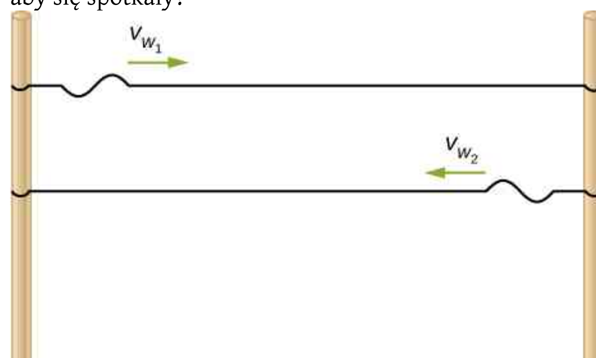
65. Struna ma długość 3,00 m, a jej masa wynosi 5,00 g. Poddano ją naprężeniu 500,00 N i wytworzono wzdłuż niej impuls. Ile czasu potrzeba, aby przemieścił się on wzdłuż struny?

66. Fala dźwiękowa rozchodzi się w azocie w warunkach normalnych. Zakładając, że gęstość $\rho = 1{,}25\ \mathrm{kg/m^3}$, a współczynnik sprężystości objętościowej wynosi $\beta = 1{,}42 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}$, oblicz prędkość dźwięku.

67. Jaka jest w przybliżeniu prędkość dźwięku w powietrzu o temperaturze $T = 28°\mathrm{C}$?

68. Fala poprzeczna rozchodzi się wzdłuż struny poddanej naprężeniu 7,00 N z prędkością 20,00 m/s. Jakie powinno być naprężenie struny, aby prędkość fali była równa 25,00 m/s?

69. Dwie struny są zamocowane pomiędzy dwoma palami, jak pokazano na poniższym rysunku. Pale są odległe o 2,00 m. Każdą strunę poddano naprężeniu 600,00 N. Struna 1 ma liniową gęstość $\mu_1 = 0{,}0025\ \mathrm{kg/m}$, a struna 2 $\mu_2 = 0{,}0035\ \mathrm{kg/m}$. Na końcach z każdej strony generowane są fale poprzeczne, tak jak pokazano na rysunku. Ile czasu musi upłynąć, aby się spotkały?

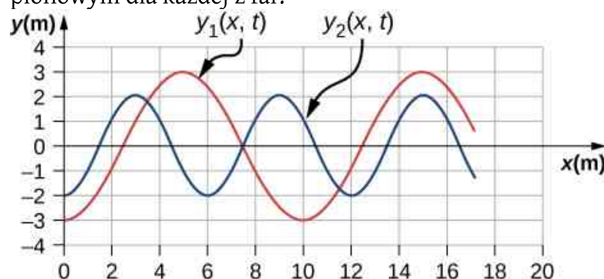


70. Dwie struny zamocowano do dwóch pali, jak poka-

zano na rysunku powyżej. Odległość między palami wynosi 2,00 m. Gęstość liniowa każdej struny wynosi $\mu_1 = 0{,}0025$ kg/m, naprężenie struny 1 wynosi 600,00 N, a struny 2 700,00 N. Fale poprzeczne są generowane na obu końcach strun, jak pokazano na rysunku. Ile potrzeba czasu, aby się spotkały?

71. Dźwięk e[1] fortepianu ma częstotliwość $f = 393{,}88\ \mathrm{Hz}$. Jaka będzie prędkość fali na strunie i jej długość, jeśli struna o liniowej gęstości masy $\mu = 0{,}012\ \mathrm{kg/m}$ zostanie poddana sile naciągu o wartości 1000,00 N?

72. Dwie fale poprzeczne poruszają się wzdłuż struny. Prędkość każdej z nich wynosi $v = 30{,}00\ \mathrm{m/s}$. Wykres wychylenia w funkcji położenia dla chwili czasu $t = 0{,}00\ \mathrm{s}$ przedstawiono na poniższym rysunku. (a) Ile wynoszą długości tych fal? (b) Ile wynoszą ich częstotliwości? (c) Jaka jest maksymalna prędkość w kierunku pionowym dla każdej z fal?



73. Fala sinusoidalna rozchodzi się wzdłuż struny o liniowej gęstości masy $\mu = 0{,}060\ \mathrm{kg/m}$. Maksymalna prędkość fali w kierunku pionowym to $v_{y\ max} = 0{,}30\ \mathrm{cm/s}$. Fala jest opisana rozwiązaniem równania falowego $y(x, t) = A \sin\left(6{,}00\ \mathrm{m}^{-1} x - 24{,}00\ \mathrm{s}^{-1} t\right)$. (a) Jaka jest amplituda fali? (b) Jakie jest naprężenie struny?

74. Prędkość fali poprzecznej na strunie wynosi $v = 60{,}00\ \mathrm{m/s}$, natomiast naciąg struny wynosi $F_T = 100{,}00\ \mathrm{N}$. Jakie powinno być naprężenie struny, by prędkość fali wzrosła do $v = 120{,}00\ \mathrm{m/s}$?

16.4 Energia i moc fali

75. Struna o długości 5 m i masie 90 g jest poddana naprężeniu 100 N. Wzdłuż niej rozchodzi się fala, którą możemy opisać równaniem:
$y(x, t) = 0{,}01\ \mathrm{m} \cdot \sin(0{,}40\ \mathrm{m}^{-1} \cdot x - 1170{,}12\ \mathrm{s}^{-1} \cdot t)$.
Jaka moc przypada na jednostkę długości fali?

76. Ultradźwięk o natężeniu $1{,}5 \cdot 10^2\ \mathrm{W/m^2}$ jest wytwarzany przez głowicę ultrasonografu, za pomocą którego możemy dokonać obrazowania prostokątnego fragmentu ciała ludzkiego o wymiarach 3,00 cm na 5,0 cm. Jaka jest moc wyjściowa ultradźwięku?

77. Głośnik niskiej częstotliwości ma powierzchnię $A = 0{,}05\ \mathrm{m^2}$ i wytwarza 1 W mocy akustycznej. (a) Jakie jest natężenie dźwięku w jego pobliżu? (b) Jeśli od głośnika dźwięki rozchodzą się równomiernie we wszystkich kierunkach, to w jakiej odległości od niego słyszalny będzie dźwięk o natężeniu $0{,}1\ \mathrm{W/m^2}$?

78. Ile razy należy zwiększyć amplitudę fali, żeby zwiększyć jej natężenie 50 razy?

79. Do pomiaru natężenia światła słonecznego używa się miernika, którego powierzchnia $100\ \mathrm{cm^2}$ rejestruje promieniowanie o mocy 6,50 W. Podaj zarejestrowane natężenie w $(\mathrm{W/m^2})$.

80. Energia słoneczna, która dociera do powierzchni Ziemi, ma natężenie $1400\ \mathrm{W/m^2}$. Jak dużo czasu potrzeba, aby dostarczyć energię $1{,}8 \cdot 10^9\ \mathrm{J}$ na powierzchnię $1{,}00\ \mathrm{m^2}$?

81. Przypuśćmy, że dysponujemy urządzeniem, które odzyskuje moc z fal morskich. Moc ta jest proporcjonalna do natężenia fal. Jeśli dziennie urządzenie wytwarza 10,0 kW mocy z fal o wysokości 1,20 m, to ile wytworzy mocy z fali o wysokości 0,600 m?

82. Panele słoneczne przetwarzają energię słoneczną na energię elektryczną z wydajności 10,0 %. Jeśli średnie natężenie światła słonecznego w dzień wynosi $70{,}00\ \mathrm{W/m^2}$, to jaką powierzchnię powinien mieć panel, żeby wytworzyć energię elektryczną o mocy 100 W? (b) Ile wynosi maksymalny koszt paneli, jeśli inwestycja musi się zwrócić po 2 latach, a korzysta się z nich 10 h dziennie? Załóż, że 1 kW energii kosztuje 50 groszy.

83. Dźwięk dochodzący do mikrofonu tworzy na ekranie oscyloskopu sinusoidę. Jeśli natężenie oryginalnego dźwięku, wynoszące $2{,}00 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{W/m^2}$, uległo wzmocnieniu, a amplituda wzmocnionego dźwięku wzrosła o $30{,}0\%$, to jakie jest natężenie wzmocnionego dźwięku?

84. Struna ma masę 0,30 kg i długość 4,00 m. Jeśli jej naprężenie wynosi 50,00 N, a sinusoidalna fala indukowana na strunie ma amplitudę 2,00 cm, to jaka jest jej częstotliwość, jeśli średnia moc wynosi 100,00 W?

85. Wzdłuż struny $(\mu = 0{,}05\ \mathrm{kg/m})$ została wygenerowana fala sinusoidalna. Równanie falowe dla takiej fali ma postać: $y(x, t) = A \sin\left(20{,}93\ \mathrm{m}^{-1} x - \omega t\right)$. Jaka jest częstotliwość i amplituda fali?

86. Struna została poddana naprężeniu F_T. Energia jest przenoszona przez falę na strunie w tempie P_1, a częstotliwość tej fali wynosi f_1. Jak zmieni się tempo przenoszenia energii P_2 w porównaniu z P_1, jeśli naprężenie wzrośnie dwukrotnie?

87. Uderzono kamerton o częstotliwości 250 Hz. Natężenie dźwięku wynosi I_1 w odległości 1,00 m od źródła. (a) Ile wynosi natężenie dźwięku w odległości 4,00 m od źródła? (b) Jak daleko od kamertonu słychać dźwięk o natężeniu równym 1/10 natężenia dźwięku w punkcie

położonym bardzo blisko źródła?

88. Głośnik jest zasilany napięciem $U = 120{,}00\text{ V}$, a płynący w nim prąd ma natężenie $I = 10{,}00\text{ A}$. Moc wynosi $P = IU$. Aby przetestować głośnik, na jego wejście podano sygnał o przebiegu sinusoidalnym. Zakładając, że dźwięk jest falą kulistą i cała energia dostarczona do głośnika zostaje zamieniona na energię akustyczną, oblicz, jak daleko od głośnika słychać dźwięk o natężeniu $3{,}82\text{ W/m}^2$?

89. Energia fali, która powstała na powierzchni sadzawki, jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy. W przypadku, gdy odległość fali od źródła wynosi 6,00 m, amplituda fali wynosi 0,1 cm. Ile wynosiłaby amplituda dla odległości fali od źródła równej 2,00 m?

16.5 Interferencja fal

90. Rozważ dwie fale sinusoidalne biegnące wzdłuż struny, opisane jako: $y_1\,(x,t) = 0{,}3\text{ m}\sin\left(4\text{ m}^{-1}x + 3\text{ s}^{-1}t\right)$ i $y_2\,(x,t) = 0{,}6\text{ m}\sin\left(8\text{ m}^{-1}x - 6\text{ s}^{-1}t\right)$. Jakie jest wychylenie fali wypadkowej utworzonej w wyniku interferencji tych dwóch fal w punkcie $x = 0{,}5\text{ m}$ w chwili $t = 0{,}2\text{ s}$?

91. Rozważ dwie fale sinusoidalne biegnące wzdłuż struny, opisane przez równania: $y_1\,(x,t) = 0{,}3\text{ m}\sin\left(4\text{ m}^{-1}x + 3\text{ s}^{-1}t + \frac{\pi}{3}\right)$ i $y_2\,(x,t) = 0{,}6\text{ m}\sin\left(8\text{ m}^{-1}x - 6\text{ s}^{-1}t\right)$. Jakie jest wychylenie fali wypadkowej utworzonej w wyniku interferencji tych dwóch fal w punkcie $x = 1{,}0\text{ m}$ w chwili $t = 3{,}0\text{ s}$?

92. Rozważ dwie fale sinusoidalne biegnące wzdłuż struny, opisane jako: $y_1\,(x,t) = 0{,}3\text{ m}\sin\left(4\text{ m}^{-1}x - 3\text{ s}^{-1}t\right)$ i $y_2\,(x,t) = 0{,}3\text{ m}\sin\left(4\text{ m}^{-1}x + 3\text{ s}^{-1}t\right)$. Podaj funkcję falową fali wypadkowej. (Wskazówka: Skorzystaj z tożsamości $\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$.)

93. Dwie fale sinusoidalne biegną w tym samym ośrodku w tych samych kierunkach. Ich amplitudy wynoszą 3,00 cm, długości 5,20 m, a okresy 6,52 s. Faza początkowa jednej z nich wynosi ϕ. Jaka jest faza fali wyjściowej o amplitudzie 5,00 cm? (Wskazówka: Skorzystaj z tożsamości $\sin u + \sin v = 2\sin\left(\frac{u+v}{2}\right)\cos\left(\frac{u-v}{2}\right)$.)

94. Dwie fale sinusoidalne biegną w tym samym ośrodku zgodnie ze zwrotem osi x. Obie mają amplitudy równe 6,00 cm, długości 4,3 m, okresy 6,00 s, a faza początkowa jednej z nich wynosi $\phi = 0{,}50\text{ rad}$. Jakie jest wychylenie fali wypadkowej w chwili $t = 3{,}15\text{ s}$ i w punkcie $x = 0{,}45\text{ m}$?

95. Dwie fale sinusoidalne biegną przez ośrodek wzdłuż osi x. Obie mają amplitudy równe 7,00 cm, liczby falowe $k = 3{,}00\text{ m}^{-1}$, częstości kołowe $\omega = 2{,}50\text{ s}^{-1}$ i okresy równe 6,00 s, a jedna ma fazę początkową równą $\phi = \pi/12\text{ rad}$. Jakie jest wychylenie fali wypadkowej w chwili $t = 2{,}00\text{ s}$ i położeniu $x = 0{,}53\text{ m}$?

96. Rozważ dwie fale, rozchodzące się w tym samym ośrodku: $y_1\,(x,t)$ i $y_2\,(x,t)$. Różnią się one jedynie fazą. (a) Podaj wartość fazy w radianach, jeśli amplituda fali wypadkowej stanowi 1,75 amplitudy fal składowych. (b) Podaj wartość fazy w stopniach. (c) Wyraź fazę poprzez długości składowych fal.

97. Dwie fale sinusoidalne, które różnią się jedynie fazą, biegną w tym samym kierunku. Równanie falowe fali wypadkowej ma postać $y_R\,(x,t) = 0{,}70\text{ m}\sin\left(3{,}00\text{ m}^{-1}x - 6{,}28\text{ s}^{-1}t + \pi/16\text{ rad}\right)$. Ile wynoszą: częstości kołowe, liczby falowe, amplitudy i fazy fal składowych?

98. Dwie fale sinusoidalne, które różnią się jedynie fazą, biegną w tym samym kierunku. Równanie falowe fali wypadkowej wynosi $y_R\,(x,t) = 0{,}35\text{ cm}\sin\left(6{,}28\text{ m}^{-1}x - 1{,}57\text{ s}^{-1}t + \frac{\pi}{4}\right)$. Ile wynoszą: okresy, długości, amplitudy i fazy poszczególnych fal?

99. Rozważ dwie funkcje falowe: $y_1\,(x,t) = 4{,}00\text{ m}\sin\left(\pi\text{ m}^{-1}x - \pi\text{ s}^{-1}t\right)$ i $y_2\,(x,t) = 4{,}00\text{ m}\sin\left(\pi\text{ m}^{-1}x - \pi\text{ s}^{-1}t + \frac{\pi}{3}\right)$. (a) Korzystając z arkusza kalkulacyjnego, narysuj wykresy funkcji falowych oraz funkcji falowej, która jest wynikiem superpozycji tych dwóch funkcji falowych w funkcji położenia $(0{,}00 \le x \le 6{,}00\text{ m})$ dla chwili czasu $t = 0{,}00\text{ s}$. (b) Ile wynoszą długości fali i amplitudy fal pierwotnych? (c) Ile wynoszą długość i amplituda fali wypadkowej?

100. Rozważ dwie funkcje falowe: $y_2\,(x,t) = 2{,}00\text{ m}\sin\left(\frac{\pi}{2}\text{m}^{-1}x - \frac{\pi}{3}\text{s}^{-1}t\right)$ i $y_2\,(x,t) = 2{,}00\text{ m}\sin\left(\frac{\pi}{2}\text{m}^{-1}x - \frac{\pi}{3}\text{s}^{-1}t + \frac{\pi}{6}\right)$. (a) Sprawdź, czy $y_R = 2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)$ jest rozwiązaniem dla fali, która powstała w wyniku superpozycji tych dwóch fal. Utwórz tabelkę, której kolumny odpowiadają x, y_1, y_2, $y_1 + y_2$ i $y_R = 2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)$. Wylicz wartości dla x zmieniającego się w zakresie od 0 do 12 m, którymi posłużysz się do narysowania wykresów dla wszystkich czterech fal.

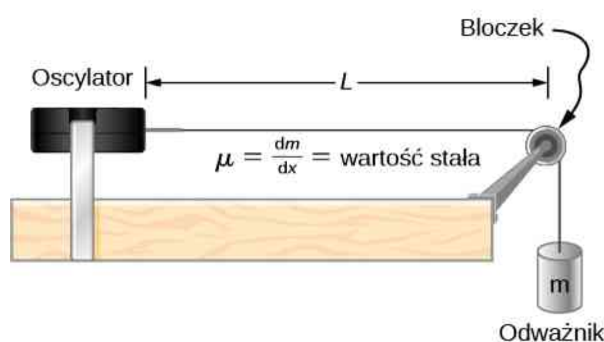
101. Rozważ dwie funkcje falowe, które różnią się jedynie fazą: $y_1\,(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$ i $y_2\,(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \phi)$. Korzystając z tożsamości trygonometrycznych $\cos u + \cos v = 2\cos\left(\frac{u-v}{2}\right)\cos\left(\frac{u+v}{2}\right)$ oraz $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$, oblicz równanie falowe fali, która jest wynikiem ich superpozycji. Czy równanie falowe, które uzyskałeś, jest dla ciebie zaskoczeniem?

16.6 Fale stojące i rezonans

102. Fala biegnąca wzdłuż sprężynki Slinky, którą rozciągnięto na 4 m przebiega odległość tam i z powrotem w ciągu 2,4 s. (a) Jaka jest prędkość fali? (b) Przy pomocy tej samej sprężynki rozciągniętej na tę sama długość wytworzono falę stojącą, która ma trzy strzałki i cztery węzły. Jaka jest częstotliwość drgań sprężynki?

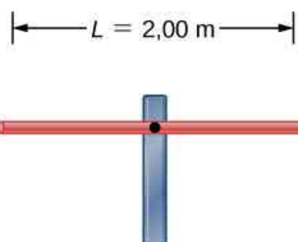
103. Struna o długości 2 m jest zamocowana z dwóch stron i poddana takiemu naprężeniu, że wzdłuż niej biegnie fala z prędkością równą $v_w = 50{,}00\ \text{m/s}$. Ile wynosi długość fali i częstotliwości trzech pierwszych modów normalnych?

104. Rozważ układ eksperymentalny pokazany na rysunku poniżej. Długość odcinka struny między oscylaorem a bloczkiem wynosi $L = 1{,}00\ \text{m}$. Liniowa gęstość masy struny to $\mu = 0{,}006\ \text{kg/m}$. Oscylator może wykonywać drgania o dowolnej częstotliwości. Masa odważnika wynosi 2,00 kg. (a) Ile wynosi długość fali i częstotliwość modu $n = 6$? (b) Struna powoduje drgania powietrza wokół siebie. Jaka jest długość fali dźwięku, jeśli prędkość dźwięku wynosi $v_s = 343{,}00\ \text{m/s}$?



105. Kabel o liniowej gęstości masy $\mu = 0{,}2\ \text{kg/m}$ rozpięto między dwoma słupami. Jego naprężenie wynosi 500,00 N. Odległość między słupami to 20 m. Wiatr wprawił kabel w rezonans i wzdłuż niego powstała fala stojąca o długości 4,5 m. Temperatura powietrza wynosi $T = 20°\text{C}$. Ile wynosi częstotliwość i długość podmuchu?

106. Rozważ pręt o długości L, który zamocowano na środku. W miejscu zamocowania musi powstać węzeł, jak pokazano poniżej. Narysuj dwa pierwsze mody normalne dla pręta wykonującego drgania rezonansowe. Oblicz długości fal i częstotliwości, które powodują rezonans pręta.



107. Rozważ dwie funkcje falowe $y\,(x,t) = 0{,}30\ \text{cm}\sin\left(3\ \text{m}^{-1}x - 4\ \text{s}^{-1}t\right)$ i $y\,(x,t) = 0{,}30\ \text{cm}\sin\left(3\ \text{m}^{-1}x + 4\ \text{s}^{-1}t\right)$. Napisz funkcję falową dla fali stojącej, która jest ich wypadkową.

108. Struna o długości 2,40 m i masie 7,50 g poddana jest naprężeniu 160 N. Oba jej końce są zamocowane, a ona sama została wprawiona w drgania. (a) Jaka jest prędkość fali na strunie? Struna została wprawiona w drgania rezonansowe z taką częstotliwością, przy której utworzona została fala stojąca o długości 1,20 m. (b) Jaka jest częstotliwość drgań wymuszających, które wprawiły strunę w rezonans?

109. Struna o gęstości liniowej masy 0,0062 kg/m i długości 3,00 m została wprawiona w drgania rezonansowe o modzie $n = 100$. Naprężenie struny wynosi 20,00 N. Ile wynosi długość i częstotliwość fali?

110. Struna o liniowej gęstości masy 0,0075 kg/m i długości 6,00 m została wprawiona w drgania rezonansowe o modzie $n = 4$ przez drgania wymuszające o częstotliwości 100,00 Hz. Jakie jest naprężenie struny?

111. Dwie fale sinusoidalne o identycznych długościach i amplitudach biegną w przeciwnych kierunkach wzdłuż struny, tworząc falę stojącą. Liniowa gęstość masy struny wynosi $\mu = 0{,}075\ \text{kg/m}$, a naprężenie $F_T = 5{,}00\ \text{N}$. Interwał czasowy pomiędzy wygaszeniami interferencyjnymi to $\Delta t = 0{,}13\ \text{s}$. Ile wynosi długość fali?

112. Struna zamocowana na obu końcach ma długość 5,00 m i masę 0,15 kg. Naprężenie struny wynosi 90 N. Struna wykonuje drgania tak, że powstaje fala stojąca o częstotliwości podstawowej. (a) Jaka jest prędkość fali na strunie? (b) Podaj długość fali stojącej. (c) Ile wynosi okres fali stojącej?

113. Jeden koniec struny jest zamocowany. Masa struny wynosi 0,0090 kg, a jej długość 3,00 m. Poddano ją naprężeniu 200,00 N. Struna jest wprawiana w drgania przez źródło o regulowanej częstotliwości tak, aby wzdłuż niej mogły powstawać fale stojące. Podaj długości fal i częstotliwości dla czterech pierwszych modów fali stojącej.

114. Częstotliwości dwóch kolejnych modów fali na strunie wynoszą 258,36 Hz i 301,42 Hz. Jaka jest kolejna częstotliwość, większa niż 100,00 Hz, przy której powstaje fala stojąca?

115. Struna o długości 3,50 m i liniowej gęstości masy $\mu = 0{,}005\ \text{kg/m}$ jest zamocowana na obu końcach i poddana naprężeniu 90,00 N. Wzdłuż niej powstała fala stojąca mająca 6 węzłów i 5 strzałek. Ile wynoszą prędkość, długość, częstotliwość i okres fali stojącej?

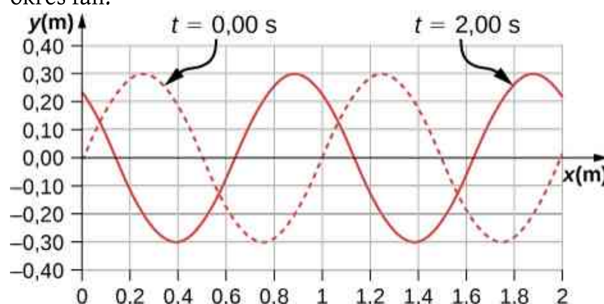
116. Falę sinusoidalną wytworzono wzdłuż struny o długości 1,5 m. Oba jej końce są zamocowane. Fala odbija

się od punktów zamocowania. Amplituda wynosi 4,00 cm, a prędkość rozchodzenia się 175 m/s. Wzdłuż struny powstaje mod rezonansowy $n = 6$. Napisz równanie fali stojącej dla tego przypadku.

ZADANIA DODATKOWE

117. Ultrasonograf stosowany w medycynie wykorzystuje fale dźwiękowe o częstotliwościach niesłyszalnych dla człowieka. Jeśli częstotliwość wytwarzanego przez niego dźwięku wynosi $f = 30$ kHz, to jaka jest długość fali powstającej w kości, jeśli prędkość dźwięku w kości wynosi $v = 3000$ m/s?

118. Poniżej pokazano wykres funkcji falowej dla $t = 0{,}00$ s i $t = 2{,}00$ s. Linia przerywana prezentuje funkcję falową w chwili $t = 0{,}00$ s, a linia ciągła w chwili $t = 2{,}00$ s. Oblicz amplitudę, długość, prędkość i okres fali.



119. Prędkość światła w powietrzu wynosi w przybliżeniu $v = 3{,}00 \cdot 10^8$ m/s, a w szkle $v = 2{,}00 \cdot 10^8$ m/s. Czerwone światło laserowe o długości $\lambda = 633{,}00$ nm pada na powierzchnię szkła, częściowo przechodząc do niego. Częstotliwość światła w powietrzu jest taka sama jak w szkle. (a) Jaka jest częstotliwość światła? (b) Ile wynosi długość fali światła w szkle?

120. Stacja radiowa nadaje fale radiowe o częstotliwości 101,7 MHz. Przemieszczają się one w powietrzu w przybliżeniu z prędkością równą prędkości światła w próżni. Ile wynosi długość fali radiowej?

121. Plażowicz wchodzi do wody i zauważa, że sześć grzbietów periodycznej fali przepływa w ciągu 1 min. Odległość między grzbietami wynosi 16,00 m. Jaka jest długość fali, częstotliwość, okres i prędkość?

122. Drgania kamertonu powodują powstanie dźwięku o częstotliwości 512 Hz. Prędkość dźwięku w powietrzu wynosi $v = 343{,}00$ m/s w temperaturze $20{,}00°C$. Ile wynosi długość fali dźwiękowej ?

123. Motorówka płynie w poprzek jeziora z prędkością $v_b = 15{,}00$ m/s. Zawraca co 0,50 s, ponieważ płynie zawsze w kierunku przeciwnym do kierunku rozchodzenia się fali. Ile wynoszą prędkość i długość fali?

124. Wykorzystaj liniowe równanie falowe dla pokazania, że prędkość fali opisanej funkcją falową $y(x, t) = 0{,}20 \text{ m} \sin\left(3{,}00 \text{ m}^{-1} x + 6{,}00 \text{ s}^{-1} t\right)$ wynosi $v = 2{,}00$ m/s. Ile wynosi długość i prędkość fali?

125. Dane są funkcje falowe $y_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$ i $y_2(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi)$, gdzie $\phi \neq \frac{\pi}{2}$. Wykaż, że $y_1(x, t) + y_2(x, t)$ jest rozwiązaniem liniowego równania falowego, gdzie $v = \omega / k$.

126. Fala poprzeczna na strunie jest opisana równaniem falowym $y(x, t) = 0{,}10 \text{ m} \sin\left(0{,}15 \text{ m}^{-1} x + 1{,}50 \text{ s}^{-1} t + 0{,}20\right)$. (a) Oblicz prędkość fali. (b) Określ położenie na osi y, prędkość w kierunku prostopadłym do kierunku ruchu fali oraz przyspieszenie w kierunku prostopadłym do ruchu fali odcinka struny, którego środek zajmuje położenie $x = 0{,}40$ m w chwili $t = 5{,}00$ s.

127. Fal sinusoidalna biegnie wzdłuż naprężonej struny o liniowej gęstości masy równej $\mu = 0{,}060$ kg/m. Wartość przyspieszenia fali w kierunku pionowym wynosi $a_{y\,\max} = 0{,}90 \text{ cm/s}^2$, a amplituda 0,40 m. Struna została poddana naprężeniu równemu $F_T = 600{,}00$ N. Fala biegnie przeciwnie do zwrotu osi x. Napisz równanie fali.

128. Fala poprzeczna na strunie ($\mu = 0{,}0030$ kg/m) jest opisana równaniem $y(x, t) = 0{,}30 \text{ m} \sin\left(\frac{2\pi}{4{,}00 \text{ m}}\left(x - 16{,}00 \frac{\text{m}}{\text{s}} t\right)\right)$. Ile wynosi naprężenie struny?

129. Fala poprzeczna na poziomej strunie ($\mu = 0{,}0060$ kg/m) jest opisana równaniem $y(x, t) = 0{,}30 \text{ m} \sin\left(\frac{2\pi}{4{,}00 \text{ m}}(x - v_w t)\right)$. Strunę poddano naprężeniu 300,00 N. Jakie są: prędkość, liczba falowa i częstość kołowa fali?

130. Student wykorzystał dalmierz dźwiękowy, aby określić odległość od ściany. Urządzenie emituje fale dźwiękowe, które odbijają się od ściany i powracają. Droga tam i z powrotem jest pokonywana przez dźwięk w czasie 0,012 s. Dalmierz został skalibrowany w temperaturze pokojowej $T = 20°C$, ale temperatura podczas pomiaru wynosiła $T = 23°C$. Ile wynosi dokładność pomiaru odległości spowodowana kalibracją w takich warunkach?

131. Fala na strunie jest wytwarzana przez oscylator, który wykonuje drgania o częstotliwości 100,00 Hz i amplitudzie 1,00 cm. Urządzenie jest zasilane napięciem 12,00 V i prądem o natężeniu 0,20 A oraz pobierana moc $P = IV$. Załóż, że oscylator zamienia energię elektryczną w energię drgań z wydajnością 90%. Długość

struny wynosi 3,00 m, a jej naprężenie 60,00 N. Ile wynosi liniowa gęstość masy?

132. Fala biegnąca wzdłuż struny jest opisana równaniem falowym $y\,(x,\,t) = 3{,}00\text{ cm}\sin\left(8{,}00\text{ m}^{-1}x + 100{,}00\text{ s}^{-1}t\right)$. Strunę o liniowej gęstości masy $\mu = 0{,}008\text{ kg/m}$. poddano naprężeniu równemu 50,00 N. Jaka jest średnia moc, którą przenosi ta fala?

133. Fala poprzeczna na strunie ma długość 5,0 m, okres 0,02 s i amplitudę 1,5 cm. Średnia moc przenoszona przez tę falę wynosi 5,00 W. Ile wynosi naprężenie struny?

134. (a) Jakie jest natężenie wiązki laserowej, używanej do zniszczenia tkanki nowotworowej, jeśli $90{,}0\%$ zaabsorbowanej fali dostarcza 500 J energii do powierzchni w kształcie koła o średnicy 2,00 mm w czasie 4,00 s? (b) Porównaj to natężenie z natężeniem światła słonecznego i zastanów się nad skutkami, jakie wystąpiłyby, gdyby światło laserowe o obliczonym natężeniu wpadło do oka. Zwróć uwagę, że rozwiązanie zależy od czasu ekspozycji.

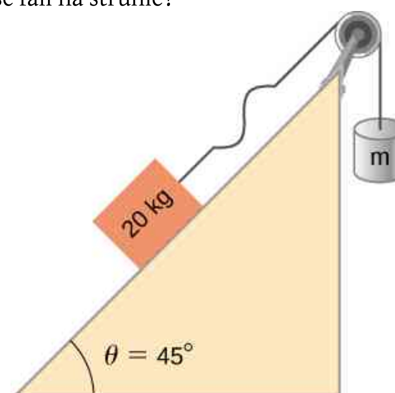
135. Rozważ dwie periodyczne funkcje falowe $y_1\,(x,\,t) = A\sin\left(kx - \omega t\right)$ i $y_2\,(xt) = A\sin\left(kx - \omega t + \phi\right)$. (a) Dla jakich wartości ϕ fala, która powstanie w wyniku ich superpozycji, będzie miała amplitudę równą $2A$? (b) Dla jakich wartości ϕ fala, która powstanie w wyniku superpozycji, będzie miała amplitudę równą zero?

136. Rozważ dwie periodyczne funkcje falowe $y_1\,(x,\,t) = A\sin\left(kx - \omega t\right)$ i $y_2\,(x,\,t) = A\cos\left(kx - \omega t + \phi\right)$. (a) Dla jakich wartości ϕ fala, która powstaje w wyniku ich superpozycji, ma amplitudę równą $2A$? (b) Dla jakich wartości ϕ amplituda fali wypadkowej będzie równa zero?

137. Dolina o wymiarach 10,00 m na 0,10 m na 0,10 m jest częściowo wypełniona wodą. Na obu jej końcach na powierzchni wody powstają fale o małych amplitudach, wytwarzane przez wiosła poruszające się prostym ruchem harmonicznym. Wychylenia fal są opisane przez równania falowe $y_1\,(x,\,t) = 0{,}3\text{ m}\sin\left(4\text{ m}^{-1}x - 3\text{ s}^{-1}t\right)$ i $y_2\,(x,\,t) = 0{,}3\text{ m}\cos\left(4\text{ m}^{-1}x + 3\text{ s}^{-1}t - \frac{\pi}{2}\right)$. Jakie jest równanie fali wypadkowej, która powstanie, gdy obie fale się spotkają, ale zanim dobiegną do brzegów doliny (należy założyć, że w dolinie są tylko dwie fale i pominąć odbicia)? Sprawdź poprawność obliczeń w arkuszu kalkulacyjnym. (Wskazówka: Skorzystaj z tożsamości $\sin\left(u \pm v\right) = \sin u\cos v \pm \cos u\sin v$ i $\cos\left(u \pm v\right) = \cos u\cos v \mp \sin u\sin v$.)

138. Sejsmograf rejestruje fale S i P wstrząsu odległe o 20,00 s od siebie. Jeśli obie fale biegną po tej samej drodze ze stałymi prędkościami $v_S = 4{,}00\text{ km/s}$ i $v_P = 7{,}50\text{ km/s}$, to jak daleko znajduje się epicentrum wstrząsu?

139. Rozważ poniższą sytuację. Klocek o masie 20,00 kg spoczywa na równi pochyłej. Pomiędzy nim a równią nie występuje tarcie. Kąt nachylenia równi wynosi $45°$. Do klocka przytwierdzono strunę o liniowej gęstości masy $\mu = 0{,}025\text{ kg/m}$. Przechodzi ona przez bloczek, wzdłuż którego porusza się bez tarcia. Do drugiego końca struny przymocowano odważnik o masie m. Układ znajduje się w stanie równowagi statycznej. Na strunie została wytworzona fala, która biegnie wzdłuż niej. (a) Ile wynosi masa odważnika m? (b) Jaka jest prędkość fali na strunie?



140. Rozważ superpozycję trzech funkcji falowych $y\,(x,\,t) = 3{,}00\text{ cm}\sin\left(2\text{ m}^{-1}x - 3\text{ s}^{-1}t\right)$, $y\,(x,\,t) = 3{,}00\text{ cm}\sin\left(6\text{ m}^{-1}x + 3\text{ s}^{-1}t\right)$ i $y\,(x,\,t) = 3{,}00\text{ cm}\sin\left(2\text{ m}^{-1}x - 4\text{ s}^{-1}t\right)$. Jakie jest wychylenie fali wypadkowej w punkcie $x = 3{,}00\text{ m}$ w chwili $t = 10{,}0\text{ s}$?

141. Struna ma masę 150 g i długość 3,4 m. Jeden jej koniec struny został przymocowany do ściany laboratorium, a drugi połączono ze sprężyną o stałej sprężystości równej $k_s = 100\text{ N/m}$. Swobodny koniec sprężyny przytwierdzono do drugiej ściany. Naprężenie struny utrzymuje sprężyna. Odległość między ścianami jest taka, że sprężyna ulega rozciągnięciu o 2,00 cm. Struna została szarpnięta i wzdłuż niej przebiegł impuls. Jaka jest jego prędkość?

142. Fala stojąca powstaje na strunie poddanej naprężeniu 70,0 N z dwóch identycznych sinusoidalnych fal biegnących w przeciwnych kierunkach. Struna jest zamocowana w punktach $x = 0{,}00\text{ m}$ i $x = 10{,}00\text{ m}$. Węzły powstają w punktach $x =$ 0,00 m, 2,00 m, 4,00 m, 6,00 m, 8,00 m i 10,00 m. Amplituda fali stojącej wynosi 3,00 cm. W ciągu 0,10 s strzałki wykonują jedno pełne drgnienie. (a) Jakie są długości obu fal sinusoidalnych, które utworzyły falę stojącą? (b) Ile wynoszą maksymalna prędkość i przyspieszenie struny w kierunku prostopadłym do ruchu fali poprzecznej w punktach, w których występują strzałki?

143. Struna o długości 4 m i liniowej gęstości masy $\mu = 0{,}006\text{ kg/m}$. jest poddana stałemu naprężeniu. Dwie częstotliwości rezonansowe struny wynoszą 400 Hz i 480 Hz, pomiędzy nimi nie występują żadne inne

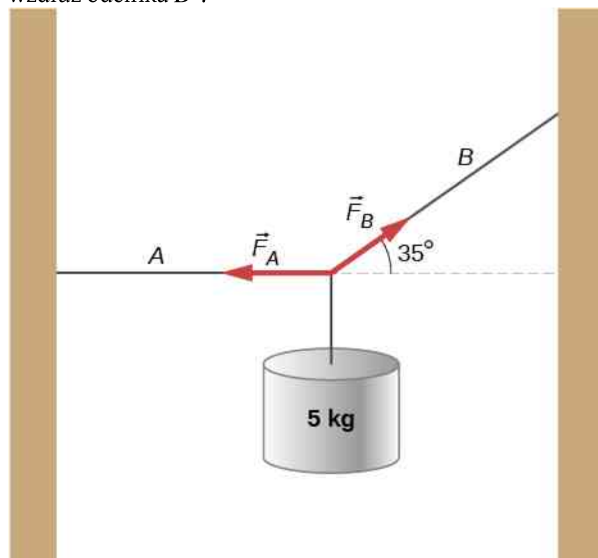
częstotliwości rezonansowe. (a) Jakie są długości fal tych dwóch modów rezonansowych? (b) Ile wynosi naprężenie struny?

ZADANIA TRUDNIEJSZE

144. Drut miedziany o promieniu $200\ \mu m$ ma długość 5,0 m. Poddano go naprężeniu 3000 N i lekko rozciągnięto. Został szarpnięty i wzdłuż niego rozszedł się impuls. Jaka jest prędkość rozchodzenia się impulsu? Załóż, że podane warunki są niezmienne: $\rho = 8{,}96\ g/cm^3$, $Y = 1{,}1 \cdot 10^{11}\ N/m$.

145. Impuls biegnie wzdłuż osi x i może być opisany funkcją falową $y(x, t) = 4{,}00\ m \cdot e^{-\left(\frac{x+(2{,}00\ m/s)\cdot t}{1{,}00\ m}\right)^2}$. (a) Jakie są kierunek i prędkość impulsu (b) Jaką drogę fala przebiegnie w czasie 3,00 s? (c) Korzystając z arkusza kalkulacyjnego, narysuj wykres funkcji falowej w chwilach równych $t = 0{,}00\ s$ i $t = 3{,}00\ s$. Sprawdź poprawność obliczeń w punkcie (b).

146. Struna o liniowej gęstości masy $\mu = 0{,}0085\ kg/m$ jest podparta na obu końcach. Odważnik o masie 5,0 kg został przymocowany do struny, jak pokazano poniżej. Jeśli impuls wytworzono wzdłuż odcinka A struny, to ile wynosi prędkość tego impulsu wzdłuż odcinka A, a ile wzdłuż odcinka B ?



147. Rozważ dwie funkcje falowe $y_1\ (x, t) = A\ \sin\ (kx - \omega t)$ i $y_2\ (x, t) = A\ \sin\ (kx + \omega t + \phi)$. Podaj funkcję falową, która jest wynikiem interferencji tych dwóch fal. (Wskazówka: $\sin\ (\alpha \pm \beta) = \sin\ \alpha\ \cos\ \beta \pm \cos\ \alpha\ \sin\ \beta$ i $\phi = \frac{\phi}{2} + \frac{\phi}{2}$.)

148. Funkcja falowa, opisująca falę stojącą ma postać $y_R\ (x, t) = 6{,}00\ cm\ \sin\ \left(3{,}00\ m^{-1} x + 1{,}20\ rad\right)$ $\cos\ \left(6{,}00\ s^{-1} t + 1{,}20\ rad\right)$. Jakie są funkcje falowe fal, których interferencja prowadzi do powstania powyższej fali? Narysuj te dwie funkcje falowe i ich sumę dla chwili $t = 1{,}00\ s$.

149. Rozważ dwie funkcje falowe $y_1\ (x, t) = A\ \sin\ (kx - \omega t)$ i $y_2\ (x, t) = A\ \sin\ (kx + \omega t + \phi)$. Funkcja falowa fali wypadkowej, która powstanie po ich dodaniu ma postać $y_R = 2A\ \sin(kx + \phi/2)\cos(\omega t + \phi/2)$. Rozważ przypadek dla $A = 0{,}03\ m^{-1}$, $k = 1{,}26\ m^{-1}$, $\omega = \pi\ s^{-1}$ i $\phi = \pi/10$. (a) Gdzie znajdują się trzy pierwsze węzły fali stojącej, która od punktu zero biegnie w kierunku zgodnym ze zwrotem osi x ? (b) Korzystając z arkusza kalkulacyjnego, narysuj wykresy tych dwóch funkcji falowych i funkcji falowej fali wypadkowej dla chwili $t = 1{,}00\ s$.

17 | DŹWIĘK



Rysunek 17.1 Słuch jest ważnym ludzkim zmysłem, który pozwala słyszeć dźwięki w zakresie częstotliwości od 20 Hz do 20 kHz. Jednak inne żywe gatunki mają bardzo różne zakresy słyszenia. Na przykład nietoperze emitują dźwięki w paśmie ultradźwiękowym powyżej 20 kHz. Mogą one wykrywać okoliczne owady dzięki słyszeniu echa odbitego od obiektów (echolokacja). Ultradźwięki są ważne w wielu zastosowaniach, w tym do wykrywania wewnętrznych struktur ludzkiego ciała. Ultradźwięki są również użyteczne w przemyśle spożywczym do nieinwazyjnego badania jakości żywności (Źródło: modyfikacja pracy Angella Williamsa)

Treść rozdziału

Wstęp

Dźwięk jest przykładem fali mechanicznej, drganiem cząstek (na przykład cząsteczek powietrza), które można odczuć jako zmiany ciśnienia. Fala dźwiękowa przemieszcza się w powietrzu i w innych ośrodkach jako drgania cząstek. Normalny słuch ludzki obejmuje imponujący zakres częstotliwości od 20 Hz do 20 kHz. Dźwięki poniżej 20 Hz nazywane są infradźwiękami, natomiast dźwięki o częstotliwościach powyżej 20 kHz – ultradźwiękami. Niektóre zwierzęta, takie jak np. nietoperz pokazany na Rysunku 17.1, mogą słyszeć dźwięki w zakresie ultradźwięków.

Wiele pojęć omówionych w rozdziale Fale ma również zastosowanie w badaniach nad dźwiękiem. Na przykład, gdy fala napotyka na swojej drodze granicę dwóch ośrodków, w których dźwięk rozchodzi się z różnymi prędkościami, następuje odbicie i załamanie fali.

Ultradźwięki mają wiele zastosowań w różnych dziedzinach nauki, techniki i medycyny. Ultradźwięki stosuje się między innymi w przemyśle, do badania grubości powłok materiałowych bez ich uszkadzania, czy w medycynie, do obrazowania płodu w łonie matki bez stwarzania zagrożenia dla zdrowia. W późniejszej części tego rozdziału omówiono efekt Dopplera, który może być wykorzystany do określenia prędkości przepływu krwi w tętnicy i mierzenia prędkości wiatru w systemach pogodowych.

17.1 | Fale dźwiękowe

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać dźwięk jako falę;
- podawać równania opisujące falę dźwiękową;
- wyjaśniać powiązanie między zagęszczeniami i rozrzedzeniami ośrodka a dźwiękiem.

Dźwięk słyszalny przez człowieka jest rozchodzącym się zaburzeniem ośrodka sprężystego, czyli falą mechaniczną o częstotliwości z zakresu 20 Hz – 20 kHz. **Słuch** jest percepcją dźwięku, podobnie jak wzrok jest percepcją światła widzialnego. W skali atomowej (mikroskopowej) dźwięk jest zaburzeniem atomów, który jest znacznie bardziej uporządkowany niż ich ruchy termiczne. W wielu przypadkach dźwięk jest falą okresową, a cząstki wykonują prosty ruch harmoniczny. W ten sposób fale dźwiękowe mogą powodować drgania i efekty rezonansowe (Rysunek 17.2).



Rysunek 17.2 Kieliszek rozbiła fala dźwiękowa o częstotliwości równej częstotliwości rezonansowej kieliszka (Źródło: „||read||”/Flickr)

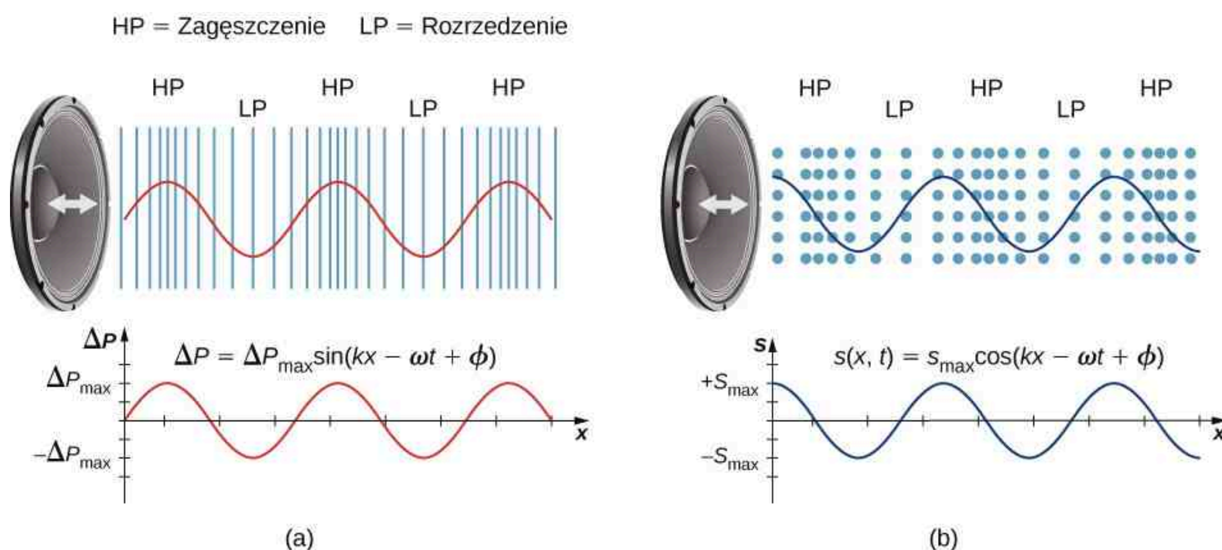


Ten film (https://openstaxcollege.org/l/21waveswineglas) pokazuje fale na powierzchni kieliszka do wina, wytworzone fale akustyczne wygenerowane przez głośnik. Jeśli częstotliwość będzie się zbliżać do częstotliwości rezonansowej kieliszka, amplituda i częstotliwość będą wzrastać. W momencie osiągnięcia częstotliwości rezonansowej kieliszek ulegnie zniszczeniu.

Głośnik wytwarza falę dźwiękową poprzez drgania membrany, powodując drgania cząsteczek powietrza. Na Rysunku 17.3, głośnik drga ze stałą częstotliwością i stałą amplitudą, pobudzając do drgań cząsteczki powietrza znajdujące się w pobliżu. Membrana głośnika, drgając, przekazuje energię do powietrza, głównie w postaci energii cieplnej. Niewielka część energii głośnika powoduje sprężenia i rozrzedzenia otaczającego powietrza, prowadząc do lokalnych zmian ciśnienia powietrza. **Zagęszczenia** (ang. **compression**), czyli obszary wysokiego ciśnienia, i **rozrzedzenia** (ang. **rarefaction**), czyli obszary niskiego ciśnienia, rozprzestrzeniają się jako podłużne fale ciśnienia mające taką samą częstotliwość jak membrana. Zmiany te są falą dźwiękową. Fale dźwiękowe w powietrzu i w większości płynów są falami podłużnymi, ponieważ w gazach i płynach praktycznie nie występują siły ścinające. W ciałach stałych fale dźwiękowe mogą być poprzeczne i podłużne.

Rysunek 17.3 (a) pokazuje zagęszczenia i rozrzedzenia ciśnienia powietrza oraz wykres zmian ciśnienia w funkcji odległości od głośnika. Gdy membrana głośnika przemieszcza się w kierunku zgodnym z dodatnim kierunkiem osi

x, popycha cząsteczki powietrza, wytrącając je z położenia równowagi. Gdy membrana głośnika przemieszcza się w kierunku przeciwnym do dodatniego kierunku osi x, cząsteczki wracają do pozycji równowagi. Cząsteczki powietrza drgają w sposób harmoniczny wokół położenia równowagi, tak jak pokazano na Rysunku 17.3 (b). Zwróć uwagę, że fale dźwiękowe w powietrzu są podłużne. Na rysunku fala propaguje się w dodatnim kierunku osi x, a cząsteczki drgają wzdłuż kierunku, w którym fala się propaguje.



Rysunek 17.3 (a) Wibrujący stożek głośnika, poruszający się w kierunku zgodnym z dodatnim kierunkiem osi x, spręża powietrze przed nim i rozrzedza powietrze za nim. Gdy głośnik wykonuje drgania, powoduje kolejne zagęszczenia i rozrzedzenia, które oddalają się od głośnika. Po wielu drganiach seria zagęszczeń i rozrzedzeń propaguje się z głośnika jako fala dźwiękowa. Czerwona krzywa przedstawia wartość ciśnienia powietrza w funkcji odległości od głośnika. Dla dźwięków cichych ciśnienie powietrza różni się nieznacznie od wartości ciśnienia atmosferycznego. Należy zauważyć, że zmiany ciśnienia powietrza opisane są funkcją sinusoidalną, a wartości maksymalne i minimalne funkcji korelują odpowiednio z zagęszczeniami i rozrzedzeniami powietrza. (b) Fale dźwiękowe mogą być również modelowane jako ruch cząsteczek powietrza. Niebieska krzywa pokazuje przesunięcie cząsteczek powietrza w funkcji położenia i jest opisana za pomocą funkcji cosinusoidalnej. Zwróćmy uwagę, że przesunięcie wynosi zero dla cząsteczek w położeniu równowagi i znajduje się pośrodku pomiędzy zagęszczeniami i rozrzedzeniami. Zagęszczenia powstają, gdy cząsteczki po obu stronach położenia równowagi przemieszczają się w stronę położenia równowagi. Rozrzedzenia natomiast powstają wtedy, gdy cząsteczki oddalają się od położenia równowagi.

Modele opisujące dźwięk

Dźwięk może być modelowany jako zmiany ciśnienia powietrza wokół wartości średniej:

$$\Delta p(x, t) = \Delta p_{\max} \sin\ (kx \mp \omega t + \phi)\,, \tag{17.1}$$

gdzie Δp oznacza zmianę ciśnienia, $\Delta p_{\max}$ jest maksymalną zmianą ciśnienia powietrza, $k = 2\pi / \lambda$ jest liczbą falową, $\omega = 2\pi / T = 2\pi f$ jest częstością kołową, natomiast ϕ jest fazą początkową. Równanie to jest podobne do równania przedstawiającego falę periodyczną w rozdziale Fale. Prędkość dźwięku może być wyznaczona z zależności $v = \omega / k = \lambda / T$. Fale dźwiękowe mogą być również modelowane za pomocą drgających cząsteczek powietrza. Wychylenie cząsteczek powietrza może być opisane funkcją cosinus:

$$s\,(x, t) = s_{\max} \cos\ (kx \mp \omega t + \phi)\,. \tag{17.2}$$

W powyższym równaniu s oznacza wychylenie, natomiast $s_{\max}$ jest maksymalnym wychyleniem cząsteczek.

Na rysunku nie pokazano amplitudy fali dźwiękowej, która maleje wraz z odległością od źródła na skutek rozpraszania energii. Natężenie fali maleje wraz ze wzrostem odległości od głośnika, podobnie jak to przedstawiono w rozdziale Fale. Energia fali jest również pochłaniana przez obiekty i przekształcana w energię termiczną na skutek zderzanie się cząsteczek powietrza. Ponadto podczas każdego sprężenia tylko część ciepła przekazywana jest do powietrza, a w trakcie procesu rozprężania jeszcze mniej ciepła jest przekazywana do powietrza. Skuteczność przekazywania ciepła

z obszaru sprężenia do obszaru rozrzedzenia zależy od odległości pomiędzy tymi obszarami, co związane jest z długością fali. Długość fali, częstotliwość, amplituda i prędkość propagacji są ważnymi parametrami, które charakteryzują dźwięk, podobnie jak we wszystkich falach.

17.2 | Prędkość dźwięku

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- wyjaśniać związek pomiędzy długością fali dźwiękowej a jej częstotliwością;
- ustalać prędkość dźwięku w różnych ośrodkach;
- podawać wzór na prędkość dźwięku z uwzględnieniem temperatury;
- ustalać prędkość dźwięku w powietrzu w różnych temperaturach.

Dźwięk jak wszystkie fale propaguje się z określoną prędkością oraz posiada określoną **częstotliwość** (ang. **frequency**) i **długość** (ang. **wavelength**). Różnica między prędkością dźwięku a prędkością światła można zaobserwować, oglądając pokaz sztucznych ogni (Rysunek 17.4). Błysk wybuchu można zaobserwować wcześniej niż usłyszeć jego dźwięk, co sugeruje, że dźwięk propaguje się z ograniczoną i mniejszą prędkością niż światło.



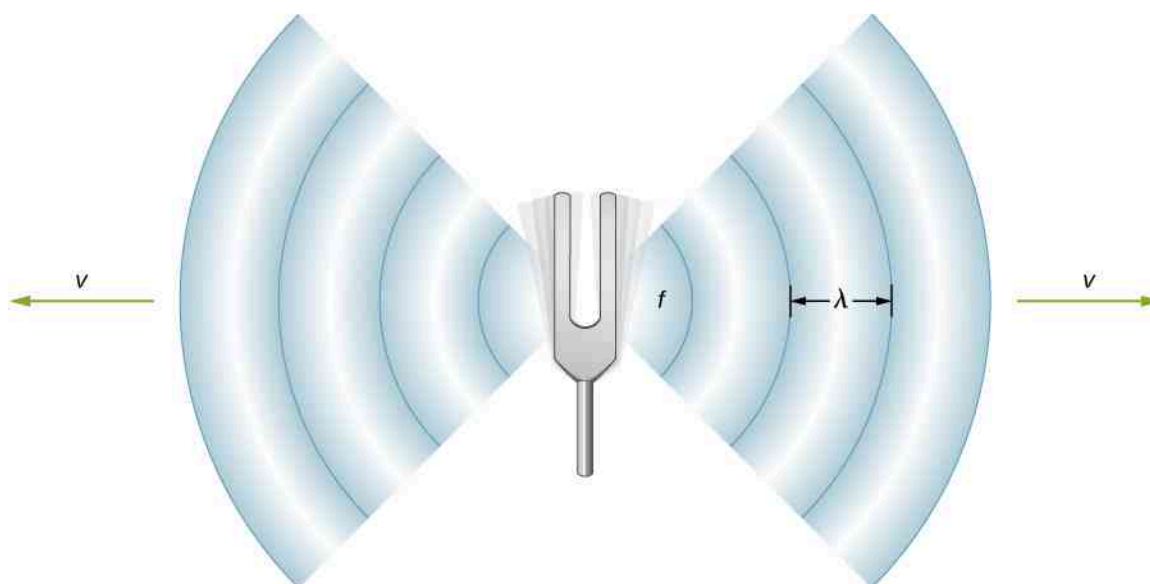
Rysunek 17.4 Kiedy eksplodują fajerwerki, światło widzimy wcześniej niż słyszymy dźwięk, ponieważ propaguje się on wolniej niż światło.

Różnicę między prędkościami światła i dźwięku można również zauważyć podczas wyładowań atmosferycznych. Być może wiesz, że licząc sekundy między zaobserwowanym przez ciebie błyskiem a usłyszanym grzmotem, możesz oszacować jak daleko uderzył piorun. Światło dociera do oka niemal błyskawicznie, a dźwięk na pokonanie kilometra potrzebuje około trzech sekund. Prędkość każdej fali zależy od jej częstotliwości i długości, zgodnie ze wzorem:

$$v = f\lambda, \tag{17.3}$$

gdzie v jest prędkością dźwięku, f jest częstotliwością, natomiast λ jest długością fali. Dla przypomnienia, z rozdziału

Fale wynika, że długość fali jest odległością pomiędzy kolejnymi identycznymi punktami fali. Na powierzchni fali lub na strunie długość fali może być zmierzona pomiędzy dwoma kolejnymi punktami o tej samej wysokości i nachyleniu, na przykład pomiędzy dwoma kolejnymi grzbietami lub dwoma kolejnymi dolinami. Podobnie długość fali dźwiękowej jest odległością pomiędzy dwoma kolejnymi identycznymi punktami fali – na przykład pomiędzy dwoma identycznymi kolejnymi zagęszczeniami (Rysunek 17.5). Częstotliwość fali dźwiękowej jest taka sama jak częstotliwość źródła i jest liczbą fal, które docierają do określonego punktu ośrodka w jednostce czasu.



Rysunek 17.5 Fala dźwiękowa wyemitowana ze źródła, jakim jest kamerton drgający z częstotliwością f. Fala dźwiękowa o długości λ propaguje się z prędkością v.

Prędkość dźwięku w różnych ośrodkach

Tabela 17.1 pokazuje, że prędkość dźwięku zależy od tego jak szybko energia akustyczna może być przenoszona przez ośrodek. Z tego powodu wyprowadzenie zależności na prędkość dźwięku w danym ośrodku zależy od rodzaju i stanu ośrodka. Ogólnie, prędkość dźwięku dla fali mechanicznej w ośrodku zależy od pierwiastka kwadratowego ilorazu **sprężystości** (ang. **elasticity**) i **bezwładności** (ang. **inertia**):

$$v = \sqrt{\frac{\text{sprężystość}}{\text{bezwładność}}}.$$

Fale dźwiękowe spełniają równanie falowe wyprowadzone w rozdziale Fale:

$$\frac{\partial^2 y\,(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 y\,(x, t)}{\partial t^2}.$$

Dla przypomnienia, z rozdziału Fale wynika, że prędkość fali na strunie jest równa $v = \sqrt{F_T / \mu}$, gdzie siłą sprężystości jest naprężenie struny F_T, natomiast gęstość liniowa μ jest bezwładnością. W płynach prędkość dźwięku zależy od współczynnika sprężystości objętościowej i gęstości:

$$v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}}. \tag{17.4}$$

Prędkość dźwięku w ciele stałym zależy od **modułu Younga** (ang. **Young's modulus**) i gęstości ośrodka:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \tag{17.5}$$

W gazie doskonałym (zobacz: Kinetyczna teoria gazów (https://cnx.org/content/m65890/latest/)) wzór na prędkość dźwięku jest następujący:

$$v = \sqrt{\frac{\kappa R T_K}{M}}, \tag{17.6}$$

gdzie κ jest wykładnikiem adiabaty, $R = 8{,}31\,\mathrm{J/(mol \cdot K)}$ jest stałą gazową, T_K temperaturą bezwzględną w kelwinach, natomiast M jest masą cząsteczkową. W ogólnym przypadku im bardziej sztywny (mniej ściśliwy) ośrodek, tym wyższa prędkość dźwięku. Analogicznie częstotliwość prostego ruchu harmonicznego jest wprost proporcjonalna do sztywności drgającego obiektu określonego przez k, stałą sprężystości. Dalej, im większa jest gęstość ośrodka, tym mniejsza jest prędkość dźwięku. Wniosek ten jest analogiczny do faktu, że częstotliwość prostego ruchu harmonicznego jest odwrotnie proporcjonalna do m masy drgającego ciała. Prędkość dźwięku w powietrzu jest mała, ponieważ powietrze jest łatwo ściśliwe. Ponieważ ciecze i ciała stałe są bardzo sztywne i trudne do ściśnięcia, prędkość dźwięku w tych ciałach jest generalnie większa niż w gazach.

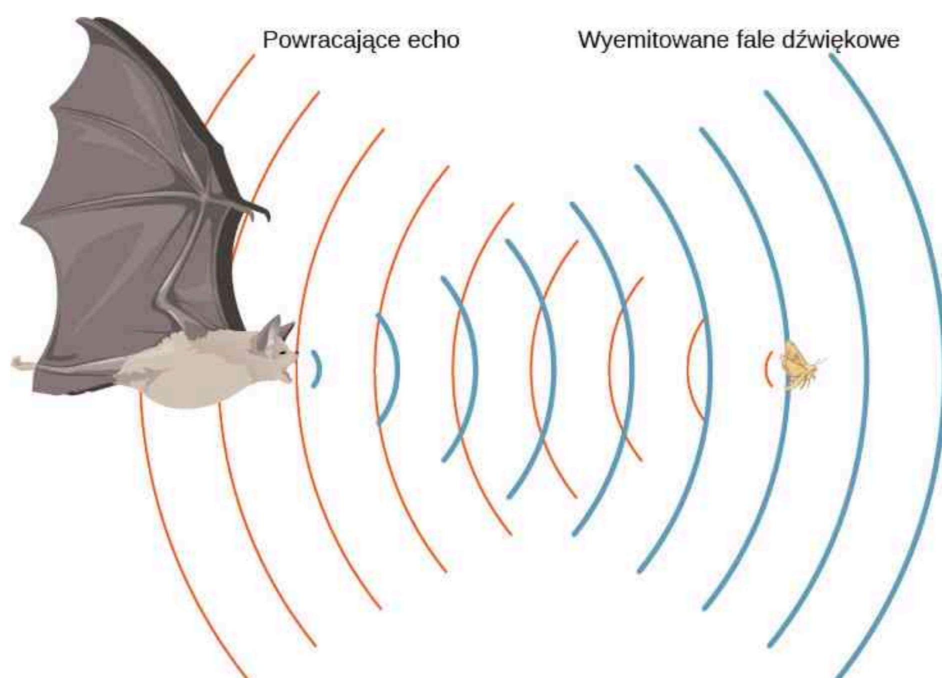
Ośrodek	v **(m/s)**
Gazy w temperaturze $0\,^{\circ}\mathrm{C}$	
Powietrze	331
Dwutlenek węgla	259
Tlen	316
Hel	965
Wodór	1290
Ciecze w temperaturze $20\,^{\circ}\mathrm{C}$	
Etanol	1160
Rtęć	1450
Woda	1480
Woda morska	1540
Ludzka tkanka	1540
Ciała stałe (fale podłużne lub objętościowe)	
Guma wulkanizowana	54
Polietylen	920
Marmur	3810
Szkło	5640
Ołów	1960
Aluminium	5120
Stal	5960

Tabela 17.1 Prędkość dźwięku w różnych ośrodkach Prędkość dźwięku w różnych ośrodkach.

Ponieważ prędkość dźwięku zależy od gęstości materiału, a gęstość zależy od temperatury, istnieje zależność pomiędzy temperaturą ośrodka i prędkością rozchodzącego się w nim dźwięku. Prędkość dźwięku w powietrzu dana jest wzorem:

$$v = 331\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\sqrt{1+\frac{T_C}{273\,^\circ\mathrm{C}}} = 331\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\sqrt{\frac{T_K}{273\,\mathrm{K}}}, \quad (17.7)$$

gdzie temperatura T_C dana jest w stopniach Celsjusza, a temperatura T_K – w kelwinach. Prędkość dźwięku w gazach zależy od średniej prędkości cząsteczek gazu, $v_{\mathrm{rms}} = \sqrt{3k_B T/m}$, gdzie k_B jest stałą Boltzmana $(1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J/K})$, a m jest masą pojedynczej cząsteczki. Zwróć uwagę, że v jest prędkością propagacji koherentnego zaburzenia (fala), natomiast v_{rms} opisuje prędkość cząsteczek poruszających się w różnych kierunkach. Z tego powodu uzasadnione jest stwierdzenie, że prędkość dźwięku w powietrzu powinna zależeć od pierwiastka kwadratowego z temperatury. Nie jest to silna zależność. Dla $0\,^\circ\mathrm{C}$ prędkość dźwięku wynosi 331 m/s, natomiast dla $20\,^\circ\mathrm{C}$ – 343 m/s, czyli niecałe 4% przyrostu. Rysunek 17.6 pokazuje, w jaki sposób nietoperz wykorzystuje dźwięk do określenia odległości.



Rysunek 17.6 Nietoperz wykorzystuje zjawisko echa do określenia odległości od zdobyczy. Czas dotarcia echa jest wprost proporcjonalny do odległości. Podobnie działa czujnik LIDAR (ang. *Light Detection and Ranging*) stosowany w samochodach autonomicznych (bazuje na flach elektromagnetycznych).

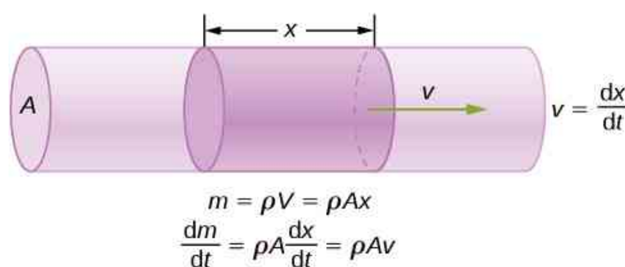
Wyprowadzenie wzoru na prędkość dźwięku w powietrzu

Jak wcześniej wspomniano, prędkość dźwięku w ośrodku zależy od rodzaju i stanu ośrodka. Wyprowadzenie zależności na prędkość dźwięku w powietrzu należy rozpocząć od masy przepływu i równania ciągłości omówionego w rozdziale Mechanika płynów.

Rozważmy przepływ płynu przez rurę o przekroju poprzecznym A (Rysunek 17.7). Masa w małej objętości rury o długości x jest równa iloczynowi gęstości i objętości $m = \rho V = \rho A x$. Natężenie masy przepływu jest równe:

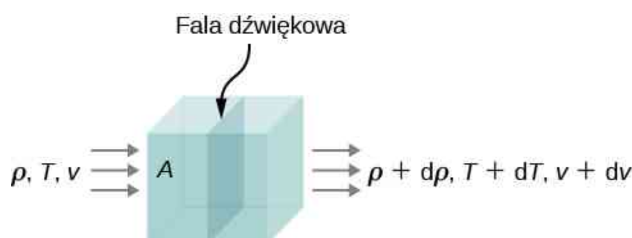
$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho V) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho A x) = \rho A \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \rho A v.$$

Z równania ciągłości z rozdziału Mechanika płynów wynika, że masa przepływu wpływająca do objętości musi być równa masie przepływu wypływającej z objętości: $(\rho A v)_{\text{wpływająca}} = (\rho A v)_{\text{wypływająca}}$.



Rysunek 17.7 Masa płynu w objętości jest równa iloczynowi objętości i gęstości, $m = \rho V = \rho Ax$. Strumień masy jest pochodną masy po czasie.

Rozważmy teraz dźwięk propagujący się w płynie. Weźmy infinitezymalnej grubości obszar ułożony wzdłuż powierzchni równego ciśnienia. Gęstość, temperatura i prędkość zmieniają się wzdłuż takiego obszaru o, odpowiednio, $\mathrm{d}\rho$, $\mathrm{d}T$ oraz $\mathrm{d}v$ (Rysunek 17.8).



Rysunek 17.8 Fala dźwiękowa propaguje się przez objętość płynu. Gęstość, temperatura i prędkość płynu zmieniają się i są inne po obu stronach

Z równania ciągłości wynika, że strumień masy wpływający do danej objętości jest równy strumieniowi wypływającemu z objętości. W takim przypadku

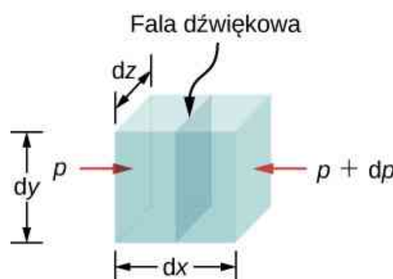
$$\rho Av = (\rho + \mathrm{d}\rho)A(v + \mathrm{d}v).$$

Powyższe równanie można uprościć. Po obustronnym podzieleniu przez powierzchnię A i po uwzględnieniu, że mnożenie dwóch nieskończenie małych wielkości jest w przybliżeniu równe zero: $\mathrm{d}p(\mathrm{d}v) \approx 0$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\rho v &= (\rho + \mathrm{d}\rho)(v + \mathrm{d}v) \\
\rho v &= \rho v + \rho(\mathrm{d}v) + (\mathrm{d}\rho)v + (\mathrm{d}\rho)(\mathrm{d}v) \\
0 &= \rho(\mathrm{d}v) + (\mathrm{d}\rho)v \\
\rho \mathrm{d}v &= -v\mathrm{d}\rho.
\end{aligned}$$

Wypadkowa siła wywierana na objętość płynu (Rysunek 17.9) jest równa sumie sił po lewej i prawe stronie:

$$\begin{aligned}
F_{\text{wyp}} &= p\mathrm{d}y\mathrm{d}z - (p + \mathrm{d}p)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= p\mathrm{d}y\mathrm{d}z - p\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \mathrm{d}p\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= -\mathrm{d}p\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
ma &= -\mathrm{d}p\mathrm{d}y\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$



Rysunek 17.9 Fala dźwiękowa porusza się przez objętość płynu. Siła po każdej stronie jest równa iloczynowi ciśnienia i powierzchni.

Przyspieszenie jest równe sile podzielonej przez masę, a masa jest równa iloczynowi gęstości i objętości, $m = \rho V = \rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Otrzymujemy zatem:

$$\begin{aligned} ma &= -\mathrm{d}p\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ a &= -\frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{m} = \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z} = -\frac{\mathrm{d}p}{\rho\mathrm{d}x} \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\mathrm{d}p}{\rho\mathrm{d}x} \\ \mathrm{d}v &= -\frac{\mathrm{d}p}{\rho\mathrm{d}x}\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}p}{\rho}\frac{1}{v} \\ \rho v\mathrm{d}v &= -\mathrm{d}p. \end{aligned}$$

Z równania ciągłości $\rho \mathrm{d}v = -v\mathrm{d}\rho$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \rho\,\mathrm{d}v &= -v\,\mathrm{d}\rho \\ (-v\,\mathrm{d}\rho)v &= -\mathrm{d}p \\ v &= \sqrt{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}} \end{aligned}$$

Rozważmy falę dźwiękową poruszającą się w powietrzu. Podczas procesu sprężania i rozprężania gazu do układu nie jest dostarczane ani oddawane żadne ciepło. Proces, w którym nie występuje żadna wymiana ciepła z układem, nazywa się przemianą adiabatyczną. Jest ona szczegółowo opisana w rozdziale Pierwsze prawo termodynamiki (https://cnx.org/content/m65898/latest/) , natomiast na tym etapie wystarczy stwierdzić, że dla procesu adiabatycznego $pV^{\kappa} = \text{const},$ gdzie p jest ciśnieniem, V jest objętością, a κ jest stałą zależną od gazu. Dla powietrza $\kappa = 1{,}40$. Gęstość jest równa iloczynowi liczby moli i masy molowej, podzielonej przez objętość, stąd objętość jest równa $V = nM/\rho$. Liczba moli i masa molowa są stałe i mogą być włączone do stałej, czyli otrzymujemy: $p(1/\rho)^{\kappa} = \text{const}.$ Obliczając logarytm naturalny z obu stron równania, dochodzimy do wyrażenia: $\ln p - \kappa \ln \rho = \text{const}.$ Obliczając następnie pochodną po gęstości, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \ln p - \kappa \ln \rho &= \text{const} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}(\ln p - \kappa \ln \rho) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}(\text{const}) \\ \frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} - \frac{\kappa}{\rho} &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} &= \frac{\kappa p}{\rho}. \end{aligned}$$

Zakładając, że powietrze można uznać za gaz doskonały, możemy skorzystać z równania dla gazu doskonałego:

$$\begin{aligned} pV &= nRT = \frac{m}{M}RT \\ p &= \frac{m}{V}\frac{RT}{M} = \rho\frac{RT}{M}. \end{aligned}$$

W powyższym wzorze M oznacza masę molową powietrza:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} = \frac{\kappa p}{\rho} = \frac{\kappa\left(\rho \frac{RT}{M}\right)}{\rho} = \frac{\kappa RT}{M}.$$

Ponieważ prędkość dźwięku jest równa $v = \sqrt{\mathrm{d}p / \mathrm{d}\rho}$, dalej otrzymujemy:

$$v = \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}}.$$

Należy zauważyć, że prędkość jest większa dla wyższych temperatur i mniejsza w przypadku cięższych gazów. Dla powietrza $\kappa = 1{,}4$, $M = 0{,}02897 \text{ kg} / \text{mol}$ i $R = 8{,}31 \text{ J} / (\text{mol} \cdot \text{K})$. Jeśli temperatura wynosi $T_C = 20\,^{\circ}\text{C}$ ($T = 293 \text{ K}$), prędkość dźwięku jest równa $v = 343 \text{ m/s}$.

Wzór na prędkość dźwięku w powietrzu $v = \sqrt{\kappa RT / M}$ można uprościć do postaci, w której prędkość dźwięku jest funkcją temperatury bezwzględnej:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}} \\ &= \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}\left(\frac{273 \text{ K}}{273 \text{ K}}\right)} = \sqrt{\frac{(273 \text{ K})\kappa R}{M}}\sqrt{\frac{T}{273 \text{ K}}} \\ &\approx 331 \frac{\text{m}}{\text{s}}\sqrt{\frac{T}{273 \text{ K}}}. \end{aligned}$$

Jedną z najważniejszych właściwości dźwięku jest fakt, że prędkość dźwięku jest prawie niezależna od częstotliwości. Ta niezależność jest z pewnością prawdziwa w przestrzeni otwartej, dla dźwięków z zakresu częstotliwości słyszalnych. Gdyby nie była prawdziwa, z pewnością można byłoby to zauważyć, np. w trakcie koncertu orkiestry marszowej na stadionie piłkarskim. Załóżmy, że dźwięki o wysokich częstotliwościach propagowałyby się szybciej – im dalej znajdujesz się od zespołu, tym dźwięki z instrumentów o niskich częstotliwościach są bardziej opóźnione od dźwięków o wysokich częstotliwościach. Tymczasem muzyka ze wszystkich instrumentów dociera w tym samym czasie, niezależnie od odległości, co oznacza, że dźwięki o różnych częstotliwościach muszą propagować się z podobną prędkością. Pamiętajmy, że:

$$v = f\lambda.$$

W danym ośrodku, w pewnych warunkach, v jest stałe, co oznacza, że istnieje zależność pomiędzy f a λ: im wyższa częstotliwość, tym krótsza długość fali (Rysunek 17.10).



Rysunek 17.10 W danym ośrodku fale propagują się z taką samą prędkością. Z tego powodu dźwięki o niskich częstotliwościach muszą mieć większe długości fal od dźwięków o wysokich częstotliwościach. Na rysunku dźwięki o niskich częstotliwościach są generowane przez membranę o większej średnicy (**głośnik niskotonowy** (ang. **woofer**)), natomiast dźwięki o wyższych częstotliwościach – przez membranę o mniejszej średnicy (**głośnik wysokotonowy** (ang. **tweeter**)).

Przykład 17.1

Obliczanie długości fal

Oblicz długości fal dźwięków w temperaturze powietrza równej $30{,}0\,^{\circ}\mathrm{C}$ dla skrajnych częstotliwości określających zakres słyszalności 20 Hz i 20 000 Hz w temperaturze powietrza równej .

Strategia rozwiązania

Aby znaleźć długość fali na podstawie częstotliwości, możemy wykorzystać zależność $v = f\lambda$.

Rozwiązanie

1. Określ znane wielkości. Wielkość v dana jest wzorem:

$$v = 331\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\sqrt{\frac{T}{273\,\mathrm{K}}}.$$

2. Wyraź temperaturę w kelwinach, a następnie podstaw do wzoru:

$$v = 331\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\sqrt{\frac{303\,\mathrm{K}}{273\,\mathrm{K}}} = 348{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

3. Rozwiąż zależność i wyznacz długość fali λ :

$$\lambda = \frac{v}{f}.$$

4. Podstaw prędkość i dolną częstotliwość, aby otrzymać maksymalną długość fali:

$$\lambda_{\max} = \frac{348{,}7 \text{ m/s}}{20 \text{ Hz}} = 17 \text{ m}.$$

5. Podstaw prędkość i górną częstotliwość, aby otrzymać minimalną długość fali:

$$\lambda_{\min} = \frac{348{,}7 \text{ m/s}}{20{,}000 \text{ Hz}} = 0{,}017 \text{ m} = 1{,}7 \text{ cm}.$$

Znaczenie

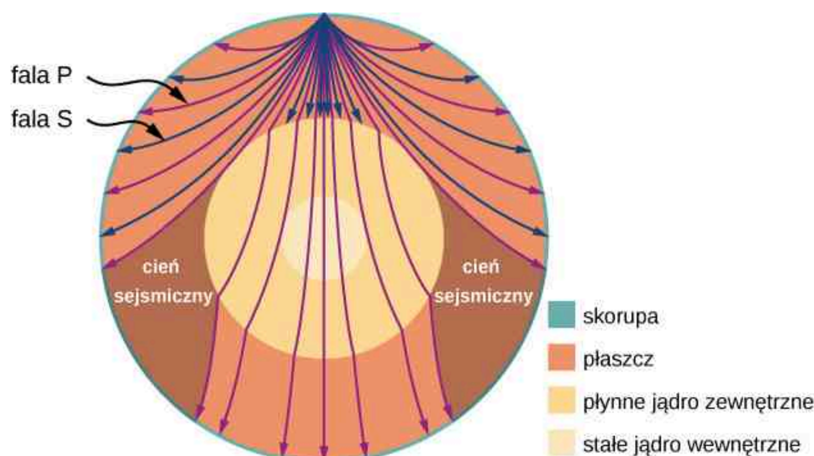
Ponieważ iloczyn f i λ jest wielkością stałą, im niższa częstotliwość f, tym większa długość fali λ i odwrotnie.

Prędkość dźwięku może się zmieniać, gdy dźwięk przechodzi z jednego ośrodka do drugiego, ale zwykle częstotliwość pozostaje taka sama. Podobnie częstotliwość fali na strunie jest równa częstotliwości siły wymuszającej drgania struny. Jeśli v się zmienia i f pozostaje taka sama, wówczas długość fali λ musi się zmieniać. Wynika to ze wzoru $v = f\lambda$; wyższa prędkość dźwięku to większa długość fali dla danej częstotliwości.



17.1 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Wyobraź sobie dwa wybuchy sztucznych ogni. Eksplozję jednego z nich widzisz i słyszysz w tym samym czasie. Jednak zanim usłyszysz wybuch drugiego fajerwerku, kilka milisekund wcześniej widzisz błysk wybuchu. Wytłumacz dlaczego.

Chociaż fale dźwiękowe w powietrzu są falami podłużnymi, w ciele stałym poruszają się w postaci fal podłużnych i poprzecznych. **Fale sejsmiczne** (ang. **seismic waves**), które są zasadniczo falami dźwiękowymi w skorupie ziemskiej wytwarzanymi przez trzęsienia ziemi, są ciekawym przykładem tego, jak prędkość dźwięku zależy od sztywności ośrodka. Trzęsienia ziemi wytwarzają zarówno fale podłużne, jak i poprzeczne, które poruszają się z różnymi prędkościami. Moduł sztywności granitu jest większy niż jego moduł ścinania. Z tego powodu prędkość fal podłużnych (P) w granicie podczas trzęsień ziemi jest znacznie większa niż prędkość fal poprzecznych (S). Oba rodzaje fal trzęsień ziemi przemieszczają się wolniej w mniej sztywnych materiałach, takich jak osady. Fale P mają prędkości od 4 do 7 km/s, a zakresy prędkości fal S wynoszą od 2 do 5 km/s. Fale P propagują się dalej niż fale S podczas przechodzenia przez skorupę ziemską. Czas pomiędzy falami P i S jest powszechnie używany do określenia odległości od ich źródła, od epicentrum trzęsienia ziemi. Ponieważ fale S nie przechodzą przez ciekły rdzeń (brak modułu sztywności), a fale P załamują się na granicy płaszcz-jądro, tworzą się dwa obszary cienia.



Rysunek 17.11 Trzęsienia ziemi wytwarzają zarówno fale podłużne (fale P), jak i fale poprzeczne (fale S), które poruszają się z różnymi prędkościami. Oba rodzaje fal przemieszczają się z różnymi prędkościami w różnych obszarach Ziemi, ale ogólnie fale poprzeczne (P) propagują się szybciej niż fale poprzeczne (S). Fale poprzeczne (S) nie propagują się przez płynny rdzeń, który tworzy strefę cienia.

Gdy fale dźwiękowe oddalają się od głośnika lub od epicentrum trzęsienia ziemi, ich moc na jednostkę powierzchni maleje. Z tego powodu dźwięk w pobliżu głośnika jest bardzo głośny i staje się coraz cichszy wraz ze wzrostem odległości od głośnika. Fakt ten wyjaśnia również, dlaczego w epicentrum trzęsienia ziemi może wystąpić ogromna ilość szkód, a w obszarach odległych od epicentrum można jedynie odczuć wstrząsy. Moc na jednostkę powierzchni znana jest jako natężenie. W następnym rozdziale zostanie omówione, jak natężenie zależy od odległości od źródła.

17.3 | Natężenie dźwięku

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- definiować pojęcie natężenia dźwięku;
- wyjaśniać koncepcję poziomu natężenia dźwięku;
- opisywać, w jaki sposób ludzkie ucho odbiera dźwięk.

W cichym lesie możesz czasami usłyszeć pojedynczy spadający na ziemię liść. Natomiast, kiedy kierowca samochodu ma włączone radio, nie słychać nawet tego, co mówi osoba siedząca obok (Rysunek 17.12). Wszyscy jesteśmy świadomi, co to jest głośność dźwięków i że głośność związana jest z tym, jak energicznie wibruje źródło. Duży poziom hałasu jest niebezpieczny dla słuchu, dlatego tak ważne jest, aby osoby pracujące w warunkach przemysłowych stosowały ochronniki słuchu. Wielkością fizyczną, która opisuje fale dźwiękowe, niezależnie od tego, czy są one z zakresu słyszalnego czy nie, jest natężenie dźwięku.



Rysunek 17.12 Hałas na zakorkowanych ulicach, tak jak np. w Delhi, sprawia, że trudno usłyszeć innych, z wyjątkiem sytuacji, gdy krzyczą. (Źródło: „Lingaraj G J"/Flickr)

W rozdziale Fale zdefiniowaliśmy natężenie jako moc przenoszoną przez falę przypadającą na jednostkę powierzchni. Moc określa, jak szybko energia jest przenoszona przez falę. Natężenie fali I określone jest przez wzór:

$$I = \frac{P}{A}, \tag{17.8}$$

gdzie P jest mocą przepływającą przez powierzchnię A. W układzie SI jednostką natężenia fali jest $\mathrm{W/m^2}$. Jeśli założymy, że fala dźwiękowa jest kulista oraz że nie ma żadnych strat związanych z procesami termicznymi, wówczas rozchodząca się fala ma coraz większą powierzchnię i z tego powodu spada jej natężenie. Powierzchnia sfery wynosi $A = 4\pi r^2$. Jeśli fala rozchodzi się od r_1 do r_2, wówczas energia również przechodzi przez większą powierzchnię:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_2 \\ I_1 4\pi r_1^2 &= I_2 4\pi r_2^2; \end{aligned}$$

$$I_2 = I_1 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2. \quad (17.9)$$

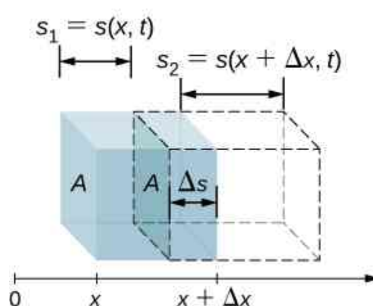
Natężenie maleje, gdy fala oddala się od źródła. Gdy podwoisz odległość od źródła, natężenie fali maleje do 1/4:

$$I_2 = I_1 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 = I_1 \left(\frac{r_1}{2r_1} \right)^2 = \frac{1}{4} I_1.$$

Mówiąc o natężeniu fali dźwiękowej, rozważamy uśrednioną w czasie moc, określoną przez wielkość $\langle P \rangle$ podzieloną przez powierzchnię:

$$I = \frac{\langle P \rangle}{A}. \quad (17.10)$$

Natężenie fali jest proporcjonalne do zmian kwadratu ciśnienia i odwrotnie proporcjonalne do gęstości i prędkości. Rozważmy fragment ośrodka, w którym rozchodzi się fala dźwiękowa w czasie t, tak jak pokazano na Rysunku 17.13.



Rysunek 17.13 Niezaburzony obszar ośrodka o objętości $V = A\Delta x$ zaznaczono na niebiesko. Fala dźwiękowa przemieszcza się w ośrodku w czasie t w wyniku czego analizowany fragment ośrodka przemieszcza się i rozszerza, tak jak zaznaczono na rysunku linią przerywaną. Zmiana objętości wynosi $\Delta V = A\Delta s = A\,(s_2 - s_1)$, gdzie s_1 jest odległością, o jaką przemieściła się krawędź tylna, a s_2 krawędź czołowa obszaru. Na rysunku $s_2 > s_1$ i objętość obszaru się zwiększa, ale objętość obszaru może się także zmniejszać ($s_2 < s_1$), w zależności od tego, która część fali dźwiękowej (zagęszczenie lub rozrzedzenie) przemieszcza się przez obszar.

Położenie krawędzi ograniczających obszar, przez który przechodzi fala dźwiękowa może ulec zmianie, podobnie jak objętość tego obszaru. Jeśli $s_2 > s_1$, objętość się zwiększa, a ciśnienie zmniejsza. Jeśli $s_2 < s_1$, objętość się zmniejsza, natomiast ciśnienie się zwiększa. Zmiana objętości wynosi:

$$\Delta V = A\Delta s = A\,(s_2 - s_1) = A\,(s\,(x + \Delta x, t) - s\,(x, t))\,.$$

Względna różnica objętości jest równa zmianie objętości podzielonej przez objętość początkową:

$$\frac{\mathrm{d}V}{V} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A[s(x + \Delta x, t) - s(x, t)]}{A\Delta x} = \frac{\partial s(x, t)}{\partial x}.$$

Względna różnica objętości związana jest ze zmianami ciśnienia przez **współczynnik sprężystości objętościowej** (ang. **bulk modulus**) $\beta = -\frac{\Delta p(x,t)}{\mathrm{d}V/V}$. Należy pamiętać, że znak minus jest niezbędny, ponieważ zmiana objętości *przeciwstawia się* zmianom ciśnienia. Zmiana ciśnienia jest równa $\Delta p(x, t) = -\beta \frac{\mathrm{d}V}{V} = -\beta \frac{\partial s(x,t)}{\partial x}$. Jeśli fala dźwiękowa jest opisywana funkcją cosinus, to wychylenie, jak pokazano w Równaniu 17.2, jest równe $s\,(x, t) = s_{\max} \cos\,(kx \mp \omega t + \phi)$, a ciśnienie może być wyznaczone z zależności:

$$\Delta p(x,t) = -\beta \frac{\mathrm{d}V}{V} = -\beta \frac{\partial s(x,t)}{\partial x} = \beta k s_{\max} \sin(kx - \omega t + \phi) = \Delta p_{\max} \sin(kx - \omega t + \phi).$$

Natężenie fali dźwiękowej jest równe mocy na jednostkę powierzchni, natomiast moc jest równa iloczynowi siły i prędkości, $I = P/A = Fv/A = pv$. W tym przypadku prędkość jest prędkością drgań ośrodka, a nie prędkością fali dźwiękowej. Prędkość ośrodka jest równa szybkości zmian przemieszczenia (wychylenia):

$$v\,(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} s\,(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(s_{\max} \cos\,(kx - \omega t + \phi)\right) = s_{\max}\,\omega \sin\,(kx - \omega t + \phi)\,.$$

Stąd natężenie przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} I &= \Delta p\,(x,t)\,v\,(x,t) \\ &= \beta k s_{\max} \sin\,(kx - \omega t + \phi)\,[s_{\max}\,\omega \sin\,(kx - \omega t + \phi)] \\ &= \beta k \omega s_{\max}^2 \sin^2\,(kx - \omega t + \phi)\,. \end{aligned}$$

Aby znaleźć uśrednione w czasie natężenie w czasie jednego okresu $T = 2\pi/\omega$ dla położenia x, całkujemy w przedziale czasu T, otrzymując $I = \beta k \omega s_{\max}^2 / 2$. Korzystajac z zależności $\Delta p_{\max} = \beta k s_{\max}$, $v = \sqrt{\beta/\rho}$ oraz $v = \omega/k$, otrzymujemy:

$$I = \frac{\beta k \omega s_{\max}^2}{2} = \frac{\beta^2 k^2 \omega s_{\max}^2}{2\beta k} = \frac{\omega (\Delta p_{\max})^2}{2\left(\rho v^2\right)k} = \frac{v(\Delta p_{\max})^2}{2\left(\rho v^2\right)} = \frac{(\Delta p_{\max})^2}{2\rho v}.$$

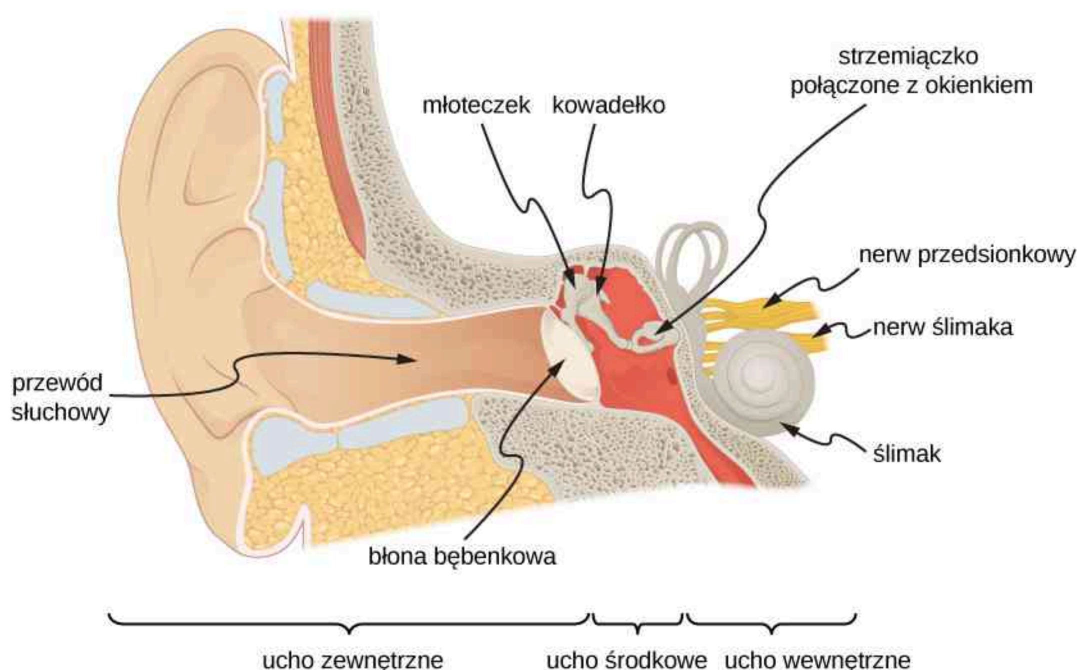
Powyższa zależność oznacza, że natężenie fali dźwiękowej związane jest z kwadratem jej amplitudy:

$$I = \frac{(\Delta p_{\max})^2}{2\rho v}. \tag{17.11}$$

W powyższym wzorze $\Delta p_{\max}$ oznacza zmianę ciśnienia lub amplitudę ciśnienia w paskalach (Pa), tzn. $\mathrm{N/m^2}$. Energia (podobnie jak energia kinetyczna $mv^2/2$) drgającego fragmentu ośrodka (powietrza) w wyniku propagującej się fali dźwiękowej jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy fali. W równaniu ρ jest gęstością ośrodka, w którym propaguje się fala dźwiękowa, w jednostce $\mathrm{kg/m^3}$, natomiast v jest prędkością dźwięku w ośrodku, wyrażoną w m/s. Zmiana ciśnienia jest reprezentowana przez jego amplitudę, co oznacza, że I zmienia się tak jak $(\Delta p)^2$. Zależność ta jest zgodna z faktem, że fala dźwiękowa wytwarzana jest w wyniku drgań.

Słyszenie i poziomy natężenia dźwięku

Jak stwierdzono wcześniej w niniejszym rozdziale, słyszenie oznacza percepcję dźwięku. Mechanizm słyszenia obejmuje kilka ciekawych aspektów fizycznych. Fala dźwiękowa, która dociera do naszego ucha, jest falą zmian ciśnienia powietrza. Ucho jest **przetwornikiem** (ang. **transducer**), który zamienia falę dźwiękową na szereg impulsów elektrycznych, w sposób bardziej skomplikowany niż w przypadku mikrofonu. Rysunek 17.14 pokazuje anatomię ucha.



Rysunek 17.14 Anatomia ucha.

Ucho zewnętrzne przenosi dźwięk do błony bębenkowej. Dla częstotliwości 2000 Hz – 5000 Hz (w zakresie dźwięków ludzkiej mowy) w zewnętrznym przewodzie słuchowym następuje rezonacja słupa powietrza. Dzięki temu ucho człowieka jest wyjątkowo dobrze dostosowane do odbierania ludzkiej mowy. Ucho środkowe zamienia dźwięk na drgania mechaniczne, a następnie dostarcza te drgania do ślimaka.

 Obejrzyj film (https://openstaxcollege.org/l/21humanear) , aby dowiedzieć się więcej na temat mechanizmu działania układu słuchowego.

Zakres natężeń, które ucho ludzkie może odbierać, zależy od częstotliwości dźwięku, ale w ogólnym przypadku zakres ten jest bardzo szeroki. Progowa wartość natężenia, które może być słyszalne, wynosi $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$. Ból odczuwalny jest dla natężenia $I_{\text{ból}} = 1\ \mathrm{W/m^2}$. Ponieważ jednak ucho ludzie rejestruje natężenie logarytmiczne, wygodniej jest stosować skalę Bela.

Poziom natężenia dźwięku (ang. **sound intensity level**) β, mierzony w **decybelach** (ang. **decibel**), o natężeniu I w watach na metr kwadratowy, definiuje się jako:

$$\beta = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad [\mathrm{dB}], \tag{17.12}$$

gdzie $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$ jest progową wartością natężenia, odpowiadającą jest wartością progową dla normalnie słyszącej osoby, odpowiadającą natężeniu dźwięku o częstotliwości 1000 Hz. Bardziej powszechne jest stosowanie poziomu natężenia dźwięku w dB niż w $\mathrm{W/m^2}$. Sposób percepcji dźwięku przez ucho ludzkie może być dokładniej opisany przez logarytm natężenia dźwięku niż przez samo natężenie dźwięku. Ponieważ β definiuje się jako stosunek, jest to wielkość bezwymiarowa, która określa poziom dźwięku *(level)* w odniesieniu do wartości progowej $(10^{-12}\ \mathrm{W/m^2})$. Jednostka decybel oznacza, że w definicji tej wielkości logarytm ze stosunku natężeń pomnożony jest przez 10. Nazwa bel pochodzi od **Alexandra Grahama Bella (1847–1922)**, wynalazcy telefonu.

Poziom natężenia dźwięku dla natężenia progowego: $10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$ wynosi $\beta = 0\ \mathrm{dB}$, ponieważ $\log_{10} 1 = 0$. Tabela 17.2 pokazuje poziomy w decybelach oraz natężenia w watach na metr kwadratowy dla niektórych znanych dźwięków. Ucho jest tak czułe, że rejestruje jedną trylionową wata na metr kwadratowy, a jeszcze bardzie imponujące jest to, że powierzchnia błony bębenkowej wynosi ok. $1\ \mathrm{cm}^2$, co oznacza, że dla progu słyszenia pada na nią dźwięk o mocy $10^{-16}\ \mathrm{W}$. Cząsteczki powietrza przy takim natężeniu fali dźwiękowej drgają na długości mniejszej niż średnica cząsteczki, a zmiany ciśnienia są mniejsze niż $10^{-9}\ \mathrm{atm}$.

Poziom natężenia dźwięku β (dB)	Natężenie I $(\mathrm{W/m^2})$	Przykład/efekt
0	$1 \cdot 10^{-12}$	Próg słyszenia dla częstotliwości 1000 Hz
10	$1 \cdot 10^{-11}$	Szelest liści
20	$1 \cdot 10^{-10}$	Szept w odległości 1 m
30	$1 \cdot 10^{-9}$	Cichy dom
40	$1 \cdot 10^{-8}$	Normalny dom
50	$1 \cdot 10^{-7}$	Normalne biuro, cicha muzyka
60	$1 \cdot 10^{-6}$	Normalna rozmowa
70	$1 \cdot 10^{-5}$	Hałaśliwe biuro, duże natężenie ruchu samochodowego
80	$1 \cdot 10^{-4}$	Głośne radio, klasa szkolna
90	$1 \cdot 10^{-3}$	Wewnątrz samochodu ciężarowego, uszkodzenia słuchu powodowane długą ekspozycją na hałas[1]
100	$1 \cdot 10^{-2}$	Głośny zakład przemysłowy, syrena w odległości 30 m, uszkodzenia słuchu powodowane 8-godzinną ekspozycją na hałas
110	$1 \cdot 10^{-1}$	Uszkodzenia słuchu powodowane 30-minutową ekspozycją na hałas
120	1	Głośny koncert rockowy, młot pneumatyczny w odległości 2 m, próg bólu
140	$1 \cdot 10^{2}$	Samolot odrzutowy w odległości 30 m, silny ból, utrata słuchu
160	$1 \cdot 10^{4}$	Zniszczenie błony bębenkowej

Tabela 17.2 Porównanie poziomów natężenia w dB i $\mathrm{W/m^2}$

Analiza przedstawionych w Tabeli 17.2 wartości lub Równania 17.12 pozwala zauważyć, że każdy wzrost natężenia o 10 razy oznacza przyrost poziomu natężenia o 10 dB. Na przykład dźwięki o poziomie natężenia 90 dB i 60 dB różnią się o 1000 razy w wielkości natężenia. Z kolei jeśli jeden dźwięk jest o 10^7 razy głośniejszy w natężeniu, oznacza to, że jest o 70 dB głośniejszy (Tabela 17.3).

I_2/I_1	$\beta_2 - \beta_1$
2,0	3,0 dB
5,0	7,0 dB
10,0	10,0 dB
100,0	20,0 dB
1000,0	30,0 dB

Tabela 17.3 Stosunki natężeń i odpowiadające im różnice w poziomie natężeń dźwięku

1. W wielu krajach urzędy odpowiedzialne za ochronę zdrowia zalecają, aby wartość 85 dB nie była przekraczana w trakcie 8-godzinnego dnia pracy w przypadku braku ochronników słuchu.

Przykład 17.2

Obliczanie poziomów natężenia dźwięku

Oblicz poziom natężenia dźwięku dla fali dźwiękowej rozchodzącej się w powietrzu w temperaturze $0°C$ gdy amplituda ciśnienia wynosi 0,656 Pa.

Strategia rozwiązania

Mamy daną wartość Δp, co pozwala nam obliczyć I, wykorzystując zależność $I = \frac{(\Delta p)^2}{2 \rho v_w}$. Korzystając z I, możemy obliczyć β bezpośrednio z definicji $\beta = 10 \log_{10}(I / I_0)$ [dB].

Rozwiązanie

1. Określ znane wielkości:
   Dźwięk propaguje się z prędkością 331 m/s w powietrzu o temperaturze $0\,^{\circ}\mathrm{C}$.
   Gęstość powietrza wynosi $1{,}29\ \mathrm{kg/m^3}$ dla normalnego ciśnienia atmosferycznego w temperaturze $0\,^{\circ}\mathrm{C}$.
2. Podstaw otrzymane wartości oraz amplitudę ciśnienia do wzoru $I = \frac{(\Delta p)^2}{2 \rho v}$:

$$I = \frac{(\Delta p)^2}{2 \rho v} = \frac{(0{,}656\ \mathrm{Pa})^2}{2 \cdot 1{,}29\ \mathrm{kg/m^3} \cdot 331\ \mathrm{m/s}} = 5{,}04 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{W/m^2}.$$

3. Podstaw wartość I oraz znaną wartość I_0 do wzoru $\beta = 10 \log_{10}(I / I_0)$ [dB]. Oblicz poziom natężenia dźwięku w decybelach:

$$10 \log_{10}(5{,}04 \cdot 10^{8}) = 10 \cdot 8{,}70\ \mathrm{dB} = 87\ \mathrm{dB}.$$

Znaczenie

Natężenie dźwięku, które wynosi 87 dB, jest pięć razy większe od natężenia 80 dB.

Przykład 17.3

Zmiany poziomu natężenia dźwięku

Pokaż, że jeśli dźwięk jest dwukrotnie głośniejszy od innego, jego poziom natężenia jest o 3 dB wyższy.

Strategia rozwiązania

Dany jest stosunek dwóch natężeń dźwięku 2:1. Należy wyznaczyć różnicę w poziomach natężeń dźwięku w decybelach. Zadanie możemy rozwiązać, wykorzystując własności logarytmów.

Rozwiązanie

1. Określ znane wielkości:
   Stosunek dwóch natężeń wynosi 2 do 1 czyli

$$\frac{I_2}{I_1} = 2{,}00.$$

Chcemy pokazać, że różnica w poziomach natężeń wysnosi 3 dB, czyli:

$$\beta_2 - \beta_1 = 3\ \mathrm{dB}.$$

Zwróć uwagę, że

$$\log_{10} b - \log_{10} a = \log_{10}\left(\frac{b}{a}\right).$$

2. Skorzystaj z definicji β, aby otrzymać
3. $\beta_2 - \beta_1 = 10 \log_{10}\left(\frac{I_2}{I_1}\right) = 10 \log_{10}(2{,}00) = 10 \cdot 0{,}301 \text{ dB}.$
   A zatem,

$$\beta_2 - \beta_1 = 3{,}01 \text{ dB}.$$

Znaczenie

Zauważ, że ponieważ dany jest stosunek I_2/I_1 a nie rzeczywiste wartości natężeń, to otrzymany wynik jest prawdziwy dla wszystkich natężeń, których stosunek jest równy 2. Na przykład dźwięk o poziomie 56,0 dB jest dwukrotnie bardziej intensywny niż dźwięk o poziomie 53,0 dB, a dźwięk o poziomie natężenia 97,0 dB jest o połowę mniej intensywny niż dźwięk o poziomie natężenia 100 dB i tak dalej.



17.2 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Podaj przykłady dźwięków o poziomach 10 dB, 50 dB oraz 100 dB.

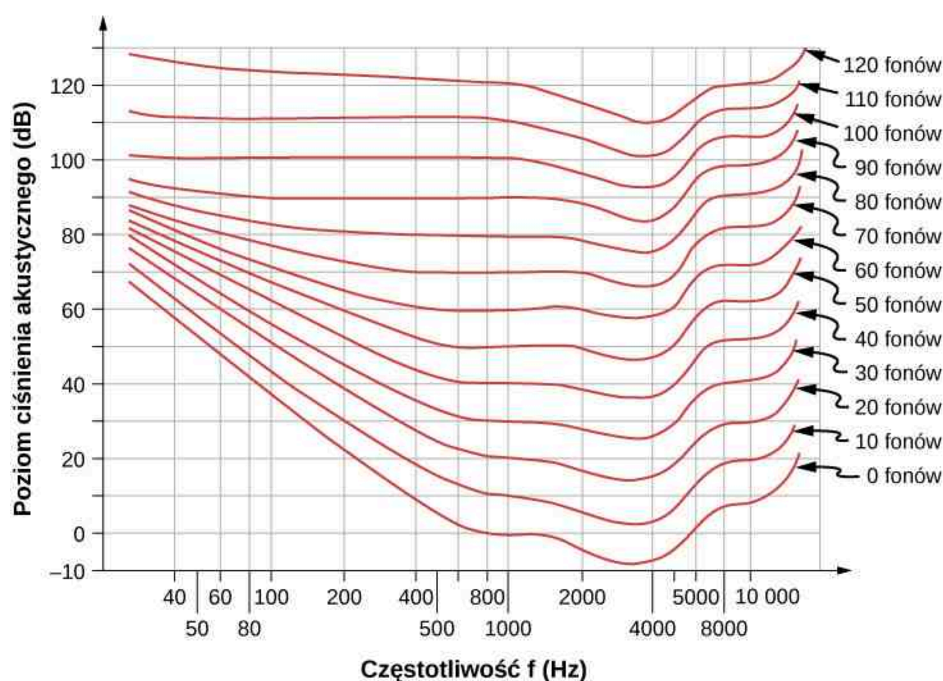
Słyszenie i wysokość dźwięku

Ucho ludzkie posiada ogromny zakres wrażliwości na zjawiska dźwiękowe. Potrafi dostarczyć nam szereg informacji – takich jak wysokość, głośność i kierunek rozchodzenia się dźwięku.

Percepcja częstotliwości to rejestrowanie **wysokości dźwięku** (ang. **pitch**). Zwykle ludzie mają doskonałą względną zdolność oceny wysokości dźwięku i potrafią rozróżnić dwa dźwięki o odmiennych częstotliwościach różniących się od siebie o ok. 0,3%. Na przykład dźwięki o częstotliwościach 500 i 501,5 Hz są wyraźnie dla człowieka różne. **Nuty** (ang. **musical notes**) są symbolicznym zapisem dźwięków o określonej częstotliwości.

Percepcja natężenia oznacza rejestrowanie dźwięków o różnej **głośności** (ang. **loudness**). Można już usłyszeć różnicę ok. 1 dB. Głośność nie jest związana wyłącznie z natężeniem. Na percepcje głośności ma wpływ częstotliwość dźwięku. Dźwięki o wysokich i niskich częstotliwościach wydają się mniej głośne, ponieważ ucho ludzkie jest mniej na nie wrażliwe. Kiedy skrzypce grają środkowe C, to nie można tego dźwięku pomylić z tym samym dźwiękiem granym na fortepianie. Powodem jest to, że każdy instrument wytwarza charakterystyczny zbiór częstotliwości i natężeń. Tę kombinację częstotliwości oraz natężeń nazywamy zwykle **barwą dźwięku** (ang. **timbre**). Barwa dźwięku jest wynikiem wielu odbić, rezonansów i superpozycji fal w instrumencie.

Jednostka nazywana **fonem** (ang. **phon**) jest wykorzystywana do określenia wrażenia głośności w postaci numerycznej. Fon różni się od decybela, ponieważ opisuje percepcję głośności (wielkość subiektywną), podczas gdy decybel jest jednostką wielkości fizycznej – natężenia. Rysunek 17.15 pokazuje zależność głośności od natężenia (lub poziomu natężenia) w funkcji częstotliwości. Przedstawione krzywe to krzywe równej głośności. Parametrem każdej krzywej jest głośność. Dźwięki znajdujące się na danej krzywej odbierane są przez typowego słuchacza jako jednakowo głośne. Krzywe powstały na podstawie badań percepcji głośności dźwięków przeprowadzanych na dużej grupie ludzi. Analizowane dźwięki miały różne częstotliwości i poziomy natężenia. Dla częstotliwości 1000 Hz fony są równe decybelom.



Rysunek 17.15 Zależność głośności w fonach od poziomu ciśnienia akustycznego (w decybelach) dla osób normalnie słyszących – dźwięki znajdujące się na danej krzywej odbierane są jako tak samo głośne. Dla częstotliwości 1000 Hz fony są równe decybelom.

Przykład 17.4

Pomiary głośności

a. Jaka jest głośność w fonach dźwięku o częstotliwości 100 Hz, którego poziom natężenia wynosi 80 dB?

b. Ile wynosi poziom natężenia dźwięku o częstotliwości 4000 Hz, którego głośność wynosi 70 fonów?

c. Dla jakiego poziomu natężenia dźwięk o częstotliwości 8000 Hz ma taką samą głośność jak dźwięk o częstotliwości 200 Hz i poziomie 60 dB?

Strategia rozwiązania

Do rozwiązania tego przykładu powinien być wykorzystany wykres na Rysunku 17.15. Aby znaleźć głośność danego dźwięku, musisz znać jego częstotliwość i poziom natężenia, znaleźć ten punkt na siatce kwadratowej, a następnie interpolować krzywą głośności, aby wyznaczyć głośność sygnału. Po wyznaczeniu tego punktu można określić poziom natężenia z osi pionowej.

Rozwiązanie

1. Określ znane wielkości: Siatka kwadratowa na wykresie głośności w fonach i poziomu natężenia dźwięku w decybelach – obie wielkości fizyczne: dźwięk o częstotliwości 100 Hz i poziomie 80 dB leży w połowie pomiędzy krzywymi głośności 70 i 80 fonów. Wyznaczona głośność – 75 fonów.

2. Określ znane wielkości: dźwięk o częstotliwości 4000 Hz i głośności 70 fonów.
   Przesuwaj się wzdłuż krzywej 70 fonów, aż osiągniesz 4000 Hz. Punkt ten leży poniżej 70 dB i wynosi 67 dB.
   Wyznaczony poziom natężenia – 67 dB.

3. Znajdź dźwięk o częstotliwości 200 Hz i poziomie natężenia 60 dB.
   Znajdź głośność – szukany punkt znajduje się tuż powyżej krzywej 70 fonów, a jego głośność wynosi 51 fonów.
   Znajdź poziom natężenia dźwięku na krzywej 51 fonów – 63 dB.

Znaczenie

Powyższe odpowiedzi, jak wszystkie informacje z Rysunku 17.15, obarczone są niepewnością rzędu kilku fonów lub kilku decybeli, które są częściowo związane z trudnością w interpolacji, a przede wszystkim z niepewnością w krzywych równej głośności.



17.3 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Opisz, jak amplituda związana jest z głośnością dźwięku.

W rozdziale przedstawiliśmy charakterystykę dźwięków i ich percepcję. Poniżej dowiemy się, jak powstają dźwięki emitowane przez instrumenty muzyczne lub przez aparat mowy człowieka.

17.4 | Tryby drgań fali stojącej

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- wyjaśniać mechanizm redukcji hałasu stosowany w słuchawkach;
- opisywać zjawisko rezonansu dźwięku w rurze zamkniętej z jednej strony;
- opisywać zjawisko rezonansu dźwięku w rurze obustronnie otwartej;

Interferencja to nakładanie się dwóch lub więcej fal w przestrzeni. Może ona prowadzić do wzajemnego wzmacniania fal (interferencja konstruktywna) lub wygaszania (interferencja destruktywna). W rzeczywistości wyjaśnienie „czym jest fala” wymaga obserwacji interferencji. Ponieważ dźwięk jest falą, spodziewamy się, że będzie ulegał interferencji.

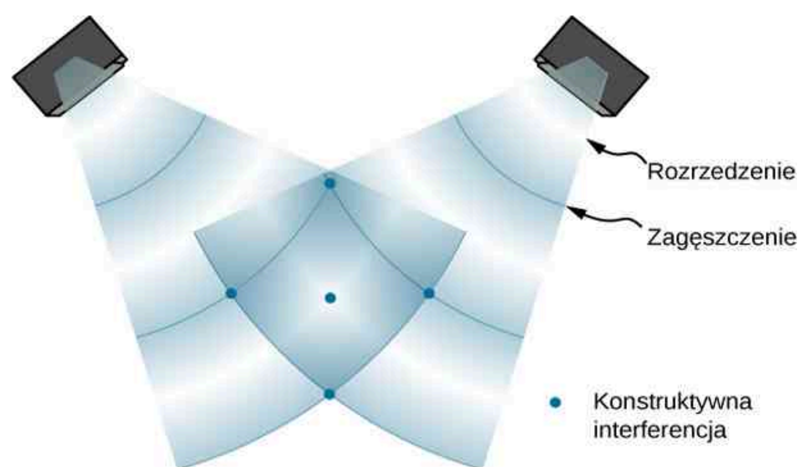
Interferencja fal dźwiękowych

W rozdziale Fale rozważaliśmy interferencję fal przesuniętych w fazie. Wyznaczyliśmy funkcję opisującą falę wypadkową, która była superpozycją fal $y_1\ (x,t) = A\sin\left(kx - \omega t + \phi\right)$ i $y_2\ (x,t) = A\sin\left(kx - \omega t\right)$ i wynosiła:

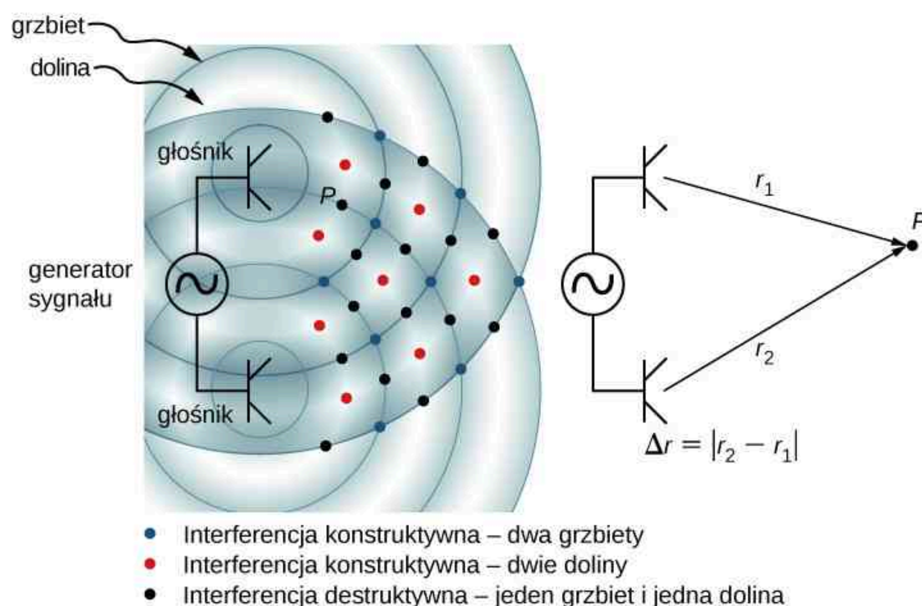
$$y(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right).$$

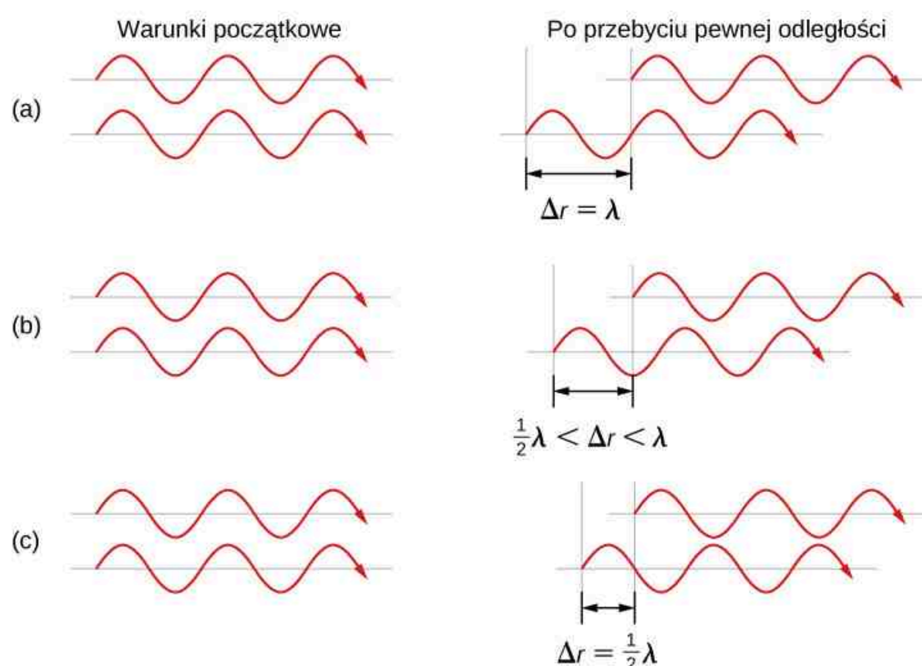
Jeśli fale, które początkowo mają takie same fazy przebędą różne odległości, ich fazy zaczną się różnić. Fale dźwiękowe są doskonałym przykładem fal przesuniętych w fazie na skutek różnicy w długości dróg propagacji. Jak wcześniej stwierdziliśmy, fale dźwiękowe można zasadniczo modelować jako fale podłużne, gdzie cząsteczki powietrza drgają wokół położenia równowagi, lub jako zmiany ciśnienia powietrza.

Gdy fale opuszczają głośnik, propagują się jako fale sferyczne (Rysunek 17.16). Konstruktywna interferencja fal jest wynikiem dodawania tzw. grzbietów i dolin interferujących ze sobą fal. Destruktywna interferencja zachodzi wówczas, gdy grzbietowi jednej fali odpowiada dolina drugiej i odwrotnie.



Rysunek 17.16 Gdy fale dźwiękowe wygenerowane są przez głośnik, propagują się w postaci fal sferycznych. Na rysunku przedstawiono dwa głośniki, które generują taki sam sygnał tonalny. W efekcie otrzymujemy punkty o wysokim natężeniu, które są wynikiem dodawania dwóch tzw. grzbietów (zagęszczenia) i dwóch tzw. dolin (rozrzedzenia). Interferencja destruktywna jest wynikiem nakładania grzbietów i dolin. Punkty na rysunku, w których występuje konstruktywna interferencja, są wynikiem nakładania się fal o takiej samej fazie. Punkty, w których występuje destruktywna interferencja, (Rysunek 17.17) są wynikiem kombinacji fal o różnych fazach.





Rysunek 17.17 Dwa głośniki są podłączone do jednego generatora sygnałowego. Fale dźwiękowe wygenerowane przez głośniki są w fazie i mają jedną, taką samą częstotliwość. Fale dźwiękowe interferują ze sobą. Gdy spotykają się dwa grzbiety lub dwie doliny, następuje konstruktywna interferencja, zaznaczona niebieskimi i czerwonymi punktami. Gdy spotykają się grzbiety fali z dolinami, wówczas prowadzi to do destrukcyjnej interferencji (zaznaczona czarnymi punktami). Różnica faz zależy od różnicy dróg propagacji pojedynczych fal. Dwie identyczne fale pokonują różne drogi propagacji do punktu P. (a) Różnica pomiędzy długościami dróg propagacji odpowiada długości fali i prowadzi do powstania konstruktywnej interferencji, co oznacza podwojenie amplitudy oryginalnego sygnału. (b) Różnica pomiędzy długościami dróg propagacji jest mniejsza niż jedna długość fali, ale większa niż połowa długości fali, w efekcie amplituda wypadkowej fali jest większa od zera ale mniejsza niż amplituda oryginalnej amplitudy. (c) Różnica pomiędzy długościami dróg propagacji odpowiada połowie długości fali, co oznacza powstanie destruktywnej interferencji i w konsekwencji amplituda wypadkowej fali wynosi zero.

Różnica faz w każdym punkcie związana jest z różnicą pomiędzy długościami dróg propagacji każdej z fal. Kiedy różnica ta jest równa wielokrotności długości fali

$$\Delta r = |r_2 - r_1| = n\lambda, \quad \text{gdzie} \quad n = 0,1,2,3, \ldots ,$$

wówczas fale mają taką samą fazę i ulegają wzmocnieniu. Gdy różnica długości dróg propagacji jest równa wielokrotności połowy długości fali

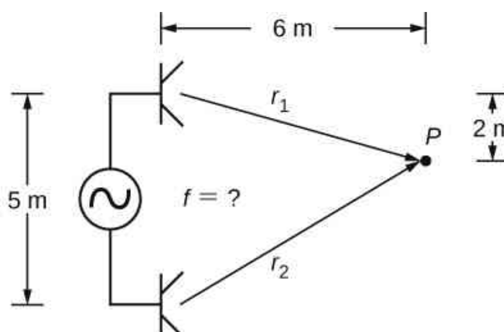
$$\Delta r = |r_2 - r_1| = n\frac{\lambda}{2}, \quad \text{gdzie} \quad n = 1,3,5, \ldots ,$$

wówczas fale są przesunięte w fazie o $180°$ (π rad) i w konsekwencji otrzymujemy interferencję destruktywną. Punkty te mogą być określone za pomocą miernika natężenia dźwięku.

Przykład 17.5

Interferencja fal dźwiękowych

Dwa głośniki znajdują się w odległości 5 m od siebie i są pobudzane generatorem sygnałowym o nieznanej częstotliwości. Student z miernikiem poziomu dźwięku oddalił się o 6 m od głośników i przesunął się o 2 m w kierunku drugiego miernika i znalazł pierwsze minimum poziomu natężenia dźwięku, jak pokazano poniżej. Jaka jest częstotliwość sygnału generowanego przez generator? Załóżmy, że prędkość dźwięku wynosi $v = 343{,}00$ m/s.

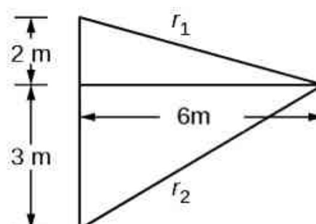


Strategia rozwiązania

Prędkość fali jest równa $v = \lambda / T = \lambda f$. Częstotliwość jest zatem równa $f = v / \lambda$. Minimalna wartość natężenia dźwięku wskazuje destruktywną interferencję i pierwsze minimum pojawia się, jeśli różnica pomiędzy drogami propagacji obu fal wynosi $\Delta r = \lambda/2$, co może być wyznaczone z geometrii układu.

Rozwiązanie

1. Znajdź minimalną długość propagacji dla każdego z głośników.



$$r_1 = \sqrt{(6{,}00\text{ m})^2 + (2{,}00\text{ m})^2} = 6{,}32\text{ m}, \quad r_2 = \sqrt{(6{,}00\text{ m})^2 + (3{,}00\text{ m})^2} = 6{,}71\text{ m}$$

2. Wykorzystaj różnicę długości dróg propagacji, aby określić długość fali.

$$\Delta r = |r_2 - r_1| = |6{,}71\text{ m} - 6{,}32\text{ m}| = 0{,}39\text{ m}$$

$$\lambda = 2\Delta r = 2 \cdot 0{,}39\text{ m} = 0{,}78\text{ m}$$

3. Wyznacz częstotliwość sygnału.

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{343{,}00 \text{ m/s}}{0{,}78 \text{ m}} = 439{,}74 \text{ Hz}$$

Znaczenie

Jeśli punkt P byłby punktem, w którym natężenie dźwięku byłoby maksymalne, długość drogi propagacji byłaby wielokrotnością długości fali.

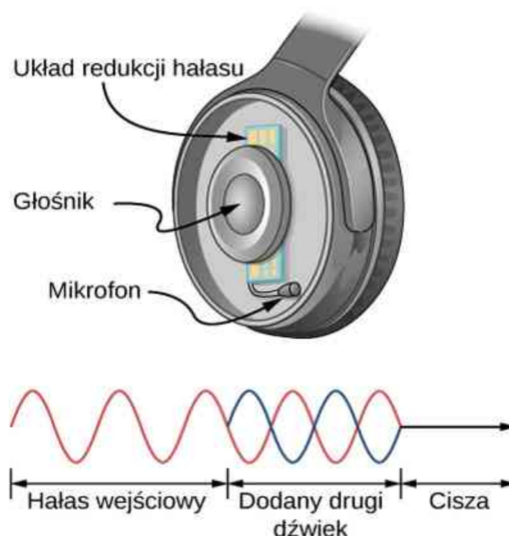


17.4 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Jeśli orkążasz dwa głośniki grające muzykę, dlaczego nie zauważasz miejsc, w których muzyka jest bardzo głośna lub bardzo cicha, to znaczy gdzie jest interferencja konstruktywna, a gdzie destruktywna?

Kwestia przesunięcia fazy z powodu różnic w długościach dróg propagacji jest bardzo ważna. Możesz porównać to zagadnienie w rozdziałach Interferencja (https://cnx.org/content/m65899/latest/) oraz Fotony i fale materii (https://cnx.org/content/m65889/latest/) , w którym dyskutujemy o tym, w jaki sposób Thomas Young zastosował tę metodę w swoim słynnym eksperymencie z dwiema szczelinami, aby udowodnić, że światło ma analogiczne właściwości.

Redukcja hałasu dzięki interferencji

Rysunek 17.18 przedstawia pomysłowe zastosowanie interferencji w celu wyeliminowania hałasu. Badano również możliwość zastosowania aktywnych metod **redukcji hałasu** (ang. **noise reduction**) w większej skali w samolotach pasażerskich. Interferencję destruktywną otrzymuje się po wykonaniu szybkiej analizy elektronicznej, dzięki której drugi zagłuszający dźwięk jest przesunięty w fazie o $180°$ w stosunku do zagłuszanego. Wówczas grzbiety i doliny obu dźwięków są ułożone przeciwnie do siebie. Fale dźwiękowe w ośrodkach ciekłych są falami ciśnienia i są zgodne z prawem Paskala (patrz rozdział Prawo Pascala i układy hydrauliczne). To znaczy ciśnienia z dwóch różnych źródeł dodają się i odejmują podobnie jak liczby proste. Z tego powodu dodatnie i ujemne połówki sinusoidalnych zmian ciśnienia dodają się i w konsekwencji zmniejszają wypadkowe ciśnienie, co oznacza mniejsze natężenie dźwięku. Oczywiście możliwa jest interferencja całkowicie destruktywna, ale tylko w skrajnym przypadku. W konsekwencji, przy stosowaniu tej metody, możliwa jest redukcja hałasu o 30 dB i więcej.



Rysunek 17.18 Słuchawki zaprojektowane w celu redukcji hałasu z wykorzystaniem destruktywnej interferencji, tzn. działające poprzez dodanie sygnału odwróconego w fazie w stosunku do sygnału oryginalnego. Na ilustracji przedstawiono wyidealizowaną sytuację, gdy wygenerowany dźwięk jest przesunięty w fazie dokładnie o $180°$. W rzeczywistości występuje minimalne opóźnienie spowodowane czasem potrzebnym na analizę zagłuszanego dźwięku. Słuchawki takie mogą być bardziej skuteczne niż stosowanie prostego pasywnego tłumienia w ochronnikach słuchu. Takie słuchawki stosowane były w celu redukcji hałasu silników u pilotów samolotu Voyager w 1986 roku.



17.5 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Opisz, czym różnią się aktywne słuchawki redukujące hałas w stosunku od klasycznych słuchawek blokujących dźwięk zewnętrzny.

Gdzie możemy zaobserwować interferencję dźwięku? Wszystkie dźwięki rezonansowe, takie jak dźwięki instrumentów muzycznych, są wynikiem konstruktywnych i destruktywnych interferencji. Tylko drgania o częstotliwościach rezonansowych dodają się i w wyniku tego powstają fale stojące. Natomiast inne interferują destruktywnie i się znoszą.

Rezonans w rurze jednostronnie zamkniętej

Jak stwierdzono w rozdziale Fale, **fale stojące** (ang. **standing wave**) są wynikiem sumowania dwóch fal poruszających się w przeciwnych kierunkach. Gdy dwie identyczne fale sinusoidalne poruszają się w przeciwnych kierunkach, opisuje się je zależnościami:

$$y_1(x,t) = A\sin(kx - \omega t) \quad \text{oraz} \quad y_2(x,t) = A\sin(kx + \omega t).$$

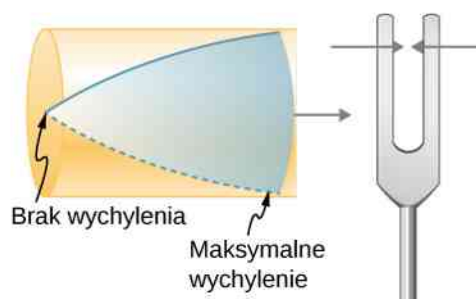
Gdy te dwie interferują, wówczas powstaje fala stojąca:

$$y_R(x,t) = 2A\sin(kx)\cos(\omega t).$$

Rezonans (ang. **resonance**) może powstać w wyniku nałożenia na fale warunków brzegowych. W rozdziale Fale wykazaliśmy, że rezonans może powstać na naciągniętej strunie, przy założeniu symetrycznych warunków brzegowych, tj. przy założeniu węzłów na obu końcach. Węzły zdefiniowano jako punkty, w których struna się nie porusza. Okazało się, że przyjęcie symetrycznych warunków brzegowych spowodowało, że niektóre częstotliwości rezonują, powodując powstanie fal stojących, podczas gdy inne interferują destruktywnie. Fale dźwiękowe mogą rezonować na przykład w rurze, przy czym częstotliwości, dla których występuje rezonans, zależą od warunków brzegowych.

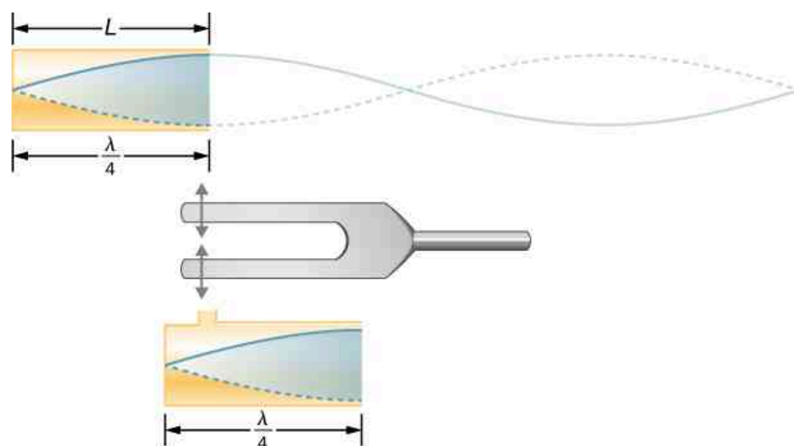
Załóżmy, że mamy rurę z jednej strony zamkniętą, a z drugiej otwartą. Jeśli trzymamy **kamerton** (ang. **tuning fork**) w pobliżu otwartej strony rury, dźwięk propaguje się wewnątrz rury i odbija się od jej końca. Odbity dźwięk posiada taką samą częstotliwość i długość fali jak dźwięk oryginalny, przy czym porusza się w przeciwnym kierunku. Na końcu rury cząsteczki powietrza mają bardzo mało miejsca, aby wykonywać drgania, co skutkuje powstaniem węzła. Na końcu otwartej części rury cząsteczki powietrza mają dużą swobodę, by wykonywać drgania, i dla odpowiednich częstotliwości tworzy się wówczas strzałka. W przeciwieństwie do symetrycznych warunków brzegowych na strunie, gdzie powstają fale stojące, warunki brzegowe dla rury jednostronnie otwartej są niesymetryczne – węzeł na końcu zamkniętej rury i strzałka na końcu otwartej.

Jeśli kamerton ma odpowiednią częstotliwość, słup powietrza w rurze rezonuje bardzo mocno, ale dla większości częstotliwości rezonuje bardzo słabo. Oznacza to, że słup powietrza w rurze ma swoją częstotliwość własną. Rozważmy najniższą częstotliwość, dla której powietrze w rurze wpadnie w rezonans i w konsekwencji powstanie głośny dźwięk. Przy zamkniętej części rury powstanie węzeł, natomiast przy otwartej – strzałka – tak jak to pokazano na Rysunku 17.19.



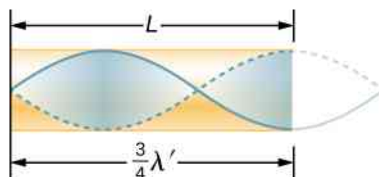
Rysunek 17.19 Rezonans powietrza w rurze jednostronnie zamkniętej powodowany przez kamerton drgający z najniższą częstotliwością, powodującą powstanie rezonansu (częstotliwość podstawowa). Węzeł powstaje na końcu zamkniętej części rury, a strzałka przy stronie otwartej.

Fala stojąca posiada węzeł na końcu zamkniętej części rury oraz strzałkę na końcu otwartej części. Odległość pomiędzy węzłem i strzałką wynosi jedną czwartą długości fali, co odpowiada długości rury, czyli $\lambda_1 = 4L$. Taki sam rezonans może powstać w wyniku drgań pobudzających na końcu zamkniętej części rury (Rysunek 17.20). Najlepiej rozważać drgania własne słupa powietrza w rurze, niezależnie od sposobu ich wywołania.

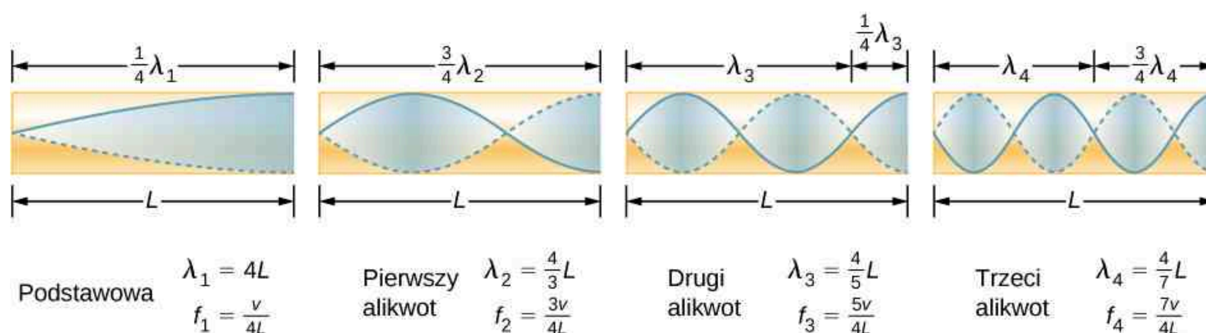


Rysunek 17.20 Taka sama fala stojąca może powstać w rurze, jeśli pobudzimy do drgań powietrze w rurze w pobliżu zamkniętej części rury

Biorąc pod uwagę, że maksymalne drgania powietrza możliwe są przy otwartym końcu rury, a żadne na zamkniętym końcu, w rurze mogą rezonować także inne fale o krótszej długości, tak jak pokazano na Rysunku 17.21. Na rysunku fala stojąca ma długość równą 3/4 długości fali $3\lambda_3/4 = L$, co daje $\lambda_3 = 4L/3$. Dalsza analiza pokazuje, że wewnątrz rury powstają rezonanse dla jeszcze krótszych długości fal. Najniższa częstotliwość, dla której występuje rezonans, nazywa się **częstotliwością podstawową** (ang. **fundamental frequency**), natomiast wszystkie wyższe częstotliwości rezonansowe nazywane są **alikwotami** (ang. **overtones**). Wszystkie częstotliwości rezonansowe są wielokrotnością częstotliwości podstawowej i są wspólnie nazywane **harmonicznymi** (ang. **harmonics**). Częstotliwość podstawowa jest pierwszą harmoniczną, pierwszy alikwot jest drugą harmoniczną itd. Rysunek 17.22 pokazuje częstotliwość podstawową i pierwsze trzy alikwoty (pierwsze cztery harmoniczne) w rurze jednostronnie zamkniętej.



Rysunek 17.21 Inny rezonans w rurze jednostronnie zamkniętej. Fala stojąca ma największe wychylenie na końcu otwartej strony rury i brak wychylenia przy zamkniętym końcu rury. Długość fali jest krótsza i wynosi 3/4 λ' równej długości rury i stąd $\lambda' = 4L/3$. Wyższa częstotliwość rezonansowa nazywa się pierwszym alikwotem.



Rysunek 17.22 Częstotliwość podstawowa i trzy najniższe alikwoty dla rury jednostronnie zamkniętej. Dla wszystkich częstotliwości maksymalne wychylenie występuje na końcu otwartej rury, a ich brak – na końcu zamkniętej.

W rurze jednostronnie zamkniętej rezonans występuje dla następujący długości fal:

$$\lambda_n = \frac{4}{n}L, \quad \text{gdzie} \quad n = 1,3,5,\ldots \tag{17.13}$$

Spójrzmy teraz na wzór dla częstotliwości rezonansowych dla prostej rury jednostronnie zamkniętej. Częstotliwość podstawowa dla długości fali $\lambda = 4L$ jest związana z prędkością dźwięku daną wzorem:

$$v = f\lambda.$$

Rozwiązując powyższe równanie, można wyznaczyć f, która wynosi:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{4L},$$

gdzie v jest prędkością dźwięku w powietrzu. Podobnie dla pierwszego alikwota $\lambda = 4L/3$ (patrz Rysunek 17.22) otrzymujemy:

$$f_3 = 3\frac{v}{4L} = 3f_1.$$

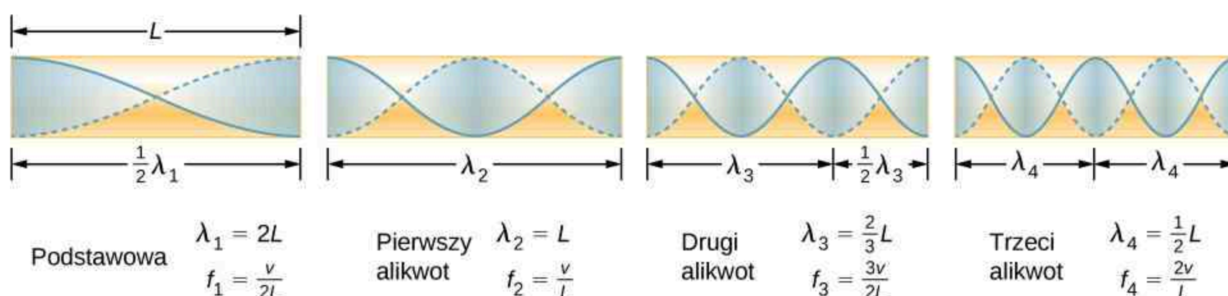
Ponieważ $f_3 = 3f_1$, pierwszy alikwot nazywamy trzecią harmoniczną. Postępując analogicznie, dochodzimy do wzoru, który można uogólnić za pomocą jednej zależności. Częstotliwości rezonansowe w rurze jednostronnie otwartej występują dla:

$$f_n = n\frac{v}{4L}, \quad \text{dla} \quad n = 1,3,5,\ldots, \tag{17.14}$$

gdzie f_1 jest częstotliwością podstawową, f_3 jest pierwszym alikwotem itd. Interesujące jest to, że częstotliwości rezonansowe zależą od prędkości dźwięku oraz od temperatury. Zależność ta stwarza odczuwalny problem np. dla organów w starych nieogrzewanych kościołach (katedrach). Z tego powodu muzycy przed koncertem trzymają instrumenty dęte w pomieszczeniu o temperaturze pokojowej a nie na mrozie.

Rezonans w rurze obustronnie otwartej

Innym źródłem powstawania fal stojących jest rura obustronnie otwarta. W tym przypadku warunki brzegowe są symetryczne – na obu końcach powstają strzałki. Rezonanse w rurze obustronnie otwartej mogą być analizowane w podobny sposób jak w przypadku rury jednostronnie zamkniętej. Słupy powietrza w rurach obustronnie otwartych posiadają maksymalne wychylenie na obu końcach (Rysunek 17.23). Fale stojące pokazano na rysunku 8.



Rysunek 17.23 Częstotliwości rezonansowe w rurze obustronnie otwartej, zawierające częstotliwość podstawową i pierwsze trzy alikwoty. We wszystkich przypadkach maksymalne przesunięcie (ciśnienie, wychylenie) pojawia się na obu końcach rury, dając inne częstotliwości podstawowe niż w przypadku rury jednostronnie zamkniętej.

W rurze obustronnie otwartej rezonans występuje dla następujących długości fal:

$$\lambda_n = \frac{2}{n}L, \quad \text{dla} \quad n = 1,2,3,\ldots \tag{17.15}$$

Uwzględniając fakt, że na obu końcach rury obustronnie otwartej występują maksymalne wychylenia drgającego słupa powietrza oraz korzystając z Rysunku 17.23 możemy wyznaczyć częstotliwości rezonansowe rury obustronnie otwartej:

$$f_n = n\frac{v}{2L}, \quad \text{dla} \quad n = 1,2,3,\ldots, \tag{17.16}$$

gdzie f_1 jest częstotliwością podstawową, f_2 jest pierwszym alikwotem, f_3 jest drugim alikwotem itd. Należy zauważyć, że dla rury obustronnie otwartej częstotliwości rezonansowe są dwukrotnie większe niż dla rury jednostronnie otwartej. Oba typy rur różnią się też zestawem (widmem) alikwot.

Zauważ, że rura obustronnie otwarta ma symetryczne warunki brzegowe, podobnie jak struna zaczepiona z obu stron, jak to było przedstawione w rozdziale Fale. Wzory na długości fal i częstotliwości rezonansowe instrumentu strunowego są takie same jak w Równaniu 17.15 i Równaniu 17.16. Prędkość fali na strunie (patrz rozdział Fale) wynosi $v = \sqrt{F_T/\mu}$. Powietrze wokół obustronnie otwartej rury wibruje z takimi samymi częstotliwościami jak w przypadku struny, wytwarzając dźwięki o takich samych częstotliwościach. Fala dźwiękowa porusza się z prędkością dźwięku i długością fali równą $v = \lambda f$.



17.6 **Sprawdź, czy rozumiesz.** W jaki sposób wykorzystać strzałki i węzły fal stojących do określenia długości rury jednostronnie zamkniętej?



Obejrzyj film (https://openstaxcollege.org/l/21soundwaves) demonstrujący fale dźwiękowe.



17.7 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Widzisz dwa instrumenty muzyczne, których nie potrafisz zidentyfikować. Jeden z nich gra wysokotonowe dźwięki, a drugi niskotonowe. W jaki sposób możesz odpowiedzieć na pytanie, który jest który, bez usłyszenia ich?

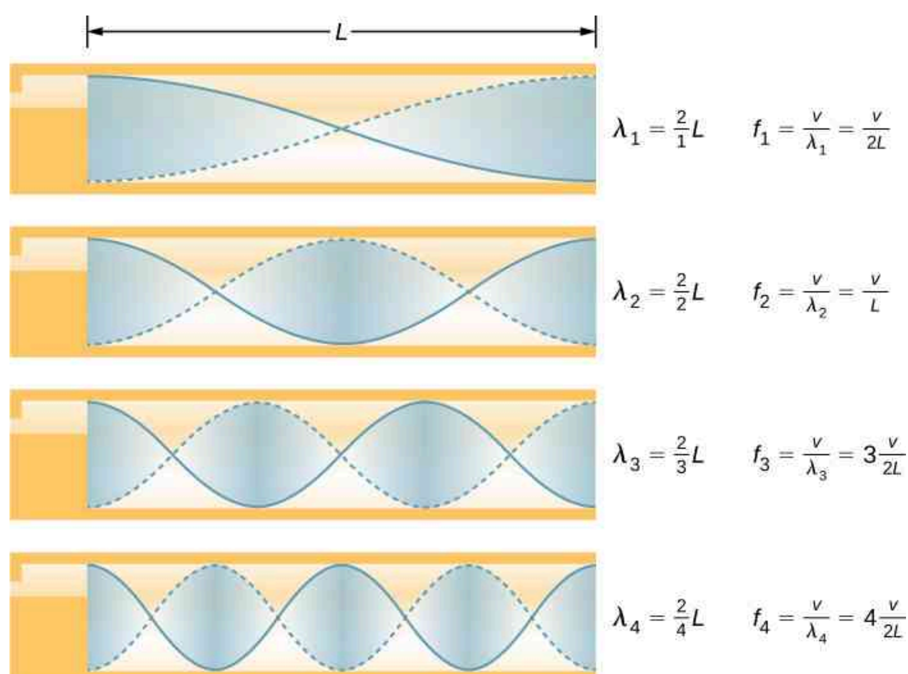
17.5 | Źródła dźwięków muzycznych

Cel dydaktyczny

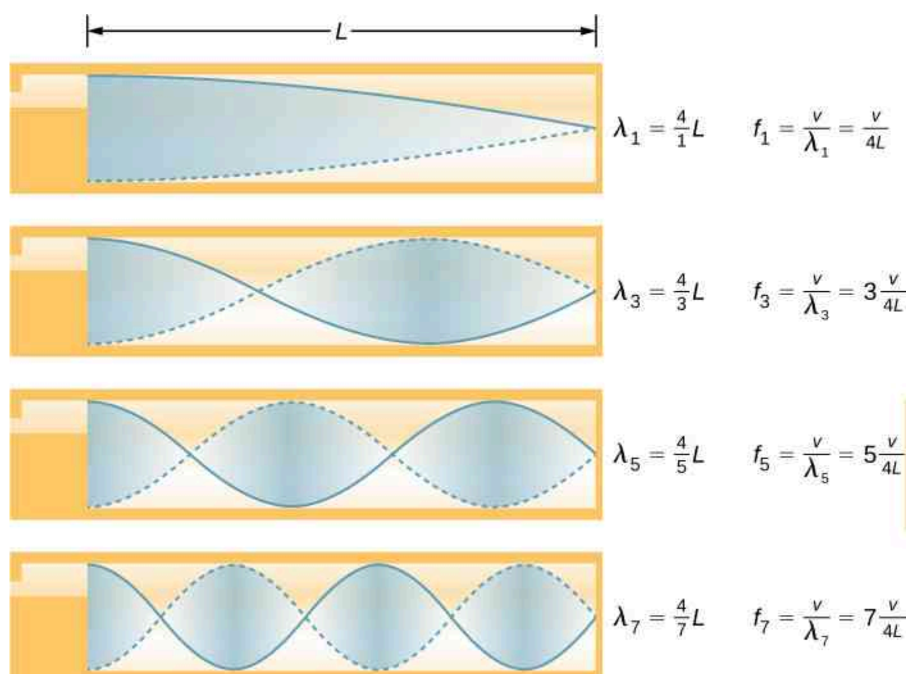
W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać częstotliwości rezonansowe w instrumentach, które można uznać za rury o symetrycznych lub niesymetrycznych warunkach brzegowych.

Niektóre instrumenty muzyczne – instrumenty dęte drewniane, mosiężne, organy piszczałkowe – można modelować jako **rury z symetrycznymi warunkami brzegowymi** (ang. **tubes with symmetrical boundary conditions**), obustronnie otwartymi lub zamkniętymi (Rysunek 17.24). Inne instrumenty mogą być modelowane jako **rury z niesymetrycznymi warunkami brzegowymi** (ang. **tubes with anti-symmetrical boundary conditions**), z jednej strony otwarte, a z drugiej zamknięte (Rysunek 17.25).



Rysunek 17.24 Niektóre instrumenty muzyczne mogą być modelowane jako rury obustronnie otwarte.



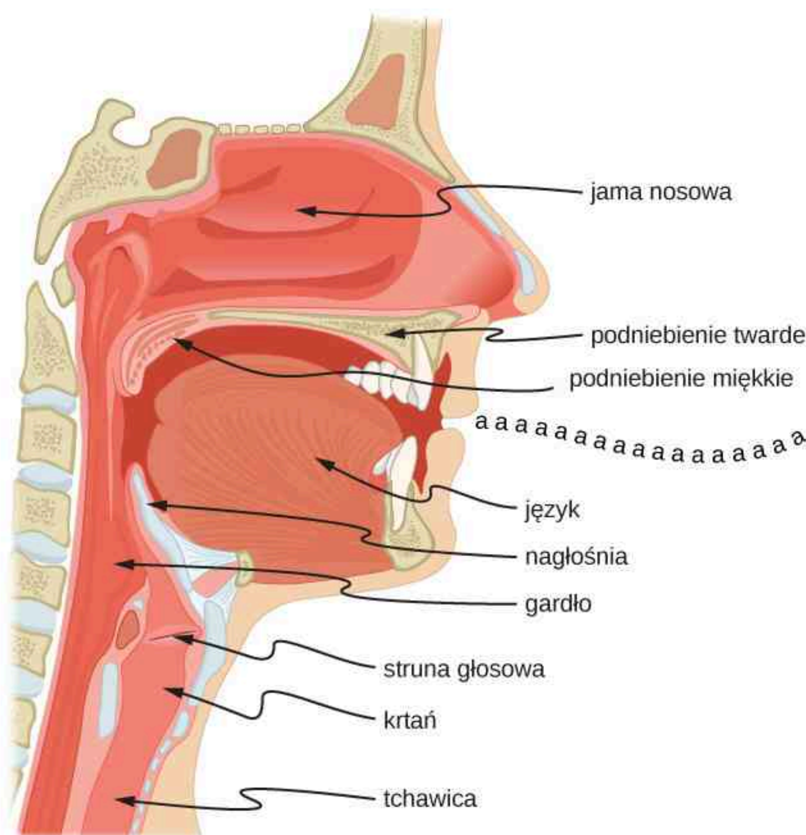
Rysunek 17.25 Niektóre instrumenty muzyczne mogą być modelowane jako rury jednostronnie zamknięte.

Częstotliwości rezonansowe powstają na skutek rozchodzenia się fal podłużnych w rurach i ich interferencji z falami odbitymi, poruszającymi się w przeciwnych kierunkach. Organy piszczałkowe składają się z różnych piszczałek (rur) o określonych długościach, w celu wytworzenia różnych częstotliwości. Fale są wynikiem sprężania powietrza, które może się następnie rozprężać w rurach. Nawet w otwartych rurach niektóre odbicia pojawią się w wyniku oddziaływania końców rury z ciśnieniem atmosferycznym na zewnątrz rury.

Strzałki nie występują dokładnie przy otworze rury, ale zależą od promienia rury. Fale nie propagują się w pełni, dopóki nie znajdą się poza otwartym końcem rury, a dla cienkościennej rury należy dodać korektę końcową. Ta korekcja końcowa jest około 0,6 razy większa od promienia rury i powinna być dodana do długości rurki.

Muzycy grający na instrumentach takich jak flet czy obój zmieniają długość rury poprzez otwieranie i zamykanie otworów palcami. Na puzonie długość rury można zmieniać za pomocą rury przesuwnej. Trąbki posiadają określoną długość i mogą generować dźwięki o określonych częstotliwościach.

Częstotliwość podstawowa i alikwoty mogą występować dla różnych kombinacji. Na przykład środkowe C na trąbce wyraźnie różni się od środkowego C na klarnecie, chociaż oba instrumenty są zmodyfikowanymi wersjami rury jednostronnie zamkniętej. Częstotliwość podstawowa jest taka sama (i najczęściej o największym natężeniu), ale alikwoty i ich kombinacje są różne. To sprawia, że różne instrumenty muzyczne (jak również ludzkie głosy) posiadają cechy charakterystyczne, niezależnie od tego, czy dźwięki wywołują słupy powietrza, struny, komory dźwiękowe czy bębny. W rzeczywistości np. nasza mowa jest wyznaczana przez kształt wnęki utworzonej przez gardło i usta w celu otrzymania odpowiedniej częstotliwości podstawowej i alikwotów. Na przykład można tworzyć proste **wnęki rezonansowe** (ang. **resonant cavities**) w celu rezonowania dźwięków samogłosek (Rysunek 17.26). U chłopców w okresie dojrzewania krtań rośnie i zmienia się kształt wnęki rezonansowej, co powoduje różnicę w dominujących częstotliwościach u kobiet i mężczyzn.



Rysunek 17.26 Gardło i usta formują słup powietrza z jednej strony zamknięty, który rezonuje w odpowiedzi na wibracje aparatu głosowego. Widmo alikwotów i ich natężenie zmieniają się wraz z ukształtowaniem ust i położeniem języka, tworząc różne dźwięki. Aparat głosowy może być zastąpiony przez drgającą membranę i zrozumienie mowy jest w dalszym ciągu możliwe. Różnice w podstawowych kształtach anatomicznych układu gardła i jamy ustnej sprawiają, że mamy do czynienia z różnymi głosami.

Przykład 17.6

Wyznaczanie długości rury o częstotliwości podstawowej 128 Hz

a. Jaką długość powinna mieć rura jednostronnie zamknięta w dniu, w którym temperatura powietrza wynosi $22{,}0\,^\circ\mathrm{C}$, jeśli jej częstotliwość podstawowa wynosi 128 Hz?

b. Jaka jest częstotliwość czwartego alikwota?

Strategia rozwiązania

Długość rury L można wyznaczyć z zależności $f_n = nv/(4L)$, ale wcześniej należy wyznaczyć prędkość dźwięku v.

Rozwiązanie

a. Określ znane wielkości: częstotliwość podstawowa wynosi 128 Hz, a temperatura powietrza wynosi $22{,}0\,^\circ\mathrm{C}$.
Skorzystaj ze wzoru $f_n = nv/(4L)$, aby wyznaczyć częstotliwość podstawową ($n = 1$),

$$f_1 = \frac{v}{4L}.$$

Przekształć równanie do postaci:

$$L = \frac{v}{4f_1}.$$

Oblicz prędkość dźwięku, korzystając ze wzoru $v = 331\ \mathrm{m/s}\sqrt{T/273\ \mathrm{K}}$,

$$v = 331\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\sqrt{\frac{295\ \mathrm{K}}{273\ \mathrm{K}}} = 344\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Podstaw wartości prędkości dźwięku oraz częstotliwości do wyrażenia na L.

$$L = \frac{v}{4f_1} = \frac{344\ \mathrm{m/s}}{4 \cdot 128\ \mathrm{Hz}} = 0{,}672\ \mathrm{m}$$

b. Określ znane wielkości: dla pierwszego alikwota $n = 3$, dla drugiego alikwota $n = 5$, dla trzeciego alikwota $n = 7$ i dla czwartego alikwota $n = 9$.
Podstaw wartość dla czwartego alikwota do wzoru $f_n = nv/(4L)$

$$f_9 = 9\frac{v}{4L} = 9f_1 = 1{,}15\ \mathrm{kHz}.$$

Znaczenie

Wiele instrumentów dętych to zmodyfikowane rury wyposażone w otwory, zawory i inne urządzenia służące do zmiany długości słupa powietrza rezonansowego, a tym samym częstotliwości generowanego dźwięku. Rury, z których zbudowane są róg lub tuba, muszą być bardzo długie, by wytwarzały niskie częstotliwości. Ze względów praktycznych rury zwijane są więc w pętle. Niezależnie od tego, w jaki sposób pojawiają się alikwoty, czy w prostej rurze, czy w instrumencie muzycznym, dźwięk zależy od tego, w jaki sposób następuje stymulowanie drgań oraz jaki jest kształt rezonatora. Na przykład puzon nie wytwarza podstawowej częstotliwości, tylko alikwoty.

Jeśli mamy dwie rury z taką samą częstotliwością podstawową, ale jedna z nich jest jednostronnie zamknięta, a druga obustronnie otwarta, ich dźwięki brzmią inaczej, ponieważ mają różne alikwoty. Na przykład środkowe C grane na rurze otwartej brzmiałoby głośniej, ponieważ ma parzyste i nieparzyste wielokrotności częstotliwości podstawowej. Zamknięta rura ma tylko nieparzyste wielokrotności.

Rezonans

Rezonanse powstają w różnych układach, np. strunach, słupach powietrznych, atomach. W poprzednich rozdziałach powiedzieliśmy, że rezonans powstaje w wyniku pobudzenia układu siłą wymuszającą z częstotliwością równą częstotliwości podstawowej. Amplituda tych drgań gwałtownie rośnie, aż do momentu, gdy prawo Hooke’a dla tego układu przestanie obowiązywać. Przykładem tego jest np. dźwięk celowo zniekształcony w niektórych rodzajach muzyki rockowej.

Instrumenty dęte wykorzystują rezonans słupa powietrza do wzmocnienia tonów generowanych przez usta lub drgające trzciny. Inne instrumenty wykorzystują rezonans do wzmocnienia dźwięków w bardzo sprytny sposób. Rysunek 17.27 prezentuje skrzypce i gitarę, które mają pudła rezonansowe, ale o różnych kształtach, co sprawia, że mają różną strukturę alikwotów. Wibrująca struna generuje dźwięk, który rezonuje w pudle rezonansowym, wzmacniając w ten sposób dźwięk i tworząc efekty, które nadają instrumentowi charakterystyczną barwę. Im bardziej skomplikowany jest kształt pudła rezonansowego, tym większa jest jego zdolność do rezonowania w szerokim zakresie częstotliwości. Marimba, którą przedstawiono na Rysunku 17.28, wykorzystuje kotły lub gurdy poniżej drewnianych listew, aby wzmocnić ich dźwięki. Rezonans kotła może być regulowany przez dolanie wody.


(a)


(b)

Rysunek 17.27 Instrumenty strunowe takie jak skrzypce (a) lub gitary (b) wykorzystują rezonans w swoich pudłach rezonansowych w celu wzmocnienia i wzbogacenia dźwięku wygenerowanego przez struny. Mostek i progi pozwalają skierować dźwięk drgającej struny do pudła rezonansowego i powietrza. (Źródło: praca Feliciano Guimaresa (a); praca Steva Snodgrassa (b))



Rysunek 17.28 Rezonans był używany w instrumentach muzycznych od czasów prehistorycznych. Marimba wykorzystuje gurdy jako komory rezonansowe wzmacniające dźwięk. (Źródło: „APC Events”/Flickr)

W naszych rozważaniach podkreślaliśmy zastosowanie rezonansu i fal stojących, ale teorie te odnoszą się do każdego układu mającego cechy falowe. Drgające struny na przykład rezonują i posiadają częstotliwości podstawowe i alikwoty podobne do słupa powietrza. Bardziej subtelne są drgania atomów na skutek natury falowej elektronów. Ich orbity mogą być postrzegane jako fale stojące, które mają częstotliwość podstawową (stan podstawowy) i alikwoty (stan wzbudzenia). To fascynujące, że charakterystyka fal ma zastosowanie w szerokim zakresie układów fizycznych.

17.6 | Dudnienia

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- ustalać częstotliwość dudnienia, wytworzonego przez dwie fale dźwiękowe różniące się częstotliwością;
- opisywać mechanizm powstawania dudnień w instrumentach muzycznych.

Badania o muzyce dostarczają wielu przykładów superpozycji fal oraz konstruktywnej i destrukcyjnej interferencji. Jest niewiele przykładów muzyki wykonywanej przez jedno źródło, generujące jedną częstotliwość przez dłuższy czas. Prawdopodobnie zgodzisz się z tym, że pojedyncza częstotliwość grana przez dłuższy czas jest nudna i irytująca, podobnie jak dźwięk silnika samolotu czy głośnego wentylatora. Muzyka jest przyjemna i ciekawa dzięki mieszaniu się różnych częstotliwości różnych instrumentów i głosów.

Ciekawym zjawiskiem, które występuje w wyniku konstruktywnej i destrukcyjnej interferencji dwóch lub więcej częstotliwości dźwięku, jest zjawisko **dudnień** (ang. **beats**). Jeśli dwa dźwięki różnią się częstotliwością, fala wypadkowa może być zapisana jako:

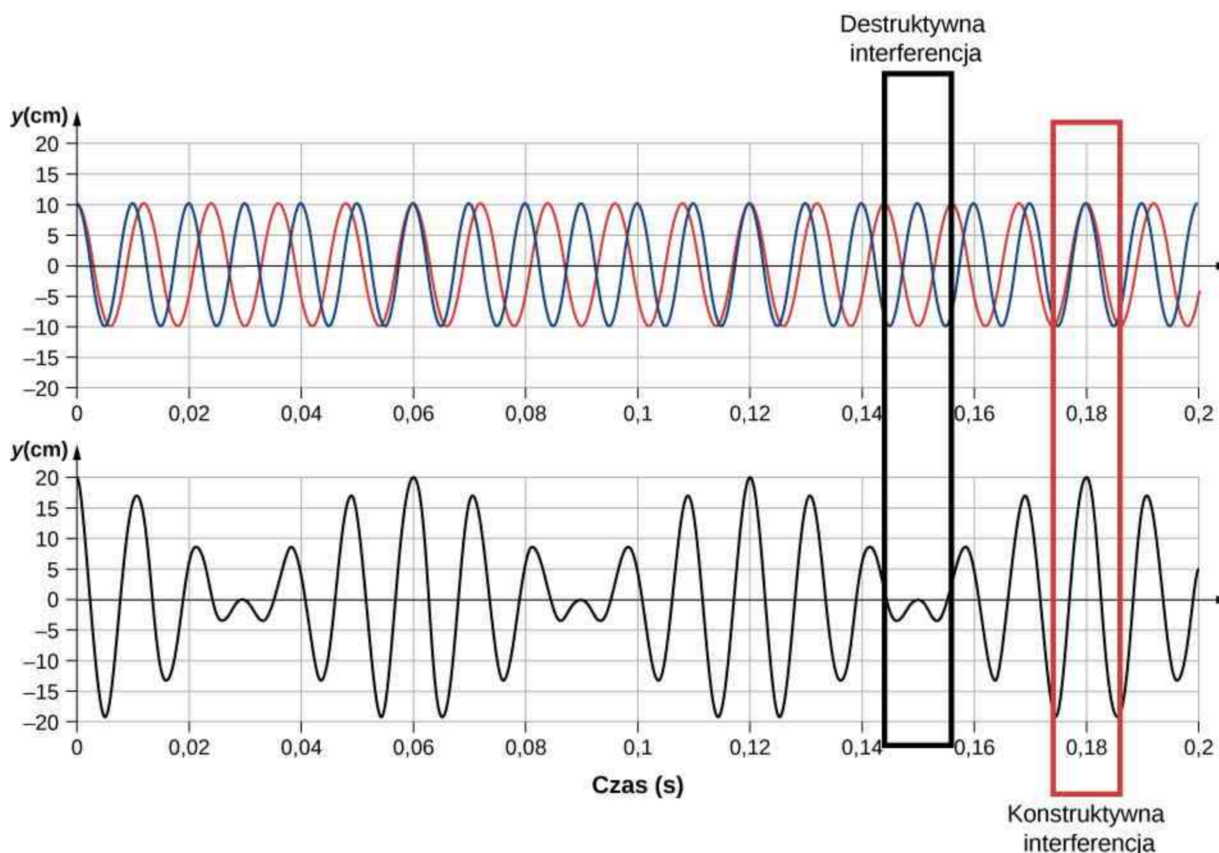
$$y_1 = A\cos(k_1 x - 2\pi f_1 t) \quad \text{oraz} \quad y_2 = A\cos(k_2 x - 2\pi f_2 t).$$

Wykorzystując znany z trygonometrii wzór $\cos u + \cos v = 2\cos((u+v)/2)\cos((u-v)/2)$, a następnie ustalając położenie punktu odniesienia $x = 0\text{ m}$ w przestrzeni, możemy wyznaczyć punkt w przestrzeni, w którym występuje superpozycja dwóch fal dźwiękowych, która jest równa:

$$y(t) = 2A\cos(2\pi f_{\text{średnia}}t)\cos\left(2\pi\left(\frac{|f_2 - f_1|}{2}\right)t\right),$$

gdzie **częstotliwość dudnień** (ang. **beat frequency**) jest równa:

$$f_{\text{dudnienia}} = |f_2 - f_1|. \tag{17.17}$$



Rysunek 17.29 Dudnienia powstałe na skutek konstruktywnej i destrukcyjnej interferencji dwóch fal dźwiękowych różniących się częstotliwościami.

Dudnienia te mogą być pożyteczne dla stroicieli fortepianów. Widełki stroikowe są pobudzone do drgań, podobnie jak dźwięk na fortepianie. Gdy stroiciel dostraja struny fortepianu, słyszy dudnienia o malejącej częstotliwość wynikające z wyrównywania częstości struny z częstotliwością generowaną przez widełki stroikowe.

Przykład 17.7

Znajdź częstotliwość dudnień pomiędzy dwoma kamertonami

Jaka jest częstotliwość dudnień, gdy dwa kamertony o częstotliwości 256 Hz i 512 Hz pobudzone są jednocześnie?

Strategia rozwiązania

Częstotliwość dudnień jest równa różnicy dwóch częstotliwości.

Rozwiązanie

Korzystamy z $f_{\text{dudnienia}} = |f_2 - f_1|$:

$$|f_2 - f_1| = 512\,\text{Hz} - 256\,\text{Hz} = 256\,\text{Hz}.$$

Znaczenie

Częstotliwość dudnień jest modułem różnicy dwóch częstotliwości. Częstotliwość ujemna nie miałaby sensu.



17.8 Sprawdź, czy rozumiesz. Co się stanie, jeśli więcej niż dwie częstotliwości będą interferować? Przeanalizuj trzy częstotliwości.

Badanie superpozycji różnych fal ma wiele interesujących zastosowań poza badaniami dźwięku. W dalszych rozdziałach omówimy właściwości falowe cząstek. Cząstki mogą być modelowane jako „pakiety falowe”, które wynikają z superpozycji różnych fal, a cząstka porusza się z „prędkością grupową” pakietu falowego.

17.7 | Efekt Dopplera

Cel dydaktyczny

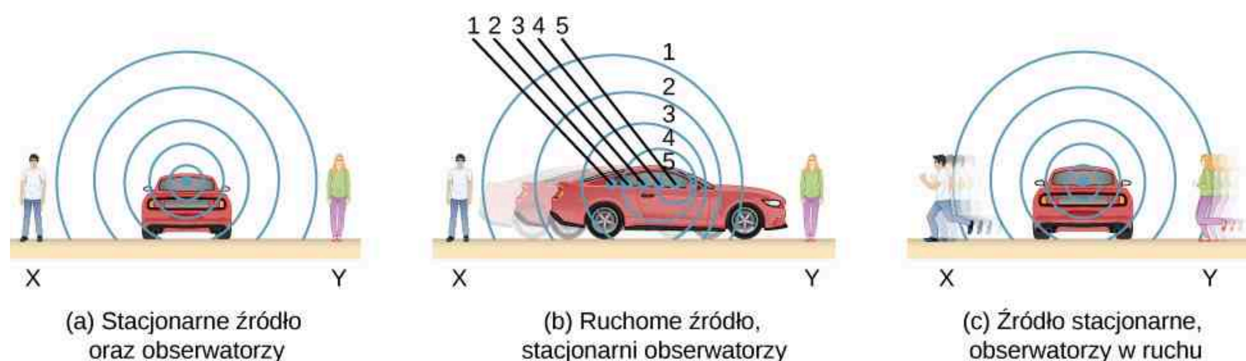
W tym podrozdziale nauczysz się:

- wyjaśniać zmianę obserwowanej częstotliwości w sytuacji, gdy źródło dźwięku zbliża się do obserwatora lub oddala się od niego;
- wyjaśniać zmianę obserwowanej częstotliwości w sytuacji, gdy obserwator zbliża się do źródła dźwięku lub oddala się od niego.

Rejestrowana przez obserwatora zmiana częstotliwości sygnału zbliżającej się i oddalającej się karetki pogotowia albo hałasu wytwarzanego przez głośny motocykl są typowymi przykładami **efektu Dopplera** (ang. **Doppler effect**). Po pierwsze, głośność dźwięku wzrasta, kiedy karetka zbliża się, i maleje, gdy karetka się oddala. Częstotliwość dźwięku syreny, który dociera do ucha obserwatora, rośnie, gdy karetka się zbliża, i maleje, gdy karetka się oddala, także wtedy, gdy syrena generuje dźwięk o stałej częstotliwości. Zmiany są najbardziej odczuwalne, gdy karetka mija obserwatora. Im szybciej karetka się porusza, tym większa jest zmiana częstotliwości syreny. To charakterystyczne przesunięcie częstotliwości słyszymy również dla poruszających się samochodów, samolotów, pociągów.

Efekt Dopplera jest to zmiana odbieranej częstotliwości dźwięku w wyniku ruchu źródła dźwięku lub obserwatora. Dla przykładu, jeśli jedziesz pociągiem i mijasz syrenę ostrzegawczą, wówczas usłyszysz przesunięcie częstotliwości tej syreny w stronę niższych częstotliwości. Zmiana częstotliwości spowodowana względnym ruchem źródła i obserwatora nazywa się **przesunięciem Dopplera** (ang. **Doppler shift**). Efekt Dopplera i przesunięcie Dopplera nazwano tak od nazwiska austriackiego fizyka i matematyka **Christiana Andreasa Dopplera (1803–1853)**, który przeprowadzał eksperymenty z ruchomymi źródłami i obserwatorami. Doppler badał muzyków grających w otwartym pociągu, a także grających obok torów kolejowych, gdy pociąg przejeżdżał. Ich muzykę obserwowano zarówno w pociągu, jak i poza nim, mierząc przy tym zmiany częstotliwości.

Co jest przyczyną przesunięcia Dopplera? Rysunek 17.30 pokazuje fale dźwiękowe wygenerowane przez stacjonarne i poruszające się źródło dźwięku w nieruchomej masie powietrza. Każde zaburzenie rozchodzi się sferycznie od punktu, z którego zostało wyemitowane. Jeśli źródło jest nieruchome, to wszystkie powierzchnie sferyczne, które reprezentują punkty zagęszczeń powietrza, są współśrodkowe, a obserwatorzy stacjonarni znajdujący się po obu stronach słyszą dźwięk o takiej samej długości i częstotliwości fali, jaki został wyemitowany przez źródło (przypadek (a)). Jeśli źródło się porusza, sytuacja jest inna. Każde zaburzenie powietrza pochodzi z określonego punktu, z którego zostało wyemitowane, ale punkt ten przemieszcza się. Ruch punktu emisji powoduje, że powierzchnie fazowe są bliżej siebie przed punktem emisji i bardziej oddalone od siebie po drugiej stronie. W ten sposób długość fali jest krótsza w kierunku, w którym źródło się porusza (z prawej strony przypadku (b)) i dłuższa w kierunku przeciwnym (po lewej stronie przypadku (b)). Jeśli obserwator się porusza, jak to pokazano w przypadku (c), to częstotliwość rejestrowanych zmian ciśnienia powietrza także się zmienia. Obserwator poruszający się w kierunku źródła odbiera je z wyższą częstotliwością, a osoba, która oddala się od źródła, która oddala się – rejestruje niższą częstotliwość.



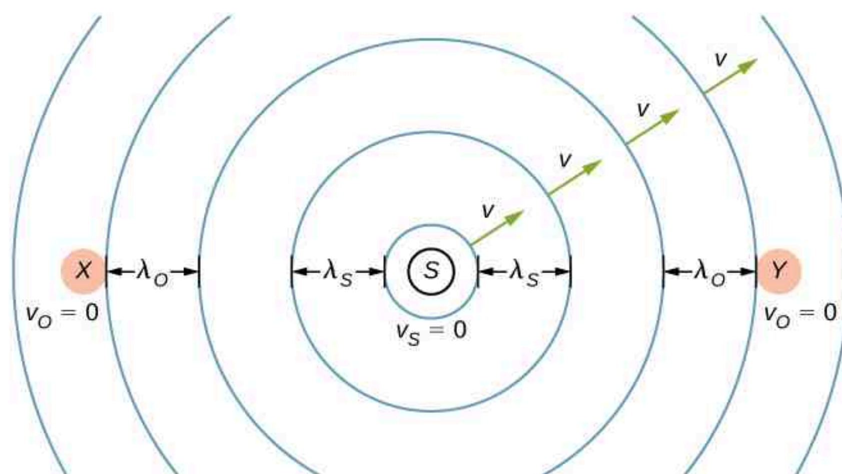
Rysunek 17.30 Dźwięki wygenerowane przez źródło rozchodzą się sferycznie we wszystkich kierunkach. (a) Jeśli źródło i obserwatorzy oraz atmosfera są nieruchome, długości fal oraz częstotliwości są takie same we wszystkich kierunkach i dla obu obserwatorów. (b) Dźwięki wyemitowane przez poruszające się w prawą stronę źródło rozchodzą się we wszystkich kierunkach. Długość fali zmniejsza się i w konsekwencji częstotliwość wzrasta w kierunku ruchu źródła. W ten sposób obserwator znajdujący się po prawej stronie źródła usłyszy dźwięk o wyższej częstotliwości. Przeciwnie, obserwator po drugiej stronie źródła dźwięku usłyszy dźwięk o niższej częstotliwości, ponieważ długość fali wzrasta. (c) Taki sam efekt występuje, gdy obserwatorzy poruszają się względem źródła dźwięku. Ruch w kierunku źródła dźwięku powoduje zwiększenie częstotliwości, gdyż obserwator z prawej strony przechodzi przez większą liczbę grzbietów fal niż wówczas, gdyby był nieruchomy. Ruch w przeciwnym kierunku (oddalanie się od źródła) zmniejsza częstotliwość, obserwator z lewej strony pokonuje mniejszą liczbę grzbietów fal.

Wiemy, że długość fali i częstotliwość związane są zależnością $v = f\lambda$, gdzie v jest prędkością dźwięku. Dźwięk rozchodzi się w ośrodku i ma taką samą prędkość v, niezależnie od tego, czy źródło dźwięku się porusza, czy nie. Zatem f pomnożone przez λ jest stałe. Ponieważ obserwator z prawej strony z przypadku (b) odbiera falę o krótszej długości, jej częstotliwość jest wyższa. Podobnie obserwator z lewej strony odbiera falę o dłuższej długości, a zatem słyszy dźwięk o niższej częstotliwości. Taka sama sytuacja występuje w przypadku (c). Wyższą częstotliwość odbiera obserwator poruszający się w stronę źródła, a niższą obserwator oddalający się od źródła. W ogólnym przypadku względny ruch przybliżający źródło i obserwatora zwiększa odbieraną częstotliwość. Względny ruch oddalający obniża częstotliwość. Im większa względna prędkość, tym efekt większy.

Efekt Dopplera występuje nie tylko dla dźwięku, ale dla każdej fali, w której występuje względny ruch pomiędzy obserwatorem a źródłem. Przesunięcia Dopplera występują na przykład na częstotliwościach akustycznych, optycznych i mechanicznych (falach wodnych). Przesunięcie Dopplera może być wykorzystane do wyznaczenia prędkości, np. w diagnostyce medycznej, gdy ultradźwięki odbijają się od krwi. Względne prędkości gwiazd i galaktyk są wyznaczane na podstawie przesunięcia częstotliwości światła odbitego od tych obiektów i mówią wiele na temat początków Wszechświata. Współczesna fizyka została wzbogacona obserwacjami wykorzystującymi przesunięcia Dopplera.

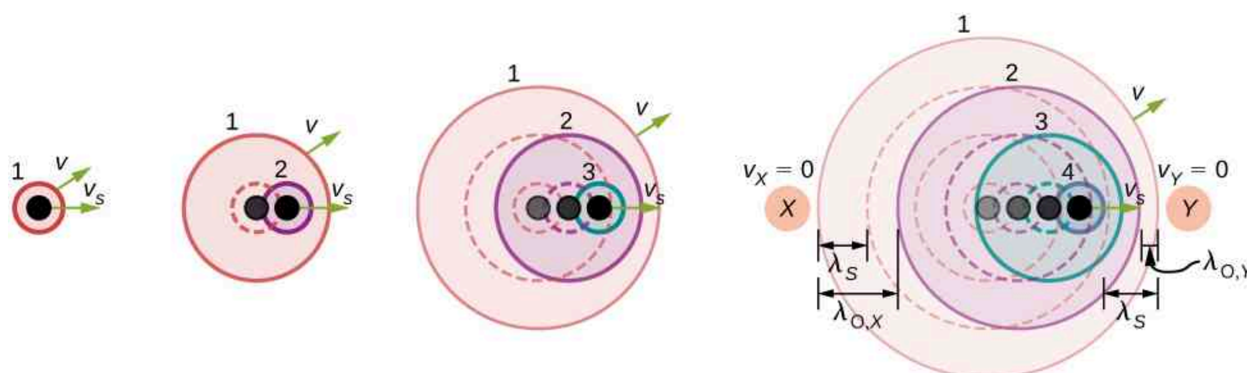
Opis odbieranej częstotliwości na skutek przesunięcia Dopplera

Rozważmy dwóch nieruchomych obserwatorów X i Y na Rysunku 17.31, zlokalizowanych po obu stronach nieruchomego źródła dźwięku. Każdy obserwator słyszy taką samą częstotliwość, równą tej generowanej przez stacjonarne źródło.



Rysunek 17.31 Nieruchome źródło dźwięku emituje fale akustyczne o stałej częstotliwości f_s i stałej długości fali λ_s oraz prędkości dźwięku v. Dwóch nieruchomych obserwatorów X i Y, po każdej stronie źródła, rejestrują częstotliwość $f_o = f_s$ i długości fali $\lambda_o = \lambda_s$.

Rozważmy teraz nieruchomego obserwatora X z ruchomym źródłem oddalającym się od obserwatora ze stałą prędkością $v_s < v$ (Rysunek 17.32). Dla czasu $t = 0$ źródło emituje falę dźwiękową, zaznaczoną na czarno. Fala ta porusza się z prędkością v. Pozycję fali dźwiękowej dla każdego przedziału czasu T_s pokazano liniami przerywanymi. Po jednym okresie źródło przesunęło się o $\Delta x = v_s T_s$ i emituje drugą falę dźwiękową, która porusza się z prędkością dźwięku. Źródło kontynuuje swój ruch oraz emituje fale dźwiękowe, co pokazano przy pomocy okręgów 3 i 4. Zwróć uwagę, że gdy fale są wyemitowane ze źródła, posiadają centrum w miejscu powstania.



Rysunek 17.32 Źródło poruszające się ze stałą prędkością v_s oddala się od obserwatora X. Ruchome źródło wysyła fale dźwiękowe o stałej częstotliwości f_s, stałej długości fali λ_s, z prędkością dźwięku v. Migawki źródła w przedziale czasu T_s są pokazane jako źródło oddalające się od nieruchomego obserwatora X. Linie ciągłe reprezentują pozycje fal dźwiękowych po czterech okresach od początku emisji. Linie przerywane są wykorzystane do pokazania pozycji fal dla każdego przedziału czasu. Obserwator słyszy dźwięk o długości fal $\lambda_o = \lambda_s + \Delta x = \lambda_s + v_s T_s$.

Korzystając z faktu, że długość fali jest równa prędkości pomnożonej przez okres, a okres jest odwrotnością częstotliwości, możemy wyprowadzić wzór na obserwowaną częstotliwość:

$$\begin{aligned} \lambda_o &= \lambda_s + \Delta x \\ vT_o &= vT_s + v_s T_s \\ \frac{v}{f_o} &= \frac{v}{f_s} + \frac{v_s}{f_s} = \frac{v+v_s}{f_s} \\ f_o &= f_s \left(\frac{v}{v+v_s}\right). \end{aligned}$$

Gdy źródło oddala się od obserwatora, rejestrowana częstotliwość jest niższa niż częstotliwość sygnału wygenerowanego przez źródło.

Rozważmy teraz poruszające się źródło ze stałą prędkością v_s przemieszczające się w kierunku stacjonarnego

obserwatora Y, co pokazano na Rysunku 17.32. Długość fali rejestrowanej przez obserwatora Y wynosi $\lambda_o = \lambda_s - \Delta x = \lambda_s - v_s T_s$. Wykorzystując fakt, że długość fali jest równa prędkości pomnożonej przez okres, a okres jest odwrotnością częstotliwości, możemy wyprowadzić zależność na odbieraną częstotliwość:

$$\begin{aligned} \lambda_o &= \lambda_s - \Delta x \\ vT_o &= vT_s - v_s T_s \\ \frac{v}{f_o} &= \frac{v}{f_s} - \frac{v_s}{f_s} = \frac{v - v_s}{f_s} \\ f_o &= f_s \left(\frac{v}{v - v_s} \right). \end{aligned}$$

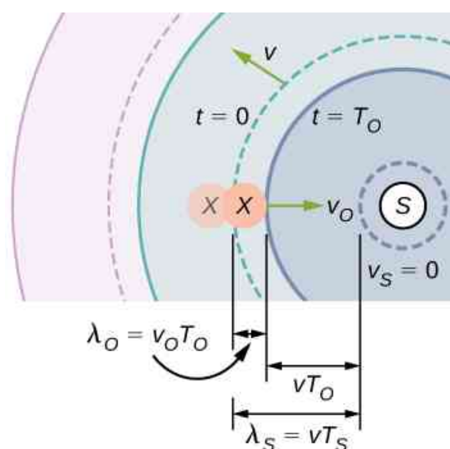
Kiedy źródło się porusza i obserwator jest nieruchomy, rejestrowana przez niego częstotliwość jest równa:

$$f_o = f_s \left(\frac{v}{v \mp v_s} \right), \tag{17.18}$$

gdzie f_o jest częstotliwością rejestrowaną przez nieruchomego obserwatora, f_s jest częstotliwością sygnału wygenerowanego przez poruszające się źródło, v jest prędkością dźwięku, v_s jest stałą prędkością, z jaką porusza się źródło dźwięku, znak dodatni oznacza źródło przybliżające się do obserwatora, a znak minus oddalające się od obserwatora.

Co się dzieje, jeśli obserwator porusza się, a źródło jest nieruchome? Jeśli obserwator przesuwa się w kierunku źródła stacjonarnego, obserwowana częstotliwość jest większa niż częstotliwość źródła. Jeśli obserwator oddala się od źródła stacjonarnego, obserwowana częstotliwość jest niższa niż częstotliwość źródła. Rozważmy obserwatora X na Rysunku 17.33, który przemieszcza się w kierunku źródła stacjonarnego z prędkością v_o. Źródło emituje sygnał o stałej częstotliwości f_s i stałym okresie T_s. Obserwator słyszy pierwszą falę wyemitowaną przez źródło. Jeśli obserwator byłby nieruchomy, czas dla jednej długości fali dźwięku do przejścia powinien być równy okresowi źródła T_s. Ponieważ obserwator porusza się w stronę źródła, czas na przebycie jednej długości fali jest mniejszy niż T_s i wynosi $T_o = T_s - \Delta t$. Dla czasu $t = 0$ obserwator rozpoczyna ruch, spotykając czoło fali i poruszając się dalej w kierunku następnego czoła fali skraca czas jej spotkania. Długość fali obserwatora jest równa długości fali ze źródła, pomniejszonej przez dystans pokonany przez obserwatora. Stąd długość fali ze źródła jest równa odległości przebytej przez obserwatora plus odległość, jaką fala dźwiękowa przebyła do momentu spotkania z obserwatorem:

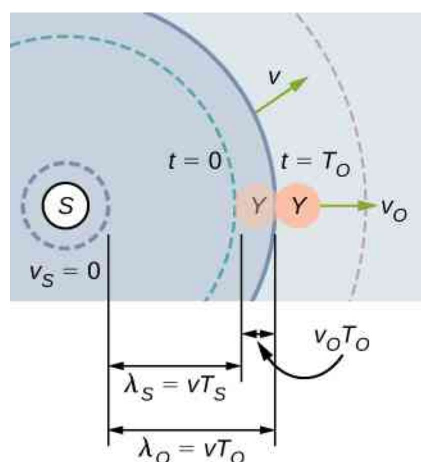
$$\begin{aligned} \lambda_s &= vT_o + v_o T_o \\ vT_s &= (v + v_o)\, T_o \\ v\left(\frac{1}{f_s}\right) &= (v + v_o)\left(\frac{1}{f_o}\right) \\ f_o &= f_s \left(\frac{v + v_o}{v} \right). \end{aligned}$$



Rysunek 17.33 Stacjonarne źródło dźwięku emituje falę dźwiękową o stałej częstotliwości f_s , stałej długości fali λ_s , która porusza się ze stałą prędkością v. Obserwator X porusza się w stronę źródła dźwięku ze stałą prędkością v_o . Na rysunku przedstawiono początkową i końcową pozycję obserwatora X. Obserwator X rejestruje częstotliwość wyższą niż częstotliwość źródłowa. Linie ciągłe pokazują pozycję fali dla $t = 0$. Linie przerywane pokazują pozycje fal dla czasu $t = T_o$.

Jeśli obserwator oddala się od źródła (Rysunek 17.34), rejestrowana częstotliwość może być wyznaczona z:

$$\begin{aligned}
\lambda_s &= vT_o - v_o T_o \\
vT_s &= (v - v_o)\,T_o \\
v\left(\frac{1}{f_s}\right) &= (v - v_o)\left(\frac{1}{f_o}\right) \\
f_o &= f_s\left(\frac{v - v_o}{v}\right).
\end{aligned}$$



Rysunek 17.34 Stacjonarne źródło emituje falę dźwiękową o stałej częstotliwości f_s , stałej długości fali λ_s , która porusza się z prędkością dźwięku v. Obserwator Y oddala się od źródła ze stałą prędkością v_o , a na rysunku pokazano początkowe i końcowe położenie obserwatora Y. Obserwator Y odbiera częstotliwość mniejszą od częstotliwości źródła. Linie ciągłe pokazują położenie fal dla $t = 0$. Linie przerywane pokazują położenie dla $t = T_o$.

Zależności dla obserwatora poruszającego się w kierunku nieruchomego źródła i oddalającego się od tego źródła mogą być połączone w jedno równanie:

$$f_o = f_s \left(\frac{v \pm v_o}{v} \right), \tag{17.19}$$

gdzie f_o jest odbieraną częstotliwością, f_s jest częstotliwością źródłową, a v jest prędkością dźwięku, a v_o jest prędkością obserwatora. Znak dodatni dotyczy sytuacji, gdy obserwator przybliża się do źródła, a znak minus, gdy się oddala.

Równanie 17.18 i Równanie 17.19 mogą być uogólnione jedną zależnością. Znak dodatni w liczniku dotyczy przypadku, gdy obserwator porusza się w stronę źródła itd., patrz Tabela 17.4:

$$f_o = f_s \left(\frac{v \pm v_o}{v \mp v_s} \right), \tag{17.20}$$

Przesunięcie Dopplera $f_o = f_s \left(\frac{v \pm v_o}{v \mp v_s} \right)$	Nieruchomy obserwator	Obserwator poruszający się w stronę źródła	Obserwator oddalający się od źródła
Źródło nieruchome	$f_o = f_s$	$f_o = f_s \left(\frac{v+v_o}{v} \right)$	$f_o = f_s \left(\frac{v-v_o}{v} \right)$
Źródło poruszające się w stronę obserwatora	$f_o = f_s \left(\frac{v}{v-v_s} \right)$	$f_o = f_s \left(\frac{v+v_o}{v-v_s} \right)$	$f_o = f_s \left(\frac{v-v_o}{v-v_s} \right)$
Źródło oddalające się od obserwatora	$f_o = f_s \left(\frac{v}{v+v_s} \right)$	$f_o = f_s \left(\frac{v+v_o}{v+v_s} \right)$	$f_o = f_s \left(\frac{v-v_o}{v+v_s} \right)$

Tabela 17.4

gdzie f_o jest rejestrowaną częstotliwością, f_s jest częstotliwością źródłową, v jest prędkością dźwięku, v_o oznacza prędkość obserwatora, v_s jest prędkością źródła, znak plus oznacza przybliżanie się, a znak minus oddalanie.



Efekt Dopplera związany jest z ruchem, dlatego film dobrze wizualizuje efekty związane z poruszającym się obserwatorem lub źródłem dźwięku. Ten film (https://openstaxcollege.org/l/21doppler) pokazuje przypadki ruchomego źródła i stacjonarnego obserwatora oraz poruszającego się obserwatora i stacjonarnego źródła. Omówiono również efekt Dopplera dla fal świetlnych.

Przykład 17.8

Obliczanie efektu Dopplera

Załóżmy, że pociąg, który ma sygnał (klakson) o częstości 150 Hz, porusza się z prędkością 35,0 m/s w dzień, w którym prędkość dźwięku wynosi 340 m/s.

a. Jaką częstotliwość odbiera osoba stojąca przy torach, gdy pociąg się zbliża i gdy się oddala?

b. Jaką częstotliwość obserwuje inżynier podróżujący pociągiem?

Strategia rozwiązania

Aby wyznaczyć rejestrowaną częstotliwość dla przypadku (a), należy wykorzystać zależność $f_o = f_s v / (v \mp v_s)$, ponieważ źródło znajduje się w ruchu. Znak minus dotyczy zbliżającego się pociągu, a znak plus – oddalającego się pociągu. W przypadku (b) występują dwa przesunięcia Dopplera: jedno związane z poruszającym się źródłem, i drugie związane z poruszającym się obserwatorem.

Rozwiązanie

a. Podstaw znane wartości do wzoru $f_o = f_s v / (v \mp v_s)$:

$$f_o = f_s \left(\frac{v}{v - v_s} \right) = 150\,\text{Hz} \cdot \frac{340\,\text{m/s}}{340\,\text{m/s} - 35{,}0\,\text{m/s}}.$$

Oblicz częstotliwość odbieraną przez nieruchomego obserwatora, gdy pociąg się zbliża:

$$f_o = 150\,\text{Hz} \cdot 1{,}11 = 167\,\text{Hz}.$$

Wykorzystaj tą samą zależność ze znakiem plus, aby wyznaczyć częstotliwość rejestrowaną przez nieruchomego obserwatora dla przypadku, gdy pociąg się oddala:

b. $$f_o = f_s \left(\frac{v}{v + v_s} \right) = 150\,\text{Hz} \cdot \frac{340\,\text{m/s}}{340\,\text{m/s} + 35{,}0\,\text{m/s}}.$$

Oblicz drugą częstotliwość:

$$f_o = 150\,\text{Hz} \cdot 0{,}907 = 136\,\text{Hz}.$$

c. Określ znane wielkości:

- Wydaje się, że inżynier pociągu usłyszy taką samą częstotliwość sygnału jak tę wyemitowaną przez klakson, ponieważ względne prędkości pomiędzy nimi wynoszą zero.
- Względem ośrodka (powietrze) prędkości wynoszą $v_s = v_o = 35{,}0$ m/s.
- Pierwsze przesunięcie Dopplera związane jest z poruszającym się obserwatorem, natomiast drugie z poruszającym się źródłem.

Skorzystaj z poniższej zależności:

$$f_o = \left[f_s \left(\frac{v \pm v_o}{v} \right) \right] \left(\frac{v}{v \mp v_s} \right).$$

Wielkość w nawiasie kwadratowym przedstawia przesunięcie Dopplera związane z poruszającym się obserwatorem. Czynnik po prawej opisuje efekt związany z ruchem źródła.
Ponieważ inżynier w pociągu porusza się w kierunku do klaksonu, musimy wykorzystać znak plus dla v_o, ale ponieważ klakson porusza się w kierunku przeciwnym (od inżyniera), wykorzystujemy również znak plus dla v_s.
Jednak pociąg przewozi zarówno inżyniera, jak i klakson z taką samą prędkością, tj. $v_s = v_o$. W efekcie otrzymujemy f_o:

$$f_o = f_s.$$

Znaczenie

Dla przypadku, gdy źródło i obserwator nie poruszają się razem, wyznaczone wartości są prawidłowe, gdy źródło (w tym przypadku pociąg) jest wystarczająco daleko, aby uznać, że ruch źródła i obserwatora odbywa się w linii łączącej źródło i obserwatora. W obu przypadkach przesunięcie jest znaczące i łatwo zauważalne. Zauważ, że przesunięcie wynosi 17 Hz dla ruchu zbliżającego i 14 Hz dla oddalającego się. Przesunięcia nie są więc symetryczne.

W przypadku inżyniera jadącego w pociągu oczekujemy, że nie ma zmian częstotliwości, ponieważ źródło i obserwator poruszają się razem. Jest to zgodne z naszym doświadczeniem. Na przykład nie ma przesunięcia Dopplera w częstotliwości głosów w rozmowie między kierowcą a pasażerem na motocyklu. Ludzie rozmawiający, gdy wiatr przenosi powietrze między nimi, również nie obserwują przesunięcia Dopplera. Kluczowym momentem jest tutaj to, że źródło i obserwator nie poruszają się względem siebie nawzajem.



17.9 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Opisz sytuację ze swojego życia, gdy efekt Dopplera może pomóc ci podczas jazdy samochodem lub gdy poruszasz się w pobliżu drogi.

Efekt Dopplera i przesunięcie Dopplera mają wiele ważnych zastosowań w nauce i inżynierii. Na przykład przesu-

nięcie dopplerowskie w ultrasonografie może być wykorzystane do pomiaru prędkości krwi, a policja wykorzystuje przesunięcie Dopplera w radarze (mikrofale) do pomiaru prędkości samochodów. W meteorologii przesunięcie dopplerowskie służy do śledzenia ruchu chmur burzowych; taki „Radar Dopplerowski” może określić prędkość i kierunek deszczu lub śniegu we froncie pogodowym. W astronomii możemy zbadać światło emitowane przez odległe galaktyki i określić ich prędkość względem naszej. Kiedy galaktyki oddalają się od nas, widmo ich światła zostaje przesunięte w kierunku niższych częstotliwości, a więc zwiększa się długość fali – jest to tak zwane **przesunięcie ku czerwieni** (ang. **red shift**). Takie informacje z odległych galaktykach pozwoliły nam oszacować wiek Wszechświata (od Wielkiego Wybuchu) na około 14 miliardów lat.

17.8 | Fale uderzeniowe

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- wyjaśniać mechanizm powstawania gromów dźwiękowych;
- opisywać różnicę między gromem dźwiękowym a falą uderzeniową;
- opisywać falę dziobową.

Omawiając efekt Dopplera ruchomego źródła i obserwatora stacjonarnego, rozważaliśmy tylko przypadki, w których źródło poruszało się z prędkością mniejszą od prędkości dźwięku. Przypomnijmy, że odbierana częstotliwość sygnału generowanego przez poruszające się w stronę obserwatora źródło wynosi $f_o = f_s v / (v - v_s)$. Gdy prędkość źródła dźwięku zbliża się do prędkości dźwięku, rejestrowana przez obserwatora częstotliwość wzrasta. Zgodnie ze wzorem, jeśli źródło porusza się z prędkością dźwięku, mianownik jest równy zero, co sugeruje, że odbierana częstotliwość jest nieskończona. Jeśli źródło porusza się z prędkością większą niż prędkość dźwięku, rejestrowana częstotliwość jest ujemna.

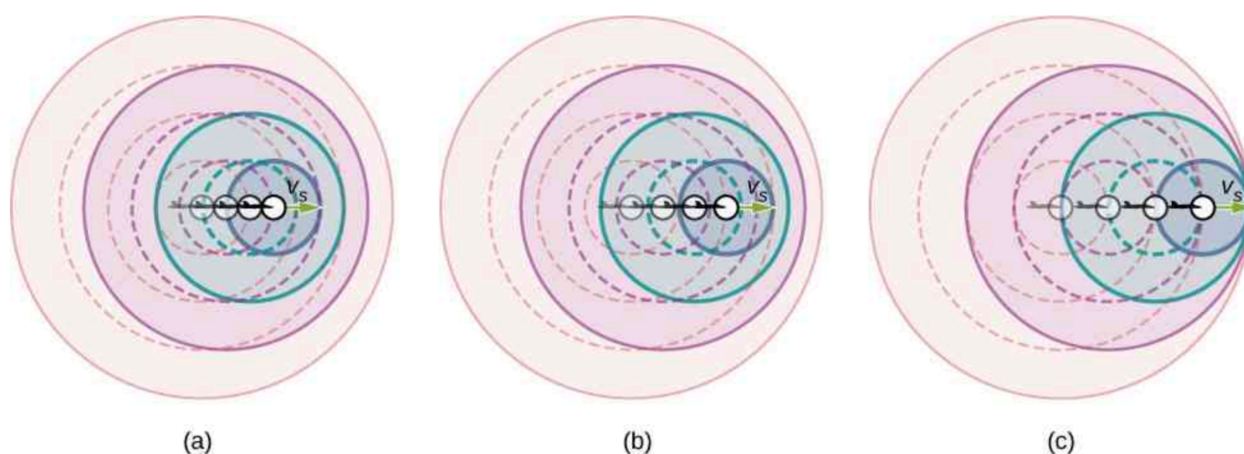
Co to może oznaczać? Co się dzieje, gdy prędkość źródła zbliża się do prędkości dźwięku? Kiedyś niektórzy naukowcy uważali, że powstaje wtedy, na skutek konstruktywnej interferencji, fala dźwiękowa o tak dużych wartościach ciśnienia, że oznaczałoby to brak możliwości, aby samolot przekroczył prędkość dźwięku, ponieważ ciśnienie to wystarczyłoby do zniszczenia samolotu. Ale dziś samoloty zwykle latają z prędkością wyższą niż prędkość dźwięku. 28 lipca 1976 kapitan Eldon W. Joersz oraz major George T. Morgan przelecieli samolotem SR-71 Blackbird #61-7958 z prędkością 3529,60 km/h, czyli liczba Macha wynosiła 2,85. **Liczba Macha** (ang. **Mach number**) jest równa prędkości źródła podzielonej przez prędkość dźwięku:

$$M = \frac{v_{\text{s}}}{v}. \tag{17.21}$$

Przekonasz się, że najbardziej interesujące zjawiska występują wtedy, gdy prędkość źródła zbliża się do prędkości dźwięku i ją przekracza.

Efekt Dopplera i wysoka prędkość

Co się dzieje z dźwiękiem wytwarzanym przez ruchome źródło, na przykład przez samolot odrzutowy, który zbliża się lub nawet przekracza prędkość dźwięku? Odpowiedź na to pytanie dotyczy nie tylko dźwięku, lecz także wszystkich innych fal. Załóżmy, że samolot odrzutowy zbliża się do ciebie, emitując dźwięk o częstotliwości f_{s}. Im większa jest prędkość samolotu v_{s}, tym większe jest przesunięcie dopplerowskie i wyższa rejestrowana częstotliwość f_{o} (Rysunek 17.35).

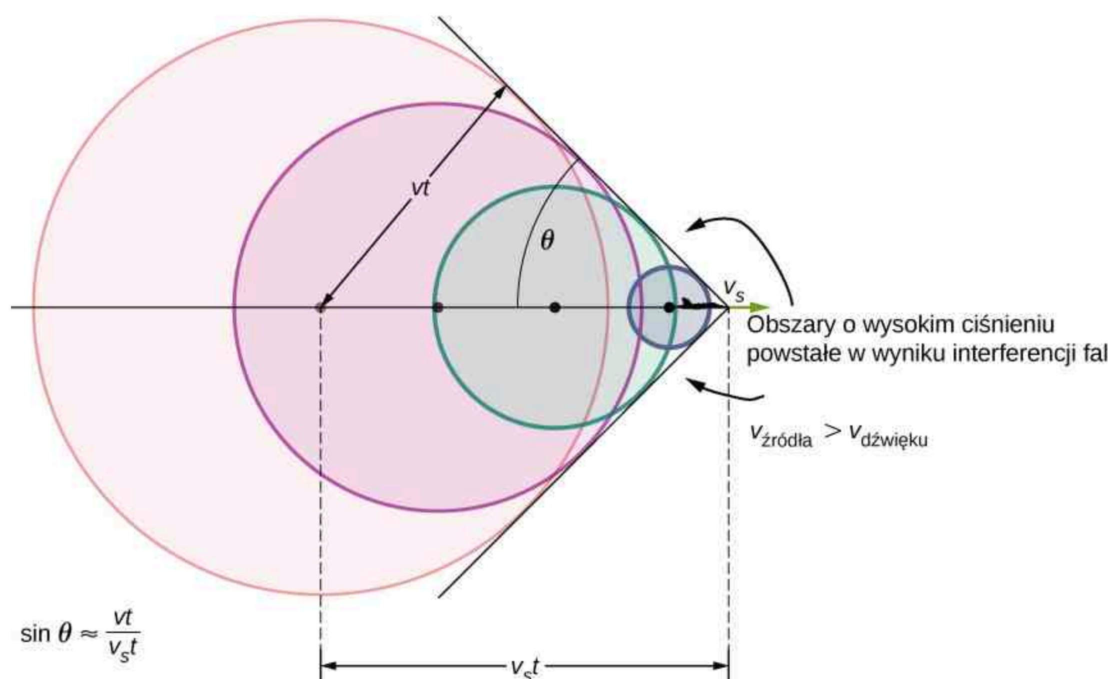


Rysunek 17.35 Ze względu na przesunięcie dopplerowskie, gdy ruchome źródło zbliża się do obserwatora stacjonarnego, odbierana częstotliwość jest wyższa niż częstotliwość źródłowa. Im szybciej porusza się źródło, tym wyższa jest rejestrowana częstotliwość. Na rysunku źródło dla przypadku (b) porusza się szybciej niż źródło dla przypadku (a). Pokazane są cztery chwile czasowe, pierwsze trzy przedstawione jako linie przerywane. (c) Jeśli źródło porusza się z prędkością dźwięku, każda fala oddziałuje z poprzednią, a obserwator słyszy je w tym samym momencie.

Gdy v_s zbliża się do prędkości dźwięku, f_o dąży do nieskończoności, ponieważ mianownik $f_o = f_s v / (v \mp v_s)$ dąży do zera. Dla prędkości dźwięku ten wynik oznacza, że każda kolejna fala oddziałuje z poprzednią, ponieważ źródło porusza się z prędkością dźwięku. Obserwator odbiera je wszystkie w tym samym momencie, więc częstotliwość jest nieskończona (diagram na Rysunku 17.35 (c)).

Fale uderzeniowe i uderzenia dźwiękowe

Jeśli źródło porusza się z prędkością większą niż prędkość dźwięku, obserwator usłyszy dźwięk dopiero, gdy źródło go minie. Wtedy docierający z opóźnieniem dźwięk zbliżającego się źródła, miesza się z dźwiękiem generowanym przez oddalające się źródło. Na wskutek nałożenia się tych fal zachodzi ciekawe zjawisko – powstaje fala uderzeniowa (Rysunek 17.36).



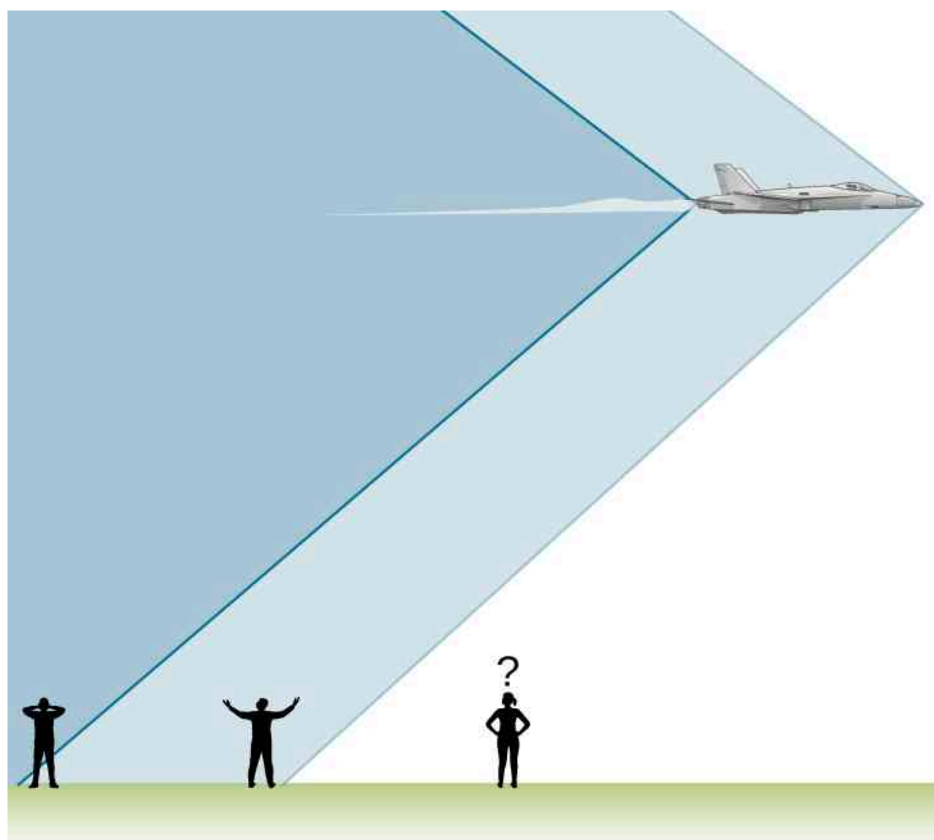
Rysunek 17.36 Fale dźwiękowe generowane przez źródło propagują się z większą prędkością niż prędkość dźwięku rozprzestrzeniającego się sferycznie z punktu, w którym został wygenerowany, przy czym źródło oddala się od każdej z tych fal. Konstruktywna interferencja wzdłuż przedstawionych linii (w rzeczywistości stożka w trzech wymiarach) sprawia, że powstaje fala uderzeniowa (ang. *sonic boom*). Im wyższa prędkość źródła, tym mniejszy kąt θ.

Konstruktywna interferencja fal dźwiękowych docierających równocześnie do linii pokazanych na rysunku (stożek w trzech wymiarach). Ta superpozycja tworzy zakłócenie zwane **falą uderzeniową** (ang. **shock wave**). Konstruktywna interferencja dźwięku występuje, gdy obiekt porusza się z prędkością większą niż prędkość dźwięku. Wewnątrz stożka występuje destruktywna interferencja, przez co natężenie dźwięku jest znacznie mniejsze niż na powierzchni fali uderzeniowej. Kąt fali uderzeniowej można znaleźć na podstawie geometrii zjawiska. W czasie t źródło przesunęło się o $v_s t$, fala dźwiękowa przemieściła się z tego samego punktu na odległość vt, a kąt może być wyznaczony z zależności $\sin\theta = \frac{vt}{v_s t} = \frac{v}{v_s}$. Liczbę Macha definiuje się jako v_s / v, co oznacza, że sinus kąta jest odwrotnością liczby Macha,

$$\sin\theta = \frac{v}{v_s} = \frac{1}{M}. \quad (17.22)$$

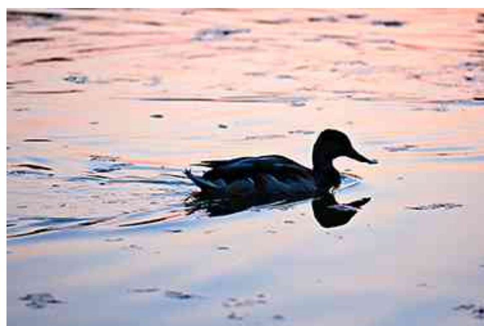
Z pewnością słyszałeś określenie **grom dźwiękowy** (ang. **sonic boom**). Powszechnym i błędnym wyobrażeniem jest to, że grom dźwiękowy występuje, gdy samolot przekracza barierę dźwięku; tzn. przyspiesza do prędkości większej niż prędkość dźwięku. W rzeczywistości grom dźwiękowy występuje, gdy fala uderzeniowa dociera do powierzchni ziemi.

Samolot tworzy dwie fale uderzeniowe, przednią i tylną (Rysunek 17.37). Podczas oglądania transmisji telewizyjnej z lądowań statków kosmicznych można było często usłyszeć dwa wyraźne huki. Były one odseparowane od siebie o czas potrzebny na dotarcie obu fal do określonego punktu. Obserwatorzy na ziemi często nie widzą samolotu tworzącego grom dźwiękowy, ponieważ znika on, zanim fala uderzeniowa dotrze do nich, co pokazano na rysunku. Jeśli samolot leci na niskiej wysokości, ciśnienie gromu dźwiękowego może być niszczące, może na przykład wybić szyby. Ze względu na niszczycielskie działanie gromu dźwiękowego loty samolotów ponaddźwiękowych są zabronione nad terenami zaludnionymi.



Rysunek 17.37 Dwa gromy dźwiękowe, których doświadczyli obserwatorzy stojący na ziemi, tworzone są przez przód i ogon samolotu. Falę dźwiękową propagującą się nad powierzchnią ziemi można usłyszeć w momencie, gdy samolot już minął obserwatorów.

Fale uderzeniowe są przykładem szerszego zjawiska nazywanego falami dziobowymi. **Fala dziobowa** (ang. **bow wave**), taka jaką pokazano na Rysunku 17.38, tworzona jest, gdy źródło fali porusza się z większą prędkością niż prędkość fali. Fale wodne rozprzestrzeniają się w postaci kręgów od punktu, w którym się tworzą, a fala dziobowa ma kształt litery „V”, i podąża za źródłem. Bardziej skomplikowany kształt (łuk) tworzony jest, gdy cząstka elementarna przemieszcza się przez ośrodek szybciej niż prędkość światła w tym ośrodku. (W próżni maksymalna prędkość światła wynosi $c = 3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ w wodzie prędkość światła jest bliska $0{,}75c$). Jeśli cząstka powoduje emisję światła podczas swojego ruchu, to światło rozprzestrzenia się w postaci stożka pod kątem zależnym od prędkość cząstki, jak pokazano na Rysunku 17.39. Taką falę dziobową nazywa się **promieniowaniem Czerenkowa** (ang. **Cherenkov radiation**) i jest to zjawisko często obserwowane w fizyce cząstek elementarnych.



Rysunek 17.38 Fala dziobowa utworzona przez kaczkę. Konstruktywna interferencja tworzy dużą falę, podczas gdy wewnątrz fali dziobowej występują stosunkowo małe fale, co jest spowodowane destruktywną interferencją. (Źródło: Horia Varlan)



Rysunek 17.39 Niebieski blask w tym reaktorze badawczym to promieniowanie Czerenkowa, wywołane przez cząstki elementarne poruszające się z prędkościami większymi niż prędkość światła w wodzie (Źródło: Urząd Dozoru Jądrowego USA (ang. *U.S. Nuclear Regulatory Commission*)).

PODSUMOWANIE ROZDZIAŁU 17

KLUCZOWE POJĘCIA

alikwoty (ang. overtones) wszystkie częstotliwości rezonansowe wyższe od podstawowej

barwa dźwięku (ang. timbre) mieszanina wielu składowych częstotliwościowych o różnych natężeniach

częstotliwość dudnień (ang. beat frequency) częstotliwość fali wytwarzanej przez fale dźwiękowe, które różnią się częstotliwością w niewielkim zakresie

częstotliwość podstawowa (ang. fundamental frequency) najniższa częstotliwość rezonansowa

dudnienia (ang. beats) konstruktywna i destruktywna interferencja dwóch lub więcej częstotliwości

dźwięk (ang. sound) propagujące zaburzenia ośrodka, które mogą być okresowe i mogą być modelowane jako zmiany ciśnienia powietrza lub drgania cząsteczek

efekt Dopplera (ang. Doppler effect) zmiana rejestrowanej przez obserwatora częstotliwości dźwięku w wyniku ruchu źródła dźwięku lub obserwatora

fala dziobowa (ang. bow wave) zakłócenia w kształcie litery *v* powstałe w sytuacji, gdy źródło dźwięku porusza się szybciej niż prędkość fali

fala uderzeniowa (ang. shock wave) fala, która jest wytwarzana, gdy źródło dźwięku porusza się szybciej niż prędkość dźwięku

fon (ang. phon) jednostka głośności

grom dźwiękowy (ang. sonic boom) głośny hałas, który występuje jako fala uderzeniowa podczas propagacji przy powierzchni ziemi

głośność (ang. loudness) percepcja natężenia dźwięku

harmoniczne (ang. harmonics) termin odnoszący się do częstotliwości podstawowej oraz alikwotów

nuty (ang. musical notes) symbol umożliwiający notację dźwięku muzycznego, określający jego wysokość i czas trwania

poziom ciśnienia akustycznego (ang. sound pressure level) logarytm ze stosunku kwadratu ciśnienia akustycznego odniesionego do kwadratu akustycznego ciśnienia odniesienia

poziom natężenia dźwięku (ang. sound intensity level) bezwymiarowa wielkość określająca poziom dźwięku w odniesieniu do wielkości progowej

przesunięcie Dopplera (ang. Doppler shift) rzeczywista zmiana częstotliwości spowodowana względnym ruchem źródła dźwięku i obserwatora

przetwornik (ang. transducer) urządzenie, które zamienia energię sygnału w energię mierzalną, np. mikrofon zamieniający energię fali akustycznej w energię sygnału elektrycznego

słuch (ang. hearing) percepcja dźwięku

wysokość dźwięku (ang. pitch) percepcja częstotliwości dźwięku

NAJWAŻNIEJSZE WZORY

Ciśnienie fali dźwiękowej	$\Delta P = \Delta P_{\max} \sin(kx \mp \omega t + \phi)$
Przemieszczenie drgających cząsteczek – fala	$s(x, t) = s_{\max} \cos(kx \mp \omega t + \phi)$
Prędkość fali	$v = f\lambda$
Prędkość dźwięku w płynach	$v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}}$
Prędkość dźwięku w ciałach stałych	$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$
Prędkość dźwięku w gazie doskonałym	$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$
Prędkość dźwięku w powietrzu jako funkcja temperatury powietrza	$v = 331 \frac{\text{m}}{\text{s}} \sqrt{\frac{T_{\text{K}}}{273 \text{ K}}} = 331 \frac{\text{m}}{\text{s}} \sqrt{1 + \frac{T_{\text{C}}}{273 ^\circ\text{C}}}$

Spadek natężenia dźwięku ze wzrostem odległości	$I_2 = I_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$
Średnie w czasie natężenie dźwięku	$I = \frac{\langle P \rangle}{A}$
Natężenie dźwięku	$I = \frac{(\Delta p_{\max})^2}{2\rho v}$
Poziom natężenia dźwięku	$\beta = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad [\mathrm{dB}]$
Długości fal, dla których występuje rezonans, w rurze jednostronnie zamkniętej	$\lambda_n = \frac{4}{n}L, \quad n = 1,3,5,\ldots$
Częstotliwości, dla których występuje rezonans, w rurze jednostronnie zamkniętej	$f_n = n\frac{v}{4L}, \quad n = 1,3,5,\ldots$
Długości fal, dla których występuje rezonans, w rurze obustronnie otwartej	$\lambda_n = \frac{2}{n}L, \quad n = 1,2,3,\ldots$
Częstotliwości, dla których występuje rezonans, w rurze obustronnie otwartej	$f_n = n\frac{v}{2L}, \quad n = 1,2,3,\ldots$
Częstotliwość dudnień powstałych z dwóch fal o różnych częstotliwościach	$f_{\text{dudnienia}} = \lvert f_2 - f_1 \rvert$
Rejestrowana częstotliwość dla nieruchomego obserwatora i poruszającego się źródła	$f_o = f_s \left(\frac{v}{v \mp v_s}\right)$
Rejestrowana częstotliwość dla poruszającego się obserwatora i nieruchomego źródła	$f_o = f_s \left(\frac{v \pm v_o}{v}\right)$
Przesunięcie Dopplera dla rejestrowanej częstotliwości	$f_o = f_s \left(\frac{v \pm v_o}{v \mp v_s}\right)$
Liczba Macha	$M = \frac{v_s}{v}$
Sinus kąta uformowanego przez falę uderzeniową	$\sin\theta = \frac{v}{v_s} = \frac{1}{M}$

PODSUMOWANIE

17.1 Fale dźwiękowe

- Dźwięk jest zaburzeniem ośrodka, które przemieszcza się od źródła. Słuch jest percepcją dźwięku.
- Dźwięk może być modelowany przez zmiany ciśnienia lub drgania cząsteczek ośrodka.
- Ludzkie ucho odbiera dźwięki z zakresu częstotliwości od 20 Hz do 20 kHz.

17.2 Prędkość dźwięku

- Prędkość dźwięku zależy od rodzaju i stanu ośrodka.
- W ciałach ciekłych, z powodu braku sił ścinających, fale dźwiękowe są podłużne. W ciałach stałych mogą rozchodzić się fale podłużne i poprzeczne.
- W powietrzu prędkość dźwięku zależy od temperatury T zgodnie ze wzorem

$$v = 331\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\sqrt{\frac{T_K}{273\,\mathrm{K}}} = 331\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\sqrt{1 + \frac{T_C}{273\,^\circ\mathrm{C}}}.$$

- Prędkość v jest taka sama dla wszystkich częstotliwości i długości fal dźwiękowych w powietrzu.

17.3 Natężenie dźwięku

- Natężenie $I = P/A$ dla fali dźwiękowej jest takie samo jak zdefiniowane wcześniej dla innych fal, gdzie P jest mocą przepływającą przez powierzchnię A. W układzie SI jednostką natężenia I jest watt na metr kwadratowy. Natężenie fali dźwiękowej jest również związane z amplitudą ciśnienia Δp :

$$I = \frac{(\Delta p)^2}{2\,\rho v},$$

gdzie ρ jest gęstością ośrodka, w którym propaguje się fala, a v_w jest prędkością dźwięku w ośrodku.

- Poziom natężenia dźwięku w decybelach definiuje się jako:
$\beta = 10\,\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad [\mathrm{dB}]$, gdzie $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$ jest natężeniem progowym.
- Percepcja natężenia wiąże się z głośnością i jest wyrażana w fonach.

17.4 Tryby drgań fali stojącej

- Dźwięki niepożądane mogą być zredukowane poprzez zastosowanie destruktywnej interferencji.
- Dźwięk ma takie same właściwości rezonansu i interferencji jak te zdefiniowane dla fal.
- W słupach powietrza najniższa częstotliwość rezonansowa nazywa się częstotliwością podstawową, a wszystkie wyższe częstotliwości rezonansowe nazywane są alikwotami. Wszystkie te częstotliwości nazywamy harmonicznymi.

17.5 Źródła dźwięków muzycznych

- Niektóre instrumenty muzyczne można modelować jako rury o symetrycznych warunkach brzegowych: otwarte na obu końcach lub zamknięte na obu końcach. Inne instrumenty muzyczne można modelować jako rury o niesymetrycznych warunkach brzegowych: zamknięte na jednym końcu i otwarte na drugim.
- Niektóre instrumenty, takie jak organy rurkowe, mają kilka rur o różnych długościach. Instrumenty takie jak flet generują dźwięki, zmieniając długość rury przez zamknięcie otworów wzdłuż rury. Puzon zmienia długość rury za pomocą prowadnicy.
- Instrumenty strunowe wytwarzają dźwięk przy użyciu drgającej struny z węzłami na każdym końcu. Powietrze wokół struny oscyluje z częstotliwością struny. Zależności dla częstotliwości struny są takie same jak dla rury o symetrycznych warunkach brzegowych, przy czym długość rury jest zastąpiona przez długość struny, a prędkość przez zależność $v = \sqrt{F_T / \mu}$.

17.6 Dudnienia

- Gdy dwie fale dźwiękowe o zbliżonych częstotliwościach interferują, powstają dudnienia o częstotliwości równej wartości bezwzględnej z różnicy tych dwóch częstotliwości.

17.7 Efekt Dopplera

- Efekt Dopplera to zmiana rejestrowanej częstotliwości dźwięku w wyniku ruchu zarówno źródła, jak i obserwatora.
- Rzeczywista zmiana częstotliwości nazywa się przesunięciem Dopplera.

17.8 Fale uderzeniowe

- Liczba Macha jest równa prędkości źródła dźwięku podzielonej przez prędkość dźwięku $M = \frac{v_s}{v}$.
- Gdy źródło dźwięku porusza się z prędkością większą niż prędkość dźwięku, powstaje fala uderzeniowa w wyniku interferencji fal dźwiękowych.
- Uderzenie dźwiękowe jest falą o dużym natężeniu propagującym się nad powierzchnią ziemi.
- Kąt fali uderzeniowej można wyznaczyć z zależności $\sin\theta = \frac{v}{v_s} = \frac{1}{M}$.
- Fala dziobowa jest wytwarzana, gdy obiekt porusza się z prędkością większą niż prędkość fali mechanicznej w ośrodku, na przykład łódź poruszająca się po wodzie.

PYTANIA

17.1 Fale dźwiękowe

1. Czym jest dźwięk, a czym jest słyszenie dźwięku.

2. Będziesz się uczyć o tym, że światło jest falą elektromagnetyczną, która może propagować się w próżni. Czy dźwięk może rozchodzić się w próżni?

3. Fale dźwiękowe mogą być modelowane jako zmiany ciśnienia. Dlaczego korzysta się z pojęcia „zmiana ciśnienia”, a nie „chwilowa wartość ciśnienia”?

17.2 Prędkość dźwięku

4. Jak wibracje akustyczne atomów różnią się od ruchu termicznego?

5. Czy zmienia się częstotliwość lub długość fali, gdy dźwięk przechodzi z jednego ośrodka do drugiego, w którym jest inna prędkość propagacji? Wyjaśnij odpowiedź.

6. Popularnym trikiem jest wdychanie helu i mówienie z wysoką częstotliwością, śmiesznym głosem. Wytłumacz to zjawisko.

7. Być może stosowałeś akustyczny dalmierz do określenia odległości obiektów, wykorzystujący przetwornik akustyczny. Jaka jest zasada działania takiego urządzenia?

8. Akustyczny dalmierz omawiany w poprzednim pytaniu często wymaga kalibracji. Podczas kalibracji program pyta o temperaturę pokojową. Jak myślisz, dlaczego wymagana jest temperatura pomieszczenia?

17.3 Natężenie dźwięku

9. Sześciu członków w zespole pływania synchronicznego nosi zatyczki do uszu, aby chronić się przed ciśnieniem wody na większej głębokości, ale nadal mogą oni słyszeć muzykę i wykonać perfekcyjne figury w wodzie. Pewnego dnia zostali poproszeni o opuszczenie basenu, aby zespół nurkowy mógł ćwiczyć nurkowanie, i próbowali ćwiczyć na macie. Wydawało się im, że teraz mają znacznie większe trudności w wykonywaniu swoich ćwiczeń. Dlaczego tak było?

10. Społeczność zaniepokojona jest planem wprowadzenia pociągu z obrzeża do centrum miasta. Aktualny poziom natężenia dźwięku, nawet jeśli stacja rozrządowa jest ekranowana, wynosi 70 dB w centrum miasta. Burmistrz zapewnia społeczność, że na terenie śródmieścia poziom dźwięku będzie większy o 30 dB. Czy mieszkańcy powinni być zaniepokojeni? Dlaczego?

17.4 Tryby drgań fali stojącej

11. Dostajesz dwa instrumenty dęte o identycznej długości. Jeden jest otwarty na obu końcach, drugi jest zamknięty na jednym końcu. Który z nich jest w stanie wygenerować najniższą częstotliwość?

12. Jaka jest różnica pomiędzy alikwotem a harmoniczną? Czy wszystkie harmoniczne są alikwotami? Czy wszystkie alikwoty są harmonicznymi?

13. Dwie identyczne rury obustronnie otwarte znajdują się w różnych pomieszczeniach. W pomieszczeniu A, temperatura wynosi $T = 20\,^{\circ}\mathrm{C}$, a w pomieszczeniu B, temperatura wynosi $T = 25\,^{\circ}\mathrm{C}$. Głośnik przymocowany jest do końca każdej rury, powodując, że rury rezonują z częstotliwością podstawową. Czy częstotliwość jest taka sama w obu rurach? Która rura ma wyższą częstotliwość?

17.5 Źródła dźwięków muzycznych

14. W jaki sposób dźwięk gitary jest o wiele bardziej intensywny od dźwięku struny naprężonej na prostym kiju?

15. Rozważ trzy rury o tej samej długości (L). Rura A jest obustronnie otwarta, rura B jest obustronnie zamknięta, a rura C ma jeden koniec otwarty a drugi zamknięty. Jeśli prędkość dźwięku jest taka sama w każdej z trzech rur, w której rurze mogą być wytwarzane najniższe częstotliwości podstawowe? W których rurach można uzyskać najwyższą częstotliwość podstawową?

16. Rura A ma długość L i jest obustronnie otwarta. Rura B ma długość $L/2$ i ma jeden koniec otwarty, a jeden zamknięty. Załóżmy, że prędkość dźwięku jest taka sama w obu rurach. Które z harmonicznych w każdej rurze będą sobie równe?

17. Struna jest rozciągnięta pomiędzy dwoma punktami w odległości L. Siła naciągu struny oraz liniowa gęstość masy struny jest taka, że prędkość fali w strunie wynosi $v = 343\ \mathrm{m/s}$. Rura z symetrycznymi warunkami brzegowymi ma długość L, a prędkość dźwięku w rurze wynosi $v = 343\ \mathrm{m/s}$. Co można powiedzieć o częstotliwościach harmonicznych na strunie i w rurze? Co jeśli prędkość na strunie wynosiła $v = 686\ \mathrm{m/s}$?

17.6 Dudnienia

18. Dwa głośniki podłączone są do generatora sygnałowego o zmiennej częstotliwości. Głośnik A generuje dźwięk o częstotliwości 1,00 kHz, a głośnik B – ton o częstotliwości 1,10 kHz. Częstotliwość dudnień wynosi 0,10 kHz. Jaka będzie częstotliwość dudnień, jeśli częstotliwości obu głośników będą dwa razy wyższe?

19. Zdrapano etykietę z widełek stroikowych, a musisz znać ich częstotliwość. Na podstawie wielkości widełek stroikowych można podejrzewać, że jego częstotliwość wynosi około 250 Hz. Znajdź widełki stroikowe o częstotliwości 250 Hz i 270 Hz. Kiedy uderzysz widełki o częstotliwości 250 Hz i widełki o nieznanej częstotliwości, zostanie wygenerowana częstotliwość 5 Hz. Kiedy uderzysz widełki stroikowe o częstotliwości 270 Hz, częstotliwość dudnień wyniesie 15 Hz. Jaka jest nieznana częstotliwość?

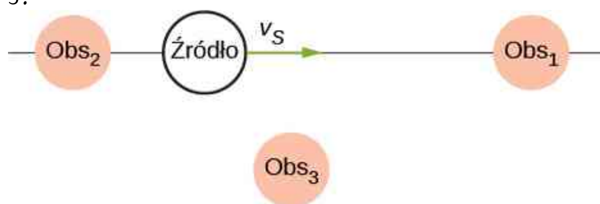
20. W odniesieniu do poprzedniego pytania, jeśli miałbyś tylko widełki stroikowe o częstotliwości 250 Hz, czy mógłbyś znaleźć rozwiązanie problemu określenia nieznanej częstotliwości?

21. Samochód wyprodukowany na specjalne zamówienie ma dwie rury wydechowe, które generują dźwięki o podobnej częstotliwości. Faktycznie generują sygnały o częstotliwości 263,8 i 264,5 Hz. Ile wynosi częstotliwość dudnień?

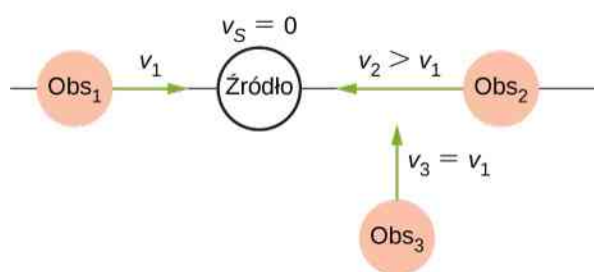
17.7 Efekt Dopplera

22. Czy przesunięcie Dopplera jest rzeczywiste, czy jest to tylko iluzja sensoryczna?

23. Troje obserwatorów stacjonarnych rejestruje przesunięcie dopplerowskie, związane z poruszającym się ze stałą prędkością źródłem. Obserwatorzy zlokalizowani są w sposób pokazany poniżej. Który obserwator obserwuje najwyższą częstotliwość? Który obserwator będzie obserwował najniższą częstotliwość? Co można powiedzieć o częstotliwości obserwowanej przez obserwatora 3?



24. Poniżej przedstawiono źródło stacjonarne i poruszających się obserwatorów. Opisz częstotliwość odbieraną przez obserwatorów dla tego układu.



25. Przed 1980 r. do tworzenia prognozy pogody wykorzystywano radar konwencjonalny. W latach 60. zaczęto eksperymentować z radarem Dopplera. Jak myślisz, jaka jest zaleta używania takiego radaru?

17.8 Fale uderzeniowe

26. Jaka jest różnica pomiędzy falą uderzeniową a uderzeniem dźwiękowym?

27. Z uwagi na względy dotyczące efektywności związanej z falą dziobową, naddźwiękowe samoloty transportowe muszą utrzymywać prędkość przelotową, która jest stałym ułamkiem prędkości dźwięku (stała liczba Macha). Jeśli samolot wleci z ciepłego powietrza w chłodniejsze powietrze, powinien zwiększyć czy zmniejszyć prędkość? Wyjaśnij swoją odpowiedź.

28. Gdy usłyszysz uderzenie dźwiękowe, często nie widzisz samolotu, który je wywołał. Dlaczego?

ZADANIA

17.1 Fale dźwiękowe

29. Rozważmy falę dźwiękową opisaną równaniem $s\,(x, t) = 4{,}00\ \text{nm}\cos\ \left(3{,}66\ \text{m}^{-1}\ x - 1256\ \text{s}^{-1} t\right)$. Ile wynosi maksymalne wychylenie, częstotliwość, długość fali oraz prędkość rozchodzenia się fali dźwiękowej?

30. Rozważmy falę dźwiękową poruszającą się w powietrzu opisaną równaniem $s(x, t) = 6{,}00\ \text{nm}\ \ \cos\left(54{,}93\ \text{m}^{-1} x - 18{,}84 \cdot 10^3\ \text{s}^{-1} t\right)$. Jaki jest najkrótszy czas, aby cząsteczka powietrza przemieściła się od 3,00 nm do −3,00 nm?

31. Rozważmy falę ultradźwiękową o częstotliwości 5,00 MHz, która jest wykorzystywana do badania nieprawidłowości w tkance miękkiej.
a. Jaka jest długość fali, jeśli porusza się ona w powietrzu z prędkością 343 m/s?
b. Jeśli prędkość dźwięku w tkance wynosi 1800 m/s, jaka jest długość fali w tkance?

32. Fala dźwiękowa opisana jest zależnością $\Delta P = 1{,}80\ \text{Pa}\ \sin\left(55{,}41\ \text{m}^{-1} x - 18\,840\ \text{s}^{-1} t\right)$. Ile wynosi maksymalna zmiana ciśnienia, długość i częstotliwość fali oraz prędkość dźwięku?

33. Fala dźwiękowa opisana jest funkcją $\Delta P = 1{,}20\ \text{Pa}\ \sin\left(kx - 6{,}28 \cdot 10^4\ \text{s}^{-1} t\right)$, natomiast prędkość dźwięku w powietrzu wynosi $v = 343{,}00$ m/s.

a. Ile wynosi liczba falowa dla fali dźwiękowej?
b. Ile wynosi $\Delta P\ (3{,}00\ \text{m};\ 20{,}00\ \text{s})$?

34. Wychylenie cząsteczki powietrza dla fali dźwiękowej opisane jest zależnością $s(x, t) = 5{,}00\ \text{nm}\ \ \cos\left(91{,}54\ \text{m}^{-1} x - 3{,}14 \cdot 10^4\ \text{s}^{-1} t\right)$.

a. Ile wynosi prędkość dźwięku?
b. Jaka jest maksymalna prędkość cząsteczki powietrza w prostym ruchu harmonicznym?
c. Ile wynosi maksymalne przyspieszenie drgań cząsteczek powietrza w prostym ruchu harmonicznym?

35. Głośnik znajduje się przy otworze długiej poziomej rury. Głośnik generuje falę o częstotliwości f, wytwarzając falę dźwiękową, która porusza się w rurze. Fala w rurze porusza się z prędkością równą $v = 340{,}00$ m/s. Fala dźwiękowa opisana jest zależnością $s\,(x, t) = s_{\text{max}} \cos\,(kx - \omega t + \phi)$. W chwili czasu $t = 0{,}00$ s cząsteczka powietrza dla $x = 3{,}5$ m znajduje się w położeniu maksymalnego wychylenia, które wynosi 7,00 nm. W tym samym czasie wychylenie innej cząsteczki dla $x = 3{,}7$ m wynosi 3,00 nm. Jaka jest czę-

stotliwość fali generowanej przez głośnik?

36. Kamerton zostaje pobudzony do drgań i generuje dźwięk o częstotliwości 250 Hz. Miernik poziomu dźwięku znajduje się w odległości 34,00 m od kamertonu. Dźwięk dociera do miernika po czasie $\Delta t = 0{,}10\ \mathrm{s}$. Maksymalne wychylenie widełek kamertonu wynosi 1,00 mm. Napisz funkcję opisującą falę dźwiękową.

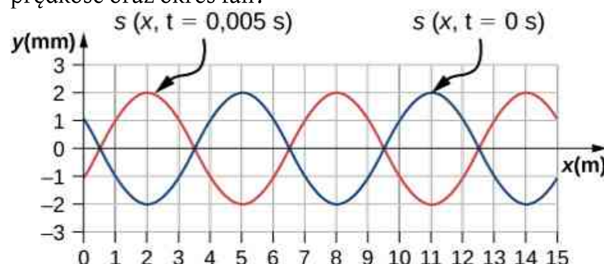
37. Fala dźwiekowa wytworzona jest przez przetwornik ultradźwiękowy. Poruszając się w powietrzu, może być opisana zależnością
$s(x,t) = 4{,}50\ \cos\left(9{,}15 \cdot 10^4 \cdot x - 2\pi \cdot 5{,}00 \cdot t\right)$,
gdzie amplituda jest wyrażona w nm, wektor falowy w 1/m, a częstotliwość w MHz. Przetwornik wykorzystywany jest w nieinwazyjnych badaniach struktur belek stalowych. Prędkość dźwięku w belce stalowej wynosi $v = 5950\ \mathrm{m/s}$. Napisz zależność dla fali dźwiękowej poruszającej się w belce stalowej.

38. Morświny emitują dźwięki, które wykorzystują do nawigacji. Jeśli długość wyemitowanej fali wynosi 4,5 cm, a prędkość dźwięku w wodzie wynosi $v = 1530\ \mathrm{m/s}$, to jaki jest okres fali?

39. Nietoperze wykorzystują fale dźwiękowe do chwytania owadów. Nietoperze potrafią wykrywać dźwięki do 100 kHz. Jeśli fale dźwiękowe propagują się w powietrzu z prędkością $v = 343\ \mathrm{m/s}$, to jaka jest ich długość fali?

40. Nietoperz emituje dźwięk o częstotliwości 100 kHz, a fala dźwiękowa porusza się w powietrzu z prędkością równą $v = 343\ \mathrm{m/s}$.
a. Jeśli maksymalna różnica ciśnień wynosi 1,30 Pa, to jaka jest postać zależności opisującej falę dźwiękową, przy założeniu, że jest to funkcja sinusoidalna? (Załóż, że przesunięcie fazowe wynosi zero.)
b. Jaki jest okres fali dźwiękowej?

41. Przeanalizujmy przedstawiony wykres zmian ciśnienia, na którym pokazano zmiany ciśnienia dla $t = 0{,}000\ \mathrm{s}$ (krzywa niebieska) oraz $t = 0{,}005\ \mathrm{s}$ (krzywa czerwona). Ile wynosi długość, wychylenie, prędkość oraz okres fali?



42. Przeanalizujmy wykres z poprzedniego zadania. Pokazano na nim zmiany ciśnienia dla $t = 0{,}000\ \mathrm{s}$ (krzywa niebieska) i $t = 0{,}005\ \mathrm{s}$ (krzywa czerwona). Zakładając, że wychylenie cząstki dla czasu $t = 0{,}00\ \mathrm{s}$ i położenia $x = 0{,}00\ \mathrm{m}$ jest $s\,(0{,}00\ \mathrm{m}, 0{,}00\ \mathrm{s}) = 1{,}08\ \mathrm{mm}$, napisz funkcję opisującą zmiany ciśnienia.

43. Struna gitary drga z częstotliwością równą 100 Hz i emituje falę dźwiękową.
a. Czy częstotliwość fali dźwiękowej jest równa częstotliwości drgań struny?
b. Jeśli prędkość dźwięku wynosi $v = 343\ \mathrm{m/s}$, to jaka jest długość fali?

17.2 Prędkość dźwięku

44. Gdy ukłuje się sopranistkę, potrafi ona wydać dźwięk o częstotliwości 1200 Hz. Jaka jest długość fali, jeśli prędkość dźwięku wynosi 345 m/s?

45. Jaką częstotliwość ma dźwięk o długości fali 0,10 m, gdy prędkość dźwięku wynosi 340 m/s?

46. Oblicz prędkość dźwięku, którego fala dźwiękowa ma częstotliwość 1500 Hz i długość 0,221 m.

47. a. Ile wynosi prędkość dźwięku w ośrodku, w którym częstotliwość fali akustycznej wynosi 100 kHz, a jej długość 5,96 cm?
b. Jaka to może być substancja? Sprawdź w Tabeli 17.1.

48. Pokaż, że prędkość dźwięku w temperaturze $20{,}0\ ^\circ\mathrm{C}$ w powietrzu wynosi $343\ \mathrm{m/s}$, jak pokazano w tekście.

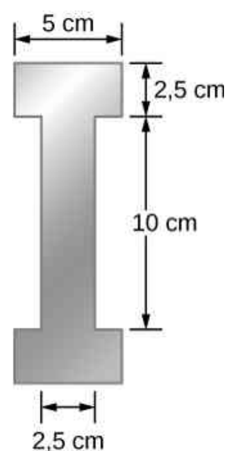
49. Temperatura powietrza na Saharze może sięgnąć $56{,}0\ ^\circ\mathrm{C}$ (ok. $134\ ^\circ\mathrm{F}$). Ile wynosi prędkość dźwięku w powietrzu w takiej temperaturze?

50. Delfiny generują dźwięki w powietrzu i wodzie. Jaki jest stosunek długości fali dźwiękowej w powietrzu do jej długości w wodzie morskiej? Załóż, że temperatura powietrza wynosi $20{,}0\ ^\circ\mathrm{C}$.

51. Echo z sonaru powraca do łodzi podwodnej po 1,20 s od momentu wygenerowania. Jaka jest odległość od obiektu, od którego fala się odbiła? Załóż, że łódź podwodna znajduje się w oceanie, a nie w wodzie słodkiej.

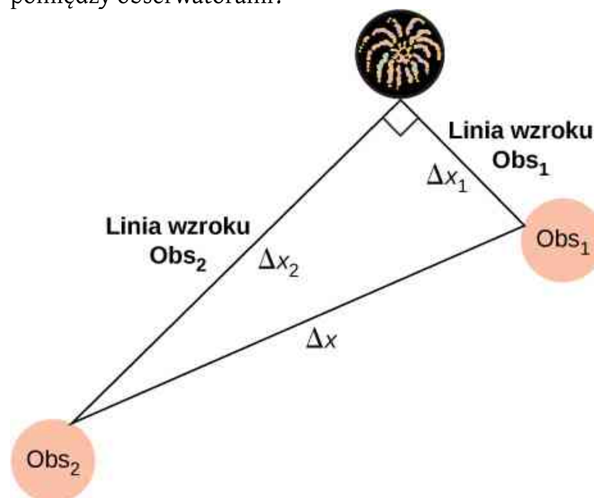
52. a. Jeśli sonar łodzi podwodnej może mierzyć czasy echa z dokładnością do 0,01 s, to jaka jest najmniejsza różnica w odległościach, które może wykryć? Załóż, że łódź podwodna znajduje się w oceanie, a nie w słodkiej wodzie.
b. Omów ograniczenia, które dotyczą rozdzielczości systemu sonarowego, pozwalającego wykrywać rozmiary i kształty obiektów tworzących echo.

53. Fale ultradźwiękowe są często wykorzystywane w nieinwazyjnych metodach badań. Na przykład metoda taka może być wykorzystana do wykrywania usterek konstrukcyjnych w belkach stalowych typu I stosowanych w budownictwie. Rozważmy belkę stalową typu I o długości 10,00 cm o przekroju poprzecznym pokazanym poniżej. Ciężar belki typu I wynosi 3846,50 N. Jaka byłaby prędkość dźwięku w belce typu I? $(Y_{\mathrm{stal}} = 200\ \mathrm{GPa}, \beta_{\mathrm{stal}} = 159\ \mathrm{GPa})$.



54. Podczas pokazu sztucznych ogni fizyk rejestruje czasy, po których widzi wybuch i słyszy dźwięk wybuchu. Zmierzona różnica wynosi 0,400 s.
a. W jakiej odległości nastąpił wybuch, jeśli temperatura powietrza wynosi $24{,}0°\mathrm{C}$ oraz zaniedba się czas dotarcia światła wybuchu do fizyka?
b. Wyznacz odległość, w jakiej nastąpił wybuch, uwzględniając prędkość światła. Zauważ, że odległość jest nieznacznie większa.

55. Podczas uroczystości 4 lipca fajerwerk M80 eksploduje na ziemi, tworząc jasny rozbłysk i głośny huk. Temperatura powietrza w nocy wynosi $T_F = 90{,}0\,°\mathrm{F}$. Dwóch obserwatorów widzi błysk oraz słyszy dźwięk wybuchu. Pierwszy obserwator usłyszał dźwięk wybuchu po 1,00 sekundzie od momentu zauważenia błysku wybuchu. Drugi obserwator usłyszał dźwięk wybuchu po 3,00 sekundach od momentu zauważenia wybuchu. Linie widzenia pomiędzy dwoma obserwatorami tworzą kąt prosty, jak pokazano poniżej. Jaka jest odległość Δx pomiędzy obserwatorami?



56. Gęstość próbki wody wynosi $\rho = 998{,}00\,\mathrm{kg/m^3}$, natomiast współczynnik sprężystości objętościowej $\beta = 2{,}15\,\mathrm{GPa}$. Ile wynosi prędkość propagacji w tej próbce?

57. Złóżmy, że nietoperz wykorzystuje echo do lokalizacji swojej ofiary znajdującej się w odległości 3,00 m od niego (Rysunek 17.6).
a. Oblicz czas dotarcia echa dla temperatur $5{,}00\,°\mathrm{C}$ i $35{,}0\,°\mathrm{C}$.
b. Ile wynosi procentowa niepewność w lokalizacji owada przez nietoperza?
c. Omów znaczenie tej niepewności i tego, co może utrudniać lokalizację przez nietoperza. W praktyce nietoperz nadal korzysta z echolokacji, eliminując większość trudności i innych efektów, jak np. ruch ofiary.

17.3 Natężenie dźwięku

58. Ile wynosi natężenie dźwięku w watach na metr kwadratowy dźwięku o poziomie 85,0 dB?

59. Nalepka ostrzegawcza na kosiarce informuje, że generuje ona hałas na poziomie 91,0 dB. Ile wynosi natężenie tego hałasu w watach na metr kwadratowy?

60. Amplituda ciśnienia dla fali dźwiękowej propagującej się w powietrzu wynosi 0,5 Pa. Jakie jest natężenie fali?

61. Jaki jest poziom natężenia fali dźwiękowej z poprzedniego zadania?

62. Ile wynosi poziom natężenia dźwięku w dB generowany przez słuchawki, które wytwarzają natężenie równe $4{,}00 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{W/m^2}$?

63. a. Jaki jest poziom natężenia dźwięku, który jest dwukrotnie bardziej intensywny niż dźwięk o poziomie natężenia równym 90,0 dB?
b. Jaki jest poziom natężenia dźwięku, którego natężenie stanowi jedną czwartą natężenia dźwięku 90,0 dB?'

64. a. Ile wynosi natężenie dźwięku o poziomie o 7,00 dB niższym od dźwięku o natężeniu równym $4{,}00 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{W/m^2}$?
b. Ile wynosi natężenie dźwięku o poziomie 3,00 dB wyższym od dźwięku o natężeniu równym $4{,}00 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{W/m^2}$?

65. Osoby z dobrym słuchem mogą rejestrować dźwięki o poziomie −8,00 dB przy częstotliwości 3000 Hz. Ile wynosi natężenie tego dźwięku w watach na metr kwadratowy?

66. Jeśli duża mucha lecąca w odległości 3,0 m od ciebie generuje hałas wynoszący 40,0 dB, to jaki poziom hałasu generuje 1000 much w tej odległości, zakładając, że zakłócenia nie mają znaczącego wpływu?

67. Zestawy audio 10 samochodów znajdujących się na obwodzie koła generują poziom natężenia dźwięku równy 120 dB w środku koła. Jaki jest średni poziom natężenia dźwięku jednego zestawu audio, przy założeniu, że pomijamy zjawisko interferencji?

68. Amplituda fali dźwiękowej jest mierzona pod względem maksymalnego ciśnienia. O jaki współczyn-

nik wzrasta amplituda fali dźwiękowej, jeśli poziom natężenia dźwięku wzrasta o 40,0 dB?

69. Jeśli poziom natężenia dźwięku wynosi 0 dB przy 1000 Hz, odpowiada maksymalnemu ciśnieniu (amplitudy dźwięku) równemu 10^{-9} atm, to ile wynosi maksymalne ciśnienie dla dźwięku o poziomie 60 dB? Ile wynosi maksymalne ciśnienie dla dźwięku o poziomie 120 dB?

70. 8-godzinna ekspozycja na hałas o poziomie natężenia dźwięku równym 90,0 dB może spowodować uszkodzenie słuchu. Jaka energia w dżulach dociera do błony bębenkowej o średnicy 0,800 cm?

71. Dźwięk jest skuteczniej przenoszony do stetoskopu przez bezpośredni kontakt, a nie przez powietrze, a następnie jest wzmocniony przez skoncentrowanie się na mniejszym obszarze bębenka. Rozsądne jest założenie, że dźwięk jest przenoszony do stetoskopu 100 razy skuteczniej w porównaniu z transmisją przez powietrze. Jakie jest w takim przypadku wzmocnienie w decybelach przez stetoskop, który zbiera dźwięk z powierzchni $15{,}0\,\mathrm{cm}^2$ i koncentruje go do dwóch błon bębenkowych o całkowitej powierzchni równej $0{,}900\,\mathrm{cm}^2$ z efektywnością $40{,}0\%$?

72. Pomimo niskiej efektywności głośniki mogą wytwarzać głośne dźwięki przy zaskakująco małej energii. Oblicz pobór mocy potrzebny, aby uzyskać poziom natężenia dźwięku o wartości 90,0 dB w przypadku głośnika o średnicy 12,0 cm, który ma skuteczność $1{,}00\%$. Otrzymana wartość to poziom natężenia dźwięku tuż przy głośniku.

73. Współczynnik równy 10^{-12} w zakresie natężeń, w którym ucho może rejestrować, od wartości progowej aż do wartości, która może spowodować w krótkim czasie uszkodzenie słuchu, jest naprawdę niezwykłe. Gdybyś mógł mierzyć odległości w tym samym zakresie jednym przyrządem, przy czym najmniejsza odległość, którą mógłbyś zmierzyć, wynosiłaby 1 mm, to jaką największą odległość mógłbyś zmierzyć?

74. Jakie są najbliższe częstotliwości, które przeciętna osoba może odróżnić od częstotliwości 500 Hz? Dźwięki nie są jednocześnie prezentowane.

75. Czy możesz powiedzieć, że twój współlokator wzmocnił dźwięk w telewizorze, jeśli jego średni poziom natężenia dźwięku zmienił się od 70 do 73 dB?

76. Jeśli pewna kobieta potrzebuje wzmocnienia $5 \cdot 10^5$ razy większego od natężenia progowego umożliwiającego jej słyszenie dla wszystkich częstotliwości, to ile wynosi jej całkowita utrata słuchu? Zauważ, że mniejsze wzmocnienie jest odpowiednie dla dźwięków o większym natężeniu, aby uniknąć dalszego uszkodzenia słuchu od poziomu powyżej 90 dB.

77. Osoba ma próg słyszenia o 10 dB powyżej normalnego progu przy częstotliwości 100 Hz i 50 dB powyżej normalnego progu przy częstotliwości 4000 Hz. O ile większe natężenie powinien mieć dźwięk o częstotliwości 100 Hz niż dźwięk o częstotliwości 4000 Hz, jeśli dla tej osoby oba dźwięki są ledwie słyszalne?

17.4 Tryby drgań fali stojącej

78. Długość rury obustronnie otwartej wynosi 1 m. (a) Jaka jest częstotliwość podstawowa, jeśli prędkość dźwięku wynosi 344 m/s? (b) Jaka jest częstotliwość drugiej harmonicznej?

79. Ile wynosi długość rury, której częstotliwość podstawowa wynosi 176 Hz, a częstotliwość pierwszego alikwota 352 Hz, jeśli prędkość dźwięku wynosi 343 m/s?

80. W zewnętrznym przewodzie słuchowym zachodzi rezonans podobnie jak w rurze jednostronnie otwartej. Jeśli zakres długości przewodów słuchowych wynosi od 1,80 do 2,60 cm, to ile wynosi zakres częstotliwości własnych tych przewodów? Załóżmy, że temperatura powietrza wynosi $37{,}0\,^{\circ}\mathrm{C}$ i jest taka sama jak temperatura ciała.

81. Oblicz częstotliwość pierwszego alikwota w przewodzie słuchowym, który rezonuje jak rura jednostronnie zamknięta o długości 2,40 cm. Załóżmy, że temperatura powietrza wynosi $37{,}0\,^{\circ}\mathrm{C}$. Czy ucho jest szczególnie wrażliwe na taką częstotliwość? (Rezonans kanału słuchowego jest bardziej skomplikowany przez jego nieregularny kształt, który tutaj zignorujemy).

82. Proste przybliżenie generacji głosu polega na uznaniu kanałów i dróg oddechowych za rurę rezonującą jednostronnie zamkniętą.
a. Jaka jest częstotliwość podstawowa, jeśli rura ma długość 0,240 m, przy temperaturze powietrza wynoszącej $37{,}0\,^{\circ}\mathrm{C}$?
b. Jaka byłaby ta częstotliwość, gdyby osoba wymieniła powietrze na hel? Przyjmijmy dla helu taką samą zależność od temperatury.

83. Rura o długości 4,0 m, z jednej strony zamknięta, a z drugiej otwarta znajduje się w pomieszczeniu, w którym temperatura wynosi $T = 22\,^{\circ}\mathrm{C}$. Głośnik zdolny do wytwarzania zmiennych częstotliwości, który służy do wywołania rezonansu, umieszczono przy otwartym końcu.
a. Jaka jest długość fali i częstotliwość podstawowa?
b. Jaka jest częstotliwość i długość fali pierwszego alikwotu?

84. Rura o długości 4,0 m, z obu stron otwarta, znajduje się w pomieszczeniu, w którym temperatura wynosi $T = 25°\mathrm{C}$. Głośnik zdolny do wytwarzania zmiennych częstotliwości, który służy do wywołania rezonansu, umieszczono przy otwartym końcu.
a. Jaka jest długość fali i częstotliwość podstawowa?
b. Jaka jest częstotliwość i długość fali pierwszego alikwotu?

85. Nylonowa struna gitarowa jest rozciągnięta pomiędzy dwoma punktami odległymi od siebie o 2,00 m. Liniowa gęstość masy struny wynosi $\mu = 7{,}20 \text{ g/m}$, a jej siła naciągu wynosi 160,00 N. Struna znajduje się w pobliżu rury obustronnie otwartej o długości L. Struna zostaje szarpnięta i rura zaczyna rezonować dla $n = 3$. Prędkość dźwięku wynosi 343 m/s. Jaka jest długość rury?

86. Widełki kamertonu o częstotliwości 512 Hz uderzono i umieszczono obok rury z ruchomym tłokiem, tworzącej rezonator o zmiennej długości. Tłok jest przesuwany w dół rury i rezonans otrzymujemy, gdy tłok znajduje się w odległości 115,50 cm od otwartego końca. Następny rezonans otrzymujemy, gdy tłok jest 82,50 cm od otwartego końca.
a. Jaka jest prędkość dźwięku w rurze?
b. W jakiej odległości tłoka od otwartego końca rury otrzymamy następny rezonans?

87. Studenci w laboratorium fizyki proszeni są o znalezienie długości kolumny powietrznej w rurze jednostronnie zamkniętej, dla której częstotliwość podstawowa wynosi 256 Hz. Studenci trzymają rurę w pionie i napełniają ją wodą, a następnie wypuszczają wodę do momentu pojawienia się pierwszego rezonansu.
a. Jaka jest temperatura powietrza, jeśli rezonans ma miejsce dla rury bez wody o długości 0,336 m?
b. Dla jakiej długości studenci zaobserwują drugi rezonans (pierwszy alikwot)?

17.5 Źródła dźwięków muzycznych

88. Jeśli instrument dęty, na przykład tuba, ma częstotliwość podstawową 32,0 Hz, jakie są jego pierwsze trzy alikwoty? Instrument jest zamknięty na jednym końcu. (Alikwoty prawdziwej tuby są bardziej złożone niż w tym przykładzie, ponieważ jest to rura stożkowa).

89. Jakie są pierwsze trzy alikwoty fagota o częstotliwości podstawowej 90,0 Hz? Jest on otwarty na obu końcach. (Alikwoty prawdziwego fagota są bardziej złożone niż w tym przykładzie, ponieważ jego podwójna piszczałka sprawia, że działa podobnie jak rura jednostronnie zamknięta).

90. Jaką długość musi mieć flet, aby jego częstotliwość podstawowa wynosiła 262 Hz (ta częstotliwość odpowiada środkowemu C na skali równomiernie temperowanej) w ciągu dnia, w którym temperatura powietrza wynosi $20{,}0\,^\circ\text{C}$? Flet jest obustronnie otwarty.

91. Jaką długość powinien mieć obój, aby wygenerować dźwięk o częstotliwości podstawowej 110 Hz w dniu, w którym prędkość dźwięku wynosi 343 m/s? Obój jest otwarty na obu końcach.

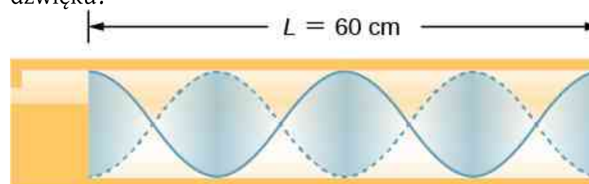
92. a. Wyznacz długość rury organowej zamkniętej na jednym końcu, która generuje częstotliwość podstawową 256 Hz przy temperaturze powietrza $18{,}0\,^\circ\text{C}$.
b. Ile wynosi częstotliwość podstawowa dla $25{,}0\,^\circ\text{C}$?

93. Rura organowa $(L = 3{,}00 \text{ m})$ jest obustronnie zamknięta. Oblicz długości fal i częstotliwości pierwszych trzech rezonansów. Załóż, że prędkość dźwięku wynosi $v = 343{,}00 \text{ m/s}$.

94. Rura organowa $(L = 3{,}00 \text{ m})$ jest zamknięta z jednej strony. Oblicz długości i częstotliwości dla pierwszych trzech rezonansów. Załóżmy, że prędkość dźwięku wynosi $v = 343{,}00 \text{ m/s}$.

95. Dźwięk o częstotliwości 2,00 kHz generowany jest przez drgającą strunę dla $n = 6$. Liniowa gęstość masy struny wynosi $\mu = 0{,}0065 \text{ kg/m}$, a długość struny 1,50 m. Ile wynosi siła naciągu struny?

96. Rozważmy dźwięk w rurze przedstawionej poniżej. Temperatura powietrza wynosi $T_C = 30{,}00\,^\circ\text{C}$. Ile wynosi długość fali, prędkość fali i częstotliwość tego dźwięku?



97. Student trzyma pręt laboratoryjny o długości 80,00 cm, w odległości jednej czwartej od końca słupa. Pręt laboratoryjny wykonany jest z aluminium. Student uderza młotkiem w pręt laboratoryjny. Pręt rezonuje z najniższą możliwą częstotliwością. Ile wynosi ta częstotliwość?

98. Struna w skrzypcach ma długość 24,00 cm i masę 0,860 g. Częstotliwość podstawowa struny wynosi 1,00 kHz.
a. Jaka jest prędkość fali na strunie?
b. Ile wynosi siła naciągu struny?

99. Ile będzie wynosił stosunek częstotliwości dźwięku generowanego przez instrument dęty, jeśli temperatura powietrza zmienia się od $10{,}0\,^\circ\text{C}$ do $30{,}0\,^\circ\text{C}$? Oblicz stosunek częstotliwości dla tych dwóch temperatur.

17.6 Dudnienia

100. Jakie są częstotliwości dudnień: (a) Jeśli nuty A i C grane są razem (częstotliwości 220 i 264 Hz)? (b) Jeśli nuty D i F odtwarzane są razem (częstotliwości 297 i 352 Hz)? (c) Jeśli wszystkie cztery dźwięki grane są razem?

101. Ile wynoszą częstotliwości dudnień, jeśli młotek fortepianowy uderzy trzy struny, które generują częstotliwości 127,8, 128,1 i 128,3 Hz?

102. Tuner fortepianowy rejestruje dudnienia co 2,00 s dla dźwięków generowanych przez widełki stroikowe o częstotliwości 264,0 Hz i pojedynczą strunę w pianinie. Jakie są dwie możliwe częstotliwości struny?

103. Dwie identyczne struny, o takiej samej długości równej 2,00 m i liniowej gęstości masy równej $\mu = 0{,}0065\ \mathrm{kg/m}$, są przymocowane na obu końcach. Siła naciągu dla struny A wynosi 120,00 N. Natomiast siła naciągu dla struny B wynosi 130,00 N. Obie struny zostają szarpnięte i generują dźwięk dla modu $n = 10$. Ile wynosi częstotliwość dudnień?

104. Stroiciel fortepianowy używa widełek stroikowych o częstotliwości 512 Hz. Uderza w kamerton oraz w klawisz fortepianu i słyszy częstotliwość dudnień 5 Hz. Następnie naciąga strunę fortepianu i powtarza procedurę. Ponownie słyszy częstotliwość dudnień 5 Hz. Co się stało?

105. Struna, dla której liniowa gęstość masy wynosi $\mu = 0{,}0062\ \mathrm{kg/m}$, jest rozciągnięta pomiędzy dwoma słupkami oddalonymi od siebie 1,30 m. Siła naciągu struny wynosi 150,00 N. Struna drga i generuje falę dźwiękową. Widełki stroikowe o częstotliwości 1024 Hz pobudzone są do drgań, a częstotliwość dudnień pomiędzy dwoma źródłami wynosi 52,83 Hz. Jakie są możliwe częstotliwości i długości fali struny?

106. Samochód ma dwie rury, jedna emitująca częstotliwość 199 Hz, a druga emitująca częstotliwość 203 Hz. Jaka jest częstotliwość dudnień?

107. Młoteczek fortepianu uderza w dwie struny, wytwarzając dudnienia o częstotliwości 1,50 Hz. Jedna ze strun nastrojona jest na częstotliwość 260,00 Hz. Jakie częstotliwości może mieć druga struna?

108. Dwa kamertony o częstotliwościach 460 i 464 Hz są uderzane równocześnie. Jaka będzie średnia częstotliwość, którą można usłyszeć, i jaka będzie częstotliwość dudnień?

109. Silniki w samolocie odrzutowym wytwarzają średnią częstotliwość dźwięku wynoszącą 4100 Hz przy częstotliwości dudnień wynoszącej 0,500 Hz. Jakie są poszczególne częstotliwości tych silników?

110. Trzy klawisze fortepianu (F, Fis i G) są uderzane równocześnie, generując częstotliwości 349, 370 i 392 Hz. Jakie częstotliwości dudnień są wytwarzane przez tą dysonansową kombinację?

17.7 Efekt Dopplera

111. a. Jaką częstotliwość odbiera osoba obserwująca nadjeżdżającą karetkę pogotowia, która porusza się z prędkością 110 km/h, emitującą stały dźwięk o częstotliwości 800 Hz? Prędkość dźwięku w tym dniu wynosi 345 m/s.
b. Jaką częstotliwość odbiera ta osoba po przejeździe karetki pogotowia?

112. a. Na pokazie lotniczym samolot leci wprost na widzów z prędkością 1200 km/h, emitując dźwięk o częstotliwości 3500 Hz. W tym dniu prędkość dźwięku wynosi 342 m/s. Jaką częstotliwość rejestrują obserwatorzy?
b. Jaką częstotliwość odbiorą, gdy samolot będzie się oddalał?

113. Jaką częstotliwość odbiera mysz tuż przed złapaniem jej przez lecącego z prędkością 25,0 m/s jastrzębia, emitującego dźwięk o częstotliwości 3500 Hz? Prędkość dźwięku wynosi 331 m/s.

114. Widz na paradzie słyszy dźwięk o częstotliwości 888 Hz od zbliżającego się trębacza, który gra nutę o częstotliwości 880 Hz. Z jaką prędkością zbliża się muzyk, jeśli prędkość dźwięku wynosi 338 m/s?

115. Pociąg podmiejski, zbliżając się do przejścia, generuje dźwięk klaksonu o częstotliwości 200 Hz. Prędkość dźwięku wynosi 335 m/s.
a. Obserwator oczekujący na przejściu rejestruje dźwięk o częstotliwości 208 Hz. Jaka jest prędkość pociągu?
b. Jaką częstotliwość odbierze obserwator, gdy pociąg będzie się oddalał?

116. Czy można usłyszeć przesunięcie częstotliwości, generowane podczas uderzenia widełek stroikowych z prędkością 10,0 m/s w dniu, w którym prędkość dźwięku wynosi 344 m/s? Aby odpowiedzieć na to pytanie, oblicz współczynnik, o który przesuwa się częstotliwość, i sprawdź, czy jest on większy niż 0,3%.

117. Dwa orły lecą prosto na siebie, pierwszy z prędkością 15,0 m/s, a drugi z prędkością 20,0 m/s. Oba generują pisk, pierwszy o częstotliwości 3200 Hz, a drugi o częstotliwości 3800 Hz. Jakie częstotliwości rejestrują, jeśli prędkość dźwięku wynosi 330 m/s?

118. Student A biegnie korytarzem z prędkością $v_0 = 5{,}00\ \mathrm{m/s}$, trzymając widełki stroikowe generujące dźwięk o częstotliwości 1024 Hz w stronę betonowej ściany. Prędkość dźwięku wynosi $v = 343\ \mathrm{m/s}$. Student B stoi przy ścianie. (a) Jaką częstotliwość usłyszy student B ? (b) Ile wynosi częstotliwość dudnień słyszanych przez studenta A ?

119. Karetka pogotowia generująca dźwięk syreny o częstotliwości $f = 1{,}0\ \mathrm{kHz}$ zbliża się do miejsca wypadku. Karetka porusza się z prędkością 70,0 km/h. Pielęgniarka zbliża się do tego miejsca z przeciwnego kierunku, biegnąc z prędkością $v_0 = 7{,}0\ \mathrm{m/s}$. Jaką częstotliwość odbiera pielęgniarka? Załóż, że prędkość dźwięku wynosi $v = 343\ \mathrm{m/s}$.

120. Częstotliwość syreny karetki pogotowia, która się zbliża do ciebie, wynosi 900 Hz. Stoisz na rogu i słyszysz dźwięk o częstotliwości 960 Hz. Jaka jest prędkość, z którą porusza się karetka pogotowia (w km/h), jeśli prędkość dźwięku wynosi $v = 340{,}0\ \mathrm{m/s}$?

121. Jaka jest minimalna prędkość, z jaką źródło musi się poruszać w twoją stronę, aby można byłoby usłyszeć,

że jego częstotliwość jest przesunięta w stronę wyższych częstotliwości? To znaczy jaka prędkość powoduje zmianę częstości o 0,3%, w dniu kiedy prędkość dźwięku wynosi 331 m/s?

17.8 Fale uderzeniowe

122. Liczba Macha samolotu lecącego na wysokości 7500 metrów wynosi 1,50, a prędkość dźwięku wynosi $v = 343 \text{ m/s}$. Jak daleko od nieruchomego obserwatora będzie znajdował się samolot, gdy usłyszy on uderzenie dźwiękowe?

123. Liczba Macha odrzutowca lecącego na wysokości 8,5 km wynosi 2,0, a prędkość dźwięku wynosi $v = 340 \text{ m/s}$. Jak długo po tym, jak odrzutowiec przeleci, stacjonarny obserwator usłyszy uderzenie dźwiękowe?

124. Kąt fali uderzeniowej z przodu myśliwca wynosi $\theta = 70^\circ$. Samolot leci z prędkością 1200 km/h. Jaka jest prędkość dźwięku?

125. Liczba Macha lecącego samolotu wynosi 1,2. Obserwator znajdujący się na powierzchni ziemi słyszy uderzenie dźwiękowe 15,0 sekund po minięciu samolotu. Na jakiej wysokości leci samolot? Załóż, że prędkość dźwięku wynosi $v_\text{w} = 343 \text{ m/s}$.

126. Wystrzelony pocisk porusza się z prędkością 1342 km/h. Załóż, że prędkość dźwięku wynosi $v = 340 \text{ m/s}$. Jaki jest kąt powstałej fali uderzeniowej?

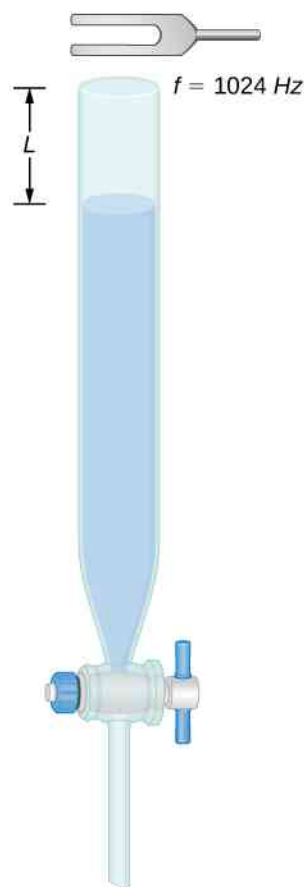
127. Głośnik umieszczony jest przy otworze długiej poziomej rury. Głośnik generuje dźwięk o częstotliwości f, który rozchodzi się wewnątrz rury. Fala propaguje się w rurze z prędkością $v = 340 \text{ m/s}$. Falę dźwiękową można opisać funkcją falową postaci $s(x,t) = s_\text{max} \cos(kx - \omega t + \phi)$. Dla $t = 0 \text{ s}$ cząsteczka powietrza dla $x = 2{,}3 \text{ m}$ posiada maksymalne wychylenie, które wynosi 6,34 nm. W tym samym czasie inna cząsteczka dla $x = 2{,}7 \text{ m}$ posiada wychylenie równe 2,30 nm. Jakie jest równanie falowe dla fali dźwiękowej, liczba falowa, częstotliwość kątowa oraz początkowe przesunięcie fazowe?

128. Liczba Macha poruszającego się samolotu, który jest źródłem fali uderzeniowej, wynosi 1,2. (a) Jaka jest prędkość samolotu w metrach na sekundę? (b) Jaki jest kąt, z jakim porusza się fala uderzeniowa?

ZADANIA DODATKOWE

129. Rura o długości 0,80 m jest otwarta z obu stron. Temperatura powietrza wynosi 26°C. Powietrze w rurze drga na skutek drgań wywoływanych przez głośnik podłączony do generatora sygnałowego. Jakie są długości fali i częstotliwości pierwszych dwóch fonów fal dźwiękowych, które rezonują w rurze?

130. Rura wypełniona wodą ma zawór na dole, aby umożliwić wypływ wody. Przy wypływie wody z rury zmienia się długość L kolumny powietrznej. Przy otworze rury umieszcza się widełki stroikowe o częstotliwości 1024 Hz. Woda jest usuwana z rurki do momentu, gdy $n = 5$ rezonującej fali dźwiękowej. Jaka jest wysokość kolumny powietrza, jeśli temperatura powietrza w pomieszczeniu wynosi 18°C?

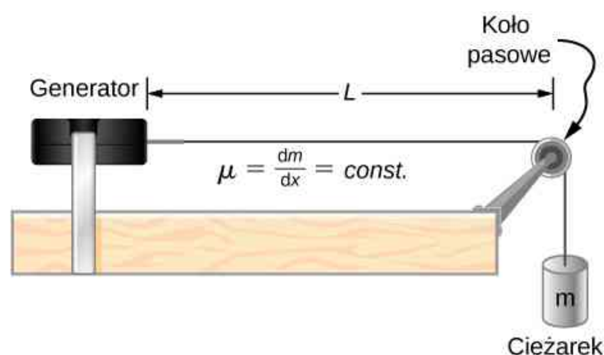


131. Przeanalizuj poniższy rysunek. Długość struny pomiędzy generatorem a kołem pasowym wynosi

$L = 1{,}0\ \text{m}$. Liniowa gęstość masy struny wynosi $\mu = 0{,}006\ \text{kg/m}$. Generator strunowy może drgać z dowolną częstotliwością. Masa obciążająca wynosi 2,00 kg.

a. Jak jest długość fali i częstotliwość dla $n = 6$?

b. Struna pobudza do drgań powietrze znajdujące się w pobliżu struny. Jaka jest długość fali dźwiękowej, jeśli prędkość dźwięku wynosi $v_s = 343\ \text{m/s}$?



132. Wczesne eksperymenty z przesunięciem dopplerowskim przeprowadzono z wykorzystaniem zespołu grającego muzykę w pociągu. Trębacz na ruchomym płaskim wagonie gra nutę 320 Hz. Częstotliwość sygnału dźwiękowego słyszanego przez nieruchomego obserwatora stojącego na peronie wynosi 350 Hz. Ile wynosi prędkość, z jaką porusza się platforma wagonowa w km/h? Temperatura powietrza wynosi $T_C = 22\,^\circ\text{C}$.

133. Dwa samochody poruszające się w swoją stronę generują dźwięk klaksonu o częstotliwości $f_s = 800\ \text{Hz}$. Pojazd A porusza się z prędkością 65 mph, a pojazd B z prędkością 75 mph. Ile wynosi częstotliwość dudnień słyszanych przez obu kierowców? Temperatura powietrza wynosi $T_C = 22\,^\circ\text{C}$.

134. Student A biegnie za studentem B. Student A trzyma widełki stroikowe o częstotliwości 1024 Hz, a student B trzyma widełki stroikowe o częstotliwości 1000 Hz. Student A biegnie z prędkością $v_A = 5\ \text{m/s}$, a student B z prędkością $v_B = 6\ \text{m/s}$. Ile wynoszą częstotliwości dudnień, które słyszą studenci? Prędkość dźwięku wynosi $v = 343\ \text{m/s}$.

135. Załóżmy, że poziom dźwięku ze źródła wynosi 75 dB, a następnie spada do 52 dB. Częstotliwość dźwięku wynosi 600 Hz. Wyznacz (a) początkowe i (b) końcowe natężenie dźwięku oraz (c) początkową i (d) końcową amplitudę fali. Temperatura powietrza wynosi $T_C = 24\,^\circ\text{C}$, a gęstość powietrza jest równa $\rho = 1{,}184\ \text{kg/m}^3$.

136. Przesunięcie Dopplera dla radaru Dopplerowskiego wyznacza się z zależności $f = f_R\left(\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}\right)$, gdzie f_R jest częstotliwością radaru, f jest częstotliwością rejestrowaną przez radar, c jest prędkością światła, a v jest prędkością mierzonego obiektu. Jaka jest częstotliwość dudnień rejestrowana przez radar, przy założeniu, że prędkość obiektu jest dużo mniejsza niż prędkość światła?

137. Nieruchomy obserwator słyszy dźwięk o częstotliwości 1000 Hz w miarę zbliżania się źródła i częstotliwość 850 Hz wtedy, gdy źródło się oddala. Źródło porusza się ze stałą prędkością 75 mph. Jaka jest temperatura powietrza?

138. Flet gra nutę o częstotliwości 600 Hz. Flet może być modelowany jako rura obustronnie otwarta. Muzyk grający na flecie zmienia jej długość, korzystając ze swoich palców. Jaka jest długość rury, jeśli jest to częstotliwość podstawowa?

ZADANIA TRUDNIEJSZE

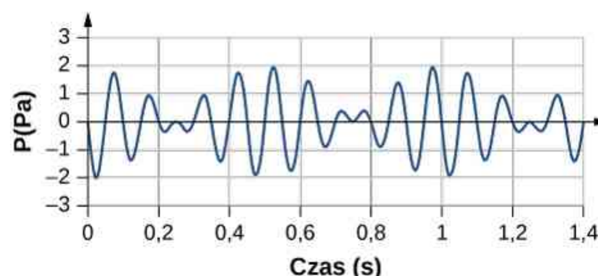
139. Obserwator stoi przy jednym z dwóch głośników, oddalonych od siebie o dystans d, i następnie porusza się wzdłuż prostej linii, pokonując odległość x. Porusza się prostopadle do obu głośników, aż do momentu, gdy obserwator usłyszy pierwsze maksymalne natężenie dźwięku. Prędkość dźwięku wynosi v, a częstotliwość f. Jak daleko od głośnika znajduje się obserwator?

140. Rozważmy dudnienia pokazane poniżej. Jest to wykres ciśnienia w funkcji czasu dla $x = 0\ \text{m}$. Fala porusza się z prędkością $v = 343\ \text{m/s}$.

a. Ile dudnień występuje na sekundę?

b. Ile razy fala oscyluje na sekundę?

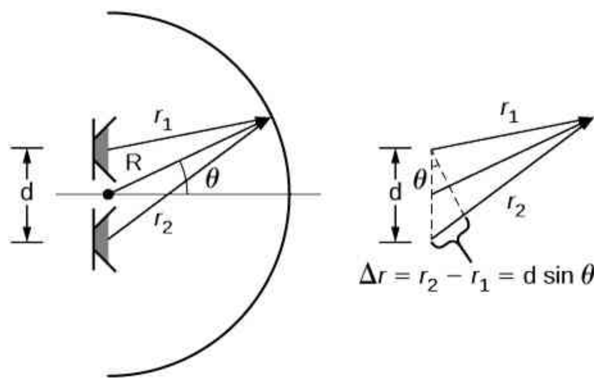
c. Napisz równanie fali dla ciśnienia w funkcji czasu.



141. Dwa głośniki generujące dźwięki o takiej samej częstotliwości znajdują się w odległości d od siebie. Zaznaczamy promień łuku R, od środka linii łączącej oba głośniki, tak jak pokazano to poniżej.

a. W jakich punktach wystąpią maksima?

b. W jakich punktach będą minima?



142. Długość struny wynosi 1,5 m, liniowa gęstość masy $\mu = 0{,}008$ kg/m, a siła naciągu wynosi 120 N. Jeśli temperatura powietrza wynosi $T = 22\,^\circ\mathrm{C}$, to jaka powinna być długość rury obustronnie otwartej, aby otrzymać taką samą częstotliwość dla $n = 3$?

143. Struna $(\mu = 0{,}006\ \mathrm{kg/m}; L = 1{,}50\ \mathrm{m})$ jest zamocowana na obu końcach, a siła naciągu wynosi 155 N. Struna oscyluje dla modu $n = 10$ i generuje dźwięk. W pobliżu drgają widełki stroikowe, generując dudnienia o częstotliwości 23,76 Hz.

a. Jaka jest częstotliwość dźwięku struny?

b. Jaka jest częstotliwość widełek stroikowych, jeśli częstotliwość widełek jest niższa?

c. Jaka powinna być siła naciągu struny, aby częstotliwość dudnień wynosiła zero?

144. Liniowa gęstość masy struny wynosi μ, długość L, a siła naciągu F_T. Struna drga dla modu n z częstotliwością f. Wyznacz stosunek $\Delta f/f$ dla małej zmiany siły naciągu.

145. Liniowa gęstość masy struny wynosi $\mu = 0{,}007$ kg/m, długość $L = 0{,}70$ m, a siła naciągu wynosi $F_T = 110$ N. Struna drga dla modu $n = 3$.

a. Jaka jest częstotliwość tych drgań?

b. Wykorzystaj wynik otrzymany w poprzednim zadaniu, aby wyznaczyć zmianę częstotliwości w wyniku wzrostu siły naciągu o 1,00%.

146. Głośnik podłączony do generatora sygnałowego jest wykorzystany do badań nad rezonansem w rurze. Częstotliwość sygnałów generowanych przez generator może być zmieniana w zakresie od 1000 Hz do 1800 Hz. Najpierw analizowana jest rura obustronnie otwarta o długości 0,75 m. Temperatura powietrza w pomieszczeniu wynosi $T_F = 85\,^\circ\mathrm{F}$. (a) Jakie mody normalne mogą być analizowane? Ile wynoszą częstotliwości i długości ich fal? Następnie rura o długości 0,75 m zostaje zamknięta na jednym końcu. (b) Jakie mody mogą być analizowane? Jakie są ich długości fal i częstotliwości?

147. Długość struny skrzypiec wynosi 23 cm i waży ona 0,9 g. Siła naciągu struny wynosi 850 N. Temperatura powietrza w pomieszczeniu wynosi $T_C = 24\,^\circ\mathrm{C}$. Struna zostaje szarpnięta i drga z modem równym $n = 9$.

a. Jaka jest prędkość dźwięku na strunie?

b. Jaka jest długość fali generowanego dźwięku?

c. Jaka jest częstotliwość drgań struny?

d. Jaka jest częstotliwość dźwięku generowanego przez strunę?

e. Jaka jest długość fali generowanego dźwięku?

DODATEK A | JEDNOSTKI

Wielkość fizyczna	**Symbol**	**Jednostka**	**Wymiar jednostki (za pomocą jednostek podstawowych)**
Przyspieszenie	$\vec{a}$	$\mathrm{m} / \mathrm{s}^2$	$\mathrm{m} / \mathrm{s}^2$
Liczność materii	n	**mol**	mol
Kąt	θ, ϕ, φ	radian (rad)	
Przyspieszenie kątowe	$\vec{\varepsilon}$	$\mathrm{rad} / \mathrm{s}^2$	s^{-2}
Częstość kołowa	ω	$\mathrm{rad} / \mathrm{s}$	s^{-1}
Moment pędu	$\vec{L}$	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 / \mathrm{s}$	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 / \mathrm{s}$
Prędkość kątowa	$\vec{\omega}$	$\mathrm{rad} / \mathrm{s}$	s^{-1}
Pole powierzchni	A, S	m^2	m^2
Liczba atomowa	Z		
Pojemność elektryczna	C, c	farad (F)	$\mathrm{A}^2 \cdot \mathrm{s}^4 / (\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2)$
Ładunek elektryczny	q, Q, e	kulomb (C)	$\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}$
Gęstość ładunku:			
liniowa	λ	C / m	$\mathrm{A} \cdot \mathrm{s} / \mathrm{m}$
powierzchniowa	σ	$\mathrm{C} / \mathrm{m}^2$	$\mathrm{A} \cdot \mathrm{s} / \mathrm{m}^2$
objętościowa	ρ	$\mathrm{C} / \mathrm{m}^3$	$\mathrm{A} \cdot \mathrm{s} / \mathrm{m}^3$
Przewodność elektryczna właściwa	σ	$\Omega^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-1}$	$\mathrm{A}^2 \cdot \mathrm{s}^3 / (\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^3)$
Natężenie prądu	I, i	**amper**	A
Gęstość prądu	$\vec{J}$	$\mathrm{A} / \mathrm{m}^2$	$\mathrm{A} / \mathrm{m}^2$
Gęstość	ρ	$\mathrm{kg} / \mathrm{m}^3$	$\mathrm{kg} / \mathrm{m}^3$
Względna przenikalność elektryczna	ε_r		
Moment dipolowy	$\vec{p}$	$\mathrm{C} \cdot \mathrm{m}$	$\mathrm{A} \cdot \mathrm{s} \cdot \mathrm{m}$
Natężenie pola elektrycznego	$\vec{E}$	N / C	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} / (\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}^3)$
Strumień elektryczny	Φ_E	$\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 / \mathrm{C}$	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^3 / (\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}^3)$
Siła elektromotoryczna	ε	wolt (V)	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 / (\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}^3)$
Energia	$E, E_\mathrm{k}, E_\mathrm{p}, U$	dżul (J)	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 / \mathrm{s}^2$
Entropia	S	J / K	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 / (\mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{K})$
Siła	$\vec{F}$	niuton (N)	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} / \mathrm{s}^2$

Tabela A1 Jednostki stosowane w fizyce (jednostki podstawowe wyróżniono tłustym drukiem)

Wielkość fizyczna	Symbol	Jednostka	Wymiar jednostki (za pomocą jednostek podstawowych)
Częstotliwość	f, ν	herc (Hz)	s^{-1}
Ciepło	Q	dżul (J)	$kg \cdot m^2 / s^2$
Indukcyjność	L	henr (H)	$kg \cdot m^2 / (A^2 \cdot s^2)$
Długość:	l, L	**metr**	m
Przemieszczenie	$\Delta x, \Delta \vec{r}$		
odległość	d, h		
położenie	$x, y, z, \vec{r}$		
Moment magnetyczny	$\vec{\mu}$	J / T	$A \cdot m^2$
Indukcja magnetyczna	$\vec{B}$	tesla ($T = Wb / m^2$)	$kg / (A \cdot s^2)$
Strumień indukcji mangnetycznej	Φ_B	weber (Wb)	$kg \cdot m^2 / (A \cdot s^2)$
Masa	m, M	**kilogram**	kg
Molowe ciepło właściwe	C	J / (mol · K)	$kg \cdot m^2 / (s^2 \cdot mol \cdot K)$
Moment bezwładności	I	$kg \cdot m^2$	$kg \cdot m^2$
Pęd	$\vec{p}$	kg · m / s	kg · m / s
Okres	T	s	s
Przenikalność magnetyczna próżni	μ_0	$N / A^2 = H / m$	$kg \cdot m / (A^2 \cdot s^2)$
Przenikalność elektryczna próżni	ε_0	$C^2 / (N \cdot m^2) = F / m$	$A^2 \cdot s^4 / (kg \cdot m^3)$
Potencjał	V	wolt (V = J / C)	$kg \cdot m^2 / (A \cdot s^3)$
Moc	P	wat (W = J / s)	$kg \cdot m^2 / s^3$
Ciśnienie	p	paskal ($Pa = N / m^2$)	$kg / (m \cdot s^2)$
Opór	R	om ($\Omega = V / A$)	$kg \cdot m^2 / (A^2 \cdot s^3)$
ciepło właściwe	c	J / (kg · K)	$m^2 / (s^2 \cdot K)$
Szybkość	v	m / s	m / s
Temperatura	T	**kelwin**	**K**
Czas	t	**sekunda**	s
Moment siły	$\vec{M}$	N · m	$kg \cdot m^2 / s^2$
Prędkość	$\vec{v}$	m / s	m / s
Objętość	V	m^3	m^3
Długość fali	λ	m	m
Praca	W	dżul (J = N · m)	$kg \cdot m^2 / s^2$

Tabela A1 Jednostki stosowane w fizyce (jednostki podstawowe wyróżniono tłustym drukiem)

DODATEK B | PRZELICZANIE JEDNOSTEK

	m	cm	km
1 metr	1	10^2	10^{-3}
1 centymetr	10^{-2}	1	10^{-5}
1 kilometr	10^3	10^5	1
1 cal	$2{,}540 \cdot 10^{-2}$	2,540	$2{,}540 \cdot 10^{-5}$
1 stopa	0,3048	30,48	$3{,}048 \cdot 10^{-4}$
1 mila	1609	$1{,}609 \cdot 10^5$	1,609
1 angstrem	10^{-10}	10^{-8}	10^{-13}
1 fermi	10^{-15}	10^{-13}	10^{-18}
1 rok świetlny	$9{,}460 \cdot 10^{17}$	$9{,}460 \cdot 10^{12}$	$9{,}460 \cdot 10^{15}$
	cal	stopa	mi
1 metr	39,37	3,281	$6{,}214 \cdot 10^{-4}$
1 centymetr	0,3937	$3{,}281 \cdot 10^{-2}$	$6{,}214 \cdot 10^{-6}$
1 kilometr	$3{,}937 \cdot 10^4$	$3{,}281 \cdot 10^3$	0,6214
1 cal	1	$8{,}333 \cdot 10^{-2}$	$1{,}578 \cdot 10^{-5}$
1 stopa	12	1	$1{,}894 \cdot 10^{-4}$
1 mila	$6{,}336 \cdot 10^4$	5280	1

Tabela B1 Długość

Powierzchnia

$1\ \text{cm}^2 = 0{,}155\ \text{cala}^2$
$1\ \text{m}^2 = 10^4\ \text{cm}^2 = 10{,}76\ \text{stopy}^2$
$1\ \text{cal}^2 = 6{,}452\ \text{cm}^2$
$1\ \text{stopa}^2 = 144\ \text{cale}^2 = 0{,}0929\ \text{m}^2$

Objętość

$1\ \text{litr} = 1000\ \text{cm}^3 = 10^{-3}\ \text{m}^3 = 0{,}03531\ \text{stopy}^3 = 61{,}02\ \text{cala}^3$
$1\ \text{stopa}^3 = 0{,}02832\ \text{m}^3 = 28{,}32\ \text{litr} = 7{,}477\ \text{galon USA}$
$1\ \text{galon USA} = 3{,}788\ \text{litr}$

	s	min	h	dzień	rok
1 sekunda	1	$1{,}667 \cdot 10^{-2}$	$2{,}778 \cdot 10^{-4}$	$1{,}157 \cdot 10^{-5}$	$3{,}169 \cdot 10^{-8}$
1 minuta	60	1	$1{,}667 \cdot 10^{-2}$	$6{,}944 \cdot 10^{-4}$	$1{,}901 \cdot 10^{-6}$
1 godzina	3600	60	1	$4{,}167 \cdot 10^{-2}$	$1{,}141 \cdot 10^{-4}$
1 dzień	$8{,}640 \cdot 10^4$	1440	24	1	$2{,}738 \cdot 10^{-3}$
1 rok	$3{,}156 \cdot 10^7$	$5{,}259 \cdot 10^5$	$8{,}766 \cdot 10^3$	365,25	1

Tabela B2 Czas

	m/s	cm/s	stopa/s	mi/h
1 m/s	1	10^2	3,281	2,237
1 cm/s	10^{-2}	1	$3{,}281 \cdot 10^{-2}$	$2{,}237 \cdot 10^{-2}$
1 stopa/s	0,3048	30,48	1	0,6818
1 mi/h	0,4470	44,70	1,467	1

Tabela B3 Prędkość

Przyspieszenie

$1\ \text{m/s}^2 = 100\ \text{cm/s}^2 = 3{,}281\ \text{stopy/s}^2$
$1\ \text{cm/s}^2 = 0{,}01\ \text{m/s}^2 = 0{,}03281\ \text{stopy/s}^2$
$1\ \text{stopa/s}^2 = 0{,}3048\ \text{m/s}^2 = 30{,}48\ \text{cm/s}^2$
$1\ \text{mila}/\ (\text{h} \cdot \text{s}) = 1{,}467\ \text{stopy}/\text{s}^2$

	kg	g	slug	u (atomowa jednostka masy)
1 kilogram	1	10^3	$6{,}852 \cdot 10^{-2}$	$6{,}024 \cdot 10^{26}$
1 gram	10^{-3}	1	$6{,}852 \cdot 10^{-5}$	$6{,}024 \cdot 10^{23}$
1 slug	14,59	$1{,}459 \cdot 10^4$	1	$8{,}789 \cdot 10^{27}$
1 u	$1{,}661 \cdot 10^{-27}$	$1{,}661 \cdot 10^{-24}$	$1{,}138 \cdot 10^{-28}$	1
1 tona	1000			

Tabela B4 Masa

	N	dyna	lb (funt- siła)
1 N	1	10^5	0,2248
1 dyna	10^{-5}	1	$2{,}248 \cdot 10^{-6}$
1 Ib	4,448	$4{,}448 \cdot 10^5$	1

Tabela B5 Siła

	Pa	dyna/cm^2	atm	cmHg	lb/cal^2
1 Pa	1	10	$9{,}869 \cdot 10^{-6}$	$7{,}501 \cdot 10^{-4}$	$1{,}450 \cdot 10^{-4}$
1 dyna/cm^2	10^{-1}	1	$9{,}869 \cdot 10^{-7}$	$7{,}501 \cdot 10^{-5}$	$1{,}450 \cdot 10^{-5}$
1 atm	$1{,}013 \cdot 10^5$	$1{,}013 \cdot 10^6$	1	76	14,70
1 cmHg*	$1{,}333 \cdot 10^3$	$1{,}333 \cdot 10^4$	$1{,}316 \cdot 10^{-2}$	1	0,1934
1 lb/cal^2	$6{,}895 \cdot 10^3$	$6{,}895 \cdot 10^4$	$6{,}805 \cdot 10^{-2}$	5,171	1
1 bar	10^5				
1 torr				1 (mmHg)	

***Przyspieszenie ziemskie wynosi** $9{,}80665\ \text{m}/\text{s}^2$**, a temperatura wynosi** $0\,^\circ\text{C}$

Tabela B6 Ciśnienie

	J	erg	ft.lb (stopofunt- siła)
1 J	1	10^{7}	0,7376
1 erg	10^{-7}	1	$7{,}376 \cdot 10^{-8}$
1 ft.lb	1,356	$1{,}356 \cdot 10^{7}$	1
1 eV	$1{,}602 \cdot 10^{-19}$	$1{,}602 \cdot 10^{-12}$	$1{,}182 \cdot 10^{-19}$
1 cal	4,186	$4{,}186 \cdot 10^{7}$	3,088
1 BTU	$1{,}055 \cdot 10^{3}$	$1{,}055 \cdot 10^{10}$	$7{,}779 \cdot 10^{2}$
1 kWh	$3{,}600 \cdot 10^{6}$		
	eV	cal (kaloria)	Btu (angielska jednostka ciepła)
1 dżul	$6{,}242 \cdot 10^{18}$	0,2389	$9{,}481 \cdot 10^{-4}$
1 erg	$6{,}242 \cdot 10^{11}$	$2{,}389 \cdot 10^{-8}$	$9{,}481 \cdot 10^{-11}$
1 ft.lb	$8{,}464 \cdot 10^{18}$	0,3239	$1{,}285 \cdot 10^{-3}$
1 eV	1	$3{,}827 \cdot 10^{-20}$	$1{,}519 \cdot 10^{-22}$
1 cal	$2{,}613 \cdot 10^{19}$	1	$3{,}968 \cdot 10^{-3}$
1 Btu	$6{,}585 \cdot 10^{21}$	$2{,}520 \cdot 10^{2}$	1

Tabela B7 Praca, energia, ciepło

Moc
$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$

Angielski koń parowy hp (ang. horse power); stopofunt- siła na sekundę ft·lbf/s (ang. foot pound-force per second)
$1 \text{ hp} = 746 \text{ W} = 550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s}$

Angielska jednostka ciepła na godzinę Btu/h (ang. British thermal unit per hour)
$1 \text{ Btu/h} = 0{,}293 \text{ W}$

Kąt
$1 \text{ rad} = 57{,}30^\circ = 180^\circ/\pi$
$1^\circ = 0{,}01745 \text{ rad} = \pi/180 \text{ rad}$
$1 \text{ obrót} = 360^\circ = 2\pi \text{ rad}$
$1 \text{ obrót/min} = 0{,}1047 \text{ rad/s}$

DODATEK C | NAJWAŻNIEJSZE STAŁE FIZYCZNE

Wielkość	Symbol	Wartość
atomowa jednostka masy	u	$1{,}660\,538\,782(83) \cdot 10^{-27}$ kg $931{,}494\,028(23)$ MeV / c^2
liczba Avogadra	N_A	$6{,}022\,141\,79(30) \cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$
magneton Bohra	$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$	$9{,}274\,009\,15(23) \cdot 10^{-24}$ J / T
promień Bohra	$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2 k_e}$	$5{,}291\,772\,085\,9(36) \cdot 10^{-11}$ m
stała Boltzmanna	$k_B = \frac{R}{N_A}$	$1{,}380\,650\,4(24) \cdot 10^{-23}$ J / K
komptonowska długość fali	$\lambda_C = \frac{h}{m_e c}$	$2{,}426\,310\,217\,5(33) \cdot 10^{-12}$ m
stała elektrostatyczna	$k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	$8{,}987\,551\,788... \cdot 10^9$ N · m^2 / C^2 (dokładna wartość)
masa deuteronu	m_d	$3{,}343\,583\,20(17) \cdot 10^{-27}$ kg $2{,}013\,553\,212\,724(78)$ u $1875{,}612\,859$ MeV / c^2
masa elektronu	m_e	$9{,}109\,382\,15(45) \cdot 10^{-31}$ kg $5{,}485\,799\,094\,3(23) \cdot 10^{-4}$ u $0{,}510\,998\,910(13)$ MeV / c^2
elektronowolt	eV	$1{,}602\,176\,487(40) \cdot 10^{-19}$ J
ładunek elementarny	e	$1{,}602\,176\,487(40) \cdot 10^{-19}$ C
stała gazowa	R	$8{,}314\,472(15)$ J / (mol · K)
stała grawitacji	G	$6{,}674\,28(67) \cdot 10^{-11}$ N · m^2 / kg^2
masa neutronu	m_n	$1{,}674\,927\,211(84) \cdot 10^{-27}$ kg $1{,}008\,664\,915\,97(43)$ u $939{,}565\,346(23)$ MeV / c^2
magneton jądrowy	$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}$	$5{,}050\,783\,24(13) \cdot 10^{-27}$ J / T
przenikalność magnetyczna próżni	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ T · m / A (dokładna wartość)

Tabela C1 Najważniejsze stałe fizyczne *Uwaga:* Podane wartości stałych zostały zarekomendowane w 2006 r. przez Konwent Danych dla Nauki i Technologii CODATA, na podstawie dopasowania wartości uzyskanych na drodze eksperymentalnej za pomocą metody najmniejszych kwadratów. Wartości podane w nawiasach są niepewnościami dwóch ostatnich cyfr.

Wielkość	Symbol	Wartość
przenikalność elektryczna próżni	$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$	$8{,}854\ 187\ 817\ \ldots \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C^2 / (N \cdot m^2)}$ (dokładna wartość)
stała Plancka	h	$6{,}626\,068\,96(33) \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$
zredukowana stała Plancka / stała Diraca	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	$1{,}054\,571\,628(53) \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$
masa protonu	m_p	$1{,}672\,621\,637(83) \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$ $1{,}007\,276\,466\,77(10)\ \mathrm{u}$ $938{,}272\,013(23)\ \mathrm{MeV} / c^2$
stała Rydberga	R_H	$1{,}097\,373\,156\,852\,7(73) \cdot 10^7\ \mathrm{m^{-1}}$
prędkość światła w próżni	c	$2{,}997\,924\,58 \cdot 10^8\ \mathrm{m / s}$ (dokładna wartość)

Tabela C1 Najważniejsze stałe fizyczne *Uwaga:* Podane wartości stałych zostały zarekomendowane w 2006 r. przez Konwent Danych dla Nauki i Technologii CODATA, na podstawie dopasowania wartości uzyskanych na drodze eksperymentalnej za pomocą metody najmniejszych kwadratów. Wartości podane w nawiasach są niepewnościami dwóch ostatnich cyfr.

Przydatne wartości iloczynów stałych:

$hc = 12\,400\ \mathrm{eV \cdot Å} = 1240\ \mathrm{eV \cdot nm} = 1240\ \mathrm{MeV \cdot fm}$

$\hbar c = 1973\ \mathrm{eV \cdot Å} = 197{,}3\ \mathrm{eV \cdot nm} = 197{,}3\ \mathrm{MeV \cdot fm}$

$k_\mathrm{e} e^2 = 14{,}4\ \mathrm{eV \cdot Å} = 1{,}44\ \mathrm{eV \cdot nm} = 1{,}44\ \mathrm{MeV \cdot fm}$

$k_\mathrm{B} T = 0{,}025\,85\ \mathrm{eV}$, przy temperaturze $T = 300\ \mathrm{K} = 26{,}85\ \mathrm{°C}$

DODATEK D | DANE ASTRONOMICZNE

Obiekt niebieski	Odległość od Słońca (w milionach km)	Okres obiegu po orbicie	Okres obrotu na równiku	Mimośród orbity
Słońce	–	–	27 dni	–
Merkury	57,9	88 dni	59 dni	0,206
Wenus	108,2	224,7 dni	243 dni	0,007
Ziemia	149,6	365,26 dni	23 h 56 min 4 s	0,017
Mars	227,9	687 dni	24 h 37 min 23 s	0,093
Jowisz	778,4	11,9 lat	9 h 50 min 30 s	0,048
Saturn	1426,7	29,56 lat	10 h 14 min	0,054
Uran	2871,0	84,0 lat	17 h 14 min	0,047
Neptun	4498,3	164,8 lat	16 h	0,009
Księżyc ziemski	149,6 (0,386 od Ziemi)	27,3 dni	27,3 dni	0,055
Obiekt niebieski	Średnica na równiku (km)	Masa (Masa Ziemi = 1)	Gęstość (g/cm^3)	
Słońce	1 392 000	333 000,00	1,4	
Merkury	4879	0,06	5,4	
Wenus	12 104	0,82	5,2	
Ziemia	12 756	1,00	5,5	
Mars	6794	0,11	3,9	
Jowisz	142 984	317,83	1,3	
Saturn	120 536	95,16	0,7	
Uran	51 118	14,54	1,3	
Neptun	49 528	17,15	1,6	
Księżyc ziemski	3476	0,01	3,3	

Tabela D1 Dane astronomiczne

Inne dane:

Masa Ziemi: $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg
Masa Księżyca: $7{,}36 \cdot 10^{22}$ kg
Masa Słońca: $1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg

DODATEK E | WZORY MATEMATYCZNE

Równanie kwadratowe

Jeżeli $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$, wtedy $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Geometria

Trójkąt o podstawie b i wysokości h:
Powierzchnia $= \frac{1}{2} bh$
Koło o promieniu r:
Obwód $= 2\pi r$
Pole powierzchni $= \pi r^2$
Kula o promieniu r:
Pole powierzchni $= 4\pi r^2$
Objętość $= \frac{4}{3}\pi r^3$
Walec o promieniu r i wysokości h:
Pole powierzchni bocznej $= 2\pi rh$
Objętość $= \pi r^2 h$

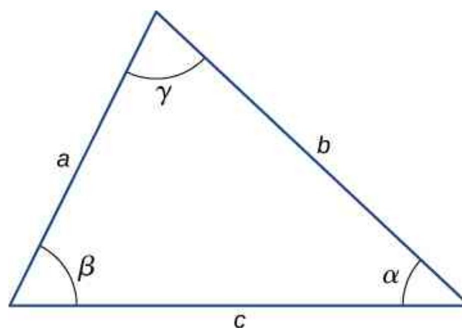
Trygonometria

Tożsamości trygonometryczne

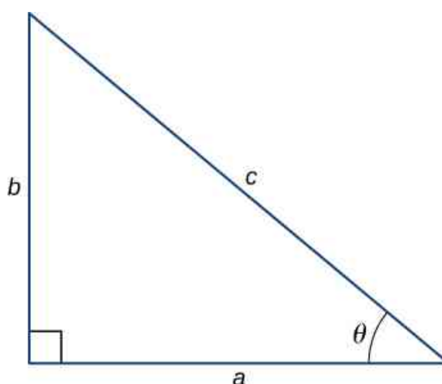
1. $\sin\theta = \dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$
2. $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$
3. $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\theta}$
4. $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$
5. $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$
6. $\operatorname{tg}(90° - \theta) = \operatorname{ctg}\theta$
7. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
8. $\sec^2\theta - \operatorname{tg}^2\theta = 1$
9. $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
10. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$
11. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$
12. $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta)}$
13. $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$
14. $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$
15. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$
16. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

Trójkąty

1. Twierdzenie sinusów: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$
2. Twierdzenie cosinusów: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$



3. Twierdzenie Pitagorasa: $c^2 = a^2 + b^2$



Rozwinięcie funkcji w szeregi potęgowe

1. Wzór dwumianowy:
$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \ldots + \frac{n(n-1)}{2!}a^2b^{n-2} + \frac{n}{1!}ab^{n-1} + b^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$
2. $(1 \pm x)^n = 1 \pm \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} \pm \ldots = \sum_{k=0}^{n} (\pm 1)^k \binom{n}{k} x^k$, dla $|x| < 1$
3. $(1 \pm x)^{-n} = 1 \mp \frac{nx}{1!} + \frac{n(n+1)x^2}{2!} \mp \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (\mp 1)^k \binom{k+n-1}{k} x^k$, dla $|x| < 1$
4. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
5. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$
6. $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots$, dla $|x| < \frac{\pi}{2}$
7. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
8. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$, dla $|x| < 1$

Pochodne

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[af(x)] = a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$

2. $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$
3. $\frac{d}{dx}[f(x)\,g(x)] = f(x)\,\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\,\frac{d}{dx}f(x)$
4. $\frac{d}{dx}f(u) = \frac{d}{du}f(u) \cdot \frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$
6. $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$
7. $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$
8. $\frac{d}{dx}\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x}$
9. $\frac{d}{dx}\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sin^2 x}$
10. $\frac{d}{dx}\sec x = \operatorname{tg}(x)\sec(x)$
11. $\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x = -\operatorname{ctg}(x)\operatorname{cosec}(x)$
12. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$
13. $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$
14. $\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $\frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16. $\frac{d}{dx}\operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}$

Całki

1. $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$
2. $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
3. $\int x^m\,dx = \begin{cases} \frac{x^{m+1}}{m+1}, & \text{dla } m \neq 1 \\ \ln|x|, & \text{dla } m = 1 \end{cases}$
4. $\int \sin x\,dx = -\cos x$
5. $\int \cos x\,dx = \sin x$
6. $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x|$
7. $\int \sin^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a}$
8. $\int \cos^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a}$
9. $\int \sin(ax)\cos(ax)\,dx = -\frac{\cos(2ax)}{4a}$

10. $$\int e^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}e^{ax}$$

11. $$\int xe^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2}\,(ax-1)$$

12. $$\int \ln(ax)\,\mathrm{d}x = x\ln(ax) - x$$

13. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)$$

14. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|$$

15. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \mathrm{arcsinh}\left(\frac{x}{a}\right) = \ln\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right|$$

16. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

17. $$\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\,\mathrm{arcsinh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

18. $$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\,\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

DODATEK F | UKŁAD OKRESOWY PIERWIASTKÓW

Układ okresowy pierwiastków

Okres / Grupa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1 H 1,008 wodór																	2 He 4,003 hel
2	3 Li 6,94 lit	4 Be 9,012 beryl											5 B 10,81 bor	6 C 12,01 węgiel	7 N 14,01 azot	8 O 16,00 tlen	9 F 19,00 fluor	10 Ne 20,18 neon
3	11 Na 22,99 sód	12 Mg 24,31 magnez											13 Al 26,98 glin	14 Si 28,09 krzem	15 P 30,97 fosfor	16 S 32,06 siarka	17 Cl 35,45 chlor	18 Ar 39,95 argon
4	19 K 39,10 potas	20 Ca 40,08 wapń	21 Sc 44,96 skand	22 Ti 47,87 tytan	23 V 50,94 wanad	24 Cr 52,00 chrom	25 Mn 54,94 mangan	26 Fe 55,85 żelazo	27 Co 58,93 kobalt	28 Ni 58,69 nikiel	29 Cu 63,55 miedź	30 Zn 65,38 cynk	31 Ga 69,72 gal	32 Ge 72,63 german	33 As 74,92 arsen	34 Se 78,97 selen	35 Br 79,90 brom	36 Kr 83,80 krypton
5	37 Rb 85,47 rubid	38 Sr 87,62 stront	39 Y 88,91 itr	40 Zr 91,22 cyrkon	41 Nb 92,91 niob	42 Mo 95,95 molibden	43 Tc [97] technet	44 Ru 101,1 ruten	45 Rh 102,9 rod	46 Pd 106,4 pallad	47 Ag 107,9 srebro	48 Cd 112,4 kadm	49 In 114,8 ind	50 Sn 118,7 cyna	51 Sb 121,8 antymon	52 Te 127,6 tellur	53 I 126,9 jod	54 Xe 131,3 ksenon
6	55 Cs 132,9 cez	56 Ba 137,3 bar	57-71 La–Lu *	72 Hf 178,5 hafn	73 Ta 180,9 tantal	74 W 183,8 wolfram	75 Re 186,2 ren	76 Os 190,2 osm	77 Ir 192,2 iryd	78 Pt 195,1 platyna	79 Au 197,0 złoto	80 Hg 200,6 rtęć	81 Tl 204,4 tal	82 Pb 207,2 ołów	83 Bi 209,0 bizmut	84 Po [209] polon	85 At [210] astat	86 Rn [222] radon
7	87 Fr [223] frans	88 Ra [226] rad	89-103 Ac–Lr **	104 Rf [267] rutherford	105 Db [270] dubn	106 Sg [271] seaborg	107 Bh [270] bohr	108 Hs [277] has	109 Mt [276] meitner	110 Ds [281] darmsztadt	111 Rg [282] roentgen	112 Cn [285] kopernik	113 Nh [285] nihonium	114 Fl [289] flerow	115 Mc [288] moscovium	116 Lv [293] liwermor	117 Ts [294] tennessine	118 Og [294] oganesson

*	57 La 138,9 lantan	58 Ce 140,1 cer	59 Pr 140,9 prazeodym	60 Nd 144,2 neodym	61 Pm [145] promet	62 Sm 150,4 samar	63 Eu 152,0 europ	64 Gd 157,3 gadolin	65 Tb 158,9 terb	66 Dy 162,5 dysproz	67 Ho 164,9 holm	68 Er 167,3 erb	69 Tm 168,9 tul	70 Yb 173,1 iterb	71 Lu 175,0 lutet
**	89 Ac [227] aktyn	90 Th 232,0 tor	91 Pa 231,0 protaktyn	92 U 238,0 uran	93 Np [237] neptun	94 Pu [244] pluton	95 Am [243] ameryk	96 Cm [247] kiur	97 Bk [247] berkel	98 Cf [251] kaliforn	99 Es [252] einstein	100 Fm [257] ferm	101 Md [258] mendelew	102 No [259] nobel	103 Lr [262] lorens

Liczba atomowa → 1
H ← Symbol
1,008 ← Masa atomowa
Nazwa → wodór

Oznaczenia kolorów

metal	ciało stałe
metaloid	ciecz
niemetal	gaz

DODATEK G | ALFABET GRECKI

Nazwa	Wielka litera	Mała litera	Nazwa	Wielka litera	Mała litera
alfa	Α	α	ni	Ν	ν
beta	Β	β	ksi	Ξ	ξ
gamma	Γ	γ	omikron	Ο	ο
delta	Δ	δ	pi	Π	π
epsilon	Ε	ε	ro	Ρ	ρ
dzeta	Ζ	ζ	sigma	Σ	σ
eta	Η	η	tau	Τ	τ
theta	Θ	θ	ipsylon	Υ	υ
jota	Ι	ι	fi	Φ	ϕ
kappa	Κ	κ	chi	Χ	χ
lambda	Λ	λ	psi	Ψ	ψ
mi	Μ	μ	omega	Ω	ω

Tabela G1 Alfabet grecki

ROZWIĄZANIA ZADAŃ

ROZDZIAŁ 1

SPRAWDŹ, CZY ROZUMIESZ

1.1. $4{,}79 \cdot 10^2\ \text{Mg}$ czyli $479\ \text{Mg}$.
1.2. $3 \cdot 10^8\ \text{m/s}$
1.3. $10^8\ \text{km}^2$
1.4. Wartości były 4,45 raza za małe.
1.5. $4\pi r^3/3$
1.6. tak
1.7. $3 \cdot 10^4\ \text{m}$ lub 30 km. Wartość ta jest prawdopodobnie zbyt niska, ponieważ gęstość atmosfery maleje wraz z wysokością (w rzeczywistości sama stratosfera ma więcej niż 30 km wysokości).
1.8. Nie, stoper się nie przyda. Jego niepewność pomiarowa jest zbyt duża, by móc poprawnie zmierzyć czas uzyskiwany przez biegacza na takim dystansie.

PYTANIA

1. Fizyka jest nauką, która w celu odkrycia mechanizmów leżących u źródła zjawisk zajmuje się opisem związków między energią, materią, przestrzenią i czasem.
3. Nie, żadna z tych teorii nie może być uznana za bardziej prawidłową. Jeżeli wyniki doświadczeń nie sugerują, że jedna z teorii lepiej opisuje rzeczywistość, oznacza to, że obie są tak samo prawidłowe. Fizyk może preferować jedną z teorii, ponieważ może mu się ona wydawać prostsza, bardziej naturalna albo piękniejsza, ale fizyk ten na pewno przyzna, że drugiej z tych teorii nie można nazwać nieprawidłową. Powie raczej, że aby stwierdzić, która z teorii lepiej opisuje zachodzące zjawisko, należałoby przeprowadzić więcej doświadczeń.
5. Prawdopodobnie nie. Jak mówi przysłowie „niecodzienne sytuacje wymagają niecodziennych rozwiązań”.
7. Konwersja jednostki wymaga jedynie zmiany potęgi liczby 10, co znacznie upraszcza obliczenia. Przedrostki umożliwiają przeskalowanie jednostki podstawowej na taką, która jest odpowiednia do danego zastosowania.
9.
   a. Jednostki podstawowe definiuje się poprzez pomiar, natomiast jednostki pochodne wyprowadza się na podstawie jednostek podstawowych.
   b. Wielkość podstawową wybiera się ze względów praktycznych oraz ze względu na konwencję. Wielkości pochodne definiuje się za pomocą wielkości podstawowych.
   c. Jednostka podstawowa opisuje pomiar wielkości podstawowej w danym systemie miar. Oznacza to, że wynik pomiaru wielkości podstawowej można wyrazić za pomocą jednostki podstawowej każdego systemu, który używa tych samych wielkości podstawowych. Przykładowo, długość jest wielkością podstawową, zarówno w układzie SI, jak i w brytyjskim systemie miar, ale metr jest jednostką podstawową tylko w układzie SI.
11.
   a. Niepewność pomiarowa stanowi ilościową reprezentację precyzji.
   b. Błąd pomiaru stanowi ilościową reprezentację dokładności.
13. Upewnić się, że uzyskana wartość ma sens oraz wyciągnąć wnioski.

ZADANIA

15.
   a. 10^3;
   b. 10^5;
   c. 10^2;
   d. 10^{15};
   e. 10^2;
   f. 10^{57}.
17. 10^2 pokoleń
19. 10^{11} atomów
21. 10^3 impulsów
23. 10^{26} operacji zmiennoprzecinkowych
25.
   a. 957 ks;
   b. 4,5 cs lub 45 ms;
   c. 550 ns;
   d. 31,6 Ms.
27.
   a. 75,9 Mm;
   b. 7,4 mm;
   c. 88 pm;
   d. 16,3 Tm.
29.

a. 3,8 cg lub 38 mg;
b. 230 Eg;
c. 24 ng;
d. 8 Eg;
e. 4,2 g.

31.
a. 27,8 m/s;
b. 62 mi/h.

35. $1{,}05 \cdot 10^5$ stopa^2

37. 8,847 km

39.
a. $1{,}3 \cdot 10^{-9}$ m;
b. 40 km na million lat.

41. 10^6 Mg/μl.

43. 62,4 funtów na stopę sześcienną

45. 0,017 rad

47. 1 światłonanosekunda

49. $3{,}6 \cdot 10^{-4}$ m^3

51.
a. Tak, oba składniki mają wymiar L^2T^{-2}.
b. Nie.
c. Tak, oba składniki mają wymiar LT^{-1}.
d. Tak, oba składniki mają wymiar LT^{-2}.

53.
a. $[v] = LT^{-1}$;
b. $[a] = LT^{-2}$;
c. $\left[\int v \mathrm{d}t\right] = L$;
d. $\left[\int a \mathrm{d}t\right] = LT^{-1}$;
e. $\left[\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right] = LT^{-3}$.

55.
a. L;
b. L;
c. $L^0 = 1$ (liczba niemianowana).

57. 10^{28} atomów

59. 10^{51} cząsteczek

61. 10^{16} układów słonecznych

63.
a. objętość $= 10^{27}$ m^3, średnica $= 10^9$ m;
b. 10^{11} m.

65.
a. Założenie, że wykonanie jednej operacji zajmuje sekundę, wydaje się być sensowne. Daje to 10^9 operacji zmiennoprzecinkowych w ciągu życia człowieka;
b. około $10^9 \cdot 10^{-17}$ s $= 10^{-8}$ s, lub około 10 ns.

67. 2 kg

69. 4%

71. 67 ml

73.
a. Liczba 99 ma 2 cyfry znaczące; 100 ma 3 cyfry znaczące;
b. 1,00%;
c. niepewności względnej.

75.
a. 2%;
b. 1 mm Hg.

77. 7,557 cm^2

79.
a. 37,2 kg; ponieważ liczba toreb jest wartością dokładną, nie ma ona wpływu na cyfry znaczące;
b. 1,4 N; wartość początkowa 55 kg przedstawiona jest przy pomocy dwóch cyfr znaczących, więc wynik również musi być przedstawiony przy pomocy dwóch cyfr znaczących.

ZADANIA DODATKOWE

81.
a. $[s_0] = L$, jednostka to metr (m);
b. $[v_0] = LT^{-1}$, jednostka to metr na sekundę (m/s);

c. $[a_0] = \mathrm{LT}^{-2}$, jednostka to metr na sekundę do kwadratu (m/s^2);
d. $[j_0] = \mathrm{LT}^{-3}$, jednostka to metr na sekundę do potęgi trzeciej (m/s^3);
e. $[S_0] = \mathrm{LT}^{-4}$, jednostka to m/s^4;
f. $[c] = \mathrm{LT}^{-5}$, jednostka to m/s^5.

83.
a. 0,059%;
b. 0,01%;
c. 4,681 m/s;
d. 0,07%, 0,003 m/s.

85.
a. 0,02%;
b. 10^4 funtów.

87.
a. $143{,}6\ \mathrm{cm}^3$;
b. $0{,}2\ \mathrm{cm}^2$, czyli 0,14%.

ZADANIA TRUDNIEJSZE

89. Jako że argument w każdym wyrazie ciągu potęgowego podnoszony jest do innej potęgi, jedynym sposobem, aby zachować spójność wymiarów, jest używanie argumentów, które są liczbami niemianowanymi. Załóżmy, że $[x] = \mathrm{L}^a\mathrm{M}^b\mathrm{T}^c$. Oznacza to, że $[x^n] = [x]^n = \mathrm{L}^{an}\mathrm{M}^{bn}\mathrm{T}^{cn}$. Jeżeli $[x] = [x^n]$, wtedy $an = a$, $bn = b$ i $cn = c$ dla każdego n. Jest to możliwe, tylko jeśli $a = b = c = 0$.

ROZDZIAŁ 2

SPRAWDŹ, CZY ROZUMIESZ

2.1.
a. nie są równe, ponieważ są ortogonalne;
b. nie są równe, ponieważ mają różne moduły;
c. nie są równe, ponieważ mają różne moduły i kierunki;
d. nie są równe, ponieważ mają przeciwne zwroty;
e. równe.

2.2. 16 m;
$\vec{D} = -16\ \mathrm{m} \cdot \hat{u}$.

2.3. $G = 28{,}2\ \mathrm{cm}$, $\theta_G = 291°$.

2.4. $\vec{D} = -5{,}0\ \mathrm{cm} \cdot \hat{i} - 3{,}0\ \mathrm{cm} \cdot \hat{j}$;
mucha przesunęła się 5,0 cm w lewo i 3,0 cm w dół od punktu początkowego.

2.5. 5,83 cm; 211°

2.6. $\vec{D} = -20\ \mathrm{m} \cdot \hat{j}$.

2.7. 35,1 m/s = 126,4 km/h.

2.8. $\vec{G} = 10{,}25\ \mathrm{cm} \cdot \hat{i} - 26{,}22\ \mathrm{cm} \cdot \hat{j}$.

2.9. $D = 55{,}7\ \mathrm{N}$;
kierunek 65,7° na północ od kierunku wschodniego

2.10. $\hat{v} = 0{,}8\hat{i} + 0{,}6\hat{j}$,
36,87° na północ od kierunku wschodniego

2.11. $\vec{A} \cdot \vec{B} = -57{,}3$,
$\vec{F} \cdot \vec{C} = 27{,}8$.

2.13. 131,9°

2.14. $W_1 = 1{,}5\ \mathrm{J}$, $W_2 = 0{,}3\ \mathrm{J}$

2.15. $\vec{A} \times \vec{B} = -40{,}1\hat{k}$ lub $\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = 40{,}1$, zwrot za kartkę; $\vec{C} \times \vec{F} = 157{,}6\hat{k}$ lub $\left|\vec{C} \times \vec{F}\right| = 157{,}6$, zwrot nad kartkę

2.16.
a. $-2\hat{k}$;
b. 2;
c. 153,4°;
d. 135°.

PYTANIA

1. skalarną
3. możliwe różne odpowiedzi
5. powinny być równoległe; suma modułów; powinny być przeciwnie skierowane; zero
7. tak; tak
9. zero, tak

11. nie
13. są równe; są równe; są takie same
15. wersor osi x
17. Składowe też są równe.
19. tak
21.

a. $C = \vec{A} \cdot \vec{B}$,
b. $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ lub $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$,
c. $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$,
d. $\vec{C} = A\vec{B}$,
e. $\vec{C} + 2\vec{A} = \vec{B}$,
f. $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$,
g. po lewej stronie znaku równości znajduje się skalar, a po prawej wektor,
h. $\vec{C} = 2\vec{A} \times \vec{B}$,
i. $\vec{C} = \vec{A}/B$,
j. $\vec{C} = \vec{A}/B$.

23. Są ortogonalne

ZADANIA

25. $\vec{h} = -16{,}4\text{ m} \cdot \hat{u}$, $16{,}4\text{ m}$.
27. 30,8 m, $35,7^\circ$ na zachód od igły wskazującej kierunek północny
29. 134 km, 80°.
31. 7,34 km, $63,5^\circ$ na południe od kierunku wschodniego
33. 3,8 km w kierunku wschodnim; 3,2 km w kierunku północnym; 7,0 km
35. 14,3 km, 65°.
37. $\vec{A} = 8{,}66\hat{i} + 5{,}00\hat{j}$,
$\vec{B} = +30{,}09\hat{i} + 39{,}93\hat{j}$,
$\vec{C} = +6{,}00\hat{i} - 10{,}39\hat{j}$,
$\vec{D} = -15{,}97\hat{i} + 12{,}04\hat{j}$,
$\vec{F} = -17{,}32\hat{i} - 10{,}00\hat{j}$.
39.

a. 1,94 km, 7,24 km
b. dowód

41. 3,8 km na wschód, 3,2 km na północ; 2,0 km;
$\vec{D} = 3{,}8\text{ km} \cdot \hat{i} + 3{,}2\text{ km} \cdot \hat{j}$
43. $P_1(2{,}165\text{ m}; 1{,}250\text{ m})$, $P_1(-1{,}900\text{ m}; 3{,}290\text{ m})$, 5,27 m
45. 8,60 m,
$A(2\sqrt{5}\text{ m}; 0{,}647\pi\text{ rad})$,
$B(3\sqrt{2}\text{ m}; 0{,}75\pi\text{ rad})$.
47.

a. $\vec{A} + \vec{B} = -4\hat{i} - 6\hat{j}$, $\left|\vec{A} + \vec{B}\right| = 7{,}211$ oraz $\theta = 213,7^\circ$;
b. $\vec{A} - \vec{B} = 2\hat{i} - 2\hat{j}$, $\left|\vec{A} - \vec{B}\right| = 2\sqrt{2}$ oraz $\theta = -45^\circ$.

49.

a. $\vec{C} = 5{,}0\text{ m} \cdot \hat{i} - 1{,}0\text{ m} \cdot \hat{j} - 3{,}0\text{ m} \cdot \hat{k}$, $C = 5{,}92\text{ m}$;
b. $\vec{D} = 4{,}0\text{ m} \cdot \hat{i} - 11{,}0\text{ m} \cdot \hat{j} + 15{,}0\text{ m} \cdot \hat{k}$, $D = 19{,}03\text{ m}$.

51. $\vec{D} = 3{,}3\text{ km} \cdot \hat{i} - 6{,}6\text{ km} \cdot \hat{j}$, gdzie $\hat{i}$ wskazuje na wschód, 7,34 km, $-63,5^\circ$.
53.

a. $\vec{R} = -1{,}35\hat{i} - 22{,}04\hat{j}$,
b. $\vec{R} = -17{,}98\hat{i} + 0{,}89\hat{j}$.

55. $\vec{D} = 200\text{ m} \cdot \hat{i} + 300\text{ m} \cdot \hat{j}$, $D = 360{,}5\text{ m}$, $56,3^\circ$ na północ od kierunku wschodniego.
57. $\vec{R} = -3\text{ m} \cdot \hat{i} - 16\text{ m} \cdot \hat{j}$.
59. $\vec{E} = E \cdot \hat{E}$,
$E_x = +178{,}9\text{ V/m}$,

$E_y = -357{,}8\ \mathrm{V/m}$,
$E_z = 0{,}0\ \mathrm{V/m}$,
$\theta_E = -\operatorname{arctg}(2)$.

61.

a. $\vec{R}_B = 12{,}278\ \mathrm{km}\cdot\hat{i} + 7{,}089\ \mathrm{km}\cdot\hat{j} + 2{,}500\ \mathrm{km}\cdot\hat{k}$, $\vec{R}_D = -0{,}262\ \mathrm{km}\cdot\hat{i} + 3{,}000\ \mathrm{km}\cdot\hat{k}$;
b. $\left|\vec{R}_B - \vec{R}_D\right| = 14{,}414\ \mathrm{km}$.

63.

a. 8,66,
b. 10,39,
c. 0,866,
d. 17,32.

65. $\theta_i = 64,12°$, $\theta_j = 150,79°$, $\theta_k = 77,39°$.

67.

a. $-119{,}98\,\hat{k}$,
b. $-173{,}2\,\hat{k}$,
c. $+93{,}69\hat{k}$,
d. $-413{,}2\,\hat{k}$,
e. $+39{,}93\,\hat{k}$,
f. $-30{,}09\,\hat{k}$,
g. $+149{,}9\,\hat{k}$,
h. 0 .

69.

a. 0 ,
b. $173{,}194$,
c. $+199{,}993\,\hat{k}$.

ZADANIA DODATKOWE

71.

a. 18,4 km i 26,2 km;
b. 31,5 km i 5,56 km.

73.

a. $(r,\ \pi - \varphi)$,
b. $(2r,\ \varphi + 2\pi)$,
c. $(3r,\ -\varphi)$.

75. $d_{\mathrm{PM}} = 33{,}12\ \mathrm{nmi} = 61{,}34\ \mathrm{km}$, $d_{\mathrm{NP}} = 35{,}47\ \mathrm{nmi} = 65{,}69\ \mathrm{km}$.

77. dowód

79.

a. $10{,}00\ \mathrm{m}$,
b. $5\pi\ \mathrm{m}$,
c. 0 .

81. 22,2 km/h, $35,8°$ na południe od kierunku zachodniego

83. 240,2 m; $2,2°$ na południe od kierunku zachodniego

85. $\vec{B} = -4{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j}$ lub $\vec{B} = 4{,}0\hat{i} - 3{,}0\hat{j}$

87. dowód

ZADANIA TRUDNIEJSZE

89. $G_\perp = 2375\sqrt{17} \approx 9792$.

91. dowód

ROZDZIAŁ 3

SPRAWDŹ, CZY ROZUMIESZ

3.1.

a. Przemieszczenie kolarza to $\Delta x = x_\mathrm{k} - x_0 = -1\ \mathrm{km}$ (przemieszczenie jest ujemne, bo jako kierunek dodatni przyjęliśmy wschód).
b. Droga pokonana przez kolarza wynosi $3\ \mathrm{km} + 2\ \mathrm{km} = 5\ \mathrm{km}$.
c. Długość przemieszczenia wynosi 1 km.

3.2.

a. Różniczkując $x(t)$ po czasie, otrzymujemy $v(t) = -6t\ \mathrm{m/s}$.
b. Nie, bo czas jest zawsze nieujemny.
c. Prędkość wynosi $v(1{,}0\ \mathrm{s}) = -6\ \mathrm{m/s}$, natomiast szybkość to $|v(1{,}0\ \mathrm{s})| = 6\ \mathrm{m/s}$.

3.3. Podstawiając dane do wzoru na przyspieszenie średnie, otrzymujemy:
$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2{,}0 \cdot 10^7 \text{ m/s} - 0 \text{ m/s}}{10^4 \text{ s} - 0 \text{ s}} = 2{,}0 \cdot 10^{11} \text{ m/s}^2$.
3.4. Jeśli przyjmiemy kierunek wschodni jako dodatni, przyspieszenie samolotu jest ujemne, bo jego wektor skierowany jest w kierunku zachodnim (samolot hamuje). Ruch samolotu jest opóźniony. Kierunek przyspieszenia jest przeciwny do wektora prędkości i kierunku ruchu.
3.5. Aby odpowiedzieć na to pytanie, musisz wybrać odpowiednie równanie ruchu, które pozwoli ci wyznaczyć t na podstawie danych a, v_0 oraz v:
$v = v_0 + at$.
Następnie przekształć je do postaci umożliwiającej obliczenie czasu t:
$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{400 \text{ m/s} - 0 \text{ m/s}}{20 \text{ m/s}^2} = 20 \text{ s}$.
3.6. $a = \frac{2}{3} \text{ m/s}^2$.
3.7. Bryła wpadnie do wody po czasie 2,47 s. Droga pokonana przez bryłę jest opisana zależnością kwadratową, a szybkość zależnością liniową.
3.8.

a. Prędkość jest całką nieoznaczoną przyspieszenia po czasie. Na podstawie Równania 3.18
$v(t) = \int a(t) \mathrm{d}t + C_1 = \int (5 - 10t) \mathrm{d}t + C_1 = 5t - 5t^2 + C_1$.
Ponieważ $v(0) = 0$, mamy $C_1 = 0$; zatem
$v(t) = \left(5t - 5t^2\right) \text{ m/s}$.

b. Na podstawie Równania 3.19
$x(t) = \int v(t) \mathrm{d}t + C_2 = \int \left(5t - 5t^2\right) \mathrm{d}t + C_2 = \frac{5}{2}t^2 - \frac{5}{3}t^3 + C_2$.
Ponieważ $x(0) = 0$, otrzymujemy $C_2 = 0$ i
$x(t) = \left(\frac{5}{2}t^2 - \frac{5}{3}t^3\right) \text{ m}$.

c. Funkcję prędkości możemy zapisać w postaci $v(t) = 5t(1 - t) \text{ m/s}$, dla której łatwo zidentyfikujemy miejsca zerowe: $t = 0$ i $t = 1 \text{ s}$.

PYTANIA

1. Jedziesz samochodem na zakupy do miasta, a po zakupach odwiedzasz kolegę, który mieszka o dwa numery dalej od twojego domu.
3. Skoro bakteria porusza się nieustannie tam i z powrotem, jej poszczególne przemieszczenia się znoszą. W efekcie całkowite przemieszczenie jest małe.
5. Drogę.
7. Szybkość średnia jest równa całkowitej drodze podzielonej przez całkowity czas. Jeśli idziesz na spacer – wychodzisz z domu i do niego wracasz – twoja szybkość średnia jest pewną dodatnią liczbą. Ponieważ zaś: Prędkość średnia = Przemieszczenie/Całkowity czas, twoja prędkość średnia jest równa zero.
9. Szybkość średnią. Obie wielkości są sobie równe, gdy samochód w ruchu po prostej nie zawróci.
11. Nie. W ruchu prostoliniowym występowanie stałej szybkości wymaga zerowego przyspieszenia.
13. Piłka rzucona pionowo do góry ma zerową prędkość na wysokości maksymalnej, mimo że przyspieszenie jest niezerowe.
15. Dodatni. Ujemny.
17. 1. Dane są: przyspieszenie, czas ruchu i całkowite przemieszczenie, a do obliczenia mamy: początkową i końcową prędkość.
2. Znamy: prędkość końcową, czas i przemieszczenie, a do obliczenia są: prędkość początkowa i przyspieszenie.
19.

a. na wysokości maksymalnej;
b. tak, na wysokości maksymalnej;
c. tak.

21. Ziemia $v = v_0 - gt = -gt$; Księżyc $v' = -\frac{g}{6}t'$;
Porównujemy prędkości: $v = v' \;\rightarrow\; -gt = -\frac{g}{6}t' \;\rightarrow\; t' = 6t$;
Ziemia $y = -\frac{1}{2}gt^2$; Księżyc $y' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g}{6} \cdot (6t)^2 = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot 6t^2 = -6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot gt^2\right) = -6y$.

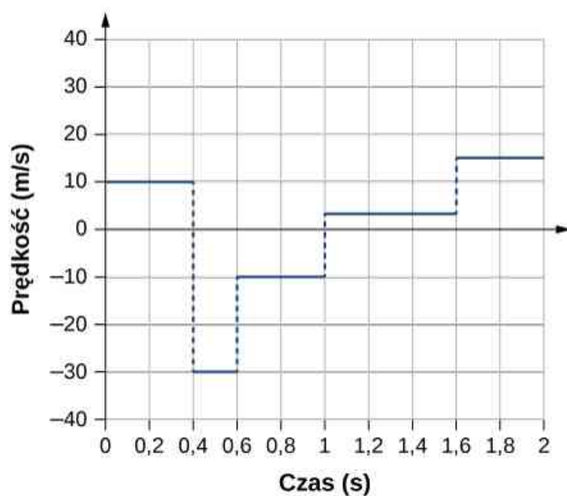
ZADANIA

25. a. $\vec{x}_1 = -2{,}0 \text{ m} \cdot \hat{i}$, $\vec{x}_2 = 5{,}0 \text{ m} \cdot \hat{i}$;
b. 7,0 m na wschód.
27.

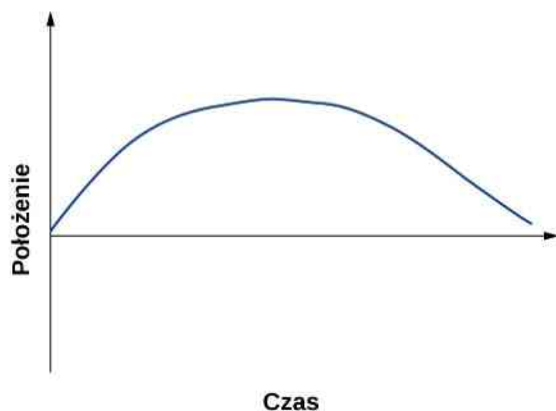
a. $t = 2{,}0 \text{ s}$;
b. $x(6{,}0 \text{ s}) - x(3{,}0 \text{ s}) = -8{,}0 \text{ m} - (-2{,}0 \text{ m}) = -6{,}0 \text{ m}$.

29.

a. $\bar{v} = 156{,}7 \text{ m/s}$;
b. 45,7% wartości szybkości dźwięku.



31.



33.

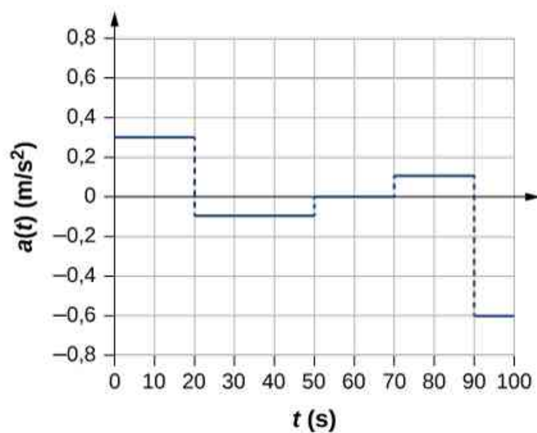
35.

a. $v(t) = (10 - 4t)\ \mathrm{m/s}$,
$v(2\ \mathrm{s}) = 2\ \mathrm{m/s}$, $v(3\ \mathrm{s}) = -2\ \mathrm{m/s}$;

b. $|v(2\ \mathrm{s})| = 2\ \mathrm{m/s}$, $|v(3\ \mathrm{s})| = 2\ \mathrm{m/s}$;

c. $\bar{v} = 0\ \mathrm{m/s}$.

37. $a = 4{,}29\ \mathrm{m/s^2}$. Przyspieszenie średnie.



39.

41. $a = 11{,}1g$

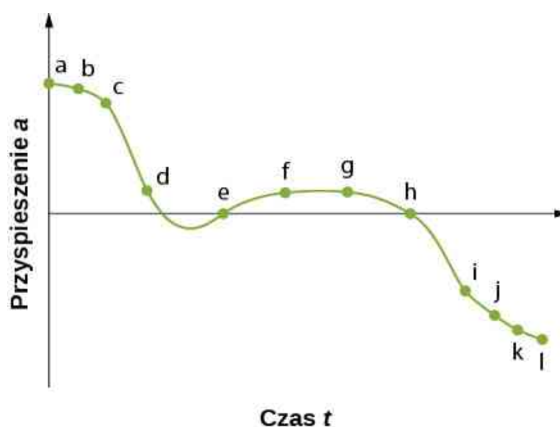
43. 150 m

45.

a. 375 m;

b. 150 m/s.

47.



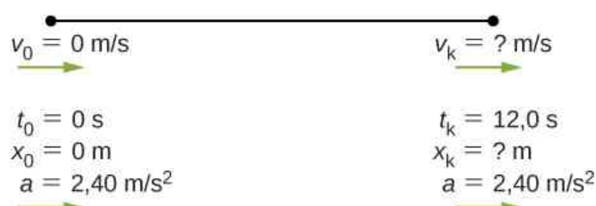
a.
b. Przyspieszenie ma największą wartość dodatnią w t_a;
c. Przyspieszenie wynosi zero w t_e oraz t_h;
d. Przyspieszenie jest ujemne w t_i, t_j, t_k, t_l.

49.

a. $a = -1{,}3\,\mathrm{m/s^2}$;
b. $v_0 = 18\,\mathrm{m/s}$;
c. $t = 13{,}8\,\mathrm{s}$.

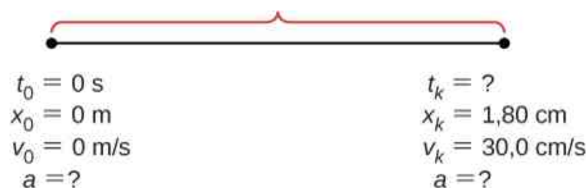
51. $v = 502{,}20\,\mathrm{m/s}$.

53.



a.
b. Dane: $a = 2{,}40\,\mathrm{m/s^2}$, $t = 12{,}0\,\mathrm{s}$, $v_0 = 0$ oraz $x_0 = 0$;
c. $x = x_0 + v_0 t + at^2/2 = at^2/2 = 2{,}40\,\mathrm{m/s^2} \cdot (12{,}0\,\mathrm{s})^2/2 = 172{,}80\,\mathrm{m}$, wynik ten wydaje się być sensowny w rzeczywistej sytuacji fizycznej;
d. $v = 28{,}8\,\mathrm{m/s}$

55.



a.
b. Dane: $v = 30{,}0\,\mathrm{cm/s}$, $x = 1{,}80\,\mathrm{cm}$;
c. $a = 250\,\mathrm{cm/s^2}$, $t = 0{,}12\,\mathrm{s}$;
d. Tak.

57.

a. $6{,}87\,\mathrm{m/s^2}$
b. $x = 52{,}26\,\mathrm{m}$

59.

a. $a = 8\,450\,\mathrm{m/s^2}$;
b. $t = 0{,}0077\,\mathrm{s}$.

61.

a. $a = 9{,}18\,g$;
b. $t = 6{,}67 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}$;
c. $a = -40\,\mathrm{m/s^2} = 4{,}08g$.

63. Dane: $x = 3\,\mathrm{m}$, $v = 0$, $v_0 = 54\,\mathrm{m/s}$. Chcemy obliczyć a, więc użyjemy Równania 3.14: $a = -486\,\mathrm{m/s^2}$.

65.

a. $a = 32{,}58\,\mathrm{m/s^2}$;
b. $v = 161{,}85\,\mathrm{m/s}$;
c. $v > v_{max}$, ponieważ założenie stałego przyspieszenia jest błędne. Dragster zmienia biegi podczas rozpędzania się, a na każdym wyższym biegu przyspieszenie jest mniejsze. Największe przyspieszenie jest więc na początku wyścigu, a na ostatnich metrach będzie już na pewno mniejsze niż $32{,}58\,\mathrm{m/s^2}$. W rezultacie prędkość końcowa będzie na pewno mniejsza niż obliczone $161{,}85\,\mathrm{m/s}$.

67.

a. $y = -8{,}23\ \text{m},\ v_1 = -18{,}9\ \text{m/s}$;
b. $y = -18{,}9\ \text{m},\ v_2 = -23{,}8\ \text{m/s}$;
c. $y = -32{,}0\ \text{m},\ v_3 = -28{,}7\ \text{m/s}$;
d. $y = -47{,}6\ \text{m},\ v_4 = -33{,}6\ \text{m/s}$;
e. $y = -65{,}6\ \text{m},\ v_5 = -38{,}5\ \text{m/s}$

69.

a. Dane: $a = -9{,}81\ \text{m/s}^2$, $v_0 = -1{,}4\ \text{m/s}$, $t = 1{,}8\ \text{s}$, $y_0 = 0$;
b. $y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$, $y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = -1{,}4\ \text{m/s} \cdot 1{,}8\ \text{s} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot (1{,}8\ \text{s})^2 = -18{,}4\ \text{m}$, przy czym początek układu współrzędnych przyjmujemy w położeniu śmigłowca; znajduje się on więc na wysokości 18,4 m nad wodą.

71.

a. $v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0)$, $y_0 = 0,\ v = 0 \longrightarrow y = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{(4{,}0\ \text{m/s})^2}{2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2} = 0{,}82\ \text{m}$;
b. czas do wysokości maksymalnej $t = 0{,}41\ \text{s}$ pomnożony przez 2 z powrotem do wysokości rampy $t = 0{,}82\ \text{s}$, a dalej od rampy do lustra wody: $y = y_0 + v_0 t - gt^2 / 2$, $y = -1{,}80\ \text{m}$, $y_0 = 0$,$v_0 = 4{,}0\ \text{m / s}$, zatem $-1{,}8 = 4{,}0t - 4{,}9t^2 \Rightarrow 4{,}9t^2 - 4{,}0t - 1{,}8 = 0$, rozwiązanie równania kwadratowego daje 1,13 s;
c. $v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0)$, $y_0 = 0,\ v_0 = 4{,}0\ \text{m/s},\ y = -1{,}80\ \text{m} \longrightarrow v = 7{,}16\ \text{m/s}$.

73. Czas do wysokości maksymalnej: $t = 1{,}12\ \text{s}$, razy 2 daje 2,24 s do momentu osiągnięcia z powrotem wysokości 2,20 m. Dodatkowe przemieszczenie do wysokości 1,80 m wynosi 0,40 m.

$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2,\ y = -0{,}40\ \text{m},\ y_0 = 0,\ v_0 = -11{,}0\ \text{m/s} \longrightarrow -0{,}40 = -11{,}0t - 4{,}9t^2 \longrightarrow 4{,}9t^2 + 11{,}0t - 0{,}40 = 0$

Wybieramy dodatni pierwiastek równania kwadratowego, który ma wartość 0,04 s – jest to czas potrzebny do pokonania dodatkowych 0,40 m. Zatem całkowity czas wynosi $2{,}24\ \text{s} + 0{,}04\ \text{s} = 2{,}28\ \text{s}$.

75.

a. $v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0)$, $y_0 = 0,\ v = 0,\ y = 2{,}50\ \text{m}$,
$v_0^2 = 2gy \implies v_0 = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 2{,}50\ \text{m}} = 7{,}0\ \text{m/s}$.
b. $t = 0{,}72\ \text{s}$, razy 2 daje czas 1,44 s w powietrzu.

77.

a. $v = 70{,}0\ \text{m/s}$;
b. Czas lotu kamienia od chwili oderwania do momentu usłyszenia tego zdarzenia przez turystów: 0,75 s; czas do momentu osiągnięcia tratwy: 6,09 s.

79.

a. $[A] = \text{m/s}^2$, $[B] = \text{m/s}^{5/2}$;
b. $v(t) = \int a(t)\text{d}t + C_1 = \int \left(A - Bt^{1/2}\right)\text{d}t + C_1 = At - \frac{2}{3}Bt^{3/2} + C_1$,$v(0) = 0 = C_1$, więc
$v(t_0) = At_0 - \frac{2}{3}Bt_0^{3/2}$;
c. $x(t) = \int v(t)\text{d}t + C_2 = \int \left(At - \frac{2}{3}Bt^{3/2}\right)\text{d}t + C_2 = \frac{1}{2}At^2 - \frac{4}{15}Bt^{5/2} + C_2$,$x(0) = 0 = C_2$, więc
$x(t_0) = \frac{1}{2}At_0^2 - \frac{4}{15}Bt_0^{5/2}$.

81.

a. Przyspieszenie: $a(t) = \begin{cases} 3{,}2\ \text{m/s}^2, & t \leqslant 5{,}0\ \text{s}, \\ 1{,}5\ \text{m/s}^2, & 5{,}0\ \text{s} < t \leqslant 11{,}0\ \text{s}, \\ 0\ \text{m/s}^2, & t > 11{,}0\ \text{s}. \end{cases}$
b. Położenie: Kiedy $t \leqslant 5{,}0\ \text{s}$,
$x(t) = \int v(t)\text{d}t + C_2 = \int 3{,}2t\text{d}t + C_2 = 1{,}6t^2 + C_2$,
$x(0) = 0 \implies C_2 = 0$,
zatem $x(2{,}0\ \text{s}) = 6{,}4\ \text{m}$.
Kiedy $5{,}0\ \text{s} < t \leqslant 11{,}0\ \text{s}$,
$x(t) = \int v(t)\text{d}t + C_2 = \int [16{,}0 - 1{,}5(t - 5{,}0)]\,\text{d}t + C_2 = 16t - 1{,}5\left(\frac{t^2}{2} - 5{,}0t\right) + C_2$,
$x(5\ \text{s}) = 1{,}6 \cdot (5{,}0)^2\ \text{m} = 40\ \text{m} = 16 \cdot 5{,}0\ \text{m} - 1{,}5\left(\frac{5^2}{2} - 5{,}0 \cdot 5{,}0\right)\ \text{m} + C_2$,
$40\ \text{m} = 98{,}75\ \text{m} + C_2 \implies C_2 = -58{,}75\ \text{m}$,
zatem $x(7{,}0\ \text{s}) = 16 \cdot 7{,}0\ \text{m} - 1{,}5\left(\frac{7^2}{2} - 5{,}0 \cdot 7{,}0\right)\ \text{m} - 58{,}75\ \text{m} = 69\ \text{m}$.
Kiedy $t > 11{,}0\ \text{s}$,
$x(t) = \int 7{,}0\text{d}t + C_2 = 7t + C_2$,
$x(11{,}0\ \text{s}) = 16 \cdot 11{,}0\ \text{m} - 1{,}5\left(\frac{11{,}0^2}{2} - 5{,}0 \cdot 11{,}0\right)\ \text{m} - 58{,}75\ \text{m} = 109\ \text{m} = 7 \cdot 11{,}0\ \text{m} + C_2 \implies C_2 = 32\ \text{m}$,

zatem $x(12{,}0\ \text{s}) = 7 \cdot 12{,}0\ \text{m} + 32\ \text{m} = 116\ \text{m}$.

ZADANIA DODATKOWE

83. Kierunek zachodni będzie kierunkiem dodatnim.
samolot 1: $\bar{v} = 600 \text{ km/h}$
samolot 2: $\bar{v} = 667 \text{ km/h}$

85. $a = \frac{v - v_0}{t - t_0}$, $t = 0$, $a = \frac{-3{,}4 \text{ cm/s} - v_0}{4 \text{ s}} = 1{,}2 \text{ cm/s}^2 \implies v_0 = -8{,}2 \text{ cm/s}$; $v = v_0 + at = (-8{,}2 + 1{,}2t) \text{ cm/s}$; $v(1{,}0 \text{ s}) = -7{,}0 \text{ cm/s}$, $v(6{,}0 \text{ s}) = -1{,}0 \text{ cm/s}$.

87. $a = -3 \text{ m/s}^2$.

89.
a. $v = 8{,}7 \cdot 10^5 \text{ m/s}$;
b. $t = 7{,}8 \cdot 10^{-8} \text{ s}$.

91. $1 \text{ km} = v_0 \cdot 80{,}0 \text{ s} + \frac{1}{2}a \cdot (80{,}0 \text{ s})^2$; $2 \text{ km} = v_0 \cdot 200{,}0 \text{ s} + \frac{1}{2}a \cdot (200{,}0 \text{ s})^2$ - rozwiązujemy układ równań, aby jednocześnie otrzymać $a = \frac{-0{,}1}{2\,400{,}0} \text{ km/s}^2$ i $v_0 = 0{,}014\,167 \text{ km/s}$, czyli $51{,}0 \text{ km/h}$. Prędkość na końcu 2-kilometrowego odcinka wynosi $v = 21{,}0 \text{ km/h}$.

93. $a = -0{,}9 \text{ m/s}^2$.

95. Równanie ruchu dla pirata drogowego: Pirat ma stałą prędkość, równą prędkości średniej, i nie ma przyspieszenia, więc użyjemy równania na położenie z prędkością średnią, kładąc $x_0 = 0 : x = x_0 + \bar{v}t = \bar{v}t$; Równanie ruchu dla radiowozu: Radiowóz porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej, więc użyjemy równania na położenie z $x_0 = 0$ i $v_0 = 0 : x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}at^2$; Otrzymujemy układ dwóch równań, które rozwiążemy ze względu na niewiadomą t.
Krok 1: porównujemy położenia x radiowozu i pirata: $\bar{v}t = \frac{1}{2}at^2$;
Krok 2: obliczamy czas do spotkania t: $t = \frac{2\bar{v}}{a}$. Uciekający pirat ma stałą prędkość 40 m/s. Radiowóz ma przyspieszenie 4 m/s^2. Obliczamy czas do spotkania, czyli czas, po jakim radiowóz dogoni pirata: $t = \frac{2v}{a} = \frac{2 \cdot 40 \text{ m/s}}{4 \text{ m/s}^2} = 20 \text{ s}$.

97. Z podanym opóźnieniem biegaczka zatrzyma się po czasie $t = \frac{-v_0}{a} = \frac{8 \text{ m/s}}{0{,}5 \text{ m/s}^2} = 16 \text{ s}$, ale droga pokonana w tym czasie to tylko $x = 8 \text{ m/s} \cdot 16 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \text{ m/s}^2 \cdot (16 \text{ s})^2 = 64 \text{ m}$, czyli mniej niż wynosi dystans do mety. Z takimi parametrami biegaczka nigdy nie ukończy biegu.

99. $x_1 = \frac{3}{2}v_0 t$,
$x_2 = \frac{5}{3}x_1$.

101.
a. $v_0 = 7{,}9 \text{ m/s}$ – szybkość piłki na wysokości parapetu.
$v = 7{,}9 \text{ m/s}$
$v_0 = 14{,}1 \text{ m/s}$;
b. do samodzielnego rozwiązania.

103.
a. $v = 5{,}42 \text{ m/s}$;
b. $v = 4{,}64 \text{ m/s}$;
c. $a = 2\,874{,}28 \text{ m/s}^2$;
d. $x - x_0 = 5{,}11 \text{ mm}$.

105. Zakładamy, że siatkarze osiągają wysokość 1,0 i 0,3 m, odpowiednio, skacząc obaj z tego samego położenia początkowego.
0,9 s
0,5 s

107.
a. $t = 6{,}37 \text{ s}$ – wybieramy dodatni pierwiastek równania;
b. $v = 59{,}5 \text{ m/s}$.

109.
a. $y = 4{,}9 \text{ m}$;
b. $v = 38{,}3 \text{ m/s}$;
c. $-33{,}3 \text{ m}$.

111. $h = \frac{1}{2}gt^2$, h – całkowita droga pokonana przez ciało (wysokość budynku);
$\frac{2}{3}h = \frac{1}{2}g(t-1)^2$ w czasie $t - 1$ ciało pokonuje drogę $2/3 \cdot h$;
$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}gt^2\right) = \frac{1}{2}g(t-1)^2$, czyli $\frac{t^2}{3} = \frac{1}{2}(t-1)^2$
$0 = t^2 - 6t + 3$, $t = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 3}}{2} = 3 \pm \frac{\sqrt{24}}{2}$
$t = 5{,}45 \text{ s}$ i $h = 145{,}5 \text{ m}$. Drugi pierwiastek daje wynik mniejszy niż 1 s. Sprawdzamy poprawność wyniku $t = 4{,}45 \text{ s}$: $h = \frac{1}{2}gt^2 = 97{,}0 \text{ m} = \frac{2}{3} \cdot 145{,}5 \text{ m}$

ZADANIA TRUDNIEJSZE

113.

a. $v(t) = \left(10t - 12t^2\right)$ m/s , $a(t) = (10 - 24t)$ m/s^2 ;
b. $v(2\text{ s}) = -28$ m/s , $a(2\text{ s}) = -38$ m/s^2 ;
c. Warunek: nachylenie funkcji położenia od czasu jest zero lub prędkość jest zero. Mamy dwa rozwiązania: $t = 0$, dla którego $x = 0$, lub $t = 10{,}0/12{,}0\text{ s} = 0{,}83\text{ s}$, dla którego $x = 1{,}16\text{ m}$. Drugie rozwiązanie jest poprawne;
d. 0,83 s;
e. 1,16 m.

115. $96\text{ km/h} = 26{,}67\text{ m/s}$, $a = \frac{26{,}67\text{ m/s}}{4{,}0\text{ s}} = 6{,}67\text{ m/s}^2$, $295{,}38\text{ km/h} = 82{,}05\text{ m/s}$;
$t = 12{,}3\text{ s}$ to czas potrzebny na osiągnięcie maksymalnej prędkości;
$x = 504{,}55\text{ m}$ to droga pokonana w trakcie przyspieszania;
$7\,495{,}44\text{ m}$ to długość pozostałego odcinka w ruchu ze stałą prędkością;
$\frac{7\,495{,}44\text{ m}}{82{,}05\text{ m/s}} = 91{,}35\text{ s}$, więc całkowity czas ruchu $91{,}35\text{ s} + 12{,}3\text{ s} = 103{,}65\text{ s}$.

ROZDZIAŁ 4

SPRAWDŹ, CZY ROZUMIESZ

4.1. (a) Różniczkując położenie po czasie, otrzymujemy $\vec{v}(t) = 9{,}0t^2\hat{i}$ i $\vec{v}(3{,}0\text{ s}) = 81{,}0\hat{i}$ m/s (b) Ze względu na to, że zależność prędkości od czasu nie jest dana funkcją liniową, spodziewamy się, że prędkość średnia nie jest równa prędkości chwilowej. Aby to sprawdzić, obliczamy

$$\vec{v}_{śr} = \frac{\vec{r}(t_2)-\vec{r}(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{\vec{r}(4{,}0\text{ s})-\vec{r}(2{,}0\text{ s})}{4{,}0\text{ s}-2{,}0\text{ s}} = \frac{(144{,}0\hat{i}-36{,}0\hat{i})\text{ m}}{2{,}0\text{ s}} = 54{,}0\hat{i}\ \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

co jest różne od $\vec{v}(3{,}0\text{ s}) = 81{,}0\hat{i}$ m/s .

4.2. Wektor przyspieszenia jest stały i nie zmienia się w czasie. Jeśli a, b i c są różne od zera, to wektor prędkości musi być funkcją liniową czasu. Znajdziemy go, całkując przyspieszenie $\vec{v}(t) = \int \vec{a}\,\text{d}t = \int (a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k})\,\text{d}t = (a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k})\,t$ m/s , ponieważ różniczkując prędkość, z powrotem otrzymamy $\vec{a}(t)$. Powinniśmy jeszcze uwzględnić stałą całkowania, która jednak nie wpływa na zależność od czasu. Gdyby któraś ze składowych wektora przyspieszenia była równa zero, odpowiednia składowa prędkości musiałaby być stała w czasie.

4.3.

a. Jako początek układu współrzędnych wybierz szczyt klifu. Jest to najwygodniejszy wybór, mimo że zupełnie arbitralny. Zwyczajowo wybieramy położenie w $t = 0$ jako początek układu.
b. Poprawnym równaniem jest $x = x_0 + v_x t$. Przyjmując $x_0 = 0$, równanie sprowadza się do $x = v_x t$.
c. Zestaw równań od Równania 4.16 do Równania 4.18 oraz Równanie 4.19 poprawnie opisuje ruch w pionie, ale przy $y_0 = 0$ oraz $v_{0y} = 0$ równania te znacznie się upraszczają i przyjmują postać:
$$y = \tfrac{1}{2}\left(v_{0y} + v_y\right)t = \tfrac{1}{2}v_y t, \quad v_y = -gt, \quad y = -\tfrac{1}{2}gt^2 \quad \text{oraz} \quad v_y^2 = -2gy.$$
d. Znajdziemy składowe wektora prędkości w momencie upadku, korzystając z poznanych równań kinematycznych. Podstawiając do równania $v_y^2 = -2gy$ wartość -100,0 m w miejsce y, znajdziemy składową y wektora prędkości końcowej $v_y = -44{,}3$ m/s. Składowa x jest niezmiennie równa $v_x = 15{,}0$ m/s, zatem całkowita prędkość w chwili upadku ma wartość: $v = 46{,}8$ m/s i kierunek $\theta = 71{,}3°$ w dół względem poziomu.

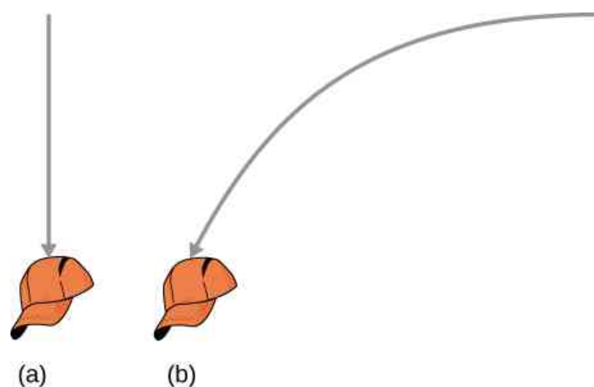
4.4. Piłka uderzona pod kątem 30°.
4.5. 134,0 cm/s.
4.6. Ustalmy na początku oznaczenia indeksów: Ł = łódka, R = rzeka, B = brzeg rzeki. Wektorowe równanie prędkości: $\vec{v}_{Ł,B} = \vec{v}_{Ł,R} + \vec{v}_{R,B}.$ Wektory tworzą trójkąt prostokątny, jak na ???. Wyznaczamy $\vec{v}_{Ł,B}$: $v_{Ł,B} = \sqrt{v_{Ł,R}^2 + v_{R,B}^2} = \sqrt{4{,}5^2 + 3{,}0^2} = 5{,}4$ m/s , $\theta = \text{arctg}\left(\frac{3{,}0}{4{,}5}\right) = 33{,}7°$.

PYTANIA

1. Linia prosta.
3. Nachylenie musi być równe zero, bo wektor prędkości jest styczny do wykresu położenia od czasu.
5. Nie. Ruchy w kierunkach prostopadłych są od siebie niezależne.
7.

a. Nie;
b. najmniejsza w wierzchołku, a największa na początku oraz w momencie upadku;
c. nie, prędkość jest wektorem, który w trakcie ruchu zmienia kierunek i zwrot;
d. tak, w chwili upadku.

9. Obie monety upadną na podłogę w tym samym czasie.
11. Tak.
13. Jeżeli chce dokładnie podać piłkę do kolegi z drużyny, musi skupić wzrok na ruchu układu odniesienia, w którym porusza się kolega.



15.

ZADANIA

16. $\vec{r} = 1{,}0\hat{i} - 4{,}0\hat{j} + 6{,}0\hat{k}$

17. $\vec{r}_2 = (-6{,}0\hat{i} + 0{,}0\hat{j})\,\text{cm}$

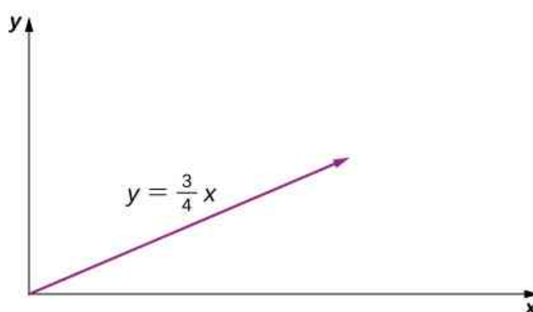
18. $\Delta\vec{\mathbf{r}}_{\text{całk}} = 472{,}0\,\text{m}\hat{\mathbf{i}} + 80{,}3\,\text{m}\hat{\mathbf{j}}$

20. Suma przemieszczeń cząstkowych $= -6{,}4\hat{i}\,\text{km} + 9{,}4\hat{j}\,\text{km}$

22. a. $\vec{v}(t) = 8{,}0t\hat{i} + 6{,}0t^2\hat{k}$, $\vec{v}(0) = 0$, $\vec{v}(1{,}0) = 8{,}0\hat{i} + 6{,}0\hat{k}\,\text{m/s}$,
b. $\vec{v}_{\text{śr}} = 4{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{k}\,\text{m/s}$.

24. $\Delta\vec{r}_1 = 20{,}00\hat{j}\,\text{m}$, $\Delta\vec{r}_2 = (2\cdot 10^4\,\text{m})(\hat{i}\cos 30^\circ + \hat{j}\sin 30^\circ)$
$\Delta\vec{r} = 1{,}732\cdot 10^4\hat{i}\,\text{m} + 1{,}002\cdot 10^4\hat{j}\,\text{m}$

26.
a. $\vec{v}(t) = \left(4{,}0t\hat{i} + 3{,}0t\hat{j}\right)\,\text{m/s}$, $\vec{r}(t) = \left(2{,}0t^2\hat{i} + \frac{3}{2}t^2\hat{j}\right)\,\text{m}$;
b. $x(t) = 2{,}00\frac{t}{2}\,\text{m}$, $y(t) = \frac{3}{2}t^2\,\text{m}$, $t^2 = \frac{x}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{4}x$.



28.
a. $\vec{v}(t) = \left(6{,}0t\hat{i} - 21{,}0t^2\hat{j} + 10{,}0t^{-3}\hat{k}\right)\,\text{m/s}$,
b. $\vec{a}(t) = \left(6{,}0\hat{i} - 42{,}0t\hat{j} - 30{,}0t^{-4}\hat{k}\right)\,\text{m/s}^2$,
c. $\vec{v}(2{,}0\,\text{s}) = \left(12{,}0\hat{i} - 84{,}0\hat{j} + 1{,}25\hat{k}\right)\,\text{m/s}$,
d. $\vec{v}(1{,}0\,\text{s}) = \left(6{,}0\hat{i} - 21{,}0\hat{j} + 10{,}0\hat{k}\right)\,\text{m/s}$, $|\vec{v}(1{,}0\,\text{s})| = 24{,}0\,\text{m/s}$,
$\vec{v}(3{,}0\,\text{s}) = \left(18{,}0\hat{i} - 189{,}0\hat{j} + 0{,}4\hat{k}\right)\,\text{m/s}$, $|\vec{v}(3{,}0\,\text{s})| = 189{,}9\,\text{m/s}$,
e. $\vec{v}_{\text{śr}} = \left(9{,}0\hat{i} - 49{,}0\hat{j} + 3{,}8\hat{k}\right)\,\text{m/s}$.

30.
a. $\vec{v}(t) = -\sin(1{,}0t)\hat{i} + \cos(1{,}0t)\hat{j} + \hat{k}$,
b. $\vec{a}(t) = -\cos(1{,}0t)\hat{i} - \sin(1{,}0t)\hat{j}$.

32.
a. $t = 0{,}55\,\text{s}$,
b. $x = 110\,\text{m}$.

34.
a. $t = 0{,}24\,\text{s}$, $d = 0{,}28\,\text{m}$,
b. Celują wyżej.

36.
a. $t = 12{,}8\,\text{s}$, $x = 5\,618\,\text{m}$;

b. $v_y = 125{,}6$ m/s, $v_x = 438{,}9$ m/s, $|\vec{v}| = 456{,}5$ m/s .

38.

a. $v_y = v_{0y} - gt$, $t = 10$ s, $v_y = 0$, $v_{0y} = 98{,}1$ m/s, $v_0 = 196{,}2$ m/s ;

b. $h = 490{,}5$ m ;

c. $v_{0x} = 169{,}9$ m/s, $x = 3\,398{,}0$ m ;

d. $x = 2\,548{,}5$ m, $y = 367{,}9$ m, $\vec{s} = \left(2\,549\hat{i} + 367{,}9\hat{j}\right)$ m .

40. $-100\text{ m} = (-2{,}0\text{ m/s})\,t - \left(4{,}9\text{ m/s}^2\right)t^2$, $t = 4{,}3$ s, $x = 86{,}0$ m.

42. $R_K = 48$ m

44.

a. $v_{0y} = 24$ m/s, $v_y^2 = v_{0y}^2 - 2gy \Rightarrow h = 29{,}4$ m ;

b. $t = 2{,}45$ s, $v_{0x} = 18$ m/s, $x = 44{,}1$ m ;

c. $y = -100$ m, $y_0 = 0$, $y - y_0 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$, $-100 = 24t - 4{,}9t^2 \Rightarrow t = 7{,}58$ s ;

d. $x = 136{,}44$ m ;

e. $t = 2{,}0$ s : $y = 28{,}4$ m, $x = 36$ m,
$t = 4{,}0$ s : $y = 17{,}6$ m, $x = 72$ m,
$t = 6{,}0$ s : $y = -32{,}4$ m, $x = 108$ m .

46. $v_{0y} = 12{,}9$ m/s, $y - y_0 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$, $-20 = 12{,}9t - 4{,}9t^2 \Rightarrow t = 3{,}7$ s
$v_{0x} = 15{,}3$ m/s $\Rightarrow x = 56{,}7$ m.
Piłka wyląduje 13,3 m za blisko.

48. a. $R_M = 60{,}8$ m ,
b. $R_K = 137{,}8$ m

50.

a. $v_y^2 = v_{0y}^2 - 2gy \Rightarrow y = 42$ cm ;

b. $y = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2g} \Rightarrow \sin\theta = 0{,}91 \Rightarrow \theta = 65{,}5°$.

52. $R = 18{,}5$ m

54. $y = (\text{tg}\theta_0)\,x = \left[\frac{g}{2(v_0\cos\theta_0)^2}\right]x^2 \Rightarrow v_0 = 16{,}4$ m/s

56. $R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} \Rightarrow \theta_0 = 15{,}9°$

58.

a. $T = 2v_0 \sin\theta/g \Rightarrow \theta = \arcsin\,[Tg/(2v_0)]$, wynika z tego, że kąt równy jest $\theta_1 = 25{,}8°$ lub $\theta_2 = 64{,}2°$.

b. Czas lotu piłki zależy od kąta początkowego $T = 2v_0 \sin\theta/g$. Dla kąta θ_1 czas lotu piłki wynosi $T_1 = 2{,}22$s , a dla kąta θ_2 wynosi on $T_2 = 4{,}59$s . Bramkarz musi kopnąć piłkę pod kątem $64{,}2°$. Pomocnik pokonuje 30 m w czasie 4,29 s i dobiegnie 0,3 s przed wylądowaniem piłki na ziemię.

60. $a_d = 40$ m/s^2

62. $a_d = \frac{v^2}{r} \Rightarrow v^2 = r \cdot a_d = 78{,}5\text{ m}^2/\text{s}^2$, $v = 8{,}86$ m/s
$T = 5{,}67$ s, co odpowiada 0,176 obr/s = 10,6 obr/min

64. Średnia odległość Wenus od Słońca to 108,2 miliona km, a rok na Wenus trwa 0,6152 roku ziemskiego.
$r = 1{,}082 \cdot 10^{11}$ m, $T = 1{,}94 \cdot 10^7$ s
$v = 3{,}5 \cdot 10^4$ m/s, $a_d = 1{,}135 \cdot 10^{-2}$ m/s^2

66. 360 obr/min = 6 obr/s
$v = 3{,}77$ m/s , $a_d = 142$ m/s^2

68.

a. $O'(t) = \left(4{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j} + 5{,}0\hat{k}\right)t$ m ,

b. $\vec{r}_{\text{P,S}} = \vec{r}_{\text{P,S'}} + \vec{r}_{\text{S',S}}$, $\vec{r}(t) = \vec{r}\,'(t) + \left(4{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j} + 5{,}0\hat{k}\right)t$ m ,

c. $\vec{v}(t) = \vec{v}\,'(t) + \left(4{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j} + 5{,}0\hat{k}\right)$ m/s ,

d. Przyspieszenia są takie same.

70. $\vec{v}_{\text{P,C}} = \left(2{,}0\hat{i} + 5{,}0\hat{j} + 4{,}0\hat{k}\right)$ m/s

72.

a. W = wiatr, M = mewa, Z = ziemia
Szybkość mewy względem wiatru: $\vec{v}_{\text{M,W}} = 9{,}0$ m/s
$\vec{v}_{\text{W,Z}} = ?$ $\vec{v}_{\text{M,Z}} = 5$ m/s, $\vec{v}_{\text{M,Z}} = \vec{v}_{\text{M,W}} + \vec{v}_{\text{W,Z}} \Rightarrow \vec{v}_{\text{W,Z}} = \vec{v}_{\text{M,Z}} - \vec{v}_{\text{M,W}}$
Zatem prędkość wiatru względem ziemi: $v_{\text{W,Z}} = -4{,}0$ m/s .

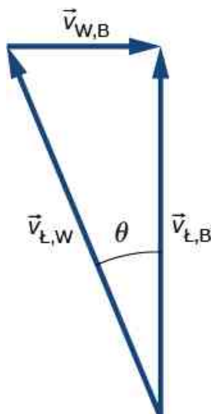
b. $\vec{v}_{\text{M,Z}} = \vec{v}_{\text{M,W}} + \vec{v}_{\text{W,Z}} \Rightarrow v_{\text{M,Z}} = -13{,}0$ m/s
Czas lotu z powrotem: $\frac{-6\,000\text{ m}}{-13{,}0\text{ m/s}} = 7$ min 42 s .

74. Za dodatni kierunek prędkości przyjmijmy kierunek prądu rzeki. B = brzeg, W = woda, Ł = łódka.

a. $|\vec{v}_{Ł,B}| = 11$ km/h
$t = 8{,}2$ min ;

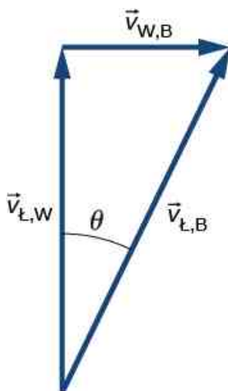
b. $|\vec{v}_{Ł,B}| = -5$ km/h
$t = 18$ min ;

c. $\vec{v}_{Ł,B} = \vec{v}_{Ł,W} + \vec{v}_{W,B}$, $\theta = 22°$



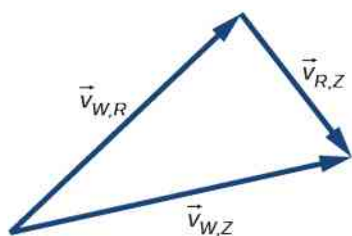
d. $|\vec{v}_{Ł,B}| = 7{,}4$ km/h, $t = 6{,}5$ min ;

e. $|\vec{v}_{Ł,B}| = 8{,}54$ km/h, ale czas przepłynięcia na drugi brzeg zależy tylko od jednej składowej prędkości.



$t = 6{,}0$ min
Dystans pokonany w dół rzeki = 0,3 km.

76. $|\vec{v}_{W,C}| = 25$ km/h, $|\vec{v}_{R,Z}| = 15$ km/h, $|\vec{v}_{W,Z}| = 29{,}15$ km/h, $\vec{v}_{W,Z} = \vec{v}_{W,R} + \vec{v}_{R,Z}$ Kąt pomiędzy $\vec{v}_{W,R}$ i $\vec{v}_{W,Z}$ wynosi 31°, zatem kierunek wiatru to 14° na północ względem kierunku wschodniego.



ZADANIA DODATKOWE

78. $a_d = 39{,}6 \text{ m/s}^2$

80. $9{,}0$ km/h $= 2{,}5$ m/s $\Rightarrow a_s = -2{,}5 \text{ m/s}^2$
$60{,}0$ km/h $= 16{,}7$ m/s $\Rightarrow a_d = 1{,}86 \text{ m/s}^2$
$a = 3{,}1 \text{ m/s}^2$

82. Odległość od osi obrotu do punktu na szerokości geograficznej λ wynosi $R_Z \cos\lambda$. Szybkość tego punktu to $\frac{2\pi r}{T}$.

Przyspieszenie dośrodkowe $a_d = \frac{4\pi^2 R_Z \cos\lambda}{T^2}$ dla $\lambda = 40°$ wynosi $a_d = 0{,}26\% \, g$.

84. $a_s = 3{,}0 \text{ m/s}^2$
$v(5 \text{ s}) = 15{,}0 \text{ m/s} \Rightarrow a_d = 150{,}0 \text{ m/s}^2$
$\theta = 88{,}8°$ względem stycznej do okręgu, jaki zataczają końce łopat.
$|\vec{a}| = 150{,}03 \text{ m/s}^2$

86. $\vec{a}(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t)\hat{i} - A\omega^2 \sin(\omega t)\hat{j}$

$a_d = A\omega^2, \quad A = 5{,}0 \text{ m}, \quad \omega = 0{,}89 \text{ rad/s}$

$\vec{v}(t) = \left(-2{,}24\hat{i} - 3{,}87\hat{j}\right) \text{ m/s}$

88. $\vec{r}_1 = 1{,}5\hat{j} + 4{,}0\hat{k}, \quad r_2 = \Delta\vec{r} + \vec{r}_1 = 2{,}5\hat{i} + 4{,}7\hat{j} + 2{,}8\hat{k}$

90. $v_x(t) = 265{,}0 \text{ m/s}$
$v_y(t) = 20{,}0 \text{ m/s}$
$\vec{v}(5{,}0 \text{ s}) = \left(265{,}0\hat{i} + 20{,}0\hat{j}\right) \text{ m/s}$

92. $R = 6{,}93 \text{ m}$

94. $v_0 = 20{,}1 \text{ m/s}$

96. $v = 3\,072{,}5 \text{ m/s}$
$a_d = 0{,}223 \text{ m/s}^2$

ZADANIA TRUDNIEJSZE

98.

a. $s = v_{0x}t \Rightarrow t = s / v_{0x}$ oraz $-h = v_{0y}t - gt^2/2 = s \cdot (v_{0y}/v_{0x}) - g/2 \cdot (s/v_{0x})^2 = s \operatorname{tg}\varphi - gs^2/2 \cdot (1/v_{0x}^2)$, stąd $v_{0x} = \sqrt{gs^2 / [2(h + s \operatorname{tg}\varphi)]} = 30{,}0 \text{ m/s}$, natomiast $v_{0y} = v_{0x} \operatorname{tg}\varphi = 25{,}2 \text{ m/s}$. Ostatecznie otrzymujemy $v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = 39{,}2 \text{ m/s}$.

b. $t = 12{,}0\text{s}$

100.

a.
$$\vec{r} = (-32 + 80t) \cdot \hat{i} + 50t \cdot \hat{j},$$
$$\left|\vec{r}\right| = (-32 + 80t)^2 + (50t)^2,$$
$$2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 2(-32 + 80t) \cdot 80 + 2 \cdot 50t \cdot 50,$$
$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{17\,800t - 5120}{2r} = 0,$$
$$17\,800t = 5120\text{h} \Rightarrow t = 0{,}29\text{h} = 17 \text{ min}.$$

b. $|r| = 17 \text{ km}$.

ROZDZIAŁ 5

SPRAWDŹ, CZY ROZUMIESZ

5.1. 14 N, kąt 56° mierzony względem dodatniej półosi x

5.2.

a. W kierunku pionowym działają dwie siły: siła ciężkości skierowana do dołu oraz siła oporu aerodynamicznego powietrza skierowana w górę.

b. Żadna z nich nie jest większa od pozostałych. Siły te równoważą się, mają zatem tę samą wartość.

5.3. $0{,}1 \text{ m/s}^2$

5.4. 40 m/s^2

5.5.

a. Siła wypadkowa wynosi $\left(159{,}0\hat{i} + 770{,}0\hat{j}\right) \text{ N}$;

b. przyspieszenie samochodu to $\left(0{,}1590\hat{i} + 0{,}7700\hat{j}\right) \text{ m/s}^2$.

5.6. $a = 2{,}78 \text{ m/s}^2$

5.7.

a. $3{,}0 \text{ m/s}^2$;

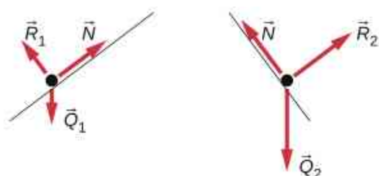
b. 18 N

5.8.

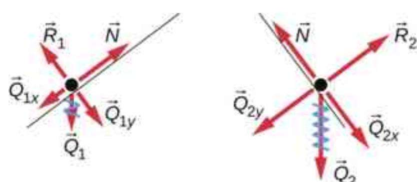
a. $1{,}7 \text{ m/s}^2$;

b. $1{,}3 \text{ m/s}^2$

5.9. $6{,}0 \cdot 10^2$ N



5.10. ;



PYTANIA

1. Siła ma określony kierunek i wartość.

3. Prędkość babeczek przed czynnością hamowania była taka sama, jak prędkość samochodu. Babeczki traktujemy jako osobne ciało poruszające się. Gdy samochód gwałtownie zahamował, babeczki nadal poruszały się do przodu, zgodnie z pierwszą zasadą dynamiki Newtona.

5. Nie. Gdyby siła wypadkowa działająca na ciało wynosiła w tym punkcie zero, to chwilowo wynosząca zero prędkość ciała nie zmieniłaby się. Jest to nieprawda, ponieważ nie obserwujemy sytuacji, w której po osiągnięciu maksymalnej wysokości ciało „zawisa” w powietrzu.

7. Astronauta w kosmosie pozostaje w stanie nieważkości, ponieważ w jego pobliżu nie znajduje się żadne większe ciało (planeta bądź gwiazda) będące źródłem pola grawitacyjnego. Jego masa wynosi 70 kg niezależnie od miejsca, w którym się znajduje.

9. Siła, którą działasz na kule ziemską (siła kontaktowa równa twojemu ciężarowi), jest bardzo mała. Masa Ziemi jest nieporównywalnie większa niż twoja. Dlatego też przyspieszenie kuli Ziemskiej w wyniku działania twojego ciężaru jest bardzo małe. Aby to zrozumieć, zastosuj drugie prawo Newtona w celu obliczenia przyspieszenia kuli ziemskiej, zakładając, że twój ciężar wynosi 600 N, a masa Ziemi to $6{,}00 \cdot 10^{24}$ kg .

11.
   a. Akcja: Ziemia wywiera siłę na Księżyc, reakcja: Księżyc odpowiada siłą reakcji, „popychając” Ziemię;
   b. akcja: chłopiec działa siłą na piłkę, reakcja: piłka wywiera siłę reakcji na stopę;
   c. akcja: rakieta wypuszcza gaz z dysz rakietowych; reakcja: gaz działa siłą reakcji, co powoduje ruch rakiety do przodu, w przeciwną stronę;
   d. samochód działa siłą wsteczną na podłoże, reakcja: podłoże działa siłą reakcji skierowaną w drugą stronę, powodując ruch samochodu do przodu;
   e. akcja: skoczek działa na podłoże siłą skierowaną w dół, reakcja: podłoże popycha do góry człowieka, powodując jego ruch w górę;
   f. pistolet wypycha pocisk z lufy, reakcja: pocisk, działając siłą reakcji na lufę, powoduje ruch lufy do tyłu.

13.
   a. Strzelba (utrzymywana przez nią łuska naboju) wywiera ogromną siłę na kulę, aby ją wyrzucić na zewnątrz. Reakcją na tę siłę jest siła, którą kula wywiera na strzelbę (łuskę) w przeciwnym kierunku.
   b. W strzelbie otwartej po jednej stronie, łuska nie jest zatrzymywana, a zatem, gdy kula zostanie popchnięta do przodu, łuska jest poddana działaniu siły reakcji, która prowadzi do wyrzucenia jej z drugiego końca lufy. Nie można więc stać za bezodrzutową strzelbą.

15.
   a. Tak, siła może być skierowana w lewo. Wówczas cząstka dozna opóźnienia i będzie stopniowo spowalniać swój ruch.
   b. Tak, siła może być skierowana w dół. Przykładem jest ciężar cząstki. Mimo tego, cząstka może poruszać się w prawo.

17. To dwie siły: siła ciężkości książki oraz siła reakcji od podłoża (siła nacisku).

ZADANIA

19.
   a. $\vec{F}_{wyp} = \left(5{,}0\hat{i} + 10{,}0\hat{j}\right)$ N ;
   b. wartość siły wypadkowej to $F_{wyp} = 11$ N , a jej kąt w stosunku do dodatniej półosi x to $\theta = 63^\circ$.

21.
   a. Wektor siły wypadkowej to $\vec{F}_{wyp} = \left(660{,}0\hat{i} + 150{,}0\hat{j}\right)$ N ;
   b. wartość siły wypadkowej wynosi $\vec{F}_{wyp} = 676{,}6$ N , a jej kąt względem liny Dawida to $\theta = 12{,}8^\circ$.

23.

a. $\vec{F}_{\text{wyp}} = \left(95{,}0\hat{i} + 283{,}0\hat{j}\right)$ N ;
b. wartość siły to 299 N, skierowana 71° na północny-wschód;
c. $\vec{F}_{\text{DS}} = -\left(95{,}0\hat{i} + 283{,}0\hat{j}\right)$ N

25. Biegnąc od momentu spoczynku, podczas przyspieszania sprinter w końcu osiągnie prędkość $v = 12{,}96$ m/s . Czas, w którym przyspieszał, znajdziemy z relacji: $x = 20{,}00\,\text{m} = 0 + 0{,}5at_1^2$ lub inaczej $t_1 = 3{,}086$ s . W momencie, w którym zaczął utrzymywać stałą prędkość swojego ruchu, $x_2 = vt_2$ lub inaczej $t_2 = x_2/v = 80{,}00\,\text{m}/12{,}96\,\text{m/s} = 6{,}173$ s . Całkowity czas ruchu sprintera wynosi więc 9,259 s.

27.
a. $m = 56{,}0$ kg ;
b. $a_{\text{zmierzone}} = a_{\text{astro}} + a_{\text{stat}}$, gdzie $a_{\text{stat}} = \frac{m_{\text{astro}} a_{\text{astro}}}{m_{\text{stat}}}$;
c. Gdyby siła wywierana na astronautę mogłaby pochodzić z jakiegokolwiek innego źródła niż statek, nie doznawałby on odrzutu.

29. $F_{\text{wyp}} = 4{,}12 \cdot 10^5$ N
31. $a = 253\,\text{m/s}^2$
33. $F_{\text{wyp}} = F - T = ma \Rightarrow F = 1{,}26 \cdot 10^3$ N
35. $v^2 = v_0^2 + 2ax \Rightarrow a = -7{,}80\,\text{m/s}^2$

$F_{\text{wyp}} = -7{,}80 \cdot 10^3$ N

37.
a. $\vec{F}_{\text{wyp}} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = 9{,}0\hat{i}\,\text{m/s}^2$;
b. Wartość przyspieszenia wynosi $9{,}0\,\text{m/s}^2$, więc droga to $x = 110$ m .

39. $\left(1{,}6\hat{i} - 0{,}8\hat{j}\right)\,\text{m/s}^2$

41.
a. $Q_{\text{Księżyc}} = mg_{\text{Księżyc}}$

$m = 150$ kg

$Q_{\text{Ziemia}} = 1{,}5 \cdot 10^3$ N
b. Masa astronauty w kombinezonie jest taka sama, niezależnie od tego, gdzie się znajduje, wynosi zawsze 150 kg.

43.
a. $F_h = 3{,}68 \cdot 10^3$ oraz

$Q = 7{,}35 \cdot 10^2$ N

$\frac{F_h}{Q} = 5$ razy większe niż ciężar pasażera
b. $F_{\text{wyp}} = 3\,750$ N

$\theta = 11{,}3°$ względem kierunku poziomego

45. $Q = 19{,}6$ N

$F_{\text{wyp}} = 5{,}40$ N

$F_{\text{wyp}} = ma \Rightarrow a = 2{,}70\,\text{m/s}^2$

47. $\left(0{,}60\hat{i} - 8{,}4\hat{j}\right)\,\text{m/s}^2$

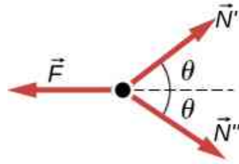
49. 497 N

51.
a. $F_{\text{wyp}} = 2{,}64 \cdot 10^7$ N;
b. Siła wywierana na pokład statku to również $2{,}64 \cdot 10^7$ N , skierowana jest przeciwnie do kierunku ruchu pocisku po wystrzale.

53. Siłę ciężkości podręcznika do historii, definiowaną jako jej oddziaływanie z polem grawitacyjnym Ziemi, zapiszmy jako $\vec{F}_{\text{ZH}} = -14\hat{j}$ N. Oprócz tego książka oddziałuje jedynie z podręcznikiem do fizyki. Ponieważ przyspieszenie książki do historii wynosi zero, siła wypadkowa na nią działająca również jest zerowa, co możemy zapisać jako: $\vec{F}_{\text{FH}} + \vec{F}_{\text{ZH}} = \vec{0}$, gdzie $\vec{F}_{\text{FH}}$ to siła wywierana przez podręcznik z fizyki na ten od historii. Dlatego też $\vec{F}_{\text{FH}} = -\vec{F}_{\text{ZH}} = -\left(-14\hat{j}\right)$ N $= 14\hat{j}$ N. Założyliśmy w zadaniu, że podręcznik do fizyki działa na podręcznik do historii siłą 14 N skierowaną w górę. Jeżeli chodzi o podręcznik do fizyki, działają na niego trzy siły: $\vec{F}_{\text{ZP}}$ pochodząca od oddziaływania grawitacyjnego, $\vec{F}_{\text{HF}}$ pochodząca od podręcznika do historii oraz $\vec{F}_{\text{SF}}$ jako siła reakcji od stołu. Gdy ciężar podręcznika do fizyki wynosi 18 N, wówczas siła $\vec{F}_{\text{EP}} = -18\hat{j}$ N. Na podstawie trzeciego prawa Newtona możemy zapisać, że $\vec{F}_{\text{HF}} = -\vec{F}_{\text{FH}}$, więc łatwo znaleźć siłę $\vec{F}_{\text{HF}} = -14\hat{j}$ N. Drugie prawo Newtona, zastosowane do obliczenia siły wypadkowej działającej na podręcznik do fizyki wygląda tak: $\sum \vec{F} = \vec{0}$, lub inaczej $\vec{F}_{\text{SF}} + \vec{F}_{\text{ZF}} + \vec{F}_{\text{HF}} = \vec{0}$, tak więc

$\vec{F}_{SF} = -\left(-18\hat{j}\right) - \left(-14\hat{j}\right) = 32\hat{j}$ N. Zatem na podstawie powyższych rozważań można powiedzieć, że stół wywiera siłę reakcji działającą na książkę do fizyki o wartości 32 N. Aby rozwiązać to zagadnienie, musieliśmy skorzystać zarówno z drugiego, jak i trzeciego prawa Newtona.

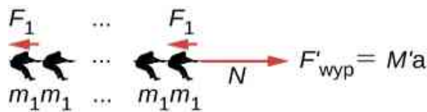
55. a. Rozkład sił działających na pierścień mocujący nogę to:



b. $N = mg, \quad F = 2N\cos\theta = 2mg\cos\theta$

57.

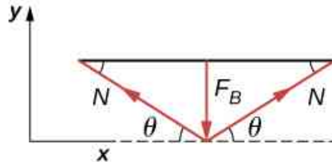
a. $F_{wyp} = Ma, \quad F_1 = 1\,350\,\text{N}, \quad F_2 = 1\,365\,\text{N}$
$9\left(F_2 - F_1\right) = 9\left(m_1 + m_2\right)a, \quad m_1 = 68\,\text{kg}, \quad m_2 = 73\,\text{kg}$
$a = 0{,}11\ \text{m/s}^2.$
Wygra więc drużyna złożona z cięższych zawodników.



b.
$$N - 9F_1 = 9m_{\perp}a \Rightarrow N = 9m_{\perp}a + 9F_1 = 1{,}2 \cdot 10^4\ \text{N}$$

59.

a. $N = 1{,}96 \cdot 10^{-4}$ N;
b. $N' = 4{,}71 \cdot 10^{-4}$ N
$\frac{N'}{N} = 2{,}40$



61.

$F_{ywyp} = F_{\perp} - 2N\sin\theta = 0$
$F_{\perp} = 2N\sin\theta$
$N = \frac{F_{\perp}}{2\sin\theta}$

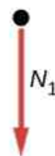
63.

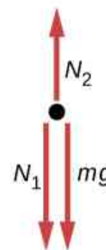
a. patrz Przykład 5.13
b. 1,5 N
c. 15 N

65.

a. 5,6 kg
b. 55 N
c. $N_2 = 60{,}0\,\text{N}$
d.



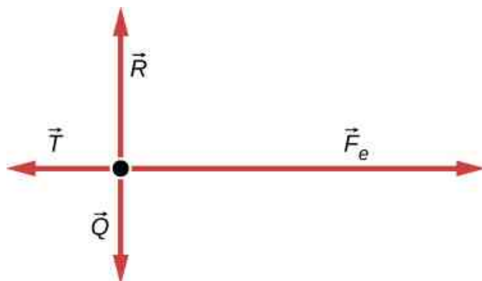




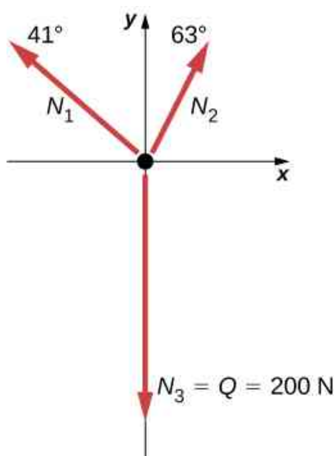
67.

a. $4{,}9\ \text{m/s}^2$, 17 N

b. 9,8 N



69.



71.

ZADANIA DODATKOWE

73. 5,90 kg



75.

77.

a. $F_{\text{wyp}} = \frac{m\left(v^2 - v_0^2\right)}{2x}$;

b. 2590 N

79. $\vec{F}_{\text{wyp}} = \left(4{,}05\hat{i} + 12{,}0\hat{j}\right)$ N

$\vec{F}_{\text{wyp}} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \left(0{,}405\hat{i} + 1{,}20\hat{j}\right)$ m/s^2

81. $\vec{F}_{\text{wyp}} = \vec{F}_\text{A} + \vec{F}_\text{B}$ Ciało o masie 1 kg poddano działaniu sił $\vec{F}_\text{A}$, $\vec{F}_\text{B}$, oraz $m\vec{g}$. Jeżeli ciało porusza

$\vec{F}_{\text{wyp}} = A\hat{i} + \left(-1{,}41A\hat{i} - 1{,}41A\hat{j}\right)$

$\vec{F}_{\text{wyp}} = A\left(-0{,}41\hat{i} - 1{,}41\hat{j}\right)$

$\theta = 254°$

się w lewo z przyspieszeniem o wartości 0,20 m/s^2 , jakie są wartości sił $\vec{F}_\text{A}$ i $\vec{F}_\text{B}$?

83. $F = 2kmx$; Na początku oblicz pochodną prędkości, aby otrzymać przyspieszenie ciała $a = 2kx$. Później przyspieszenie wstaw do wyrażenia opisującego drugie prawo Newtona: $F = ma = m\,(2kx) = 2kmx$.

85.

a. W przypadku pudełka A, $N_\text{A} = mg$, a w przypadku pudełka B $N_\text{B} = mg \cdot \cos\theta$;

b. b. $N_\text{A} > N_\text{B}$ ponieważ dla $\theta < 90°$ $\cos\theta < 1$

c. $N_\text{A} > N_\text{B}$ gdy $\theta = 10°$

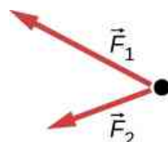
87.
a. 8,66 N;
b. 0,433 m

89. 0,40 lub inaczej 40%

91. 16 N

ZADANIA TRUDNIEJSZE

93.

a. 

b. Nie wszystkie siły powinny zostać naniesione na taki diagram; siła $\vec{F}_R$ nie została naniesiona, ponieważ jest wypadkową sił $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$.

95.
a. 14,1 m/s
b. 601 N

97. $\frac{F}{m}t^2$

99. 936 N

101. $\vec{a} = \left(-248\hat{i} - 433\hat{j}\right)$ m/s^2

103. 0,548 m/s^2

105.
a. $N_1 = \frac{2mg}{\sin\theta}, N_2 = \frac{mg}{\sin\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta\right)\right)}, N_3 = \frac{2mg}{\operatorname{tg}\theta}$
b. $\phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta\right)$
c. 2,56°
d. $x = d\left(2\cos\theta + 2\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta\right)\right) + 1\right)$

107.
a. $\vec{a} = \left(\frac{5{,}00}{m}\hat{i} + \frac{3{,}00}{m}\hat{j}\right)$ m/s^2
b. 1,38 kg
c. 21,2 m/s
d. $\vec{v} = \left(18{,}1\hat{i} + 10{,}9\hat{j}\right)$ m/s^2

109.
a. $\left(0{,}900\hat{i} + 0{,}600\hat{j}\right)$ N
b. 1,08 N

ROZDZIAŁ 6

SPRAWDŹ, CZY ROZUMIESZ

6.1. $F_{wag} = 645$ N

6.2. $a = 3{,}68$ m/s^2, $N = 18{,}4$ N

6.3. $T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}g$ (Ten wynik można otrzymać, wstawiając wyrażenie na przyspieszenie z Rysunku 6.7 (a) do wyrażenia na siłę naciągu na Rysunku 6.7 (b).)

6.4. 1,49 s

6.5. 49,4°

6.6. 128 m; nie

6.7. a. 4,9 N; b. 0,98 m/s^2

6.8. −0,23 m/s^2 ; znak „minus” oznacza, że snowboardzista zwalnia.

6.9. 0,40

6.10. 34 m/s

6.11. 0,27 kg/m

PYTANIA

1. Waga łazienkowa, podobnie jak astronauci, znajduje się w stanie nieważkości, więc jej wskazania są równe 0. Nie ma żadnej różnicy między pozorną nieważkością występującą na orbicie a tą, która występuje podczas swobodnego spadku samolotu treningowego.

3. Jeśli gwałtownie naciśniesz na pedał hamulca, koła samochodu zablokują się tak, że nie będą się już toczyć po podłożu. Występuje wówczas tarcie ślizgowe, a nagła zmiana (ze względu na większą siłę tarcia statycznego) powoduje szarpanie.

5. 5,00 N
7. Siła dośrodkowa jest definiowana jako dowolna siła wypadkowa powodująca jednostajny ruch po torze kołowym. Siła dośrodkowa nie jest nowym rodzajem siły. Odnosi się ona do jakiejkolwiek siły, która utrzymuje ciało w ruchu po okręgu. Siła ta może być naprężeniem, grawitacją, tarciem, przyciąganiem elektrycznym, normalną siłą lub jakąkolwiek inną siłą. Jakakolwiek ich kombinacja może być źródłem siły dośrodkowej, na przykład siła dośrodkowa działająca na kulkę na nitce obracaną w płaszczyźnie pionowej w jej najwyższym położeniu jest wynikiem zarówno naciągu nici, jak i ciężaru.
9. Kierowca, który „ścina” zakręt (tor 2) porusza się po torze o łagodniejszej krzywiźnie i większym promieniu. Jeśli kierowca zbyt szybko wejdzie w zakręt po torze nr 2, wyślizgnie się z toru. Kluczem jest utrzymanie maksymalnej wartości tarcia statycznego. Kierowca dąży do utrzymania maksymalnej prędkości i maksymalnego tarcia. Rozważmy równanie siły dośrodkowej: $F_d = mv^2/r$ gdzie v jest szybkością a r jest promieniem krzywizny toru. Zatem zwiększając promień krzywizny toru (zmniejszając $1/r$) zmniejszamy siłę, jaką opony muszą wywierać na drogę. Oznacza to, że możemy zwiększyć prędkość v. Patrząc na to z punktu widzenia kierowcy na torze 1 możemy to wyjaśnić w ten sposób: im ostrzejszy jest skręt, tym mniejsza jest krzywizna toru. Im mniejszy promień krzywizny, tym większa jest wymagana siła dośrodkowa. Jeśli siła dośrodkowa nie byłaby wywierana, to efektem byłby poślizg auta.
11. Bęben wirówki wywiera siłę dośrodkową na ubrania (zawierające krople wody), aby utrzymać je w ruchu po okręgu. Gdy kropla wody trafi do jednego z otworów w bębnie, będzie poruszać się po torze stycznym do okręgu i zostanie wyrzucona poza bęben.
13. Jeśli nie ma tarcia, to nie występuje siła dośrodkowa. Oznacza to, że pojemnik będzie poruszał się wzdłuż ścieżki stycznej do okręgu, czyli ścieżki B. Ślad na kurzu będzie prosty. Jest to konsekwencja pierwszej zasady dynamiki Newtona.
15. Aby utrzymać ruch po okręgu konieczne jest działanie siły dośrodkowej, którą zapewnia gwóźdź na środku. Trzecia zasada dynamiki Newtona wyjaśnia to zjawisko. Siłą sprawczą (akcji) jest siła wywierana na masę przez strunę. Siłą reakcji jest siła wywierana przez masę na strunę. To właśnie siła reakcji powoduje, że struna jest napięta.
17. Ponieważ tarcie opon o podłoże wywołuje siłę dośrodkową, a tarcie jest bliskie 0, to gdy samochód wjeżdża w lód, będzie poruszał się linii prostej stycznej to toru. Jest to zgodne z pierwszą zasadą dynamiki Newtona. Powszechnym błędnym wyobrażeniem jest to, że samochód będzie podążał po torze zakrzywionym.
19. Anna ma rację. Satelita wykonuje spadek swobodny do Ziemi, nawet jeśli grawitacja jest słabsza na wysokości satelity i g nie jest równe $9{,}80\ \mathrm{m/s^2}$. Spadek swobodny nie zależy od wartości przyspieszenia ziemskiego g. Na przykład można doświadczyć spadku swobodnego również na Marsie, skacząc np. z Olympus Mons (najwyższy wulkan w Układzie Słonecznym).
21. Zalety używania kombinezonu: (1) zmniejsza siłę oporu działającą na sportowca, dzięki czemu łatwiej jest mu się poruszać; (2) kombinezon jest ciasny, dzięki czemu zmniejsza pole przekroju poprzecznego sportowca (nawet mała zmiana może mieć istotny wpływ na uzyskany wynik w zawodach). Wady używania kombinezonu: (1) skoro kombinezon jest ciasny, to może wywoływać ucisk i utrudniać oddychanie; (2) utrudniona jest wymiana ciepła z otoczeniem, przez co przy długotrwałym stosowaniu, sportowiec może się przegrzać.
23. Olej posiada mniejszą gęstość niż woda, więc będzie osiadał na powierzchni warstwy podczas opadów delikatnego deszczu. Tworzy to bardzo niebezpieczną powłokę o zmniejszonym współczynniku tarcia, przez co samochód może łatwiej wpaść w poślizg. Podczas intensywnego deszczu krople oleju zostają rozproszone, co nie wpływa tak istotnie na ruch samochodu.

ZADANIA

25. a. 170 N; b. 170 N
27. $\vec{F}_3 = \hat{i} \cdot (-7\ \mathrm{N}) + \hat{j} \cdot 2\ \mathrm{N} + \hat{k} \cdot 4\ \mathrm{N}$
29. 376 N skierowana poziomo w górę (wzdłuż przerywanej linii na rysunku). Siła ta jest wykorzystywana do podnoszenia pięty.
31. –68,5 N
33. a. $7{,}70\ \mathrm{m/s^2}$; b. 4,33 s
35. a. 46,4 m/s; b. $2{,}40 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s^2}$; c. $5{,}99 \cdot 10^3\ \mathrm{N}$; stosunek równy 245
37. a. $1{,}87 \cdot 10^4\ \mathrm{N}$ b. $1{,}67 \cdot 10^4\ \mathrm{N}$ c. $1{,}56 \cdot 10^4\ \mathrm{N}$ d. 19,4 m, 0 m/s
39. a. 10 kg; b. 90 N; c. 98 N; d. 0
41. a. $3{,}35\ \mathrm{m/s^2}$; b. 4,2 s
43. a. $2{,}0\ \mathrm{m/s^2}$; b. 7,8 N; c. 2,0 m/s
45. a. $0{,}933\ \mathrm{m/s^2}$ (ciężarek 1 porusza się ruchem przyspieszonym w górę, zaś ciężarek 2 opada w dół z tym samym przyspieszeniem); b. 21,5 N
47. a. 10,0 N; b. 97,0 N
49. a. $4{,}9\ \mathrm{m/s^2}$; b. Szafka się nie przesunie. c. Szafka się przesunie.
51. a. 32,3 N, 35,2°; b. 0; c. $0{,}301\ \mathrm{m/s^2}$ w kierunku działania siły F_{wyp}
53.
$$\begin{aligned} \mathrm{wyp}\,F_y &= 0 \Rightarrow R = mg\cos\theta \\ \mathrm{wyp}\,F_x &= ma \\ a &= g(\sin\theta - \mu_k \cos\theta) \end{aligned}$$
55. a. $1{,}69\ \mathrm{m/s^2}$; b. 5,71°
57. a. $10{,}8\ \mathrm{m/s^2}$; b. $7{,}85\ \mathrm{m/s^2}$; c. $2{,}00\ \mathrm{m/s^2}$
59. a. $9{,}09\ \mathrm{m/s^2}$; b. $6{,}16\ \mathrm{m/s^2}$; c. $0{,}294\ \mathrm{m/s^2}$
61. a. 272 N, 512 N; b. 0,268
63. a. 46,5 N; b. $0{,}629\ \mathrm{m/s^2}$

65. a. 483 N; b. 17,4 N; c. 2,24, 0,0807
67. 4,14°
69.

a. 24,6 m;
b. $36{,}6\ \text{m/s}^2$;
c. 3,73 raza większe od g

71. a. 16,2 m/s; b. 0,234
73. a. 179 N; b. 290 N; c. 8,3 m/s
75. 20,7 m/s
77. 21 m/s
79. 115 m/s lub 414 km/h
81. $v_{gr} = 25\ \text{m/s}; v_2 = 9{,}9\ \text{m/s}$
83. $\left(\frac{110}{65}\right)^2 = 2{,}86$ raza
85. Prawo Stokesa ma następującą postać: $F_s = 6\pi r\eta v$. Przekształcając równanie tak, aby otrzymać lepkość uzyskamy: $\eta = F_s/(6\pi rv)$. Rachunek jednostek tego wyrażenia prowadzi do następującej zależności: $[\eta] = \text{kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$.
87. $0{,}76\ \text{kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$
89. a. 0,049 kg/s; b. 0,57 m
91.

a. 1860 N, 2,53;
b. Siła 1860 N to ok. 2 razy więcej niż spodziewamy się doświadczać w typowej windzie. Siła oddziaływania w typowej windzie jest obliczona przy założeniu, że w ciągu 2 s winda zdąży zwiększyć prędkość tylko do wartości 4,5 m/s.
c. Końcowa prędkość dana w zadaniu osiągana w ciągu 2 s jest ogromna (30,0 m/s to przecież 108 km/h!). Oznacza to, że przyspieszenie windy jest nieracjonalnie duże.

93. 189 N
95. 15 N
97. 12 N

ZADANIA DODATKOWE

99. $a_x = 0{,}40\ \text{m/s}^2$ i $T = 11{,}2\cdot 10^3\ \text{N}$
101. $m(6pt + 2q)$
103. $\vec{v}(t) = \left(\frac{pt}{m} + \frac{nt^2}{2m}\right)\hat{i} + \left(\frac{qt^2}{2}\right)\hat{j}$ i $\vec{r}(t) = \left(\frac{pt^2}{m} + \frac{nt^3}{6m}\right)\hat{i} + \left(\frac{qt^2}{60m}\right)\hat{j}$
105. 9,2 m/s
107. 1,3 s
109. $5{,}4\ \text{m/s}^2$
111. a. 0,60; b. 1200 N; c. $1{,}2\ \text{m/s}^2$ i 1080 N; d. $-1{,}2\ \text{m/s}^2$; e. 120 N
113. 0,789
115. a. 0,186 N; b. 774 N; c. 0,48 N
117. 13 m/s
119. 20,7 m/s
121. a. 28300 N; b. 2540 m
123. 25 N
125. $a = \frac{F}{4} - \mu_k g$
127. 14 m

ZADANIA TRUDNIEJSZE

129. $v = \sqrt{v_0{}^2 - 2gr_0\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)}$
131. 78,7 m
133. a. 53,9 m/s; b. 328 m; c. 4,58 m/s; d. 257 s
135. a. $v = 20{,}0(1 - e^{-0{,}01t})$; b. $v_{konc} = 20\ \text{m/s}$

ROZDZIAŁ 7

SPRAWDŹ, CZY ROZUMIESZ

7.1. Nie, tylko wartość tej siły pozostawała stała. Zmieniał się jej kierunek zgodnie ze zmianą kierunku i zwrotu wektora przemieszczenia.
7.2. Nie, jest stała tylko w pobliżu powierzchni Ziemi.
7.3. $W = 35\ \text{J}$
7.4.

a. Siła sprężystości jest przeciwna do zmiany długości, więc praca jest ujemna.
b. 0,54 J.

7.5.

a. samochód;
b. ciężarówka

7.6. Przeciwnie.
7.7. $\sqrt{3}$ m/s.
7.8. 980 W.

PYTANIA

1. Przykładem może być „pchanie” ściany. Pomimo tego, że tracona jest energia, nie jest ona przekazywana, więc w konsekwencji nie ma przemieszczenia, a zatem nie ma wykonywanej pracy.
3. Kiedy przebijesz się przez ścianę, nadal przykładasz siłę, ale nie występuje już przesunięcie.
5. Całkowite przemieszczenie wynosi zero, więc nie wykonuje pracy.
7. Dzięki schodom Tarzan nie będzie musiał wydatkować energię szybko, ale stopniowo.
9. Pierwsza cząstka ma energię kinetyczną $4 \cdot \frac{1}{2}mv^2$, z kolei druga $2 \cdot \frac{1}{2}mv^2$, czyli energia kinetyczna pierwszej cząstki jest dwa razy większa niż drugiej.
11. Kosiarka zwiększałaby energię dla $-90^\circ < \theta < 90^\circ$ i traciła dla $90^\circ < \theta < 270^\circ$. W przypadku ruchu z tarciem oczywiście kosiarka zmniejszałaby swoją energię na przeciwdziałanie sile tarcia, ale zakładamy w tym przypadku, że tarcie jest pomijalnie małe.
13. Energia kinetyczna drugiej kulki będzie dwa razy większa niż pierwszej.
15. Jeżeli nie przyjmiesz założenia, że w danej sytuacji nie ma tarcia, to zawsze wykonujesz dodatnią pracę, żeby przeciwdziałać pracy siły tarcia działającej na ciebie. W przypadku stałej prędkości praca wypadkowa w takim układzie wynosi zero.
17. Sprzęt gospodarstwa domowego jest oceniany na podstawie mocy pobieranej w stosunkowo małym czasie. Nie ma znaczenia, jak długo jest włączony, istotna jest tylko energia pobierana przez nie w jednostce czasu.
19. Wyładowanie jest krótkotrwałe, więc energia przekazana do naszego ciała jest niewielka.
21. Jeśli siła działająca na ciało ma zwrot przeciwny do wektora prędkości ciała, to moc może być ujemna.

ZADANIA

23. 3,00 J
25.
a. 593 kJ;
b. −589 kJ;
c. 0 J.

27. 3,14 kJ
29.
a. −700 J;
b. 0 J;
c. 700 J;
d. 38,6 N;
e. 0 J.

31. 100 J
33.
a. 2,45 J;
b. − 2,45 J;
c. 0 N.

35.
a. 2,22 kJ;
b. −2,22 kJ;
c. 0 J.

37. 18,6 kJ.
39.
a. 2,32 kN;
b. 22,0 kJ.

41. 835 N.
43. 257 J.
45. 1,47 m/s;
47.
a. 772 kJ;
b. 4,0 kJ;
c. $1{,}8 \cdot 10^{-16}$ J.

49.
a. 2,6 kJ;
b. 640 J.

51. 2,72 kN.
53. 102 N.
55. 2,8 m/s.
57. $W(\text{pocisk}) = 20 \cdot W(\text{skrzynia})$.

59. 12,8 kN.
61. 0,25.
63.
a. 24 m/s;
b. 29,4 m.
65. 310 m/s.
67.
a. 40;
b. 8 milionów
69. 675 zł.
71.
a. 208 W;
b. 141 s
73.
a. 3,20 s;
b. 4,04 s.
75.
a. 224 s;
b. 24,8 MW;
c. 49,7 kN.
77.
a. 1,57 kW;
b. 6,28 kW.
79. 6,83 μW.
81.
a. 8,51 J;
b. 8,51 W.
83. 1,7 kW.

ZADANIA DODATKOWE

85. $15\ \mathrm{N \cdot m}$.
86. $39\ \mathrm{N \cdot m}$.
88.
a. $208\ \mathrm{N \cdot m}$;
b. $240\ \mathrm{N \cdot m}$.
90.
a. $-0{,}9\ \mathrm{N \cdot m}$;
b. $-0{,}83\ \mathrm{N \cdot m}$.
92.
a. 10 J;
b. 10 J;
c. 380 N/m.
94. 160 J/s
96.
a. 10 N;
b. 20 W.

ZADANIA TRUDNIEJSZE

98. Przy ruchu skrzyni w górę:
a. 3,46 kJ;
b. −1,89 kJ;
c. −1,57 kJ;
d. 0 N;
Przy ruchu w dół:
a. −0,39 kJ;
b. −1,18 kJ;
c. 1,57 kJ;
d. 0 N.
100. 8,0 J.
102. 35,7 J.
104. 24,3 J.
106.
a. 40 KM;
b. 39,8 MJ;
c. 80 KM, 79,6 MJ przy 30 m/s.

ROZDZIAŁ 8

SPRAWDŹ, CZY ROZUMIESZ

8.1. $4{,}63\,\mathrm{J} - (-2{,}83\,\mathrm{J}) = 7{,}00\,\mathrm{J}$
8.2. 35,3 kJ, 143 kJ, 0 kJ
8.3. 22,8 cm. Nierozciągnięta sprężyna ma długość 0,02 m (patrz: początek przykładu). Znając długość nierozciągniętej sprężyny, możemy obliczyć, że końcowe odkształcenie sprężyny wynosi 0,028 m. Stąd długość sprężyny jest sumą długości nierozciągniętej i odkształcenia, czyli 22,8 cm.
8.4. Musi wzrosnąć, ponieważ siła była skierowana w dół, czyli praca została wykonana, aby odciągnąć ciężarek. Wykonana praca będzie równa wzrostowi całkowitej energii potencjalnej układu.
8.5. 2,83 N
8.6. $F = 4{,}8\,\mathrm{N}$, skierowana w stronę początku układu współrzędnych.
8.7. $0{,}033\,\mathrm{m}$
8.8. b. Przy danej wysokości energia potencjalna grawitacji jest zawsze taka sama, natomiast energia kinetyczna jest mniejsza w ruchu w dół, ponieważ siła oporu powietrza jest dyssypatywna i wykonuje ujemną pracę. W związku z tym, dla każdej wysokości prędkość w ruchu w dół jest mniejsza niż prędkość ruchu w górę, a zatem czas opadania jest dłuższy od czasu wznoszenia.
8.9. stałej – $E_p(x) = -1\,\mathrm{J}$
8.10. a. Tak, ruch jest dozwolony dla $-1{,}055\,\mathrm{m} \leq x \leq 1{,}055\,\mathrm{m}$; b. takie same jak w poprzednim przypadku.
8.11. $x(t) = \pm\sqrt{(2E/k)}\,\sin\left[\left(\sqrt{k/m}\right)t\right]$ oraz $v_0 = \pm\sqrt{(2E/m)}$

PYTANIA

1. Energia potencjalna układu może być ujemna, ponieważ jest to wartość liczona względem pewnego określonego punktu.
3. Jeśli punkt odniesienia jest przyjęty na poziomie podłoża, to energia potencjalna wzrasta do momentu osiągnięcia maksimum lotu, po czym zmniejsza się wraz z opadaniem oszczepu. Całkowita zmiana energii potencjalnej w tym ruchu wynosi zero, z wyjątkiem sytuacji, w której oszczep ma punkt ciężkości poniżej punktu, z którego został wyrzucony.
5. Różnica wysokości pomiędzy położeniem początkowym i końcowym (na poziomie gruntu) ciała.
7. Jest to siła, która powoduje rozproszenie energii układu w ten sposób, że nie da się jej zamienić z powrotem na pracę.
9. Zmiana energii kinetycznej jest równa pracy wypadkowej. W związku z tym, że siły zachowawcze są niezależne od drogi, po powrocie do punktu wyjścia energia potencjalna i kinetyczna będą miały takie same wartości jak przed rozpoczęciem ruchu. Podczas przemieszczania energia całkowita jest zachowana, ale zarówno kinetyczna, jak i potencjalna będą zmieniać swoje wartości.
11. Energia potencjalna grawitacji samochodu zmienia się wraz z jego ruchem w dół wzgórza, ponieważ zmniejsza się jego wysokość. Część jego energii ulegnie rozproszeniu w wyniku działania siły tarcia. Pozostała energia potencjalna ulegnie przemianie w energię kinetyczną, powodując wzrost prędkości auta. Ostatecznie samochód się zatrzymuje i cała jego energia kinetyczna jest rozproszona poprzez pracę wykonaną przez hamulce.
13. Stwierdzenie mówi, że energia całkowita układu E jest zachowana dopóty, dopóki nie ma sił niezachowawczych działających na ciało.
15. Pracą mięśni swoich nóg.
17. Musimy wznieść ciało czterokrotnie wyżej.

ZADANIA

19. 40000
21. a. $-200\,\mathrm{J}$; b. $-200\,\mathrm{J}$; c. $-100\,\mathrm{J}$; d. $-300\,\mathrm{J}$
23. a. $0{,}068\,\mathrm{J}$; b. $-0{,}068\,\mathrm{J}$; c. $0{,}068\,\mathrm{J}$; d. $0{,}068\,\mathrm{J}$; e. $-0{,}068\,\mathrm{J}$; f. 46 cm
25. a. $-120\,\mathrm{J}$; b. $120\,\mathrm{J}$
27. a. $(-2a/b)^{1/6}$; b. 0; c. $\sim x^6$
29. 14 m/s
31. 14 J
33. Dowód powyższego równania jest rozwiązaniem zadania.
35. 9,7 m/s
37. 39 m/s
39. 1900 J
41. 151 J
43. 3,5 cm
45. $10x$ przy założeniu, że oś x rozpoczyna się w położeniu ściany i jest skierowana na zewnątrz.
47. 4,6 m/s
49. a. 5,6 m/s; b. 5,2 m/s; c. 6,4 m/s; d. nie; e. tak
51.

a. Na potrzeby rysowania wykresu przyjęto, że $k = 0{,}02$, $A = 1$, $\alpha = 1$;
b. $F = kx - \alpha x A e^{-\alpha x^2}$;
c. Energia potencjalna w położeniu $x = 0$ musi być mniejsza niż suma energii kinetycznej i potencjalnej w położeniu $x = a$ lub inaczej $A \leq mv^2/2 + ka^2/2 + Ae^{-\alpha x^2}$. Rozwiązanie nierówności ze względu na A prowadzi do warunku przedstawionego w zadaniu.

53. 8700 N/m
55. a. 70,6 m/s; b. 69,9 m/s
57. a. 180 N/m; b. 11 m
59. a. $9{,}8 \cdot 10^3$ J ; b. $1{,}4 \cdot 10^3$ J ; c. 14 m/s
61. a. 47,6 m; b. $1{,}88 \cdot 10^5$ J ; c. 373 N
63. 33,9 cm
65. a. 0,0269 J; b. $E_p = 0$; c. 1,11 m/s; d. 4,96 cm
67. 42 cm

ZADANIA DODATKOWE

69. 0,44 J
71. 3,6 m/s
73. $bD^4/4$
75. Należy to wykazać.
77. a. $\sqrt{\frac{2m^2gh}{k(m+M)}}$; b. $\frac{mMgh}{m+M}$
79. a. 2,24 m/s; b. 1,94 m/s; c. 1,94 m/s
81. 18 m/s
83. $v_A = 24$ m/s; $v_B = 14$ m/s; $v_C = 31$ m/s
85. a. Strata energii wynosi 240 Nm ; b. $F = 8$ N
87. 89,7 m/s
89. 32 J

ROZDZIAŁ 9

SPRAWDŹ, CZY ROZUMIESZ

9.1. Do osiągnięcia prędkości końcowej $v_1 = 1/4 \cdot 3{,}0 \cdot 10^8$ m/s przy stałej wartości przyspieszenia $10g$ potrzeba czasu Δt , który otrzymamy po przekształceniu wzoru definiującego przyspieszenie średnie:

()

$$10g = \frac{v_1}{\Delta t},$$

()

$$\Delta t = \frac{v_1}{10g} = \frac{0{,}25 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{10 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2} = 7{,}6 \cdot 10^5 \text{ s} = 8{,}8 \text{ doby}.$$

9.2. Gdyby telefon odbijał się od podłogi z taką samą prędkością, z którą w nią uderzał $\vec{v}_2 = v_1\hat{j}$, zmiana pędu podczas zderzenia byłaby równa $\Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v} = m\left[v_1\hat{j} - \left(-v_1\hat{j}\right)\right] = 2mv_1\hat{j}$. Z reguły pędu i popędu wynika więc, że jest to wartość dwukrotnie większa w porównaniu z sytuacją bez odbicia.
9.3. Ponieważ lżejszy wózek porusza się z prędkością 1,33 m/s skierowaną w lewo, jego pędowi należy przypisać znak minus – pęd ten skierowany jest bowiem przeciwnie do dodatniej półosi x. Wówczas zasadę zachowania pędu będzie wyrażało równanie (9.74)

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)\vec{v}_3 &= m_1v_1\hat{i} - m_2v_2\hat{i},\\ \vec{v}_3 &= \frac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2}\hat{i}.\end{aligned}$$

Zatem (9.75)

$$\vec{v}_3 = \frac{0{,}675 \text{ kg} \cdot 0{,}75 \text{ m/s} - 0{,}5 \text{ kg} \cdot 1{,}33 \text{ m/s}}{1{,}175 \text{ kg}}\hat{i} = -0{,}135 \text{ m/s} \cdot \hat{i}.$$

Prędkość końcowa jest ujemna, co oznacza, że wózki po zderzeniu poruszają się w lewo.
9.4. Jeżeli piłka się nie odbija, jej końcowy pęd $\vec{p}_2$ wynosi zero, więc:$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = 0 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \cdot \hat{j} - \left(-1{,}4 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \cdot \hat{j}\right) = 1{,}4 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \cdot \hat{j}$.

9.5. Zgodnie z zasadą pędu i popędu, działająca siła przyczynia się do zmiany pędu układu, przekazując impuls $\vec{J} = \Delta\vec{p}$. Jeżeli $\vec{J} = 0$, mamy do czynienia z ruchem bez tarcia. Jeżeli siła tarcia jest różna od zera i wynosi $\vec{F}_{\text{śr}}$, powoduje zmianę pędu (impuls) $\vec{J} = \vec{F}_{\text{śr}}\Delta t$. Wówczas, zamiast $\vec{p}_{\text{przed}} = \vec{p}_{\text{po}}$ otrzymamy: (9.89)

$$\vec{F}_{\text{śr}}\Delta t = \Delta\vec{p} = \vec{p}_{\text{po}} - \vec{p}_{\text{przed}}$$

9.6. Impuls jest *de facto* zmianą pędu ciała, zatem lądownik oraz kometa doświadczą działania impulsów o równej wartości, różniących się jedynie zwrotem. Średnią siłę wyliczamy z kolei wykorzystując regułę pędu i popędu – jako iloraz zmiany pędu i przedziału czasu potrzebnego na jej wywołanie. Podobnie jak poprzednio, wartości siły okazują się być jednakowe dla obu ciał, ale zwroty wektorów są przeciwne. Natomiast zmiana energii kinetycznej lądownika jest znacząco różna od zmiany energii kinetycznej komety, co z łatwością można wykazać na podstawie danych zadania i otrzymanej już wartości $\Delta\vec{v}_{\text{k}}$

9.7. Podane wyniki odpowiadają sytuacji, w której prędkości krążków nie zmieniają się – czerwony nadal spoczywa, a niebieski nadal przesuwa się w lewo ze swoją prędkością. Innymi słowy – nie było między nimi oddziaływania, zderzenie nie miało miejsca.

9.8. Przy braku tarcia, uderzone auto poruszałoby się nieskończenie daleko, nie moglibyśmy więc skorzystać z twierdzenia o pracy i energii. Tym samym, problem stałby się nierozwiązywalny.

9.9. Gdy prędkości początkowe nie są do siebie prostopadłe, zależy rozłożyć wektory na składowe, z użyciem funkcji trygonometrycznych kąta lub kątów podanych w zadaniu, bądź też – zamiast twierdzenia Pitagorasa – skorzystać z twierdzenia cosinusów. Analiza matematyczna byłaby więc nieco bardziej złożona, matematycznie wynik zawierałby zależność od kąta, natomiast skutek fizyczny zderzenia praktycznie by się nie zmienił – uszkodzenia pojazdów i być może pasażerów byłby niewątpliwe.

9.10. Obliczmy masę sprężonego powietrza. Objętość butli to ok. 11 litrów. Traktując powietrze jako gaz doskonały, liczbę moli gazu w butli wyliczymy jako: (9.136)

$$PV = nRT,$$
$$n = \frac{PV}{RT} = \frac{170\,\text{atm}\cdot 0{,}011\,\text{m}^3}{8{,}31\,\text{J}/(\text{mol}\cdot\text{K})\cdot 300\,\text{K}}\cdot 101325\,\text{Pa}/\text{atm} = 75{,}9\,\text{mol}.$$

Średnia masa molekularna powietrza wynosi 29 g/mol, więc masa powietrza zawartego w butli wynosi około 2,2 kg. Stanowi to w przybliżeniu 15% masy butli, więc można ją uznać za zaniedbywalną. Ponadto, początkową siłę działającą na każdy fragment można uznać za proporcjonalną do powierzchni fragmentów, która z kolei jest proporcjonalna do masy każdego z nich (zakładamy stałą grubość ścianki butli). Zatem, gdyby dokładnie uwzględnić masę powietrza – początkowe przyspieszenia każdego z fragmentów zmieniłyby się bardzo niewiele.

9.11. Średni promień orbity Ziemi wokół Słońca to $149{,}6\cdot 10^9$ m . (jest to długość tzw. jednostki astronomicznej), zaś masa Słońca wynosi $1{,}989\cdot 10^{30}$ kg . Osadzając układ współrzędnych w środku Słońca i przyjmując dla uproszczenia wspólną dla Ziemi i Księżyca odległość równą jednostce astronomicznej, jak również sumę mas trzech obiektów jako masę Słońca, otrzymujemy:

$$R_{\text{ŚM}} = \frac{m_{\text{S}}r_{\text{S}}+m_{\text{ZK}}r_{\text{ZK}}}{m_{\text{S}}+m_{\text{ZK}}} = \frac{1{,}989\cdot 10^{30}\,\text{kg}\cdot 0\,\text{m}+(597\cdot 10^{22}\,\text{kg}+7{,}36\cdot 10^{22}\,\text{kg})\cdot 149{,}6\cdot 10^{9}\,\text{m}}{1{,}989\cdot 10^{30}\,\text{kg}} = 455\,\text{km}.$$

Widzimy więc, że położenie środka masy tego układu znajduje się w odległości zaledwie 455 km od środka Słońca, czyli niemal w samym jego środku (promień Słońca szacowany jest na prawie 700 tysięcy km)!

9.12. W skali makroskopowej, rozmiar komórki elementarnej jest zaniedbywalny i rozkład masy w krysztale można traktować jako jednorodny. Wówczas:

$$\vec{r}_{\text{ŚM}} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j\vec{r}_j = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m\vec{r}_j = \frac{m}{M}\sum_{j=1}^{N}\vec{r}_j = \frac{Nm}{M}\cdot\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{r}_j,$$

gdzie sumowanie po indeksie j dotyczy N komórek elementarnych w krysztale, a m jest masą komórki elementarnej. Ponieważ $Nm = M$, możemy zapisać:

$$\vec{r}_{\text{ŚM}} = \frac{m}{M}\sum_{j=1}^{N}\vec{r}_j = \frac{Nm}{M}\cdot\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{r}_j = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{r}_j.$$

Otrzymany zapis jest definicją środka geometrycznego kryształu, zatem w przypadku ciała jednorodnego środek geometryczny pokrywa się ze środkiem masy kryształu.

9.13. Byłby on dokładnie symetryczny, o torach prostoliniowych, ponieważ siła grawitacji nie zaburzałaby torów ruchu cząstek.

9.14. Symbol m_{g} dotyczy masy paliwa, która jest funkcją czasu $m_{\text{g}}(t)$, a m jest masą rakiety z paliwem, przy czym $m = m_{\text{r}} + m_{\text{g}}(t)$. Z kolei m_{r} oznacza masę pustej rakiety (jej masę własną). Różniczkowanie ostatniego równania po czasie daje wynik:

$$\frac{\text{d}m}{\text{d}t} = \frac{\text{d}m_{\text{r}}}{\text{d}t} + \frac{\text{d}m_{\text{g}}(t)}{\text{d}t} = \frac{\text{d}m_{\text{g}}(t)}{\text{d}t},$$

ponieważ $\text{d}m_{\text{r}}/\text{d}t = 0$ (masa własna rakiety nie ulega zmianie). Zatem szybkość zmian masy rakiety z paliwem jest taka sama jak szybkość zmian masy paliwa w zbiornikach.

PYTANIA

1. Wiedząc, że $E_{\text{k}} = mv^2/2$ oraz że $p = mv$, łatwo można wyprowadzić związek między energią kinetyczną i pędem: $E_{\text{k}} = p^2/2m$. Jeżeli więc pęd obu ciał jest jednakowy, ciało o mniejszej masie będzie posiadało większą energię kinetyczną.
2. Pęd ciała cięższego jest większy.

3. Tak. Impuls jest iloczynem siły i przedziału czasu jej działania $\vec{J} = \vec{F}\Delta t$, zatem mała siła działająca przez długi czas może wytworzyć większy popęd niż siła duża, ale krótkotrwała.
5. Ruch samochodu możliwy jest dzięki obecności siły tarcia działającej poziomo, stycznie do kół w punkcie ich kontaktu z podłożem. W ten sposób samochód obracającymi się kołami „odpycha” drogę do tyłu (a właściwie Ziemię, działając stycznie do jej powierzchni), a droga „pcha” go do przodu. Ponieważ masa samochodu jest nieporównywalnie mniejsza od masy Ziemi, to właśnie samochód zostaje wprawiony w ruch i obserwujemy jego zmianę prędkości i pędu, natomiast ruch obrotowy Ziemi pozostaje niezaburzony.
7. Pęd układu jest zachowany, gdy podczas oddziaływania jego masa pozostaje stała, a wypadkowa sił zewnętrznych działających na tenże układ jest równa zero.
9. Aby nadać cząsteczkom powietrza przyspieszenie w kierunku ruchu samochodu, pojazd musi wywierać na nie siłę $\vec{F} = \mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t$. Z trzeciej zasady dynamiki Newtona wynika, że cząsteczki powietrza wywierają na samochód siłę o tej samej wartości, ale o przeciwnym zwrocie. Jest to właśnie siła przeciwstawiająca się ruchowi samochodu, wytwarzająca w efekcie opór powietrza.
11. Nie – sprinter nie jest układem zamkniętym, ponieważ działa na niego niezerowa siła zewnętrzna bloków, pchająca jego stopy. O układzie zamkniętym mówilibyśmy, gdyby został on poszerzony o bloki startowe. Wówczas siła reakcji bloków byłaby siłą wewnętrzną – będącą odpowiedzią na nacisk stóp sprintera.
13. Tak, cała energia kinetyczna może być stracona, jeżeli masy na przykład zlepią się ze sobą i pozostaną w spoczynku.
15. Kąt między tymi kierunkami musi wynosić 90°. Przykładem jest każdy układ, w którym siły zewnętrzne dla jednego kierunku znoszą się, a dla innego nie.
17. Napęd rakiety jest efektem zasady zachowania pędu i nie zależy od prędkości gazów względem rakiety. Statek przyspiesza, bo wyrzuca gazy za siebie, i to jest gwarancją przyrostu prędkości.

ZADANIA

19.
  a. $25\,\mathrm{kg \cdot m/s}$;
  b. tyle samo co w przypadku a.

21. $1{,}78 \cdot 10^{29}\ \mathrm{kg \cdot m/s}$.
23. $1{,}3 \cdot 10^{9}\ \mathrm{kg \cdot m/s}$.
25. a. 1,5 MN; b. 0,1 MN.
27. $4{,}69 \cdot 10^{5}\ \mathrm{N}$.
29. $2{,}1 \cdot 10^{3}\ \mathrm{N}$.
31. $\vec{p}(t) = \left(10 \cdot \hat{i} + 20t \cdot \hat{j}\right)\ \mathrm{kg \cdot m/s};\ \vec{F} = 20\,\mathrm{N} \cdot \hat{j}$.
33. $p_x = 1{,}5\,\mathrm{kg \cdot m/s}$,
$p_y = 7{,}5\,\mathrm{kg \cdot m/s}$.
35. $\vec{v}_3 = 0{,}122\,\mathrm{m/s} \cdot \hat{i}$.
37.
  a. 47 m/s poziomo w prawo;
  b. $70{,}6\,\mathrm{N \cdot s}$ poziomo w lewo;
  c. $70{,}6\,\mathrm{N \cdot s}$ poziomo w prawo;
  d. Wartość siły wynosi $2{,}35 \cdot 10^{4}\mathrm{N}$

39. 3,1 m/s.
41. 5,9 m/s.
43.
  a. 6,8 m/s, 5,33°;
  b. Tak (wyznacz stosunek energii kinetycznej przed i po zderzeniu)

45. 2,5 cm
47. Auta wymienią się prędkościami – uderzone będzie jechać szybciej (6 m/s) a drugie 5,6 m/s.
49. 6,6%
51. 1,9 m/s
53. 22,1 m/s, pod kątem $32,2°$ zgodnie z ruchem wskazówek zegara od osi $+x$.
55.
  a. 33 m/s i 110 m/s;
  b. 57 m;
  c. 480 m

57. $732\,\mathrm{m/s} \cdot \hat{i} - 80{,}6\,\mathrm{m/s} \cdot \hat{j}$.
59. $-0{,}21\,\mathrm{m/s} \cdot \hat{i} + 0{,}25\,\mathrm{m/s} \cdot \hat{j}$.
61. 341 m/s dla $86,6°$ względem osi x.
63. Względem środka układu współrzędnych umieszczonego w masie 150g, współrzędne środka masy wynoszą: $x_{ŚM} = -1{,}23\,\mathrm{cm}$, $y_{ŚM} = 0{,}69\,\mathrm{cm}$.
65. $$y_{ŚM} = \begin{cases} h - \frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{gt^2}{2}, & t < T, \\ h - \frac{gt^2}{2} + \frac{m_2}{m_1+m_2} gT\left(t - \frac{T}{2}\right), & t \geqslant T. \end{cases}$$

67.

a. $R_1 = 4\,\mathrm{m}, R_2 = 2\,\mathrm{m}$;

b. $x_{ŚM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, y_{ŚM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}$;

c. Tak, promień tego okręgu wynosi $R = \frac{1}{m_1 + m_2}\sqrt{16 m_1^2 + 4 m_2^2}$

69. $x_{ŚM} = \frac{3}{4} L \left(\frac{\rho_1 + \rho_0}{\rho_1 + 2\rho_0} \right)$

71. $\left(x_{ŚM}, y_{ŚM} \right) = \left(\frac{2a}{3}, \frac{2b}{3} \right)$.

73. $\left(x_{ŚM}, y_{ŚM}, z_{ŚM} \right) = (0, 0, h/4)$.

75. $\left(x_{ŚM}, y_{ŚM}, z_{ŚM} \right) = (0, 4R/3\pi, 0)$.

77. a. 0,413 m/s, b. około 0,2 J.

79. 1551 kg

81. 4,9 km/s

ZADANIA DODATKOWE

84. Słoń ma większy pęd.

86. O ile pierwsza część wypowiedzi jest prawdą to druga niekoniecznie, ponieważ prędkość lekkiego obiektu może być bardzo duża co spowoduje, że pęd tego ciała będzie większy, niż pęd ciężkiego obiektu poruszającego się powoli.

88. $4{,}5 \cdot 10^3\,\mathrm{N}$.

90. $\vec{J} = \int_0^{\tau} \left[m\vec{g} - m\vec{g}\left(1 - e^{-bt/m}\right) \right] \mathrm{d}t = \frac{m^2}{b}\vec{g}\left(e^{-b\tau/m} - 1\right)$

92.

a. $-2{,}1 \cdot 10^3\,\mathrm{kg \cdot m/s} \cdot \hat{i}$,

b. $-24 \cdot 10^3\,\mathrm{N} \cdot \hat{i}$.

94.

a. $1{,}1 \cdot 10^3\,\mathrm{kg \cdot m/s} \cdot \hat{i}$,

b. $0{,}01\,\mathrm{kg \cdot m/s} \cdot \hat{i}$,

c. $-0{,}000\,93\,\mathrm{m/s} \cdot \hat{i}$,

d. $-0{,}0012\,\mathrm{m/s} \cdot \hat{i}$

96. 0,10 kg; $-7{,}2\,\mathrm{m/s} \cdot \hat{i}$.

98. $u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1, u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$.

100. 2,8 m/s

102. 0,094 m/s

104. Prędkość kuli uderzającej: $-0{,}76\,\mathrm{m/s} \cdot \hat{i}$; końcowe prędkości kul uderzonych są jednakowe i wynoszą 2,6 m/s, skierowane pod kątem $\pm 30°$, symetrycznie względem toru kuli nacierającej.

106. Kula 1: $-1{,}4\,\mathrm{m/s} \cdot \hat{i} - 0{,}4\,\mathrm{m/s} \cdot \hat{j}$, Kula 2: $2{,}2\,\mathrm{m/s} \cdot \hat{i} + 2{,}4\,\mathrm{m/s} \cdot \hat{j}$

108. Kula 1: $0{,}71\,\mathrm{m/s} \cdot \hat{i} - 1{,}26\,\mathrm{m/s} \cdot \hat{j}$, Kula 2: $0{,}09\,\mathrm{m/s} \cdot \hat{i} + 3{,}26\,\mathrm{m/s} \cdot \hat{j}$.

110. $(r, \theta) = (2R/3, \pi/8)$.

112. Zmiana pędu rakiety i jej przyspieszanie jest następstwem zasady zachowania pędu. Pęd gazów wyrzucanych w każdej sekundzie jest kompensowany przyrostem pędu rakiety. Po wyjściu z warstw atmosfery i z obszaru oddziaływania grawitacyjnego Ziemi rakieta może się dalej wznosić nawet przy wyłączonych silnikach – będzie to ruch jednostajny, zgodnie z I zasadą dynamiki.

ZADANIA TRUDNIEJSZE

114.

a. $617\,\mathrm{N \cdot s}, 108°$;

b. $F_x = 2{,}91 \cdot 10^4\,\mathrm{N}, F_y = 2{,}6 \cdot 10^5\,\mathrm{N}$;

c. $F_x = 5\,850\,\mathrm{N}, F_y = 5\,265\,\mathrm{N}$.

116. Zgodnie z zasadą zachowania pędu: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$. Z danych wynika, że $m_1 = m_2$ oraz $v_1 = u_2$, a $v_2 = u_1 = 0$. Łącząc ze sobą powyższe, otrzymujemy, że $v_1 = v_1$, co jest oczywiście prawdą, zatem zasada zachowania pędu jest spełniona.
Podobnie postępujemy z energią kinetyczną. Gdyby miała być zachowana, oznaczałoby to, że $m_1 v_1^2/2 + m_2 v_2^2/2 = m_1 u_1^2/2 + m_2 u_2^2/2$. Wprowadzając dane dotyczące mas i prędkości otrzymujemy również tautologię, zatem energia kinetyczna jest tu wielkością zachowaną.

118. Jeśli przyjmiemy środek układu współrzędnych na podłodze na osi symetrii (będącej osią y), współrzędne środka masy wynoszą $\left(x_{ŚM}, y_{ŚM}, z_{ŚM} \right) = (0\,\mathrm{cm}, 86\,\mathrm{cm}, 0\,\mathrm{cm})$

ROZDZIAŁ 10

SPRAWDŹ, CZY ROZUMIESZ

10.1.

a. $40{,}0\ \text{obr/s} = 2\pi \cdot 40{,}0\ \text{rad/s}$,
$\bar{\varepsilon} = \Delta\omega / \Delta t = \left(2\pi \cdot 40{,}0\ \text{rad/s} - 0\ \text{rad/s}\right) / \left(20{,}0\ \text{s}\right) = 2\pi \cdot 2{,}0\ \text{rad/s}^2 = 4{,}0\pi\ \text{rad/s}^2$;

b. Ponieważ w ciągu pierwszych 20 s wzrost prędkości kątowej zależy liniowo od czasu, to chwilowe przyspieszenie kątowe w tym zakresie jest stałe, a jego wartość wynosi $4{,}0\pi\ \text{rad/s}^2$.

10.2.

a. Wyraźmy najpierw prędkość kątową w rad/s: $700\ \text{obr/min} = (7000{,}0 \cdot 2\pi\ \text{rad}) / (60\ \text{s}) = 7{,}33\ \text{rad/s}.$. Teraz możemy wyznaczyć wartość przyspieszenia kątowego $\varepsilon = (733{,}0\ \text{rad/s}) / (10{,}0\ \text{s}) = 73{,}3\ \text{rad/s}^2$.

b. Korzystając z równań podanych w Tabeli 10.1 otrzymamy: $\omega^2 = \omega_0 + 2\varepsilon\Delta\theta \implies \Delta\theta = \left(\omega^2 - \omega_0^2\right) / (2\varepsilon) = \left[(0\ \text{rad/s})^2 - (733{,}0\ \text{rad/s})^2\right] / \left(2 \cdot 73{,}3\ \text{rad/s}^2\right) = 3665{,}2\ \text{rad}$.

10.3. Wartość przyspieszenia kątowego wynosi:$\varepsilon = (5{,}0\ \text{rad/s} - 0\ \text{rad/s}) / (20{,}0\ \text{s}) = 0{,}25\ \text{rad/s}^2$, stąd całkowity kąt, o jaki obróci się karuzela z chłopcem, wynosi: $\Delta\theta = \left(\omega^2 - \omega_0^2\right) / 2\varepsilon = \left[(5{,}0\ \text{rad/s})^2 - (0\ \text{rad/s})^2\right] / \left(2 \cdot 0{,}25\ \text{rad/s}^2\right) = 50\ \text{rad}$. Droga, jaką przebędzie chłopiec hest równa $s = r\Delta\theta = 5{,}0\ \text{m} \cdot 50\ \text{rad} = 250\ \text{m}$.

10.4. Początkowa energia kinetyczna ruchu obrotowego śruby była równa: $K_{\text{pocz}} = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 800{,}0\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot (4{,}0\ \text{obr/s} \cdot 2\pi\ \text{rad/obr})^2 = 2{,}53 \cdot 10^5\ \text{J}$.
W chwili $t = 5\ \text{s}$ energia kinetyczna ruchu obrotowego śruby była mniejsza o 50 000 J i wynosiła:
$K_{\text{końc}} = 2{,}03 \cdot 10^5\ \text{J}$,
a stąd wyliczona prędkość kątowa
$\omega = \sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}03 \cdot 10^5\ \text{J}}{800{,}0\ \text{kg} \cdot \text{m}^2}} = 22{,}54\ \text{rad/s},$
czyli 3,58 obr/s.

10.5. $I_{\text{oś równoległa}} = I_{\text{środek masy}} + md^2 = mR^2 + mR^2 = 2mR^2$

10.6. Kąt pomiędzy wektorem położenia punktu A i zastosowaną siłą wynosi 80°. Ramię przyłożonej siły: $r_\perp = 100\ \text{m} \cdot \sin 80^\circ = 98{,}5\ \text{m}$. Iloczyn wektorowy $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ jest ujemny i powoduje obrót w prawo (zgodnie ze wskazówkami zegara). Jego wartość wynosi $M = -r_\perp F = -98{,}5\ \text{m} \cdot 5{,}0 \cdot 10^5\ \text{N} = -4{,}9 \cdot 10^7\ \text{N} \cdot \text{m}$.

10.7.

a. Przyspieszenie kątowe jest równe $\varepsilon = (20{,}0\ \text{obr/s} \cdot 2\pi\ \text{rad/obr}) / (10{,}0\ \text{s}) = 12{,}56\ \text{rad/s}^2$, stąd całkowity moment siły $M = I\varepsilon = 30{,}0\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot 12{,}56\ \text{rad/s}^2 = 376{,}8\ \text{N} \cdot \text{m}$.

b. Przyspieszenie kątowe jest równe: $\varepsilon = (20{,}0\ \text{obr/s} \cdot 2\pi\ \text{rad/obr}) / (20{,}0\ \text{s}) = 6{,}28\ \text{rad/s}^2$, stąd całkowity moment siły $M = I\varepsilon = 30{,}0\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot 6{,}28\ \text{rad/s}^2 = 188{,}5\ \text{N} \cdot \text{m}$.

10.8. 3 MW.

PYTANIA

1. Zgodnie z regułą prawej dłoni, kierunek prędkości kątowej jej ruchu jest prostopadły do ściany i zwrócony w stronę ściany.
3. Wszystkie punkty na kiju mają taką samą prędkość kątową. Punkty dalej położone mają większą prędkość styczną.
5. Linia prosta, zależność liniowa w funkcji czasu.
7. Stałą.
9. Ponieważ wektor przyspieszenia odśrodkowego jest prostopadły do wektora prędkości.
11.

a. Obu.
b. Tylko przyspieszenia kątowego.
c. Obu.

13. Sfera, ponieważ jej masa jest rozłożona dalej od osi obrotu.
15. a. Zmniejszy się, jeżeli za jego moment bezwładności rozumiemy sumę momentów człowieka i dysku. Jeżeli pytamy tylko o moment bezwładności samego człowieka, to pozostanie bez zmiany. b. Ramiona można przybliżyć prętami, a dysk krążkiem. Tułów znajduje się w pobliżu osi obrotu, więc nie ma istotnego wkładu w moment bezwładności.
17. Ponieważ moment bezwładności zmienia się z kwadratem odległości od osi obrotu. Masa pręta usytuowanego w odległości większej niż $L/2$ zapewnia większy wkład do jego momentu bezwładności niż masa w punkcie $L/2$.
19. Wartość siły, długość ramienia siły oraz kąt pomiędzy wektorem siły, a wektorem położenia punktu przyłożenia siły.
21. Moment bezwładności kół jest mniejszy, zatem ten sam moment sił daje większe przyspieszenie.
23. Tak.
25. Wartość $\left|\vec{r}\right|$ może być równa ramieniu siły, ale nigdy nie może być mniejsza niż ramię siły.
27. Jeśli siły leżą wzdłuż osi obrotu lub jeśli mają takie same ramię siły (są przyłożone w tym samym punkcie pręta).

ZADANIA

29. $\omega = (2\pi\ \text{rad}) / (45{,}0\ \text{s}) = 0{,}14\ \text{rad/s}.$
31.

a. $\theta = s/r = (3{,}0\,\text{m}) / (1{,}5\,\text{m}) = 2{,}0\,\text{rad}$;
b. $\omega = \theta/t = (2{,}0\,\text{rad}) / (1{,}0\,\text{s}) = 2{,}0\,\text{rad/s}$;
c. $\varepsilon = v^2/r = (3{,}0\,\text{m/s})^2 / (1{,}5\,\text{m}) = 6{,}0\,\text{m/s}^2$

33. Czas potrzebny do zatrzymania śmigła wynosi $\Delta t = \Delta\omega/\varepsilon = (0\,\text{rad/s} - 2\pi \cdot 10{,}0\,\text{rad/s}) / \left(-2{,}0\,\text{rad/s}^2\right) = 31{,}4\,\text{s}$. Tak więc po 40 sekundach prędkość kątowa śmigła będzie wynosiła 0 rad/s.

35.
a. $\omega = 25{,}0 \cdot 2{,}0\,\text{rad/s} = 50{,}0\,\text{rad/s}$;
b. $\varepsilon = \text{d}\omega/\text{d}t = 25{,}0\,\text{rad/s}^2$.

37.
a. $\omega = 54{,}8\,\text{rad/s}$;
b. $t = 11{,}0\,\text{s}$.

39.
a. $0{,}87\,\text{rad/s}^2$;
b. $\theta = 12\,560\,\text{rad}$

41.
a. $\omega = 42{,}0\,\text{rad/s}$;
b. $\theta = 200\,\text{rad}$;
c. $v_t = 42\,\text{m/s}$, $a_t = 4{,}0\,\text{m/s}^2$

43.
a. $\omega = 7{,}0\,\text{rad/s}$
b. $\theta = 22{,}5\,\text{rad}$
c. $a_t = 0{,}1\,\text{m/s}^2$

45. $\varepsilon = 28{,}6\,\text{rad/s}^2$.

47. $r = 0{,}78\,\text{m}$.

49.
a. $\varepsilon = -0{,}314\,\text{rad/s}^2$;
b. $a_c = 197{,}4\,\text{m/s}^2$;
c. $a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = \sqrt{\left(197{,}4\,\text{m/s}^2\right)^2 + \left(-6{,}28\,\text{m/s}^2\right)^2} = 197{,}5\,\text{m/s}^2$, $\theta = \text{arctg}\left(\frac{-6{,}28}{197{,}4}\right) = -1{,}8^\circ$.

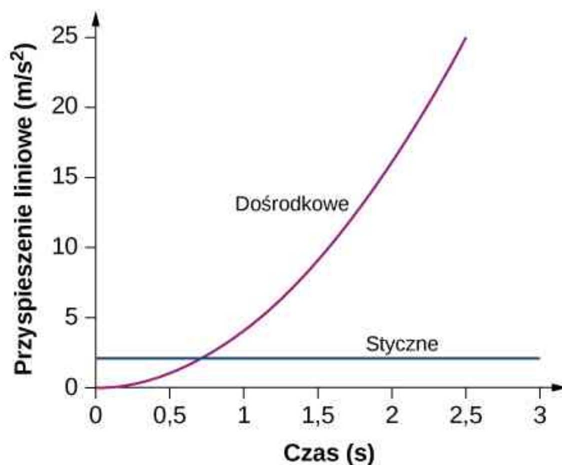
51. Siła odśrodkowa $F_{\text{od}} = 30\,\text{kg} \cdot (3{,}77\,\text{m/s})^2/3\,\text{m} = 142{,}1\,\text{N}$, $ma = 40{,}0\,\text{kg} \cdot 5{,}1\,\text{m/s}^2 = 204{,}0\,\text{N}$. Maksymalna siła tarcia statycznego $\mu_s N = 0{,}6 \cdot 30{,}0\,\text{kg} \cdot 9{,}8\,\text{m/s}^2 = 176{,}4\text{N}$, więc dziecko pozostanie na karuzeli po 5 s.

53. $v_t = r\omega = 2{,}0t\,\text{m/s}$,

$a_c = v_t^2/r = (2{,}0t)^2\,\text{m}/1{,}0\,\text{s}^2 = 4{,}0t^2\,\text{m/s}^2$,

$a_t(t) = r\varepsilon(t) = r\,(\text{d}\omega/\text{d}t) = 2{,}0\,\text{m/s}^2$.

Wykresy przyspieszenia dośrodkowego i stycznego



Przyspieszenie styczne jest stałe, podczas gdy przyspieszenie dośrodkowe zależy od czasu i wzrasta z upływem czasu do wartości znacznie większych niż przyspieszenie styczne po $t = 1\,\text{s}$. W okresach poniżej 0,7 s i zbliżających się do zera przyspieszenie dośrodkowe jest dużo mniejsze niż przyspieszenie styczne.

55.
a. $E_k = 2{,}56 \cdot 10^{29}\,\text{J}$;
b. $E_k = 2{,}68 \cdot 10^{33}\,\text{J}$.

57. $E_k = 434{,}0\,\text{J}$.

58.
a. $v = 86{,}5\,\text{m/s}$;
b. Prędkość kątowa śmigła jest stała i wynosi 20 obr/s.

60. $E_k = 3{,}95 \cdot 10^{42}\,\text{J}$.

62.
a. $I = 0{,}0315\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$.
b. $E_k = 621{,}8\ \text{J}$.

64. $I = \frac{7}{36} mL^2$.
66. $v = 7{,}14\ \text{m/s}$.
68. $\theta = 10{,}2^\circ$.
69. $F = 30\ \text{N}$.
71.
a. $0{,}85\ \text{m} \cdot 55{,}0\ \text{N} = 46{,}75\ \text{N} \cdot \text{m}$;
b. Nie ma znaczenia, na jakiej wysokości naciskasz na drzwi.

73. $M = \frac{4{,}9\ \text{N}\cdot\text{m}}{9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}3\ \text{m}} = 1{,}67\ \text{kg}$.
75. $M_{\text{wyp}} = -9{,}0\ \text{N} \cdot \text{m} + 3{,}46\ \text{N} \cdot \text{m} - 3{,}28\ \text{N} \cdot \text{m} = -8{,}82\ \text{N} \cdot \text{m}$.
77. $M = 5{,}66\ \text{N} \cdot \text{m}$
79. $\sum M = 57{,}82\ \text{N} \cdot \text{m}$.
81. $\vec{r} \times \vec{F} = 4{,}0\ \text{N} \cdot \text{m} \cdot \hat{i} + 2{,}0\ \text{N} \cdot \text{m} \cdot \hat{j} - 16{,}0\ \text{N} \cdot \text{m} \cdot \hat{k}$.
83.
a. $M = 0{,}280\ \text{m} \cdot 180{,}0\ \text{N} = 50{,}4\ \text{N} \cdot \text{m}$;
b. $\varepsilon = 17{,}14\ \text{rad/s}^2$;
c. $\varepsilon = 17{,}04\ \text{rad/s}^2$.

85. $M = 8{,}0\ \text{N} \cdot \text{m}$.
87. $M = -43{,}6\ \text{N} \cdot \text{m}$.
89.
a. $\varepsilon = 1{,}4 \cdot 10^{-10}\ \text{rad/s}^2$;
b. $M = 1{,}36 \cdot 10^{28}\ \text{N} \cdot \text{m}$;
c. $F = 2{,}1 \cdot 10^{21}\ \text{N}$.

91. $a = 3{,}6\ \text{m/s}^2$.
93.
a. $a = r\varepsilon = 14{,}7\ \text{m/s}^2$;
b. $a = (L/2)\ \varepsilon = (3/4)\ g$.

95. $M = \frac{P}{W} = \frac{2{,}0 \cdot 10^6\ \text{W}}{2{,}1\ \text{rad/s}} = 9{,}5 \cdot 10^5\ \text{N} \cdot \text{m}$.
97.
a. $E_k = 888{,}50\ \text{J}$;
b. $\Delta\theta = 294{,}6\ \text{obr}$.

99.
a. $I = 114{,}6\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$;
b. $P = 104{,}700\ \text{W}$.

101. $v = L\omega = \sqrt{3Lg}$
103.
a. $a = 5{,}0\ \text{m/s}^2$;
b. $W = 1{,}25\ \text{N} \cdot \text{m}$.

ZADANIA DODATKOWE

105. $\Delta t = 10{,}0\ \text{s}$,
107.
a. $\varepsilon = 0{,}06\ \text{rad/s}^2$;
b. $\theta = 105{,}0\ \text{rad}$.

109. $s = 405{,}26\ \text{m}$.
111.
a. $I = 0{,}363\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$;
b. $I = 2{,}34\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$

113. $\omega = \sqrt{\frac{5{,}36\ \text{J}}{4{,}4\ \text{kg}\cdot\text{m}^2}} = 1{,}10\ \text{rad/s}$.
115. $F = 23{,}3\ \text{N}$.
117. $\varepsilon = \frac{190{,}0\ \text{N}\cdot\text{m}}{2{,}94\ \text{kg}\cdot\text{m}^2} = 64{,}4\ \text{rad/s}^2$.

ZADANIA TRUDNIEJSZE

119.
a. $\omega = \left(2{,}0t - 1{,}5t^2\right)\ \text{rad/s}$;
b. $\theta = \left(t^2 - 0{,}5t^3\right)\ \text{rad}$;
c. $\theta(10\ \text{s}) = -400{,}0\ \text{rad}$;

d. wektor wskazuje kąt $-0{,}66 \cdot 360^\circ = -237{,}6^\circ$.

121. $I = \frac{2}{5}mR^2$

123.

a. $\omega = 8{,}2\ \text{rad/s}$;
b. $\omega = 8{,}0\ \text{rad/s}$.

ROZDZIAŁ 11

SPRAWDŹ, CZY ROZUMIESZ

11.1. (a) Warunek na brak poślizgu ma postać$\mu_s \geqslant \frac{\text{tg}\,\theta}{1 + mr^2/I_{ŚM}}$. Podstawiając wartość kąta i zauważywszy, że dla cylindra $I_{ŚM} = mr^2$, mamy $\mu_s \geqslant \frac{\text{tg}\,\theta}{1 + mr^2/I_{ŚM}} = \frac{1}{2}\text{tg}\,60^\circ = 0{,}87$, ponieważ dana jest wartość współczynnika tarcia 0,6, która jest mniejsza, niż 0,87, to warunek nie jest spełniony i cylinder będzie się ślizgał.
(b) Dla walca warunek na brak poślizgu ma postać $\mu_s \geqslant \frac{1}{3}\text{tg}\,60^\circ = 0{,}58$ Wartość 0,6 spełnia ten warunek, a więc walec nie wpadnie w poślizg.

11.2. Z rysunku widać, że iloczynem wektora wodzącego i wektora pędu jest wektor skierowany przed kartkę (do nas). Wstawiając wartości wektora wodzącego i pędu do wyrażenia na moment pędu, otrzymujemy $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = \left(0{,}4\ \text{m} \cdot \hat{i}\right) \times \left(1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot 4{,}0 \cdot 10^6\ \text{m/s} \cdot \hat{j}\right) = 2{,}7 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \cdot \hat{k}$.

11.3. $I_{\text{kula}} = \frac{2}{5}mr^2$, $I_{\text{walec}} = \frac{1}{2}mr^2$; Licząc stosunek momentów pędów, otrzymujemy:$L_{\text{walec}}/L_{\text{kula}} = I_{\text{walec}}\omega_0/(I_{\text{kula}}\omega_0) = \frac{1}{2}mr^2/\left(\frac{2}{5}mr^2\right) = \frac{5}{4}$. Zatem walec ma o 25% większy moment pędu. Jest tak dlatego, gdyż ma on więcej masy rozmieszczonej dalej od osi obrotu.

11.4. Korzystając z zasady zachowania momentu pędu otrzymujemy
$I \cdot 4.0\ \text{obr/min} = 1{,}25 I\omega_f \implies \omega_f = \frac{1{,}0}{1{,}25} \cdot 4{,}0\ \text{obr/min} = 3{,}2\ \text{obr/min}$.

11.5. Przyspieszenie grawitacyjne na Księżycu wynosi 1/6 tego co na Ziemi. Z równania widzimy, że prędkość kątowa precesji jest proporcjonalna do przyspieszenia ziemskiego. Wszystkie pozostałe wielkości: masa, moment bezwładności i prędkość kątowa wokół osi żyroskopu są takie same na Księżycu. Tak więc prędkość kątowa precesji na Księżycu jest równa $\omega_p\,(\text{Księżyca}) = \frac{1}{6}\omega_p\,(\text{Ziemi}) = \frac{1}{6} \cdot 5{,}0\ \text{rad/s} = 0{,}83\ \text{rad/s}$.

PYTANIA

1. Nie, gdyż siła tarcia statycznego jest równa zero.

3. Bardziej prawdopodobne jest, że koło wpadnie w poślizg na stromym zboczu, ponieważ aby siła tarcia statycznego mogła utrzymać ruch toczny bez poślizgu, współczynnik tarcia musi się zwiększać wraz z kątem jego nachylenia.

5. Walec osiągnie większą wysokość. Można to wykazać na dwa sposoby. Ze względu na większy moment bezwładności walca:

I. Wartość bezwzględna jego przyspieszenia (jego opóźnienie) jest mniejsza, w związku z czym przy tej samej prędkości początkowej przebędzie on większą drogę, czyli osiągnie większą wysokość.
II. Początkowa (całkowita) energia kinetyczna walca jest większa, większa więc musi być jego końcowa energia potencjalna, czyli większa musi być wysokość.

7. Dla wszystkich punktów na prostej otrzymujemy zerowy moment pędu, ponieważ iloczyn dwóch wektorów równoległych (położenia i pędu) jest równy zero.

9. Cząstka musi się poruszać po linii prostej, która przechodzi przez wybrany początek układu.

11. Bez tego małego śmigła korpus śmigłowca obracałby się w przeciwnym kierunku do dużego śmigła w celu zachowania momentu pędu. Ruch małego śmigła jest źródłem siły, przyłożonej w odległości r od środka masy helikoptera, co zapobiega niepożądanemu obrotowi korpusu śmigłowca.

13. Prędkość kątowa zwiększa się, ponieważ moment bezwładności maleje.

15. Dlatego, że więcej masy gromadzi się w pobliżu osi obrotu gwiazdy, co zmniejsza moment bezwładności i powoduje zwiększenie jej prędkości kątowej.

17. Aby zmienić moment pędu żyroskopu (kręt), potrzebny jest moment sił w kierunku do niego prostopadłym. Ale siły działające na pojazd są siłami działającymi na zewnątrz pojemnika, w którym zamontowany jest żyroskopm i nie działają na oś obracającego się żyroskopu.

ZADANIA

19. $v_{ŚM} = R\omega \implies 66{,}7\ \text{rad/s}$.

21. $\varepsilon = 3{,}3\ \text{rad/s}^2$.

23.

a. $I_{ŚM} = \frac{2}{5}mr^2$, $a_{ŚM} = 3{,}5\ \text{m/s}^2$;
b. $x = 15{,}75\ \text{m}$.

25. Wybieramy kierunek dodatni ruchu w dół pochylni. Mamy:$a_{ŚM} = \frac{mg\sin\theta}{m + I_{ŚM}/r^2} \implies I_{ŚM} = r^2\left(\frac{mg\sin 30^\circ}{a_{ŚM}} - m\right)$,

$x - x_0 = v_0 t - \frac{1}{2} a_{ŚM} t^2 \implies a_{ŚM} = 2{,}96\,\mathrm{m/s^2}$,
$I_{ŚM} = 0{,}66 mr^2$.
27. $\varepsilon = 67{,}9\,\mathrm{rad/s^2}$,$\left(a_{ŚM}\right)_x = 1{,}5\,\mathrm{m/s^2}$.
29. $W = -1080{,}0\,\mathrm{J}$,
znak minus mówi, że siła hamująca walec jest przeciwna do jego kierunku ruchu.
31. Energia mechaniczna na dole jest równa energii mechanicznej u góry:$\frac{1}{2} mv_0^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} mr^2\right) \cdot \left(\frac{v_0}{r}\right)^2 = mgh \implies h = \frac{1}{g}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) v_0^2$,
Po podstawieniu otrzymujemy $h = 7{,}7\,\mathrm{m}$; tak więc maksymalna odległość przebyta przez walec wynosi 22,5 m.
33. Z zasady zachowania energii mechanicznej dla kuli i walca
$\frac{1}{2} mv_0^2 + \frac{1}{2} I_{\mathrm{Cylinder}} \omega_0^2 = mgh_{\mathrm{cylinder}}$,
$\frac{1}{2} mv_0^2 + \frac{1}{2} I_{\mathrm{sfera}} \omega_0^2 = mgh_{\mathrm{sfera}}$.
Odjęcie stronami tych dwóch równań, eliminuje początkową energię translacyjną (ruchu postępowego) i mamy:
$\frac{1}{2} I_{\mathrm{cylinder}} \omega_0^2 - \frac{1}{2} I_{\mathrm{sfera}} \omega_0^2 = mg\left(h_{\mathrm{cylinder}} - h_{\mathrm{sfera}}\right)$,
$\frac{1}{2} mr^2 \left(\frac{v_0}{r}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{2}{3} mr^2 \left(\frac{v_0}{r}\right)^2 = mg\left(h_{\mathrm{cylinder}} - h_{\mathrm{sfera}}\right)$,
$\frac{1}{2} v_0^2 - \frac{1}{2}\frac{2}{3} v_0^2 = g\left(h_{\mathrm{cylinder}} - h_{\mathrm{sfera}}\right)$,$h_{\mathrm{cylinder}} - h_{\mathrm{sfera}} = \frac{1}{g}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) v_0^2 = \frac{1}{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}} \cdot \frac{1}{6} \cdot (5{,}0\,\mathrm{m/s})^2 = 0{,}43\,\mathrm{m}$.
W ten sposób sfera o mniejszym momencie bezwładności wtoczy się na wysokość mniejszą o $1{,}0\,\mathrm{m} - 0{,}43\,\mathrm{m} = 0{,}57\,\mathrm{m}$.
35. Wartość iloczynu wektorowego wektora położenia i pędu ptaka wynosi $rp \sin\theta$, gdzie $r \sin\theta$ jest wysokością, na której znajduje się ptak. Kierunek momentu pędu jest prostopadły do wektorów promienia wodzącego i pędu, który to, zgodnie z treścią zadania, określony jest przez, wybrany dowolnie, kierunek $\widehat{k}$ (dodatni kierunek osi z).
$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = hmv\hat{k} = 300{,}0\,\mathrm{m} \cdot 2{,}0\,\mathrm{kg} \cdot 20{,}0\,\mathrm{m/s} \cdot \hat{k} = 12\,000{,}0\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m^2/s} \cdot \hat{k}$.
37. a. $\vec{l} = 45{,}0\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m^2/s} \cdot \hat{k}$;
b. $\vec{M} = 10{,}0\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m} \cdot \hat{k}$.
39. (a) $\vec{l}_1 = -0{,}4\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m^2/s} \cdot \hat{k}$,
$\vec{l}_2 = \vec{l}_4 = \vec{0}$,
$\vec{l}_3 = 1{,}35\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m^2/s} \cdot \hat{k}$;
(b) $\vec{L} = 0{,}95\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m^2/s} \cdot \hat{k}$.
41. a. $L = 1{,}0 \cdot 10^{11}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m^2/s}$;
b. Nie, moment pędu pozostanie taki sam, ponieważ ramię pędu (równe co do wartości wysokości samolotu nad ziemią) jest cały czas takie samo, bez względu na to, w którym miejscu znajduje się samolot na swoim torze ruchu.
43. a. $\vec{v} = -gt\hat{j}$, $\vec{r}_\perp = -d\hat{i}$, $\vec{l} = mdgt\hat{k}$;
b. $\vec{F} = -mg\hat{j}$, $\sum \vec{M} = dmg\hat{k}$;
c. Tak.
45. Zakładając, że możemy przybliżyć kształt głazu pełną kulą:
a. $mgh = \frac{1}{2} m(r\omega)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} mr^2 \omega^2$,
$\omega = 51{,}2\,\mathrm{rad/s}$,
$L = 16{,}4\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m^2/s}$;
b. $\omega = 72{,}5\,\mathrm{rad/s}$;
$L = 23{,}2\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m^2/s}$.
47. a. $I = 720{,}0\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m^2}$; $\varepsilon = 4{,}20\,\mathrm{rad/s^2}$;
$\omega(10\,\mathrm{s}) = 42{,}0\,\mathrm{rad/s}$; $L = 3{,}02 \cdot 10^4\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m^2/s}$;
$\omega(20\,\mathrm{s}) = 84{,}0\,\mathrm{rad/s}$;
b. $M = 3{,}03 \cdot 10^3\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$.
49. a. $L = 1{,}131 \cdot 10^7\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m^2/s}$;
b. $M = 3{,}77 \cdot 10^4\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$.
51. $\omega = 28{,}6\,\mathrm{rad/s} \implies L = 2{,}6\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m^2/s}$.
53.
$$L = \frac{2}{5} M_S \cdot \left(3{,}5 \cdot 10^3\,\mathrm{km}\right)^2 \cdot \frac{2\pi}{T}, \left(7{,}0 \cdot 10^5\,\mathrm{km}\right)^2 \cdot \frac{2\pi}{28\,\mathrm{dni}} = \left(3{,}5 \cdot 10^3\,\mathrm{km}\right)^2 \cdot \frac{2\pi}{T} \implies T = 28\,\mathrm{dni} \cdot \frac{\left(3{,}5 \cdot 10^3\,\mathrm{km}\right)^2}{\left(7{,}0 \cdot 10^5\,\mathrm{km}\right)^2} = 7{,}0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{dnia} =$$
55. $f_1 = 2{,}1\,\mathrm{obr/s} \implies f_0 = 0{,}5\,\mathrm{obr/s}$.
57. $r_P mv_P = r_A mv_A \implies v_P = 18{,}3\,\mathrm{km/s}$.
59. a. $I_{\mathrm{tarczy}} = 5{,}0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m^2}$,$I_{\mathrm{robaka}} = 2{,}0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m^2}$,$\left(I_{\mathrm{tarczy}} + I_{\mathrm{robaka}}\right) \omega_1 = I_{\mathrm{tarczy}} \omega_2$,$\omega_2 = 14{,}0\,\mathrm{rad/s}$ .b. $\Delta K = 0{,}014\,\mathrm{J}$;

c. $\omega_3 = 10{,}0\,\mathrm{rad/s}$ powrót do początkowej wartości,
d. $\frac{1}{2}\left(I_{\text{tarczy}} + I_{\text{robaka}}\right)\omega_3^2 = 0{,}035\,\mathrm{J}$ powrót do początkowej wartości.
e. praca wykonana przez robaka poruszającego się po dysku.
61. $L_1 = 400{,}0\,\mathrm{kg \cdot m^2/s}$,
$L_2 = 500{,}0\,\mathrm{kg \cdot m^2} \cdot \omega$,
$\omega = 0{,}80\,\mathrm{rad/s}$.
63. $I_1 = 340{,}48\,\mathrm{kg \cdot m^2}$,
$I_2 = 268{,}8\,\mathrm{kg \cdot m^2}$,
$f = 25{,}33\,\mathrm{obr/min}$.
65. a. $L_1 = 280\,\mathrm{kg \cdot m^2/s}$,
$I_2 = 89{,}6\,\mathrm{kg \cdot m^2}$,
$\omega_2 = 3{,}125\,\mathrm{rad/s}$;
b. $K_1 = 437{,}5\,\mathrm{J}$,
$K_2 = 437{,}5\,\mathrm{J}$.
67. Moment bezwładności podczas wykonywania rekordowych obrotów:
$I_1 = 0{,}5\,\mathrm{kg \cdot m^2}$,
A po wyciągnięciu rąk:
$I_2 = 1{,}1\,\mathrm{kg \cdot m^2}$,
$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_0 \implies f_2 = 155{,}5\,\mathrm{obr/min}$.
69. Jej szybkość (częstotliwość) wirowania wynosi: $f_2 = 2{,}0\,\mathrm{obr/s}$;
Gimnastyczka w powietrzu robi cztery obroty.
71. Moment bezwładności wszystkich dzieci:
$I_1 = 2{,}4 \cdot 10^5\,\mathrm{kg \cdot m^2}$;
$I_2 = 1{,}5 \cdot 10^5\,\mathrm{kg \cdot m^2}$;
$f_2 = 0{,}3\,\mathrm{obr/s}$.
73. $I_1 = 1{,}00 \cdot 10^{10}\,\mathrm{kg \cdot m^2}$,
$I_2 = 9{,}94 \cdot 10^9\,\mathrm{kg \cdot m^2}$,
$f_2 = 3{,}32\,\mathrm{obr/min}$.
75. $I = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg \cdot m^2}$,
$\omega_p = 0{,}78\,\mathrm{rad/s}$.
77. a. $L_{\text{Ziemi}} = 7{,}06 \cdot 10^{33}\,\mathrm{kg \cdot m^2/s}$,
$\Delta L = 5{,}63 \cdot 10^{33}\,\mathrm{kg \cdot m^2/s}$;
b. $M = 1{,}38 \cdot 10^{22}\,\mathrm{N \cdot m}$;
c. $F = 1{,}08 \cdot 10^{15}\,\mathrm{N}$.

ZADANIA DODATKOWE

79. a. $a_{\text{ŚM}} = -\frac{3}{10}g$,
$v^2 = v_0^2 + 2a_{\text{ŚM}} \implies v^2 = (7{,}0\,\mathrm{m/s})^2 - 2 \cdot \frac{3}{10}g \cdot x$, $v^2 = 0 \implies x = 8{,}34\,\mathrm{m}$;
b. $t = \frac{v - v_0}{a_{\text{ŚM}}}$, $v = v_0 + a_{\text{ŚM}}t \implies t = 2{,}38\,\mathrm{s}$;
Wydrążona kula ma większy moment bezwładności, a więc mniejszą wartość przyspieszenia niż kula pełna. Dlatego przebyta przez nią odległość jest teraz większa, a czasm jaki upłynąłm jest dłuższy niż pełnej kuli.
81. a. $W = -500{,}0\,\mathrm{J}$;
b. $K = U_{\text{graw}} = \text{constant}$,
$500\,\mathrm{J} + 0\,\mathrm{J} = 0 + 6{,}0\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{m/s^2} \cdot h$,
$h = 8{,}5\,\mathrm{m}$, $d = 17{,}0\,\mathrm{m}$;
Moment bezwładności jest mniejszy dla wydrążonej kuli niż dla obręczy, w związku z czym mniej pracy potrzeba, aby ją zatrzymać. Podobnie przebyta przez nią droga jest krótsza niż obręczy.
83. a. $M = 34{,}0\,\mathrm{N \cdot m}$;
b. $l = mr^2\omega \implies \omega = 3{,}6\,\mathrm{rad/s}$.
85. a. $d_K = 3{,}85 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$ – średnia odległość do Księżyca;
$27{,}32\,\text{dnia} = 2{,}36 \cdot 10^6\,\mathrm{s}$ – okres obiegu po orbicie okołoziemskiej;
$\frac{2\pi \cdot 3{,}85 \cdot 10^8\,\mathrm{m}}{2{,}36 \cdot 10^6\,\mathrm{s}} = 1{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{m/s}$ – orbitalna szybkość Księżyca;
$7{,}35 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$ – masa Księżyca;
$L = 2{,}90 \cdot 10^{34}\,\mathrm{kg \cdot m^2/s}$ – orbitalny moment pędu Księżyca;
b. $R_K = 1{,}74 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$ – promień Księżyca;
okres obiegu po orbicie jest taki sam jak w (a);
$\omega = 2{,}66 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{rad/s}$;
$L = 2{,}37 \cdot 10^{29}\,\mathrm{kg \cdot m^2/s}$ – moment pędu Księżyca związany z obrotem wokół własnej osi. Orbitalny moment pędu jest

$1{,}22 \cdot 10^5$ razy większy od momentu pędu Księżyca związanego z obrotem wokół własnej osi.

87. $I = 0{,}135\ \mathrm{kg \cdot m^2}$,
$\varepsilon = 4{,}19\ \mathrm{rad/s^2}$, $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$,
$\omega(5\ \mathrm{s}) = 21{,}0\ \mathrm{rad/s}$, $L = 2{,}84\ \mathrm{kg \cdot m^2/s}$,
$\omega(10\ \mathrm{s}) = 41{,}9\ \mathrm{rad/s}$, $L = 5{,}66\ \mathrm{kg \cdot m^2/s}$.

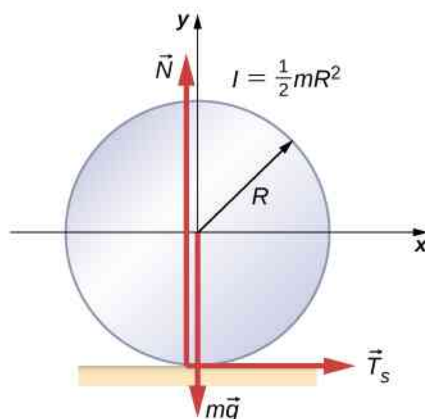
89. W równaniu na zasadę zachowania momentu pędu, przed i po połączeniu, po obu stronach pojawia się częstotliwość obrotów, więc zamiast prędkości kątowej można zachować (obr/min), gdyż jest ona równa prędkości kątowej pomnożonej przez stałą wartość. $L_1 = -0{,}04\ \mathrm{kg \cdot m^2} \cdot 300{,}0\ \mathrm{obr/min}$, $L_2 = 0{,}04\ \mathrm{kg \cdot m^2} \cdot 600{,}0\ \mathrm{obr/min}$, $\omega = 150{,}0\ \mathrm{obr/s}$, w prawo zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

91. $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$,
$I_1 = 6\,120{,}0\ \mathrm{kg \cdot m^2}$,
$I_1 = 1\,180{,}0\ \mathrm{kg \cdot m^2}$,
$\omega_2 = 31{,}1\ \mathrm{obr/min}$.

93. $L_1 = 1{,}00 \cdot 10^6\ \mathrm{kg \cdot m^2/s}$,
$L_1 = 3{,}35 \cdot 10^4\ \mathrm{kg \cdot m^2/s}$,
$f_2 = 4{,}35\ \mathrm{obr/s}$.

ZADANIA TRUDNIEJSZE

95. Załóżmy, że rola przyspiesza do przodu w stosunku do ziemi z przyspieszeniem a' , to względem ciężarówki przyspiesza ona do tyłu z przyspieszeniem $a - a'$.



Ale ponieważ
$R\varepsilon = a - a'$, $I = \frac{1}{2}mR^2$, $\sum F_x = T_s = ma'$,
$\sum M = T_s R = I\varepsilon = I\frac{a-a'}{R}$, $T_s = \frac{I}{R^2}\left(a - a'\right) = \frac{1}{2}m\left(a - a'\right)$.
Rozwiązując ze względu na a' :
$T_s = \frac{1}{2}m\left(a - a'\right)$, $a' = \frac{a}{3}$,
$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, $d = \frac{1}{3}at^2$, $t = \sqrt{\frac{3d}{a}}$,
Stąd, $s = 1{,}5d$

97. Składowa pozioma siły naprężenia sznurka daje siłę dośrodkową, taką że $T \sin\theta = mr_\perp\omega^2$. Składowa pionowa siły naprężenia sznurka równoważy siłę grawitacji $T\cos\theta = mg$. Daje to $T = 5{,}7\ \mathrm{N}$, a stąd odległość kulki od pręta wynosi $r_\perp = 0{,}16\ \mathrm{m}$, długość sznurka jest równą $r = 0{,}32\ \mathrm{m}$. Dla $\omega = 10{,}0\ \mathrm{rad/s}$ mamy nowy kąt odchylenia sznurka, jego siłę naprężenia oraz odległość kulki od pręta. Podzielenie stronami dwóch równań pozwala wyeliminować naprężenie sznurka, stąd otrzymujemy

a. $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{0{,}32\ \mathrm{m} \cdot \sin\theta \cdot \omega^2}{g} \implies \frac{1}{\cos\theta} = \frac{0{,}32\ \mathrm{m} \cdot \omega^2}{g}$,
$\cos\theta = 0{,}31 \implies \theta = 72{,}2°$;
b. $L_{pocz} = 0{,}08\ \mathrm{kg \cdot m^2/s}$.
$L_{końcowa} = 0{,}46\ \mathrm{kg \cdot m^2/s}$.
c. Nie, cosinus kąta jest odwrotnie proporcjonalny do kwadratu prędkości kątowej, dlatego aby $\theta \to 90°$, $\omega \to \infty$, a to znaczy, że pręt musiałby kręcić się nieskończenie szybko.

ROZDZIAŁ 12

SPRAWDŹ, CZY ROZUMIESZ

12.1. $x = 1{,}3\ \mathrm{m}$

12.2. (b), (c)
12.3. 316,7 g; 5,8 N
12.4. $N = 2110$ N; F = 1894 N
12.5. $\mu_s < 0{,}5\ \mathrm{ctg}\ \beta$
12.6. $\vec{F}_{\text{drzwi na}A} = 100\,\mathrm{N} \cdot \hat{i} - 200\,\mathrm{N} \cdot \hat{j}$, $\vec{F}_{\text{drzwi na}B} = -100\,\mathrm{N} \cdot \hat{i} - 200\,\mathrm{N} \cdot \hat{j}$
12.7. 711 N; 466 N
12.8. 1167 N; 980 N skierowane ku górze 18° ponad poziom.
12.9. 207 kPa; $4{,}6 \cdot 10^{-6}$
12.10. $5 \cdot 10^{-4}$
12.11. 63 ml
12.12. Płyny mają inne właściwości mechaniczne niż ciała stałe; ciecze płyną

PYTANIA

1. jest stała
3. wartość i kierunek siły oraz ramię siły
5. To prawda, ponieważ suma sił nie może wynosić zero w tym przypadku, chyba że siła jest równa zero.
7. Fałsz, pod warunkiem, że siły sumują się do zera jako wektory, wtedy można osiągnąć równowagę.
9. Pomaga linoskoczkowi utrzymać równowagę.
11. (Udowodnij)
13. W kontakcie z ziemią naprężenie w kończynach wiewiórki jest mniejsze niż naprężenie w ludzkich kończynach.
15. mocno naciągnięty
17. ściskające; rozciągające
19. nie
23. Działa jak "zbrojenie", zwiększając zakres wartości naprężenia, zanim struktura osiągnie punkt zerwania.

ZADANIA

25. 46,75 N · m
27. 4472 N pod kątem 153,4° do poziomu (osi x)
29. 23,3 N
31. 80 kg
33. 40 kg
35. prawa lina 444,72 N; lewa lina 889,44 N; ciężar sprzętu 156,96 N; 16 kg
37. 784,8 N; 132,95 N
39.

- a. 539,55 N;
- b. 461,07 N;
- c. nie zależą od kąta

41. naprężenie 777 N; na zawiasie 777 N pod kątem 45° względem poziomu; nie
43. 1500 N; 1620 N pod kątem 30° do podłogi
45. 0,3 mm
47. 9 cm
49. $4 \cdot 10^2$ N/cm ^{2}
51. 0,149 μm
53. 0,57 mm
55. 8,59 mm
57. $1{,}35 \cdot 10^9$ Pa
59. 259 N
61. 0,01%
63. 1,44 cm
65. 0,63 cm

ZADANIA DODATKOWE

69. $\mathrm{arctg}(1/\mu_s) = 51,3^\circ$
71. a. na narożniku 66,7 N pod kątem 30° do poziomu; na podłodze 192,4 N pod kątem 60° do poziomu; b. $\mu_s = 0{,}577$
73.

a. $1{,}1 \cdot 10^9\ \mathrm{N/m^2}$;
b. $5{,}5 \cdot 10^{-3}$;
c. 11 mm, 31,4 mm

ZADANIA TRUDNIEJSZE

75. $F = Mg\ \mathrm{tg}\theta; f = 0$
77. z poziomem $\theta = 42,2^\circ$ oraz $\alpha = 17,8^\circ$ ze stromą stroną równi.
79. $F_t(l_1/l_2 - 1); F_t\, l_1/l_2 + mg$
81.

a. 1,1 mm;

b. 6,6 mm w prawo;
c. $1{,}11 \cdot 10^5$ N

ROZDZIAŁ 13

SPRAWDŹ, CZY ROZUMIESZ

13.1. Siła grawitacji działająca na każdy z pojazdów ze strony drugiego wzrasta, z odwrotnością kwadratu odległości między nimi, gdy zbliżają się do siebie. Podobnie dzieje się z przyspieszeniem. Na przykład, jeżeli odległość między pojazdami zmniejszy się o połowę, siła grawitacji i przyspieszenie wzrosną czterokrotnie. Nasza średnia jest dokładna tylko dla liniowo rosnącego przyspieszania, podczas gdy przyspieszenie w rzeczywistości rośnie szybciej. Więc oszacowana przez nas prędkość jest zaniżona. Z trzeciego prawa dynamiki Newtona wynika, że siły grawitacji między dowolnymi dwoma ciałami muszą być takie same (akcja = reakcja). Natomiast przyspieszenie każdego z ciał byłoby różne, w przypadku gdyby miały one różne masy.
13.2. Nawet najwyższe budynki na świecie mają wysokość mniejszą niż 1 km. Wartość g jest proporcjonalna do kwadratu odległości od środka Ziemi. Z prostej proporcji możemy obliczyć, że zmiana g na wysokości 1 km ponad powierzchnią Ziemi jest mniejsza niż 0,0001% w stosunku do wartości przy samej powierzchni naszej planety. W związku z tym nie ma potrzeby uwzględniać tej zmiany przy projektowaniu konstrukcji wysokich budynków.
13.3. Wartość g maleje o około 10% przy takiej zmianie wysokości. W związku z tym wyrażenie $\Delta U = mg(y_2 - y_1)$ da zawyżoną wartość zmiany energii potencjalnej. Jeśli podstawimy w nim stałą wartość $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s}$, otrzymamy: $\Delta U = mg(y_2 - y_1) = 3{,}53 \cdot 10^{10}\,\mathrm{J}$, czyli wartość zawyżoną o około 6% w porównaniu do poprawnej metody.
13.4. Sonda musi przezwyciężyć zarówno przyciąganie grawitacyjne Ziemi, jak i Słońca. W drugim obliczeniu, w powyższym przykładzie, wyznaczyliśmy prędkość ucieczki konieczną do pokonania grawitacji Słońca z odległości równej orbicie Ziemi, a nie z samej powierzchni Ziemi. Właściwym sposobem na znalezienie tej wartości jest zacząć od Równanie 13.5, w którym uwzględnilibyśmy składniki energii potencjalnej zarówno Ziemi, jak i Słońca.
13.5. Zmienisz kierunek swojej prędkości za pomocą siły, która jest prostopadła do prędkości w każdym punkcie toru lotu. W efekcie, trzeba stale dostosowywać silniki statku, tworząc siłę dośrodkową, aż twój pęd zmieni się ze stycznego do radialnego. Z prostego diagramu wektora pędu wynika, że wypadkowa zmiana pędu jest równa $\sqrt{2}$ razy wartość samego pędu. Okazuje się, że jest to bardzo nieefektywny sposób na dotarcie na Marsa. Najbardziej efektywny sposób omówimy w podrozdziale Prawa Keplera.
13.6. W Równaniu 13.7 promień występuje w mianowniku pod pierwiastkiem kwadratowym. Tak więc promień musi wzrosnąć czterokrotnie, aby prędkość zmalała dwukrotnie. Wówczas obwód orbity także zwiększy się czterokrotnie, więc przy dwukrotnym zmniejszeniu prędkości orbitalnej, okres obiegu wydłuża się osiem razy. Wynika to także bezpośrednio z Równania 13.8.
13.7. Zakłada się, że orbitujące ciało jest znacznie mniej masywne niż ciało, wokół którego ono krąży. Nie jest to spełnione w przypadku Księżyca i Ziemi. Zarówno Ziemia, jak i Księżyc krążą wokół ich wspólnego środka masy. Rozwiążemy takie zagadnienie w następnym przykładzie.
13.8. Gwiazdy na obrzeżach galaktyki znajdują się bliżej innych galaktyk, a tym samym odczuwają większą siłę grawitacji pochodzącą od nich niż gwiazdy wewnętrzne. Zewnętrzne gwiazdy galaktyk będą więc miały większe przyspieszenie w kierunku innych galaktyk. Ponadto gwiazdy wewnętrzne znajdują się na orbitach wokół środka galaktyki o mniejszym promieniu niż gwiazdy zewnętrzne, a więc w konsekwencji galaktyka wydłuża się i rozciąga. Różnica sił grawitacyjnych pochodzących od innych galaktyk jeszcze zwiększa ten efekt.
13.9. Długość półosi wielkiej, dla bardzo spłaszczonej eliptycznej orbity komety Halleya, wynosi 17,8 j.a.. Wartość ta leży pomiędzy długościami promieni orbit 9,5 j.a. i 19 j.a., odpowiednio Saturna i Urana. Promień w przypadku orbity kołowej odpowiada półosi wielkiej dla orbity eliptycznej. Ponieważ okres orbitalny rośnie wraz ze wzrostem długości półosi wielkiej, należy oczekiwać, że wartość okresu obiegu Słońca przez kometę Halleya leży pomiędzy okresami orbitalnymi Saturna i Urana. Tak jest w rzeczywistości.
13.10. Rozważmy ostatnie równanie powyżej. Wartości r_1 i r_2 pozostają prawie takie same, ale średnica Księżyca $(r_2 - r_1)$ jest równa jednej czwartej średnicy Ziemi. Siły pływowe na Księżycu są więc o jedną czwartą mniejsze niż na Ziemi.
13.11. Biorąc pod uwagę niezwykle dużą gęstość potrzebną, by ścisnąć ciało wielkości Ziemi do czarnej dziury, nie spodziewamy się we Wszechświecie tak małych czarnych dziur. Nawet ciało z masą naszego Słońca musiało być sprasowane do gęstości 80 razy większej od gęstości gwiazdy neutronowej. Uważa się, że gwiazdy tej wielkości nie mogą stać się czarnymi dziurami. Jednak gwiazdy o masach równych kilku masom Słońca mogą zapaść się pod wpływem własnej grawitacji do czarnej dziury pod koniec swego życia. Jak pokażemy później, uważa się, że czarne dziury powszechnie występują w centrach galaktyk. Te galaktyczne czarne dziury mają zwykle masę wielu milionów gwiazd.

PYTANIA

1. Za ostateczny wyznacznik prawdy uznaje się zgodność z doświadczeniem. Teoria pola została opracowana, aby wyjaśnić, w jaki sposób siła wywierana jest przez ciała niebędące w fizycznym kontakcie. Dotyczy to zarówno siły grawitacji, jak i sił elektrostatycznych oraz magnetycznych, które oddziałują z prędkością światła. Dopiero od XX wieku jesteśmy w stanie stwierdzić, że oddziaływanie nie jest przekazywane natychmiastowo.
3. Przyspieszenie dośrodkowe wynikające z ruchu obrotowego Ziemi nie jest skierowane równolegle do kierunku działania siły grawitacji. Dlatego prawidłowa linia pionu budynku nie jest skierowana w kierunku środka Ziemi równolegle do jej promienia. Jednak inżynierowie używają poziomic lub niwelatorów geodezyjnych, które reagują zarówno na działanie siły grawitacji, jak i siły dośrodkowej. Nie muszą więc zwracać szczególnej uwagi na to, w jakim punkcie na powierzchni Ziemi jest wznoszony budynek.
5. Gdy przemieszczamy się na dalsze orbity, coraz większa część energii potencjalnej zamienia się w energię kinetyczną,

podczas gdy prędkość orbitalna maleje. W związku z tym współczynnik ten jest największy w pobliżu powierzchni Ziemi (teoretycznie jest on nieskończenie duży gdybyśmy krążyli na samej powierzchni Ziemi, bez zmiany wysokości), malejąc do zera, gdy docieramy nieskończenie daleko od Ziemi.
7. Okres obiegu orbity musi wynosić 24 godziny. Dodatkowo, satelita musi być umieszczony ponad równikiem i krążyć w tym samym kierunku, w jakim obraca się Ziemia. Wszystkie trzy kryteria muszą być spełnione, by satelita pozostawał w stałym położeniu względem powierzchni Ziemi. Potrzebne są co najmniej trzy satelity, gdyż dwa satelity po przeciwnych stronach Ziemi nie mogą komunikować się ze sobą. (Nie jest to do końca prawdą. Można by wybrać taką długość fali, która wystarczająco ugięłaby się w atmosferze. Byłoby to jednak zupełnie niepraktyczne).
9. Prędkość jest największa, gdy satelita jest najbliżej ciała, wokół którego orbituje, a najmniejsza, gdy znajduje się w największej odległości od niego, czyli odpowiednio w perycentrum i apocentrum. Określa to zasada zachowania momentu pędu. Ale można to wywnioskować także z zasady zachowania energii. Energia kinetyczna musi być największa w punkcie, grawitacyjna energia potencjalna jest najmniejsza (najbardziej ujemna). Wektor siły, a tym samym wektor przyspieszenia, są zawsze skierowane bezpośrednio do ciała o masie M, a wektor prędkości jest zawsze styczny do toru w każdym punkcie orbity. Wektor przyspieszenia ma składową styczną wzdłuż kierunku prędkości w dolnym położeniu na osi y, a zatem satelita tam przyspiesza. Odwrotnie jest w górnym położeniu.
11. Jeśli laboratorium przyspiesza „do góry” to promień lasera trafi w przeciwną ścianę poniżej położenia lasera. Wiązka lasera obniży się względem laboratorium. Możemy oczekiwać, że to samo nastąpi w polu grawitacyjnym. Brak masy światła nie ma w tym przypadku znaczenia, tak samo jak przyspieszenie ciała spadającego w polu grawitacyjnym nie zależy od masy ciała.

ZADANIA

13. $7{,}4 \cdot 10^{-8}$ N
15. a. $F_o = 7{,}01 \cdot 10^{-7}$ N
b.
$F_J = 1{,}35 \cdot 10^{-6}$ N
$\frac{F_O}{F_J} = 0{,}521$
17.
   a. $9{,}25 \cdot 10^{-6}$ N;
   b. Wartość ta jest mało dokładna, gdyż Międzynarodowa Stacja Kosmiczna nie jest symetryczna, a już tym bardziej nie ma symetrii sferycznej.
19.
   a. $1{,}41 \cdot 10^{-15}$ m/s^2;
   b. $1{,}69 \cdot 10^{-4}$ m/s^2
21. a. 1,62 m/s^2; b. 3,75 m/s^2
23. a. 147 N; b. 25,5 N; c. 15 kg; d. 0; e. 15 kg
25. 12 m/s^2
27. $3R_Z/2$
29. 5000 m/s
31. 1440 m/s
33. 11 km/s
35.
   a. $5{,}85 \cdot 10^{10}$ J;
   b. $-5{,}85 \cdot 10^{10}$ J; nie jest to konieczne, jeśli przyjmiemy, że energia kinetyczna ciała jest odnawialna. Nie byłoby to konieczne nawet, gdybyśmy poruszali się w windzie między Ziemią a Księżycem.
37. a. 0,25; b. 0,125
39. a. $5{,}08 \cdot 10^3$ km; b. Jest to mniej niż promień Ziemi.
41. $1{,}89 \cdot 10^{27}$ kg
43.
   a. $4{,}01 \cdot 10^{13}$ kg;
   b. Promień orbity satelity musi być większy od promienia samej asteroidy, a więc maksymalnie niecałe 2 km. Gdyby promień asteroidy wynosił nawet 2 km to jej gęstość byłaby równa około 1200 kg/m^3. Jest to wartość trochę większa od gęstości wody, więc sytuacja taka mogłaby zaistnieć w rzeczywistości.
45.
   a. $1{,}80 \cdot 10^{-10}$ m/s^2; Tak, przyspieszenie dośrodkowe ma tak małą wartość, że można założyć, iż układ odniesienia związany ze Słońcem jest układem inercjalnym.
   b. $2{,}26 \cdot 10^5$ m/s
47. $1{,}98 \cdot 10^{30}$ kg; Różnica pomiędzy wartościami wynosi 0,05%.
49. Porównaj Równanie 13.8 oraz Równanie 13.11 by zobaczyć, że różnią się one jedynie tym, że promień orbity kołowej r, jest zastąpiony przez długość półosi wielkiej elipsy a. W związku z tym średni promień jest równy połowie sumy odległości pomiędzy aphelium i peryhelium, czyli wynosi tyle samo, co długość półosi wielkiej orbity eliptycznej.
51. Długość półosi wielkiej orbity eliptycznej tej komety, wyznaczona z równania na okres orbitalny wynosi 3,78 j.a. i jest ona równa połowie sumy odległości między aphelium i peryhelium orbity. W związku z tym odległość aphelium komety od Słońca wynosi 4,95 j.a..

53. 1,75 roku
55. Około 20 000 N (zależy, jaki wzrost obserwatora przyjąłeś do obliczeń); jest to znacznie za duża wartość, aby mógł on przeżyć.
57. $1{,}19 \cdot 10^7$ km

ZADANIA DODATKOWE

59.
  a. $1{,}85 \cdot 10^{14}$ N ;
  b. Nie rób tego!

61. $1{,}49 \cdot 10^8$ km
63. Wartość g na ich planecie wynosi 2,4 m/s^2, czyli jest w przybliżeniu czterokrotnie mniejsza niż wartość przyspieszenia ziemskiego. Na pewno są oni więc słabymi skoczkami.
65. Wskazanie wagi wynosi 983 N na biegunie i 980 N na równiku.
67.
  a. Prędkość ucieczki nadal wynosi 43,6 km/s. Startując z Ziemi w kierunku stycznym do jej prędkości orbitalnej, trzeba osiągnąć prędkość $43{,}6\ \text{km/s} - 29{,}8\ \text{km/s} = 13{,}8\ \text{km/s}$ względem Ziemi.
  b. Energia całkowita jest równa zero, więc trajektoria jest parabolą.

69. 44,9 km/s
71.
  a. $1{,}3 \cdot 10^7$ m ;
  b. Energie odpowiednio są równe: $1{,}56 \cdot 10^{10}$ J ; $3{,}12 \cdot 10^{10}$ J ; $-1{,}56 \cdot 10^{10}$ J

73.
  a. Zakładając sferyczny kształt asteroidy i przyjmując długość jej średniego promienia równą 260 km otrzymujemy wartość okresu orbitalnego satelity wynoszącą $6{,}24 \cdot 10^3$ s , czyli około 1,7 godziny.
  b. W rzeczywistości nie można założyć, że Vesta ma kształt kuli. Musisz znajdować się powyżej jej największego wzniesienia (prawie 290 km od jej środka), by w ogóle można było mówić o orbicie. Co więcej, asferyczny kształt asteroidy zakłóciłby bardzo szybko ruch satelity po orbicie, więc obliczenie to nie byłoby dokładne nawet dla dalszej orbity.

75.
  a. 323 km/s;
  b. Nie, w tym przypadku musisz zwrócić uwagę na kierunek prędkości orbitalnej Układu Słonecznego. Jeśli kierunek twojej prędkości w chwili startu byłby zgodny z kierunkiem prędkości orbitalnej Układu Słonecznego wokół środka galaktyki, to musiałbyś osiągnąć prędkość wynoszącą tylko około $323\ \text{km/s} - 228\ \text{km/s} = 95\ \text{km/s}$.

77. Podstawiając $e = 1$, otrzymujemy $\frac{\alpha}{r} = 1 + \cos\theta \rightarrow \alpha = r + r\cos\theta = r + x$; stąd $r^2 = x^2 + y^2 = (\alpha - x)^2$. Rozwijając i szeregując zmienne otrzymujemy $x = \frac{1}{-2\alpha} y^2 + \frac{\alpha}{2}$.
79. Z zasady zachowania momentu pędu otrzymujemy zależność $pv_p = qv_q$ i wstawiamy ją do równania zasady zachowania energii, z której wyznaczamy v_p .

ZADANIA TRUDNIEJSZE

81. $g = \frac{4}{3} G\rho\pi r \rightarrow F = mg = \left[\frac{4}{3} Gm\rho\pi\right] r$. Z równania $F = \frac{d^2 r}{dt^2}$, otrzymujemy $\frac{d^2 r}{dt^2} = \left[\frac{4}{3} G\rho\pi\right] r$, gdzie pierwszy czynnik jest równy ω^2 . Stąd $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4G\rho\pi}}$ i podstawiając $\rho = \frac{M}{4\pi r^3/3}$, otrzymujemy to samo wyrażenie, co na okres ruchu ciała po orbicie o promieniu R.
83. Podstawiając masę Słońca i promień orbity ziemskiej otrzymujemy wartość $2{,}24 \cdot 10^{15}\ \text{m}^2/\text{s}$. Wartość $\pi R_{ZS}^2/(1\ \text{rok})$ (czyli pole powierzchni objęte orbitą Ziemi podzielone przez czas pełnego obiegu Ziemi wokół Słońca) jest taka sama.
85. $\Delta U = U_2 - U_1 = -\frac{GM_Z m}{r_2} + \frac{GM_Z m}{r_1} = GM_Z m \frac{r_2 - r_1}{r_2 r_1}$, gdzie $h = r_2 - r_1$. Jeśli $h \ll R_Z$, to $r_2 r_1 \approx R_Z^2$ i po podstawieniu otrzymujemy $\Delta U = GM_Z m \frac{h}{R_Z^2} = m \frac{GM_Z}{R_Z^2} h$, gdzie wyrażenie GM_Z/R_Z^2 jest definicją g.

87.
  a. Znajdź różnicę działających sił,
  $F_{\text{pływowa}} = \frac{2GMm}{R^3} \Delta r$;
  b. Podstawiając długość promienia Schwarzschilda czarnej dziury (wyznaczyliśmy go we wcześniejszych zadaniach) i jej masę otrzymujemy w tym przypadku wartość siły pływowej równą $9{,}5 \cdot 10^{-3}$ N . Nawet byś tego nie zauważył!

ROZDZIAŁ 14

SPRAWDŹ, CZY ROZUMIESZ

14.1. Ciśnienie obliczone w części (a) naszego przykładu jest całkowicie niezależne od szerokości i długości jeziora; zależy jedynie od jego średniej głębokości u podstawy tamy. Zwróćmy uwagę, że na diagramie pokazano, jak grubość tamy zwiększa się wraz ze wzrostem głębokości, aby zrównoważyć coraz większą siłę związaną z narastającym ciśnieniem.
14.2. Gęstość rtęci jest 13,6 razy większa niż gęstość wody. Potrzeba w przybliżeniu 76 cm słupka rtęci, aby zmierzyć ciśnienie 1 atm, podczas gdy dla wody wysokość ta wynosiłaby w przybliżeniu 10 m.

14.3. Tak, urządzenie nadal by działało, ale ponieważ gaz jest ściśliwy, działanie nie byłoby tak efektywne jak w przypadku cieczy. Po zadziałaniu siłą gaz zmniejszyłby swoją objętość, a jego temperatura by wzrosła. Z tego powodu z przewodów hamulcowych musi być usuwane powietrze.

PYTANIA

1. Rtęć i woda są cieczami w temperaturze pokojowej i pod ciśnieniem atmosferycznym. Powietrze jest gazem w temperaturze pokojowej i pod ciśnieniem atmosferycznym. Szkło jest amorficznym (niekrystalicznym) stałym materiałem w temperaturze pokojowej. Dawniej uważano, że szkło może płynąć, ale bardzo powoli. Źródłem tej teorii była obserwacja starych szyb, które są grubsze na dole. W tej chwili wiadomo, że ta teoria jest błędna.
3. Gęstość powietrza zmniejsza się wraz z wysokością nad poziomem morza. Dla kolumny powietrza o stałej temperaturze gęstość zmniejsza się wykładniczo wraz z wysokością. Jest to dość dobre oszacowanie, ale ponieważ temperatura naprawdę zmienia się z wysokością, to stwierdzenie to pozostaje tylko przybliżeniem.
5. Ciśnienie to siła podzielona przez powierzchnię. Jeżeli nóż jest ostry, to siła przyłożona do powierzchni tnącej rozkłada się na mniejszej powierzchni niż w przypadku tępego noża. Oznacza to, że ciśnienie będzie większe w przypadku ostrego noża, co zwiększa jego zdolność cięcia.
7. Jeżeli dwa kawałki lodu mają taką samą objętość, to po stopieniu pozostanie po nich taka sama ilość wody. Lodowiec spowoduje wzrost poziomu jeziora, gdy dostanie się do niego stopiona woda. Ponieważ część pływającego lodu jest już zanurzona w wodzie, to już w tej chwili, przed stopieniem, poziom jeziora jest podniesiony.
9. Ciśnienie działa na twoje ciało z każdego kierunku, jeśli nie jesteś w próżni.
11. Ponieważ poziom rzeki jest bardzo wysoki, woda zaczęła przeciekać pod wałem. Worki z piaskiem umieszczono wokół przecieku, a woda utrzymywana przez nie podnosi się do takiego samego poziomu jak woda w rzece – w tym momencie poziom wody przestaje wzrastać. Poziom wody wewnątrz ogrodzenia z worków zwiększa się do czasu, gdy wysokość kolumny zrówna się z poziomem wody przed wałem.
13. Ciśnienie atmosferyczne nie wpływa na ciśnienie gazu w sztywnym pojemniku, ale wpływa na ciśnienie wewnątrz balonu. Ogólnie, ciśnienie atmosferyczne wpływa na ciśnienie płynu, chyba że płyn ten znajduje się w sztywnym pojemniku.
15. Ciśnienie atmosferyczne wiąże się z ciężarem powietrza ponad miejscem, w którym jest mierzone. Ciśnienie, czyli siła przez powierzchnię, będzie takie samo na tej wysokości atmosfery.
17. Nie! Prawo Pascala mówi, że zmiana ciśnienia jest przekazywana do całej objętości płynu. Powodem, dla którego wyciągnięcie korka z pełnej wanny wymaga większej siły, jest ciężar wody nad korkiem.
19. Siła wyporu równa się ciężarowi wypartego płynu. Im większa jest gęstość płynu, tym więcej trzeba go wyprzeć, aby uzyskać wagę obiektu, który po nim pływa. Ponieważ gęstość wody słonej jest większa niż słodkiej, to mniej wody słonej zostanie wypartej i statek będzie w niej mniej zanurzony.
21. Rozważ dwie różne rury połączone z pojedynczą rurą o mniejszej średnicy. Płyn przepływa z szerszych rur do rury o mniejszej średnicy. Ponieważ płyn przepływa przez mniejszy przekrój, musi poruszać się szybciej – w tym samym miejscu linie prądu zbliżają się do siebie.
23. Masa wody, która wpływa do pewnego elementu objętości, musi się równać masie opuszczającej ten element. Z równania ciągłości wiemy, że iloczyn prędkości i pola powierzchni musi pozostawać stały. ze względu na to, że gęstość wody się nie zmienia, to prędkość pomnożona przez pole przekroju w miejscu, w którym woda wchodzi do rozważanej objętości, musi być równa iloczynowi prędkości i pola przekroju w miejscu, gdzie woda go opuszcza. Ponieważ prędkość strumienia w fontannie maleje wraz z wysokością z powodu działania siły grawitacji, to powierzchnia jego przekroju musi rosnąć. Prędkość strumienia wody opuszczającego kran rośnie z odległością, dlatego powierzchnia jego przekroju musi maleć.
25. Zgodnie z równaniem ciągłości, gdy rurka się zwęża, płyn musi przyspieszyć, a co za tym idzie, nad płynem wykonywana jest praca. W miejscu zwężenia ciśnienie maleje, co pociąga za sobą porywanie płynu poza strumieniem do wewnątrz zwężonej części rurki.
27. Praca wykonana przez ciśnienie może być wykorzystana do zwiększenia energii kinetycznej oraz energii potencjalnej. Wraz ze wzrostem wysokości energia kinetyczna stanowi coraz mniejszą część całkowitej energii i ostatecznie osiągnie wartość zero. Jest to maksymalna wysokość, na którą można unieść płyn przy wykorzystaniu tej zasady.
29. Ciśnienie na zewnątrz budynków spada, ponieważ powietrze porusza się tam z dużą prędkością. Większe ciśnienie wewnątrz budynku powoduje wyrzucenie dachu w górę lub eksplozję budynku na zewnątrz.
31. Woda wewnątrz węża się porusza, w związku z czym ma ona niezerową energię kinetyczną. Zostaje ona wykorzystana do wykonania pracy przeciwko różnicy ciśnień.
33. Energia potencjalna związana z położeniem, energia kinetyczna związana z prędkością i praca wykonana przez różnicę ciśnień.
36. Woda w środku strumienia porusza się szybciej niż woda w pobliżu brzegów ze względu na siły oporu występujące pomiędzy wodą a brzegiem oraz pomiędzy warstwami płynu. W pobliżu brzegu jest zwykle również więcej turbulencji, które spowalniają wodę. Podczas gdy wiosłujemy pod prąd, woda pcha nas w przeciwnym kierunku, więc najkorzystniej jest być blisko brzegu, aby zminimalizować tę siłę. Podczas poruszania się z prądem, woda pcha łódkę, zwiększając jej prędkość, więc korzystniej jest być w środku strumienia, aby zmaksymalizować ten efekt.
38. Prędkość będzie większa w miejscu zwężenia, a mniejsza za zwężeniem. Opór zwiększa się z powodu zmniejszenia wielkości otworu oraz turbulencji, która zostanie stworzona przez zwężenie. Oba efekty sprawiają, że prędkość płynu spada.

ZADANIA

40. $1{,}610\,\mathrm{cm}^3$
42. Masa wynosi 2,58 g. Objętość twojego ciała zwiększa się o objętość powietrza we wdechu. Średnia gęstość maleje, gdy

bierzesz głęboki wdech, ponieważ gęstość powietrza jest znacznie mniejsza od niej.
44. 3,99 cm
46. 2,86 razy
48. 15,6 g/cm^3
50. $0{,}760\ \mathrm{m} = 76{,}0\ \mathrm{cm} = 760\ \mathrm{mm}$
52. Przeprowadź dowód.
54. a. ciśnienie na wysokości H: $p = 7{,}06 \cdot 10^6\ \mathrm{N}$
b. Ciśnienie zwiększa się ze wzrostem głębokości, więc tama musi być szersza na dole, aby wytrzymać większe ciśnienie.
56. 4,08 m
58. 251 atm
60. siła większa o $5{,}76 \cdot 10^3\ \mathrm{N}$
62. Jeżeli układ się nie porusza, to tarcie nie będzie miało znaczenia. Wiemy, że w obecności tarcia pojawiają się straty: $W_o = W_i - W_f$, więc praca wyjściowa byłaby mniejsza niż wejściowa. Innymi słowy, aby zniwelować tarcie, należy działać na tłok wejściowy z siłą większą niż obliczona.
64. a. zanurzone 99,5%; b. zanurzone 96,9%
66. a. 39,5 g; b. 50 cm^3 ; c. 0,79 g/cm^3 ; alkohol etylowy
68. a. 960 kg/m^3 ; b. 6,34%; mniejsze zanurzenie w wodzie słonej
70. a. 0,24; b. 0,68; c. tak, będą pływały w alkoholu etylowym.

72.
$$\begin{aligned} F_{wyp} &= F_2 - F_1 = p_2 A - p_1 A = (p_2 - p_1)A = \left(h_2 \rho_{pł} g - h_1 \rho_{pł} g\right) A \\ &= (h_2 - h_1)\rho_{pł} g A,\ \text{gdzie}\ \rho_{pł} = \text{gęstość płynu} \\ F_{wyp} &= (h_2 - h_1)A\rho_{pł} g = V_{pł}\rho_{pł} g = m_{pł} g = w_{pł} \end{aligned}$$

74. 2,77 cm^3/s
76. a. 0,75 m/s; b. 0,13 m/s
78. a. 12,6 m/s; b. 0,0800 m^3/s ; c. nie, strumień objętościowy i prędkość nie zależą od gęstości płynu
80. Jeżeli płyn jest nieściśliwy, to strumienie objętościowe po obu stronach będą takie same: $Q = A_1 v_1 = A_2 v_2$ lub $\pi \frac{d_1^2}{4} v_1 = \pi \frac{d_2^2}{4} v_2 \Rightarrow v_2 = v_1 \frac{d_1^2}{d_2^2} = v_1 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2$

82.
$$\begin{aligned} F &= pA \Rightarrow p = \frac{F}{A}, \\ [p] &= \mathrm{N/m^2} = \mathrm{N \cdot m/m^3} = \mathrm{J/m^3} = \text{energia/objętość} \end{aligned}$$

84. –135 mmHg
86. a. $1{,}58 \cdot 10^6\ \mathrm{N/m^2}$; b. 163 m
88. a. $v_2 = 3{,}28\ \mathrm{m/s}$
b. $t = 0{,}55\ \mathrm{s}$
$x = vt = 1{,}81\ \mathrm{m}$
90. a. $3{,}02 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{N}$; b. $1{,}03 \cdot 10^{-3}$
94. 40 m/s
96. $0{,}537r$; promień został zmniejszony do 53,7% swojej normalnej wielkości
98. a. $2{,}40 \cdot 10^9\ \mathrm{N \cdot s/m^5}$; b. $48{,}3\ \mathrm{N \cdot s/m^2}$; c. $2{,}67 \cdot 10^4\ \mathrm{W}$
100. a. dysza: $v = 25{,}5\ \mathrm{m/s}$
$Re = 1{,}27 \cdot 10^5 > 2000 \Rightarrow$
przepływ nie jest laminarny
b. wąż: $v = 1{,}96\ \mathrm{m/s}$
$Re = 35\,100 > 2000 \Rightarrow$
przepływ nie jest laminarny
102. $3{,}16 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m^3/s}$

ZADANIA DODATKOWE

104. 30,6 m
106. a.
$$\begin{aligned} p_{120} &= 1{,}60 \cdot 10^4\ \mathrm{N/m^2} \\ p_{80} &= 1{,}07 \cdot 10^4\ \mathrm{N/m^2} \end{aligned}$$
b. Ponieważ noworodek mierzy zwykle około 50 cm, podczas gdy osoba dorosła około 175 cm, ciśnienie krwi u noworodka powinno być mniejsze niż u osoby dorosłej. W przypadku noworodka mamy do czynienia ze słupem cieczy o maksymalnej wysokości 50 cm, więc ciśnienie powinno być mniejsze.
108. a. 41,4 g; b. 41,4 cm^3; c. 1,09 g/cm^3. Oczywiście nie jest to gęstość kości w każdym jej miejscu. Puste przestrzenie mają gęstość w przybliżeniu $1{,}29 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{g/cm^3}$, a lita kość będzie znacznie gęstsza.
110. 8,21 N
112. a. $3{,}02 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{cm/s}$. (Tak mała prędkość daje czas na dyfuzję materii pomiędzy krwią a komórkami.) b. $2{,}37 \cdot 10^{10}$ naczyń włosowatych. (Ta wielka liczba jest przeszacowana, ale ma w przybliżeniu prawidłowy rząd wielkości.)
114. a. $2{,}76 \cdot 10^5\ \mathrm{N/m^2}$; b. $P_2 = 2{,}81 \cdot 10^5\ \mathrm{N/m^2}$

116. $8.7 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{mm}^3/\mathrm{s}$
118. a. 1,52; b. Turbulencja zmniejszyłaby strumień krwi, i skompensowanie tego zjawiska wymagałoby jeszcze większej różnicy ciśnień, co doprowadziłoby do wyższego ciśnienia krwi w ciele.

ZADANIA TRUDNIEJSZE

120. $p = 0{,}99 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$
122. $800\ \mathrm{kg/m}^3$
124. 11,2 m/s
126. a. 71,8 m/s; b. 257 m/s
128. a. $150\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$; b. $33{,}3\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$; c. $25{,}0\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$; d. $0{,}0100\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$; e. $0{,}0300\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$
130. a. $1{,}20 \cdot 10^5\ \mathrm{N/m}^2$; b. Strumień w magistrali wzrósł o 90%. c. Z rana było w zaokrągleniu o 38 użytkowników więcej.

ROZDZIAŁ 15

SPRAWDŹ, CZY ROZUMIESZ

15.1. Możesz zwiększyć masę obiektu drgającego. Innym sposobem może być zmniejszenie amplitudy drgań lub użycie sprężyny o mniejszym współczynniku sprężystości.
15.2. Butelkę z keczupem można postawić na obrotowym stoliku i wprawić go w ruch obrotowy. Oświetlenie butelki z boku lampą spowoduje, że na ścianie zobaczymy jej cień poruszający się ruchem harmonicznym.
15.3. Ruch wahadeł będzie identyczny, ponieważ masa ciężarka nie wpływa na ruch wahadła matematycznego. Okres drgań zależy jedynie od długości wahadła i od przyspieszenia ziemskiego.
15.4. Na ruch obiektu często wpływa tarcie, które powoduje tłumienie drgań oscylatora harmonicznego.
15.5. Magik powinien zaśpiewać dźwięk o częstotliwości zgodnej z częstotliwością drgań własnych kielicha. Skierowanie fali dźwiękowej na kielich pobudza go do drgań w rezonansie z częstotliwością fali dźwiękowej. W tych warunkach kielich wpada w drgania o dużej amplitudzie i jeśli śpiew będzie wystarczająco głośny – rozpada się na kawałeczki.

PYTANIA

1. Siła zwrotna musi być proporcjonalna do przemieszczenia i działać w kierunku położenia równowagi. Ruch odbywa się bez siły oporu lub tarcia. Częstotliwość oscylacji nie zależy od amplitudy drgań.
3. Przykłady: masa przymocowana do sprężyny poruszająca się na stole bez tarcia, masa zwisająca na sprężynie, wahadło matematyczne z małą amplitudą wychylenia. W tych przypadkach ruch drgający odbywa się z częstotliwością niezależną od amplitudy.
5. Częstotliwość drgań przyczepy wzrasta wraz z pierwiastkiem kwadratowym ze współczynnika sprężystości i maleje wraz ze wzrostem pierwiastka kwadratowego z masy. Należy więc wywnioskować, że przyczepa jest znacznie obciążona. Zauważ, że na współczynnik sprężystości nie ma wpływu to, czy przyczepa jest pusta, czy obciążona.
7. W samochodzie energię potencjalną sprężystości możemy zaobserwować, gdy ściskamy lub rozciągamy amortyzator. W niektórych butach do biegania energia potencjalna sprężystości przechowuje się w ściśliwej podeszwie buta. W skoku o tyczce energia potencjalna sprężystości gromadzi się w tyczce na skutek jej ugięcia.
9. Cały system jest stabilny. Okresowo tę stabilność mogą naruszać burze, ale siła napędowa zapewniana przez Słońce przywraca atmosferę do stanu równowagi.
11. Maksymalna prędkość masy na sprężynie wynosi $v_{\mathrm{max}} = A\omega$, a częstość kołowa jest niezależna od amplitudy drgań. Zatem to amplituda drgań musi ulec zwiększeniu. Skoro odpowiada jej promień okręgu, wobec tego to ten parametr dysku powinien zostać zwiększony.
13. Okres wahadła wynosi $T = 2\pi\sqrt{L/g}$. Wiosną jedno drganie trwa dokładnie jedną sekundę. Latem długość wahadła rośnie, a więc okres ulega wydłużeniu i trwa dłużej niż sekundę. Zatem wahadło wykonuje mniej niż 60 drgań na minutę i zegar się spóźnia. Natomiast zimą się spieszy.
15. Amortyzator w samochodzie.
17. Druga zasada termodynamiki mówi, że nie można zbudować maszyny poruszającej się bez końca. W końcu uporządkowany ruch zanika i układ powraca do stanu równowagi.
19. Każdy ruch harmoniczny jest ruchem harmonicznym tłumionym, ale w pewnych układach tłumienie może być bardzo słabe i można je zaniedbać. Tłumienie jest spowodowane przez siły tarcia i siły oporu. Można przytoczyć pięć następujących przykładów ruchu drgającego tłumionego: (1) masa oscylująca pionowo na sprężynie (drgania zanikają), (2) amortyzatory w samochodach (tłumią niepożądane drgania), (3) wahadło w zegarze mechanicznym (stosuje się ciężarki w celu zwiększenia energii oscylatora), (4) dziecko na huśtawce (wychylenia ustaną jeśli nie będziemy popychać dziecka) (5) kula drgająca w misce (w końcu przestaje drgać i osiąga położenie równowagi trwałej). Nawet zastosowanie próżni dla układu masy na sprężynie nie sprawi, że układ stanie się oscylatorem nietłumionym, ponieważ w sprężynie obecne są kanały dyssypacji energii. Tak więc tłumienie można ograniczyć, ale nie można go wyeliminować.

ZADANIA

21. Dowód.
23. 0,4 s/uderzenie.
25. 12,500 Hz.
27.
   a. 340 km/h;
   b. $11{,}3 \cdot 10^3$ obr/min.

29. $f = \frac{1}{3}f_0$
31. 0,009 kg; 2%.
33. a. $1{,}57 \cdot 10^5$ N/m ; b. 77 kg , zawodnik mieści się w limicie wagowym kategorii wagi ciężkiej.
35.
   a. $6{,}53 \cdot 10^3$ N/m ;
   b. Tak, w momentach gdy człowiek znajdzie się w najniższym punkcie swojego ruchu, wówczas sprężyna będzie maksymalnie ściśnięta.
37. a. 1,99 Hz; b. 50,2 cm; c. 1,40 Hz; 71 cm.
39.
   a. 0,335 m/s ;
   b. $5{,}61 \cdot 10^{-4}$ J.
41.
   a. $x(t) = 2\text{ m} \cdot \cos(0{,}52\text{ s}^{-1} \cdot \text{t})$;
   b. $v(t) = -1{,}05\text{ m/s} \cdot \sin(0{,}52\text{ s}^{-1} \cdot \text{t})$.
43. 24,8 cm
45. 4,01 s
47. 1,58 s
49. 9,82002 m/s^2
51. 9%.
53. 141 J.
55.
   a. $4{,}90 \cdot 10^{-3}$ m ;
   b. $1{,}15 \cdot 10^{-2}$ m.

ZADANIA DODATKOWE

57. 94,7 kg.
59.
   a. 314 N/m;
   b. 1,00 s;
   c. 1,25 m/s.
61. Okres drgań wahadła na Księżycu jest 2,45 razy dłuższy niż na Ziemi.
63. Długość wahadła musi wzrosnąć o 0,0116%.
65. $\theta = 0{,}31\text{ rad} \cdot \sin(3{,}13\text{ s}^{-1} \cdot \text{t})$.
67.
   a. 0,99 s;
   b. 0,11 m.

ZADANIA TRUDNIEJSZE

69.
   a. $3{,}95 \cdot 10^6$ N/m ;
   b. $7{,}90 \cdot 10^6$ J.
71. $F \approx -\text{constant} \cdot r'$
73.
   a. 7,54 cm;
   b. $3{,}25 \cdot 10^4$ N/m.

ROZDZIAŁ 16

SPRAWDŹ, CZY ROZUMIESZ

16.1. Długość fali zależy od jej częstotliwości i prędkości. Częstotliwość fali dźwiękowej jest równa częstotliwości fali przemieszczającej się wzdłuż struny. Długość fali dźwiękowej i długość fali przemieszczającej się wzdłuż struny są równe tylko wtedy, gdy prędkości tych fal są takie same, co nie jest regułą. Jeśli prędkość dźwięku jest różna od prędkości fali rozchodzącej się wzdłuż struny, to długości fal też są różne. Prędkość fali dźwiękowej będzie omówiona w rozdziale Dźwięk.

16.2. Fala poprzeczna może przemieszczać się w ośrodku ze stałą prędkością, ale cząsteczki ośrodka drgają w kierunku prostopadłym do kierunku ruchu fali. Jeśli fala przemieszcza się zgodnie ze zwrotem osi x, cząstki ośrodka drgają wzdłuż osi y. Zatem prędkość ośrodka nie jest stała (prędkość drgań cząsteczek ośrodka i ich przyspieszenie mogą być opisane przy wykorzystaniu modelu prostego ruchu harmonicznego masy zawieszonej na sprężynie).

16.3. Tak, funkcja cosinus jest równa przesuniętej w fazie funkcji sinus i obie mogą być używane do stworzenia równania falowego. To warunki początkowe decydują o tym, której funkcji użyjemy. Na Rysunku 16.11 wychylenie początkowe fali wynosi $y(x = 0{,}00; t = 0{,}00) = 0$, następnie wychylenie wzrasta i osiąga maksimum odpowiadające grzbietowi fali. Jeśli wychylenie początkowe w chwili początkowej byłoby równe amplitudzie fali $y(x = 0{,}00; t = 0{,}00) = +A$, wówczas wygodniejsze jest użycie funkcji cosinus.

16.4. Fala o amplitudzie $A = 0{,}5\text{ m}$, długości $\lambda = 10{,}00\text{ m}$ i okresie $T = 0{,}50\text{ s}$ jest rozwiązaniem równania falowego.

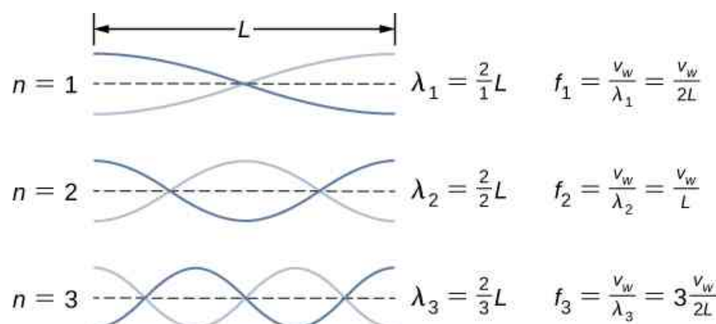
Prędkość fali $v = 20{,}00$ m/s.

16.5. Ponieważ prędkość fali na strunie jest proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego naprężenia podzielonego przez liniową gęstość, to prędkość fali w naszym przypadku musi wzrosnąć o $\sqrt{2}$.

16.6. Na pierwszy rzut oka wydaje się, że uśredniona w czasie moc fali sinusoidalnej na strunie jest proporcjonalna do liniowej gęstości struny, ponieważ $P = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2 v$, a prędkość fali zależy od gęstości liniowej. Jeśli zastąpimy prędkość fali przez $\sqrt{F_T/\mu}$, to okaże się, że moc jest proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z naprężenia i do pierwiastka kwadratowego z liniowej gęstości masy:

$$P = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2 v = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2\sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = \frac{1}{2}A^2\omega^2\sqrt{\mu F_T}.$$

16.7. Tak, równania są prawdziwe dla symetrycznych warunków brzegowych, gdzie na obu końcach tworzą się strzałki. Mody normalne dla trzech pierwszych modów pokazano poniżej. Linią przerywaną zaznaczono położenie równowagowe ośrodka.



Zauważ, że pierwszy mod odpowiada połowie długości fali. Drugi mod odpowiada jednej długości fali, a trzeci odpowiada 1,5 długości fali. Otrzymaliśmy wyniki podobne jak dla struny, na której obu końcach znajdują się węzły. Równania dla symetrycznych warunków brzegowych są prawdziwe zarówno dla stałych, jak i dla swobodnych warunków brzegowych. Powrócimy do tych rozważań w następnym rozdziale, omawiając fale dźwiękowe w otwartych rurach.

PYTANIA

1. Fala rozchodząca się wzdłuż struny gitary jest falą poprzeczną. Zaburzenie struny porusza się prostopadle do kierunku rozchodzenia się fali. Dźwięk wytwarzany przez strunę jest falą podłużną. Zaburzenie powietrza przemieszcza się równolegle do kierunku rozchodzenia się fali.

3. Szybkość rozchodzenia się fali to szybkość jej rozchodzenia się w ośrodku. Jeśli jest stała, to można obliczyć ją z równania $v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$. Częstotliwość to liczba fal, przechodzących przez dany punkt w jednostce czasu. Długość fali jest wprost proporcjonalna do prędkości fali i odwrotnie proporcjonalna do częstotliwości.

5. Nie, odległość, jaką pokonuje ręka, wyznacza amplitudę fali. Długość fali zależy od częstotliwości ruchu ręki w górę i w dół oraz od szybkości fali.

7. Światło słoneczne dociera do Ziemi, biegnąc przez przestrzeń kosmiczną, gdzie panuje próżnia.

9. Długość fali jest równa iloczynowi prędkości fali i częstotliwości, a liczba falowa równa się $k = 2\pi/\lambda$. Zatem liczba falowa zależy od częstotliwości oraz prędkości rozchodzenia się fali.

11. Gdy fala rozchodzi się w ośrodku, to ośrodek porusza się prostym ruchem harmonicznym, którego prędkość jest inna w każdej chwili, zatem można mówić tu o przyspieszeniu cząstek ośrodka. Przyspieszenie jest tu wynikiem działania sił sprężystości w kierunku przeciwnym do wychylenia.

13. Prędkość fali jest proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z naciągu, a zatem wzrośnie dwukrotnie.

15. Ponieważ prędkość fali na strunie jest odwrotnie proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z liniowej gęstości masy, prędkość będzie większa na strunie o niższej gęstości liniowej masy.

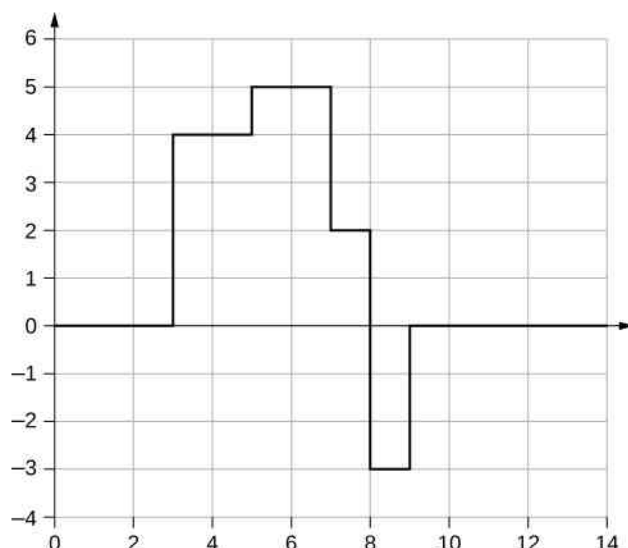
17. Naprężenie drutu wynika z ciężaru kabla elektrycznego.

19. Uśredniona w czasie moc wynosi $P = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2\frac{\lambda}{T} = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2 v$. Jeśli częstotliwość lub amplituda zmniejszą się o połowę, to moc zmniejszy się czterokrotnie.

21. Ponieważ odcinek struny porusza się w kierunku wertykalnym i wywiera nacisk na sąsiadujące z nim odcinki struny, przenosząc energię.

23. Natężenie fali kulistej wynosi: $I = \frac{P}{4\pi r^2}$, i jeśli energia nie jest rozpraszana, to natężenie na odcinku 3-metrowym zmniejszy się 9 razy.

25. Na granicy strun impuls padający powoduje powstanie impulsu odbitego oraz impulsu przechodzącego. Impuls odbity będzie w przeciwnej fazie w stosunku do impulsu padającego, pobiegnie z tą samą prędkością, co impuls padający, ale w przeciwnym kierunku. Impuls przechodzący pobiegnie w tym samym kierunku co impuls padający, z prędkością równą połowie prędkości impulsu padającego. Impuls przechodzący będzie w fazie z impulsem padającym. Zarówno impuls odbity, jak i impuls przechodzący będą miały amplitudy mniejsze niż amplituda impulsu padającego.



27.

29. Długość i/lub gęstość, wówczas rozpora nie będzie rezonowała z silnikiem.

31. Podczas takiego pocierania następuje przekazanie energii szkłu. Przy pewnych częstotliwościach powstają w kieliszku fale stojące. Kieliszek wpada w rezonans, a wibracje powodują wytworzenie dźwięku.

33. W przypadku równania $y(x, t) = 4{,}00\,\text{cm}\sin\left(3\,\text{m}^{-1}x\right)\cos\left(4\,\text{s}^{-1}t\right)$ wystąpi węzeł, ponieważ gdy $x = 0{,}00\,\text{m}$, $\sin\left(3\,\text{m}^{-1}\,(0{,}00\,\text{m})\right) = 0{,}00,$ więc $y(0{,}00\,\text{m}, t) = 0{,}00\,\text{m}$ w każdej chwili. W przypadku równania $y(x, t) = 4{,}00\,\text{cm}\sin\left(3\,\text{m}^{-1}x + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(4\,\text{s}^{-1}t\right)$ powstanie strzałka, gdyż $x = 0{,}00\,\text{m}$, $\sin\left(3\,\text{m}^{-1}\,(0{,}00\,\text{m}) + \frac{\pi}{2}\right) = +1{,}00$,więc $y(0{,}00\,\text{m}, t)$ wykonuje drgania w zakresie pomiędzy $+A$ i $-A$, a funkcja cosinus zmienia się w zakresie +1 i −1.

ZADANIA

35. $2d = vt \Rightarrow d = 11{,}25\,\text{m}$

37. $v = f\lambda$, stąd $f = 0{,}125\,\text{Hz}$, zatem $N = 7{,}50\,\text{razy}$

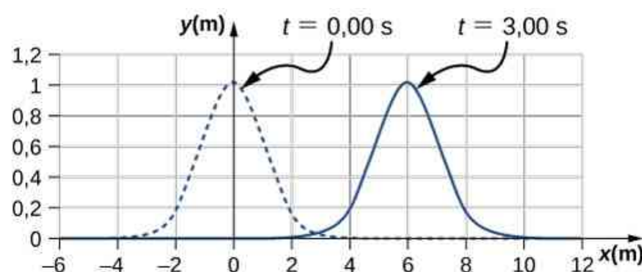
39. $v = f\lambda \Rightarrow \lambda = 0{,}400\,\text{m}$

41. $v = f\lambda \Rightarrow f = 2{,}50 \cdot 10^9\,\text{Hz}$

43. (a) Fala typu P jest szybsza od fali typu S o $v = 3{,}20\,\text{km/s}$; , stąd $\Delta d = 0{,}320\,\text{km}$. (b) Ponieważ dokładność pomiaru odległości jest mniejsza niż 1 km, to nasza odpowiedź na pytanie do części (a) wydaje się nie ograniczać wykrywania prób jądrowych. Jednak jeśli prędkości są nieznane, wówczas niepewność związana z pomiarem odległości wzrośnie i utrudni identyfikację źródła fali sejsmicznej.

45. $v = 1900\,\text{m/s}$, $\Delta t = 1{,}05\,\mu\text{s}$

47. $y(x, t) = -0{,}037\,\text{cm}$



49.

Impuls przesunie się o $\Delta x = 6{,}00\,\text{m}$.

51. a. $A = 0{,}25\,\text{m}$; b. $k = 0{,}30\,\text{m}^{-1}$; c. $\omega = 0{,}90\,\text{s}^{-1}$; d. $v = 3{,}0\,\text{m/s}$; e. $\phi = \pi/3\,\text{rad}$; f. $\lambda = 20{,}93\,\text{m}$; g. $T = 6{,}98\,\text{s}$

53. $A = 0{,}30\,\text{m}$, $\lambda = 4{,}50\,\text{m}$, $v = 18{,}00\,\text{m/s}$, $f = 4{,}00\,\text{Hz}$, $T = 0{,}25\,\text{s}$

55. $y(x, t) = 0{,}23\,\text{m}\sin\left(3{,}49\,\text{m}^{-1}x - 0{,}63\,\text{s}^{-1}t\right)$

57. Mają te same częstotliwości i okresy. Poruszają się w przeciwnych kierunkach, a $y_2(x, t)$ ma dwa razy większą długość niż $y_1(x, t)$ i porusza się z prędkością dwa razy mniejszą.

59. Każda cząstka ośrodka pokonuje odległość $4A$ w czasie jednego okresu. Okres można wyliczyć, dzieląc prędkość przez długość fali: $t = 10{,}42\,\text{s}$.

61. a. $\mu = 0{,}040\,\text{kg/m}$, b. $v = 15{,}75\,\text{m/s}$

63. $v = 180\,\text{m/s}$

65. $v = 547{,}723\ \text{m/s},\ \Delta t = 5{,}48\ \text{ms}$
67. $v_s = 347{,}56\ \text{m/s}$
69. $v_1 t + v_2 t = 2{,}00\ \text{m},\ t = 1{,}69\ \text{ms}$
71. $v = 288{,}68\ \text{m/s},\ \lambda = 0{,}73\ \text{m}$
73. a. $A = 0{,}0125\ \text{cm}$; b. $F_T = 0{,}96\ \text{N}$
75. $v = 74{,}54\ \text{m/s},\ P_\lambda = 91{,}85\ \text{W}$

77. a. $I = 20{,}0\ \text{W/m}^2$; b.

$$I = \frac{P}{A},\ A = 10{,}0\ \text{m}^2$$
$$A = 4\pi r^2,\ r = 0{,}892\ \text{m}$$

79. $I = 650\ \text{W/m}^2$

81.

$$P \propto E \propto I \propto X^2 \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{X_2}{X_1}\right)^2$$
$$P_2 = 2{,}50\ \text{kW}$$

83. $I \propto X^2 \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{X_1}{X_2}\right)^2 \Rightarrow$

$I_2 = 3{,}38 \cdot 10^{-5}\ \text{W/m}^2$

85. $f = 100{,}00\ \text{Hz},\ A = 1{,}10\ \text{cm}$

87. a. $I_2 = 0{,}063 I_1$; b.

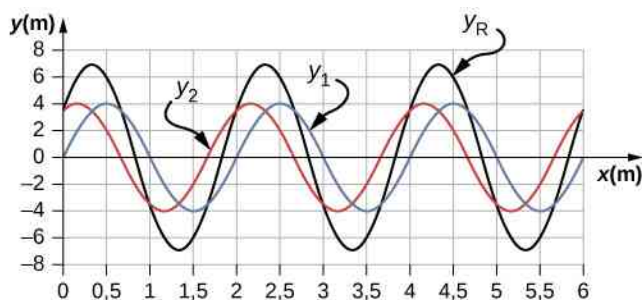
$$I_1 4\pi r_1^2 = I_2 4\pi r_2^2$$
$$r_2 = 3{,}16\ \text{m}$$

89. $2\pi r_1 A_1^2 = 2\pi r_2 A_2^2,\ A_1 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{1/2} A_1 = 0{,}17\ \text{m}$
91. $y(x, t) = 0{,}76\ \text{m}$
93. $A_R = 2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right),\ \phi = 1{,}17\ \text{rad}$
95. $y_R = 1{,}90\ \text{cm}$

97.

$$\omega = 6{,}28\ \text{s}^{-1},\ k = 3{,}00\ \text{m}^{-1},\ \phi = \frac{\pi}{8}\ \text{rad}$$
$$A_R = 2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right),\ A = 0{,}37\ \text{m}$$

99. a.



b. $\lambda = 2{,}0\ \text{m},\ A = 4\ \text{m}$, c. $\lambda_R = 2{,}0\ \text{m},\ A_R = 6{,}93\ \text{m}$

101. $y_R(x, t) = 2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\cos\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)$; wynik ten nie jest zaskoczeniem, ponieważ $\cos(\theta) = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$.

103.

$$\lambda_n = \frac{2{,}00}{n}L,\quad f_n = \frac{v}{\lambda n}$$
$$\lambda_1 = 4{,}00\ \text{m},\quad f_1 = 12{,}5\ \text{Hz}$$
$$\lambda_2 = 2{,}00\ \text{m},\quad f_2 = 25{,}00\ \text{Hz}$$
$$\lambda_3 = 1{,}33\ \text{m},\quad f_3 = 37{,}59\ \text{Hz}$$

105.

$$v = 158{,}11\ \text{m/s},\quad \lambda = 4{,}44\ \text{m},\quad f = 35{,}61\ \text{Hz}$$
$$\lambda_s = 9{,}63\ \text{m}$$

107. $y(x,t) = \left[0{,}60\,\text{cm}\sin\left(3\,\text{m}^{-1}x\right)\right]\cos\left(4\,\text{s}^{-1}t\right)$
$\lambda_{100} = 0{,}06\,\text{m}$
109. $v = 56{,}8\,\text{m/s}, \quad f_n = nf_1, \quad n = 1,2,3,\ldots$
$f_{100} = 947\,\text{Hz}$
111. $T = 2\Delta t, \quad v = \frac{\lambda}{T}, \quad \lambda = 2{,}12\,\text{m}$

113. $\lambda_1 = 6{,}00\,\text{m}, \quad \lambda_2 = 3{,}00\,\text{m}, \quad \lambda_3 = 2{,}00\,\text{m}, \quad \lambda_4 = 1{,}50\,\text{m}$
$v = 258{,}20\,\text{m/s} = \lambda f$
$f_1 = 43{,}03\,\text{Hz}, \quad f_2 = 86{,}07\,\text{Hz}, \quad f_3 = 129{,}10\,\text{Hz}, \quad f_4 = 172{,}13\,\text{Hz}$
115. $v = 134{,}16\,\text{ms}, \lambda = 1{,}4\,\text{m}, f = 95{,}83\,\text{Hz}, T = 0{,}0104\,\text{s}$

ZADANIA DODATKOWE

117. $\lambda = 0{,}10\,\text{m}$
119. a. $f = 4{,}74 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}$; b. $\lambda = 422\,\text{nm}$
121. $\lambda = 16{,}00\,\text{m}, \quad f = 0{,}10\,\text{Hz}, \quad T = 10{,}00\,\text{s}, \quad v = 1{,}6\,\text{m/s}$
123. $\lambda = (v_b + v)\,t_b, \quad v = 3{,}75\,\text{m/s}, \quad \lambda = 3{,}00\,\text{m}$

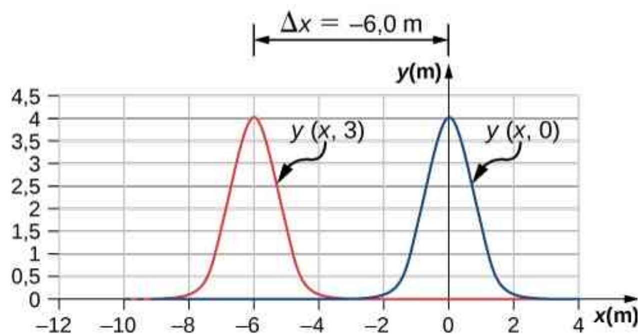
125.
$$\frac{\partial^2(y_1+y_2)}{\partial t^2} = -A\omega^2\sin(kx-\omega t) - A\omega^2\sin(kx-\omega t+\phi)$$
$$\frac{\partial^2(y_1+y_2)}{\partial x^2} = -Ak^2\sin(kx-\omega t) - Ak^2\sin(kx-\omega t+\phi)$$
$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$
$$-A\omega^2\sin(kx-\omega t) - A\omega^2\sin(kx-\omega t+\phi) = \left(\frac{1}{v^2}\right)\left(-Ak^2\sin(kx-\omega t) - Ak^2\sin(kx-\omega t+\phi)\right)$$
$$v = \frac{\omega}{k}$$
127. $y(x,t) = 0{,}40\,\text{m}\sin\left(0{,}015\,\text{m}^{-1}x + 1{,}5\,\text{s}^{-1}t\right)$
129. $v = 223{,}61\,\text{m/s}, \ k = 1{,}57\,\text{m}^{-1}, \ \omega = 142{,}43\,\text{s}^{-1}$
131. $P = \frac{1}{2}A^2(2\pi f)^2\sqrt{\mu F_T}$
$\mu = 2{,}00 \cdot 10^{-4}\,\text{kg/m}$
133. $P = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2\frac{\lambda}{T}, \ \mu = 0{,}0018\,\text{kg/m}$
135. a. $A_R = 2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right), \ \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = 1, \ \phi = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$; b. $A_R = 2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right), \ \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = 0, \ \phi = 0, \pi, 3\pi, 5\pi\ldots$
137. $y_R(x,t) = 0{,}6\,\text{m}\sin\left(4\,\text{m}^{-1}x\right)\cos\left(3\,\text{s}^{-1}t\right)$

139. a. (1) $F_T - 20{,}00\,\text{kg}\left(9{,}80\,\text{m/s}^2\right)\cos 45° = 0$
(2) $m\left(9{,}80\,\text{m/s}^2\right) - F_T = 0$
$m = 14{,}14\,\text{kg}$
; b. $F_T = 138{,}57\,\text{N}$
$v = 67{,}96\,\text{m/s}$
141. $F_T = 12\,\text{N}, v = 16{,}49\,\text{m/s}$

143. a. $f_n = \frac{nv}{2L}, \ v = \frac{2Lf_{n+1}}{n+1}, \ \frac{n+1}{n} = \frac{2Lf_{n+1}}{2Lf_n}, \ 1 + \frac{1}{n} = 1{,}2, \ n = 5$; b. $F_T = 245{,}76\,\text{N}$
$\lambda_n = \frac{2}{n}L, \ \lambda_5 = 1{,}6\,\text{m}, \ \lambda_6 = 1{,}33\,\text{m}$

ZADANIA TRUDNIEJSZE

145. a. Ruch w kierunku ujemnych wartości x z prędkością $v = 2{,}00\,\text{m/s}$. b. $\Delta x = -6{,}00\,\text{m}$; c.



$$\sin(kx - \omega t) = \sin\left(kx + \frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right) - \cos\left(kx + \frac{\phi}{2}\right)\sin\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$

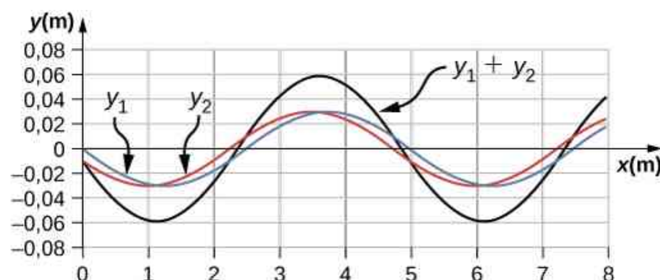
147. $$\sin(kx - \omega t + \phi) = \sin\left(kx + \frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right) + \cos\left(kx + \frac{\phi}{2}\right)\sin\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$

$$\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t + \phi) = 2\sin\left(kx + \frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$

$$y_R = 2A\sin\left(kx + \frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$

149. $$\sin\left(kx + \frac{\phi}{2}\right) = 0,\ kx + \frac{\phi}{2} = 0, \pi, 2\pi,\ 1{,}26\,\text{m}^{-1}x + \frac{\pi}{20} = \pi, 2\pi, 3\pi$$;

$$x = 2{,}37\ \text{m}, 4{,}86\ \text{m}, 7{,}35\ \text{m}$$



ROZDZIAŁ 17

SPRAWDŹ, CZY ROZUMIESZ

17.1. Dźwięk i światło propagują się ze skończoną prędkością, ale prędkość dźwięku jest mniejsza niż prędkość światła. Pierwszy wybuch występuje najprawdopodobniej bardzo blisko, przez co różnica w prędkości jest niezauważalna. Drugi wybuch występuje daleko, co sprawia, że światło widzisz wcześniej, niż usłyszysz dźwięk wybuchu.
17.2. 10 dB: szelest liści; 50 dB: normalne biuro; 100 dB: głośna fabryka
17.3. Amplituda jest wprost proporcjonalna do wrażenia głośności. Jeśli amplituda wzrasta, wzrasta również rejestrowana głośność.
17.4. W przykładzie dwa głośniki wytwarzały dźwięki o takiej samej częstotliwości. Muzyka ma różne częstotliwości i długości fali.
17.5. Normalne słuchawki blokują tylko fale dźwiękowe. Słuchawki redukujące hałas stosują interferencję destruktywną w celu zmniejszenia głośności dźwięków zewnętrznych.
17.6. Kiedy rura rezonuje z częstotliwością własną, węzły znajdują się na zamkniętym końcu rury, a strzałki znajdują się przy otwartym końcu. Długość rury wynosi jedną czwartą długości fali. Zatem jeśli znamy długość fali, możemy określić długość rury.
17.7. Porównaj ich wymiary. Instrumenty wysokotonowe są zwykle mniejsze od niskotonowych, ponieważ generują fale o mniejszych długościach.
17.8. Zadanie to można łatwo zrozumieć, korzystając z wykresu pokazanego poniżej. Jak widać, wytwarzane są dudnienia, ale o bardziej złożonym charakterze.



17.9. Jeśli jadę i słyszę efekt Dopplera związany z syreną pogotowia, byłbym w stanie powiedzieć, kiedy karetka się zbliża, a także zauważyć moment mijania. Pomogłoby mi to wiedzieć, czy muszę się zatrzymać i pozwolić przejechać karetce pogotowia.

PYTANIA

1. Dźwięk jest zaburzeniem ośrodka, które rozchodzi się od źródła. Słyszenie jest percepcją dźwięku.
3. Przeanalizuj falę dźwiękową poruszającą się w powietrzu. Ciśnienie powietrza jest warunkiem równowagi, jest to zmiana ciśnienia powodowana przez falę dźwiękową.
5. Częstotliwość nie zmienia się, gdy fala dźwiękowa przechodzi z jednego ośrodka do drugiego. Ponieważ prędkość zmienia się, a częstotliwość nie, długość fali również musi się zmienić. Podobnie jest dla oscylatora harmonicznego lub dla fali na strunie.
7. Przetwornik wysyła falę dźwiękową, która odbija się od przedmiotu i mierzy jej czas powrotu. Ponieważ prędkość dźwięku jest stała, odległość do obiektu może zostać odnaleziona przez pomnożenie prędkości dźwięku oraz połowy zmierzonego przedziału czasowego.
9. Wkładki uszne zmniejszają natężenie dźwięku zarówno w wodzie, jak i na lądzie, ale naukowcy ds. marynarki wojennej odkryli, że dźwięk pod wodą jest rejestrowany przez wyrostki sutkowate, które znajdują się za uchem.
11. Długość fali podstawowej w rurze obustronnie otwartej wynosi $2L$, podczas gdy długość fali w rurze z jednej strony otwartej, a z drugiej strony zamkniętej wynosi $4L$. Rura jednostronnie otwarta ma mniejszą częstotliwość podstawową, przy założeniu, że prędkość dźwięku jest taka sama w obu rurach.
13. Długość fali w każdej rurze jest dwa razy większa od długości rury. Częstotliwość zależy od długości fali i prędkości dźwięku. Częstotliwość w pomieszczeniu B jest wyższa, ponieważ prędkość dźwięku jest wyższa z powodu wyższej temperatury.
15. Podczas rezonansu dla częstotliwości podstawowej długość fali dla rury C wynosi $4L$, a rury A i B wynosi $2L$. Częstotliwość jest równa $f = v/\lambda$. Rura C posiada najniższą częstotliwość, a rury A i B mają takie same częstotliwości podstawowe, wyższe niż rura C.
17. Do momentu, gdy warunki brzegowe są symetryczne, częstotliwości wynoszą $f_n = \frac{nv}{2L}$. Ponieważ prędkość jest taka sama w każdej rurze, częstotliwości są takie same. Jeśli prędkość fali została podwojona na strunie, częstotliwość na strunie byłaby dwukrotnie większa niż częstotliwość w rurze.
19. Częstotliwość nieznanych widełek stroikowych wynosi 255 Hz. Jeśli wykorzystano tylko widełki stroikowe o częstotliwości 250 Hz, słyszenie częstotliwości dudnień jest ograniczone do częstotliwości 245 Hz lub 255 Hz.
21. Częstotliwość dudnień wynosi 0,7 Hz.
23. Obserwator 1 odbiera najwyższą częstotliwość. Obserwator 2 rejestruje najniższą częstotliwość. Obserwator 3 usłyszy wyższą częstotliwość od częstotliwości źródła, ale niższą od częstotliwości odbieranej przez obserwatora 1, gdy źródło się zbliża, oraz niższą częstotliwość niż częstotliwość źródła, ale wyższą niż częstotliwość obserwowana przez obserwatora 2, gdy źródło oddala się od obserwatora 3.
25. Radar Dopplera pozwala nie tylko wykrywać odległość do burzy, ale również określać prędkość i kierunek, w którym burza się przemieszcza.
27. Prędkość dźwięku spada wraz ze spadkiem temperatury powietrza. Liczba Macha jest równa $M = v_s / v$, co oznacza, że samolot powinien zmniejszyć prędkość.

ZADANIA

29. $s_{max} = 4{,}00\,\text{nm}, \quad \lambda = 1{,}72\,\text{m}, \quad f = 200\,\text{Hz}, \quad v = 343{,}17\,\text{m/s}$
31. a. $\lambda = 68{,}60\,\mu\text{m}$; b. $\lambda = 360{,}00\,\mu\text{m}$
33. a. $k = 183{,}09\,\text{m}^{-1}$;
b. $\Delta P = -1{,}11\,\text{Pa}$

35.
$$s_1 = 7{,}00\,\text{nm}, \quad s_2 = 3{,}00\,\text{nm}, \quad kx_1 + \phi = 0\,\text{rad}$$
$$kx_2 + \phi = 1{,}128\,\text{rad}$$
$$k(x_2 - x_1) = 1{,}128\,\text{rad}, \quad k = 5{,}64\,\text{m}^{-1}$$
$$\lambda = 1{,}11\,\text{m}, \quad f = 306{,}31\,\text{Hz}$$

37. $k = 5{,}28 \cdot 10^3$ m
$s(x,t) = 4{,}50\,\text{nm}\ \cos\left(5{,}28 \cdot 10^3\ \text{m}^{-1} x - 2\pi \cdot 5{,}00\,\text{MHz} \cdot t\right)$

39. $\lambda = 3{,}43$ mm
$\lambda = 6{,}00$ m

41. $s_{max} = 2{,}00$ mm
$v = 600$ m/s
$T = 0{,}01$ s

43. (a) $f = 100$ Hz, (b) $\lambda = 3{,}43$ m

45. $f = 3400$ Hz

47.
a. $v = 5{,}96 \cdot 10^3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$;
b. stal (wartość z Tabeli 17.1)

49. $v = 363\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

51. $\Delta x = 924$ m

53. $V = 0{,}05\ \text{m}^3$
$m = 392{,}5$ kg
$\rho = 7850\ \text{kg/m}^3$
$v = 5047{,}54$ m/s

55. $T_C = 35\,^\circ\text{C}$, $v = 351{,}58$ m/s
$\Delta x_1 = 35{,}16$ m, $\Delta x_2 = 52{,}74$ m
$\Delta x = 63{,}39$ m

57.
a. $t_{5{,}00°\text{C}} = 0{,}0180$ s, $t_{35{,}0°\text{C}} = 0{,}0171$ s ;
b. % niepewności = 5,00% ;
c. Ta niepewność mogłaby zdecydowanie stwarzać trudności nietoperzom, gdyby nie mogły wykorzystywać dźwięku do złapania zdobyczy. 5% niepewność może być różnicą pomiędzy schwytaniem zdobyczy za szyję lub klatkę piersiową, co oznacza, że może nie chwycić swojej zdobyczy.

59. $1{,}26 \cdot 10^{-3}\ \text{W/m}^2$

61. 85 dB

63. a. 93 dB; b. 83 dB

65. $1{,}58 \cdot 10^{-13}\ \text{W/m}^2$

67. Dziesięciokrotny spadek natężenia jest równy redukcji poziomu natężenia dźwięku o 10 dB: $120\,\text{dB} - 10\,\text{dB} = 110\,\text{dB}$.

69. Wiemy, że poziom 60 dB odpowiada współczynnikowi 10^6, o który wzrasta natężenie. Dlatego
$I \propto X^2 \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{X_2}{X_1}\right)^2$, czyli $X_2 = 10^{-6}$ atm.
120 dB odpowiada współczynnikowi 10^{12}, o który wzrasta $\Rightarrow 10^{-9}\ \text{atm} \cdot \left(10^{12}\right)^{1/2} = 10^{-3}$ atm.

71. 28,2 dB

73. $1 \cdot 10^6$ km

75. $73\,\text{dB} - 70\,\text{dB} = 3\,\text{dB}$; Taka zmiana poziomu hałasu jest łatwo zauważalna.

77. Natężenie tonu o częstotliwości 100 Hz musi być 2,5 raza większe od natężenia tonu o częstotliwości 4000 Hz, aby oba były słyszalne przez tą osobę.

79. 0,974 m

81. 11,0 kHz; Ucho nie jest szczególnie wrażliwe na tę częstotliwość, dlatego nie słyszymy alikwotów związanych z kanałem słuchowym.

83. a. $v = 344{,}08$ m/s, $\lambda_1 = 16{,}00$ m, $f_1 = 21{,}51$ Hz;
b. $\lambda_3 = 5{,}33$ m, $f_3 = 64{,}56$ Hz

85.
$v_{\text{struna}} = 149{,}07$ m/s, $\lambda_3 = 1{,}33$ m, $f_3 = 112{,}08$ Hz
$\lambda_1 = \frac{v}{f_3}$, $L = 1{,}53$ m

87. a. $22\,^\circ\text{C}$; b. 1,01 m

89. pierwszy alikwot $= 180\,\text{Hz}$;
drugi alikwot $= 270\,\text{Hz}$;
trzeci alikwot $= 360\,\text{Hz}$.

91. 1,56 m

93. Rura ma symetryczne warunki brzegowe;

$$\lambda_n = \frac{2}{n}L,\ \ f_n = \frac{nv}{2L},\ \ n = 1{,}2{,}3$$
$$\lambda_1 = 6{,}00\,\text{m},\ \ \lambda_2 = 3{,}00\,\text{m},\ \ \lambda_3 = 2{,}00\,\text{m}$$
$$f_1 = 57{,}17\,\text{Hz},\ \ f_2 = 114{,}33\,\text{Hz},\ \ f_3 = 171{,}50\,\text{Hz}$$

95. $\lambda_6 = 0{,}5\,\text{m}$
$v = 1000\,\text{m/s}$
$F_T = 6500\,\text{N}$

97. $f = 6{,}40\,\text{kHz}$

99. 1,03 lub 3%

101.
$$\begin{aligned} f_\text{B} &= |f_1 - f_2| \\ |128{,}3\,\text{Hz} - 128{,}1\,\text{Hz}| &= 0{,}2\,\text{Hz}; \\ |128{,}3\,\text{Hz} - 127{,}8\,\text{Hz}| &= 0{,}5\,\text{Hz}; \\ |128{,}1\,\text{Hz} - 127{,}8\,\text{Hz}| &= 0{,}3\,\text{Hz} \end{aligned}$$

103. $v_A = 135{,}87\,\text{m/s},\ \ v_B = 141{,}42\,\text{m/s},$
$\lambda_A = \lambda_B = 0{,}40\,\text{m}$
$\Delta f = 15{,}00\,\text{Hz}$

105. $v = 155{,}54\,\text{m/s},$
$f_\text{struny} = 971{,}17\,\text{Hz},\ \ n = 16{,}23$
$f_\text{struny} = 1076{,}83\,\text{Hz},\ \ n = 18{,}00$
Częstotliwość wynosi 1076,83 Hz, a długość fali 0,14 m.

107.
$f_2 = f_1 \pm f_\text{B} = 260{,}00\,\text{Hz} \pm 1{,}50\,\text{Hz},$
i stąd $f_2 = 261{,}50\,\text{Hz}$ or $f_2 = 258{,}50\,\text{Hz}$

109. $f_\text{średnia} = \frac{f_1+f_2}{2};\quad f_B = f_1 - f_2\quad$ (załóż, że $f_1 > f_2$)
$f_\text{średnia} = \frac{(f_B+f_2)+f_2}{2} \Rightarrow$
$f_2 = 4099{,}750\,\text{Hz}$
$f_2 = 4100{,}250\,\text{Hz}$

111.
a. 878 Hz;
b. 735 Hz

113. $3{,}79 \cdot 10^3\,\text{Hz}$

115.
a. 12,9 m/s;
b. 193 Hz

117. Pierwszy orzeł słyszy częstotliwość $4{,}23 \cdot 10^3\,\text{Hz}$. Drugi orzeł słyszy częstotliwość $3{,}56 \cdot 10^3\,\text{Hz}$.

119. $v_s = 19{,}44$ m/s
$f_o = 1{,}08$ kHz

121. Słyszalne przesunięcie częstotliwości pojawia się, gdy $f_{obs}/f_s \geq 1{,}003$; $f_{obs} = f_s \frac{v}{v - v_s} \Rightarrow \frac{f_{obs}}{f_s} = \frac{v}{v - v_s} \Rightarrow$
$v_s = 0{,}990$ m/s

123. $\theta = 30{,}02°$
$v_s = 680{,}0$ m/s
$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{v_s t}$, $t = 21{,}65$ s

125. $\sin\theta = \frac{1}{M}$, $\theta = 56{,}47°$
$y = 9{,}31$ km

127.
$s_1 = 6{,}34$ nm
$s_2 = 2{,}30$ nm
$kx_1 + \phi = 0$ rad
$kx_2 + \phi = 1{,}20$ rad
$k(x_2 - x_1) = 1{,}20$ rad
$k = 3{,}00\ \mathrm{m}^{-1}$
$\omega = 1019{,}62\ \mathrm{s}^{-1}$
$s_1 = s_{max}\cos(kx_1 - \phi)$
$\phi = 5{,}66$ rad
$s(x,t) = 6{,}30\ \mathrm{nm}\cos\left(3{,}00\ \mathrm{m}^{-1} x - 1019{,}62\ \mathrm{s}^{-1} t + 5{,}66\right)$

ZADANIA DODATKOWE

129. $v_s = 346{,}4$ m/s ;

131.
$\lambda_n = \frac{2}{n}L$ $f_n = \frac{v_s}{\lambda_n}$
$\lambda_1 = 1{,}6$ m $f_1 = 216{,}5$ Hz
$\lambda_2 = 0{,}8$ m $f_2 = 433{,}0$ Hz

a.
$\lambda_6 = 0{,}40$ m
$v = 57{,}15 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
$f_6 = 142{,}89$ Hz

b. $\lambda_s = 2{,}40$ m

133. $v = 344{,}08$ m/s
$v_A = 29{,}05$ m/s, $v_B = 33{,}52$ m/s,
$f_A = 961{,}18$ Hz, $f_B = 958{,}89$ Hz,
$f_{A_{dudnienia}} = 161{,}18$ Hz, $f_{B_{dudnienia}} = 158{,}89$ Hz

135. $v = 345{,}24 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; a. $I = 31{,}62 \frac{\mathrm{\mu W}}{\mathrm{m}^2}$; b. $I = 0{,}16 \frac{\mathrm{\mu W}}{\mathrm{m}^2}$; c. $s_{max} = 104{,}39$ µm ; d. $s_{max} = 7{,}43$ µm

137. $\frac{f_A}{f_D} = \frac{v + v_s}{v - v_s}$, $(v - v_s)\frac{f_A}{f_D} = v + v_s$, $v = 347{,}39$ m/s
$T_C = 27{,}70\ °\mathrm{C}$

ZADANIA TRUDNIEJSZE

$$\sqrt{x^2+d^2}-x=\lambda,\quad x^2+d^2=(\lambda+x)^2$$

$$x^2+d^2=\lambda^2+2x\lambda+x^2,\quad d^2=\lambda^2+2x\lambda$$

139.

$$x=\frac{d^2-\left(\frac{v}{f}\right)^2}{2\frac{v}{f}}$$

141. a. Dla maksimów $\Delta r=d\sin\theta$

$$d\sin\theta=n\lambda\quad n=0,\pm1,\pm2....,\quad \theta=\sin^{-1}\left(n\frac{\lambda}{d}\right)\quad n=0,\pm1,\pm2....$$

b. Dla minimów, $\Delta r=d\sin\theta$

$$d\sin\theta=\left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda\quad n=0,\pm1,\pm2....$$

$$\theta=\sin^{-1}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{d}\right)\quad n=0,\pm1,\pm2....$$

143.

a. $v_{\text{str}}=160{,}73\frac{\text{m}}{\text{s}},\ f_{\text{str}}=535{,}77\ \text{Hz}$;
b. $f_{\text{wid}}=512\ \text{Hz}$;
c. $f_{\text{wid}}=\frac{n\sqrt{\frac{F_T}{\mu}}}{2L},\quad F_T=141{,}56\ \text{N}$

145.

a. $f=268{,}62\ \text{Hz}$;
b. $\Delta f\approx\frac{1}{2}\frac{\Delta F_T}{F_T}f=1{,}34\ \text{Hz}$

147.

a. $v=466{,}07\ \text{m/s}$;
b. $\lambda_9=51{,}11\ \text{mm}$;
c. $f_9=9{,}12\ \text{kHz}$;
d. $f_{\text{dźwięku}}=9{,}12\ \text{kHz}$;
e. $\lambda_{\text{powietrza}}=37{,}86\ \text{mm}$

SKOROWIDZ NAZWISK

SKOROWIDZ RZECZOWY

SKOROWIDZ TERMINÓW OBCOJĘZYCZNYCH

H

I

J

K

L

M

N

O

P